

# Coloration à spectre borné

Marthe Bonamy, Ross Kang

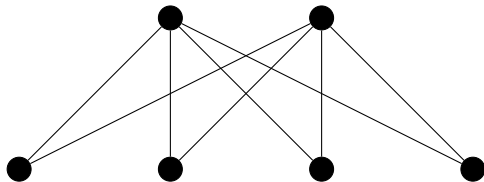
13/11/2013

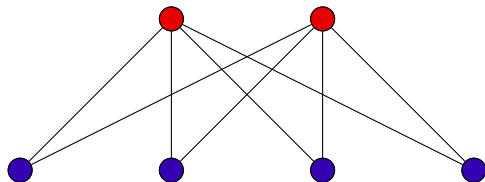


Laboratoire  
Informatique  
Robotique  
Microélectronique  
Montpellier



Universiteit Utrecht

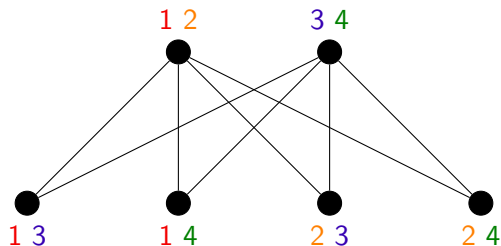




Le graphe est  $k$ -colorable si :

$$\textcircled{a} - \textcircled{b} \Rightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a, b \in [1, \dots, k] \end{cases}$$

# Coloration de sommets



Le graphe est **k-colorable** si :

$$\textcircled{a} - \textcircled{b} \Rightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a, b \in \{1, \dots, k\} \end{cases}$$

Le graphe est **k-choississable** si :

Pour tout  $L$  tel que  $|L(v)| \geq k$ ,

$$\textcircled{a}_x - \textcircled{b}_y \Rightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \in L(x) \\ b \in L(y) \end{cases}$$

Le graphe est  $(k, p)$ -choisissable si :

Pour tout  $L$  tel que  $|L(v)| \geq k$  et  $|\cup L(v)| \leq p$ ,

$$\begin{array}{c} \textcircled{a} \\ x \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \textcircled{b} \\ y \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \in L(x) \\ b \in L(y) \end{cases}$$

# Coloration par liste à spectre borné

Le graphe est  $(k, p)$ -choisissable si :

Pour tout  $L$  tel que  $|L(v)| \geq k$  et  $\overbrace{|\cup L(v)|}^{\text{Spectre}} \leq p$ ,

$$\begin{array}{c} \textcircled{a} \\ x \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \textcircled{b} \\ y \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \in L(x) \\ b \in L(y) \end{cases}$$

# Coloration par liste à spectre borné

Le graphe est  $(k, p)$ -choisissable si :

Pour tout  $L$  tel que  $|L(v)| \geq k$  et  $\overbrace{|\cup L(v)|}^{\text{Spectre}} \leq p$ ,

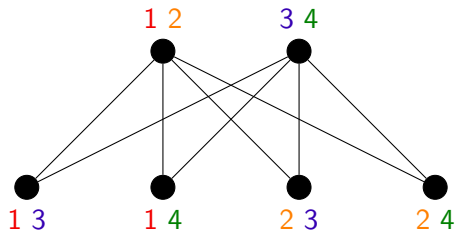
$$\begin{array}{c} \textcircled{a} \\ x \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \textcircled{b} \\ y \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \in L(x) \\ b \in L(y) \end{cases}$$

$(k, k)$ -choisissable  $\Leftrightarrow k$ -colorable.

$(k, p + 1)$ -choisissable  $\Rightarrow (k, p)$ -choisissable.

$(k, \infty)$ -choisissable  $\Leftrightarrow k$ -choisissable.

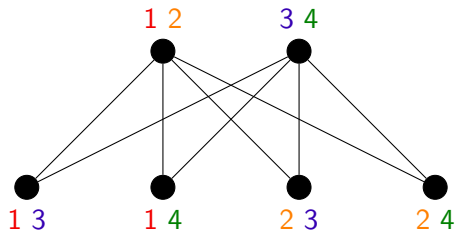
# Graphes bipartis



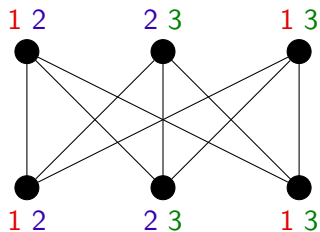
Pas  $(2, 4)$ -choisissable, mais  $(2, 3)$ -choisissable.



