

TD 2 : Rappels mathématiques

Master 1 Informatique

Exercice 1

1. Une banque vous facture les « frais de gestion » de votre compte 9 € par mois. Vous aviez 1000 € au début de l'année. Combien vous reste-t-il à la fin de l'année ?
2. Sachant que la banque, grâce à votre capital, gagne 0,25 % par mois. Combien la banque gagne en tout (par an) ?
3. Le taux de livret A vient de passer de 0,75 % à 0,5 %. Si vous aviez 1000 €. Combien auriez vous avec l'ancien taux au bout de 10 ans ? Combien perdez-vous avec le nouveau taux ?
4. On appelle une suite arithmético-géométrique une suite de la forme :

$$U_{n+1} = aU_n + b \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique classique. Montrer que si $a \neq 1$,

$$U_n = a^n \left(U_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

Exercice 2

On tire 5 cartes au hasard d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir :

- 1 Couleur
- 2 Paires
- 1 Breton

Exercice 3

On lance 2 fois un dé à k faces. Le premier résultat est noté i , le second est noté j . Soit la variable aléatoire X qui prend comme valeur $i + j$.

1. Quel est le domaine de X ?
2. Soit x un nombre entier tel que : $2 \leq x \leq 2k$. Donner la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 4

Soit une planète où l'année fait k jours. On suppose que sur cette planète les naissances d'extraterrestres ont lieu uniformément le long de l'année.

1. S'il y a n extraterrestres dans un vaisseau, quelle est la probabilité pour qu'au moins deux d'entre-eux aient la même date d'anniversaire ?
Application numérique :

- Planète : terre
- Espèce : humains
- Nombre : 23

Exercice 5

Soit une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Donner son espérance et sa variance.
2. Soit la variable aléatoire $Y = X + X'$ où X et X' sont des variables aléatoires uniformes indépendantes. Donner $\mathbb{P}(Y = y)$ pour y donné.

Exercice 6

Soit un dé à k faces. Quelle est la probabilité que la face x (fixée) apparaisse ℓ fois si on fait n lancers ?

Exercice 7

Soit X une loi géométrique de paramètre p . On sait que $\mathbb{P}(X = x) = q^{x-1}p$ pour $x \in \mathbb{N}$ et $q = 1 - p$. Montrer que l'espérance de la loi géométrique est $\frac{1}{p}$.