# Graphes bipartis



Pas (2, 4)-choissable, mais (2, 3)-choissable.



Pas (2, 3)-choissable.

## Lemme (Facile)

*Tout graphe biparti est  $(k + 1, 2k)$ -choisissable.*

Lemme (Facile)

*Tout graphe biparti est  $(k + 1, 2k)$ -choisissable.*

Lemme (Facile)

*Certains graphes bipartis ne sont pas  $(k + 1, 2k + 1)$ -choisissables.*

# Graphes bipartis (2)

Lemme (Facile)

Tout graphe *biparti* est  $(k + 1, 2k)$ -choisissable.

Lemme (Facile)

*Certains* graphes *bipartis* ne sont *pas*  $(k + 1, 2k + 1)$ -choisissables.

Lemme (Facile)

$(2, 3)$ -choisissable  $\not\Rightarrow$  2-choisissable.

$(2, 4)$ -choisissable  $\Rightarrow$  2-choisissable.

## Question

$\exists? C_k, (k, C_k)$ -choisissable  $\Rightarrow$   $k$ -choisissable.

## Question

$\exists? C_k, (k, C_k)$ -choisissable  $\Rightarrow$   $k$ -choisissable.

$k = 1$  ✓

$k = 2$  ✓

## Question

$\exists?$   $C_k, (k, C_k)$ -choisissable  $\Rightarrow$   $k$ -choisissable.

$k = 1$  ✓

$k = 2$  ✓

## Théorème (Kráľ', Sgall 2005)

Pour tous  $k \geq 3$  et  $p \geq k$ ,  
 $(k, p)$ -choisissable  $\not\Rightarrow$   $k$ -choisissable.

## Question

$\exists?$   $C_k$ ,  $(k, C_k)$ -choisissable  $\Rightarrow$   $k$ -choisissable.

$k = 1$  ✓

$k = 2$  ✓

## Théorème (Kráľ', Sgall 2005)

Pour tous  $k \geq 3$  et  $p \geq k$ ,

$\exists$  un graphe  $(k, p)$ -choisissable et **pas**  $(k, p + 1)$ -choisissable.



## Questions (2)

### Question

$\exists?$   $C_{k,p}$ ,  $(k, p)$ -choisissable  $\Rightarrow C_{k,p}$ -choisissable.

## Questions (2)

### Question

$\exists? C_{k,p}$ ,  $(k, p)$ -choisissable  $\Rightarrow C_{k,p}$ -choisissable.

$p \leq 2k - 2$  : **NON**

## Questions (2)

### Question

$\exists? C_{k,p}$ ,  $(k, p)$ -choisissable  $\Rightarrow C_{k,p}$ -choisissable.

$p \leq 2k - 2$  : **NON**

### Théorème (Kráľ', Sgall 2005)

$$C_{k,2k-1} = \mathcal{O}(k \cdot \ln k \cdot 2^{4k}).$$

## Questions (2)

### Question

$\exists? C_{k,p}$ ,  $(k, p)$ -choisissable  $\Rightarrow C_{k,p}$ -choisissable.

$p \leq 2k - 2$  : **NON**

### Théorème (Kráľ', Sgall 2005)

$$C_{k,2k-1} = \mathcal{O}(k \cdot \ln k \cdot 2^{4k}).$$

### Question (Kráľ', Sgall 2005)

$C_{k,2k-1}$  doit-il croître *exponentiellement* en  $k$ ?

## Questions (2)

### Question

$\exists? C_{k,p}$ ,  $(k, p)$ -choisissable  $\Rightarrow C_{k,p}$ -choisissable.

$p \leq 2k - 2$  : **NON**

### Théorème (Kráľ, Sgall 2005)

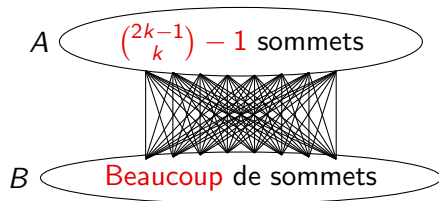
$$C_{k,2k-1} = \mathcal{O}(k \cdot \ln k \cdot 2^{4k}).$$

### Question (Kráľ, Sgall 2005)

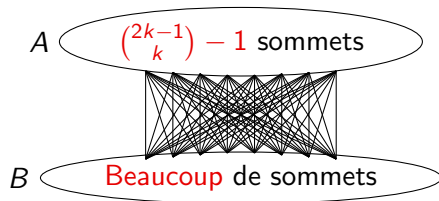
$C_{k,2k-1}$  doit-il croître *exponentiellement* en  $k$ ?

### Théorème (B., Kang 2013)

*Oui.*



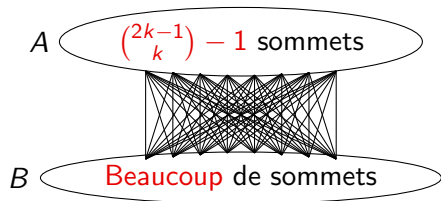
$\forall (k, 2k - 1)$ -attribution de listes  $L$ ,



$\exists S \in \binom{[2k-1]}{k}$ ,  
 $\forall v \in A, L(v) \neq S$

# Idée de la preuve

$\forall (k, 2k - 1)$ -attribution de listes  $L$ ,



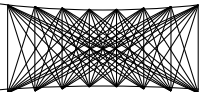
$$\exists S \in \binom{[2k-1]}{k}, \\ \forall v \in A, L(v) \neq S$$

$$\forall v \in B, L(v) \cap S \neq \emptyset$$



$\forall (k, 2k - 1)$ -attribution de listes  $L$ ,

$A$   $\binom{2k-1}{k} - 1$  sommets



$B$  **Beaucoup** de sommets

$\exists S \in \binom{[2k-1]}{k}$ ,  
 $\forall v \in A, L(v) \neq S$

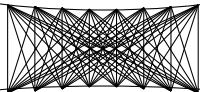
$\forall v \in B, L(v) \cap S \neq \emptyset$

Graphe  $(k, 2k - 1)$ -choisissable mais **pas**  $(\binom{2k-1}{k} - 1)$ -choisissable.

$\forall (k, 2k - 1)$ -attribution de listes  $L$ ,

A  $\binom{2k-1}{k} - 1$  sommets

B Beaucoup de sommets



$\exists S \in \binom{[2k-1]}{k}$ ,  
 $\forall v \in A, L(v) \neq S$

$\forall v \in B, L(v) \cap S \neq \emptyset$

Graphe  $(k, 2k - 1)$ -choisissable mais pas  $(\binom{2k-1}{k} - 1)$ -choisissable.

**Théorème (B., Kang 2013)**

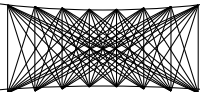
Pour tout  $p \geq 2k - 1$ ,  $C_{k,p} > \exp\left(\frac{(k-1)^2}{p}\right)$ .

(Intéressant seulement dans le cas  $p = o(k^2)$ ).

$\forall (k, 2k - 1)$ -attribution de listes  $L$ ,

A  $\binom{2k-1}{k} - 1$  sommets

B Beaucoup de sommets



$\exists S \in \binom{[2k-1]}{k}$ ,  
 $\forall v \in A, L(v) \neq S$

$\forall v \in B, L(v) \cap S \neq \emptyset$

Graphe  $(k, 2k - 1)$ -choisissable mais pas  $\left(\binom{2k-1}{k} - 1\right)$ -choisissable.

**Théorème (B., Kang 2013)**

Pour tout  $p \geq 2k - 1$ ,  $C_{k,p} > \exp\left(\frac{(k-1)^2}{p}\right)$ .

(Intéressant seulement dans le cas  $p = o(k^2)$ ).

Généraliser la Propriété B.

Question (Kráľ, Sgall 2005)

$\exists? D_k, (k, D_k)$ -choisissable  $\Rightarrow (k + 1)$ -choisissable.

Question (Kráľ, Sgall 2005)

$\exists? D_k, (k, D_k)$ -choisissable  $\Rightarrow (k + 1)$ -choisissable.

Vrai pour  $k = 2$  (et alors  $D_2 = 3$ ).

- $D_k \stackrel{?}{=} k^2$ .

Question (Kráľ, Sgall 2005)

$\exists? D_k, (k, D_k)$ -choisissable  $\Rightarrow (k + 1)$ -choisissable.

Vrai pour  $k = 2$  (et alors  $D_2 = 3$ ).

- $D_k \stackrel{?}{=} k^2$ .
- $(k, p)$ -choisissabilité des graphes bipartis complets ?

Question (Kráľ, Sgall 2005)

$\exists? D_k, (k, D_k)$ -choisissable  $\Rightarrow (k + 1)$ -choisissable.

Vrai pour  $k = 2$  (et alors  $D_2 = 3$ ).

- $D_k \stackrel{?}{=} k^2$ .
- $(k, p)$ -choisissabilité des graphes bipartis complets ?

# Merci pour votre attention !