

Systemes Experts 5

Calcul de Séquents - suite

Richard.Moot@labri.fr

<http://www.labri.fr/perso/moot/SE>

Exercices du mercredi 21 octobre

- 1/6 du note finale
- vous avez le droit d'avoir vos notes, livres etc.
- mais pas d'ordinateur ni de téléphone portable
- les exercices ne seront pas plus difficiles que ceux du TD

Calcul des Séquents

- Le calcul des séquents est (encore!) un calcul différent pour trouver des preuves
- Le calcul des séquents est relativement bureaucratique, mais permet d'exploiter les symétries de la logique (eg. entre \wedge et \vee)
- Grâce au calcul des séquents, Gentzen a pu démontrer la cohérence de la logique des prédicats.

Calcul des Séquents

- Le calcul des séquents permet beaucoup de variants qui sont équivalents, le variant qu'on utilise a l'avantage que les règles s'appliquent de façon déterministe.
- Le calcul des séquents s'adapte facilement à la logique des prédicats.
- Mais on verra aussi, comment on peut utiliser la résolution pour la logique de prédicats – grâce au forme normale prénex et au Skolemisation

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

Son interprétation est:
si toutes les formules A sont
vraies, au moins une des
formules B est vraie aussi.

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

Son interprétation est:
si toutes les formules A sont
vraies, au moins une des
formules B est vraie aussi.

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Calcul des Séquents

Un règle en calcul des séquent s'écrit comme

$$\frac{}{S}[\text{Nom}] \quad \frac{S_1}{S}[\text{Nom}] \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S}[\text{Nom}]$$

Avec S , S_1 et S_2 des séquents:

S la conclusion du règle

S_1 et S_2 ses prémisses: l'interprétation est:

si S_1 et S_2 sont vrai, alors S est vrai aussi

un règle sans prémisses est simplement vrai

"Nom" indique le nom du règle

Calcul des Séquents

Un preuve en calcul des séquents est un arbre

$$\frac{}{S}[\text{Nom}] \quad \frac{S_1}{S}[\text{Nom}] \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S}[\text{Nom}]$$

Feuille

Branche
simple

Branche
binaire

Les feuilles sont des règles sans prémisses et la racine est la conclusion du preuve

Calcul des Séquents

Un preuve en calcul des séquents est un arbre

$$\frac{\frac{}{A, B \Rightarrow B}[\text{Ax}] \quad \frac{}{A, B \Rightarrow A}[\text{Ax}]}{A, B \Rightarrow B \wedge A}[\text{D}\wedge] \quad \frac{A, B \Rightarrow B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}[\text{G}\wedge]$$

Les feuilles sont des règles sans prémisses (des axiomes) et la racine est la conclusion du preuve

Calcul des Séquents

Un preuve en calcul des séquents est un arbre

$$A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$$

Pour la recherche des preuves on commence avec la conclusion et applique des règles du bas vers le haut jusqu'au moment que tous les feuilles sont des axiomes.

Calcul des Séquents

Un preuve en calcul des séquents est un arbre

$$\frac{A, B \Rightarrow B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} [G \wedge]$$

Pour la recherche des preuves on commence avec la conclusion et applique des règles du bas vers le haut jusqu'au moment que tous les feuilles sont des axiomes.

Calcul des Séquents

Un preuve en calcul des séquents est un arbre

$$\frac{\frac{A, B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B \wedge A} [G \wedge] \quad \frac{A, B \Rightarrow A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} [D \wedge]}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}$$

Pour la recherche des preuves on commence avec la conclusion et applique des règles du bas vers le haut jusqu'au moment que tous les feuilles sont des axiomes.

Calcul des Séquents

Un preuve en calcul des séquents est un arbre

$$\frac{\frac{\frac{}{A, B \Rightarrow B} [Ax] \quad \frac{A, B \Rightarrow A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} [D \wedge]}{A, B \Rightarrow B \wedge A} [G \wedge]}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}$$

Pour la recherche des preuves on commence avec la conclusion et applique des règles du bas vers le haut jusqu'au moment que tous les feuilles sont des axiomes.

Calcul des Séquents

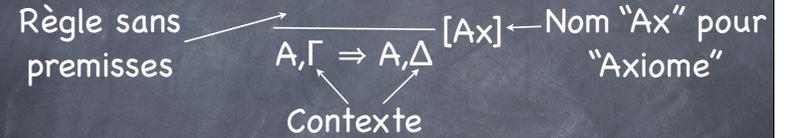
Un preuve en calcul des séquents est un arbre

$$\frac{\frac{\frac{}{A, B \Rightarrow B} [Ax]}{A, B \Rightarrow B \wedge A} [G\wedge]}{\frac{}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} [D\wedge]} [G\wedge]$$

Pour la recherche des preuves on commence avec la conclusion et applique des règles du bas vers le haut jusqu'au moment que tous les feuilles sont des axiomes.

Calcul des Séquents

On a un seul axiome et deux règles pour chaque connecteur



Le règle d'axiome dit que si on a la même formule quelque part à gauche et quelque part à droite alors, on a fini notre démonstration

Calcul des Séquents

$$\frac{\frac{}{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\wedge]}{\frac{}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [D\wedge]} [G\wedge]$$

"et" à gauche "et" à droite

Calcul des Séquents

$$\frac{\frac{}{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\wedge]}{\frac{}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [D\wedge]} [G\wedge]$$

$$\frac{\frac{}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta} [G\vee]}{\frac{}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D\vee]} [G\vee]$$

$$\frac{\frac{}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\vee]}{\frac{}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [D\vee]} [G\vee]$$

$$\frac{\frac{}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta} [G\rightarrow]}{\frac{}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [D\rightarrow]} [G\rightarrow]$$

$$\frac{\frac{}{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta} [D\rightarrow]}{\frac{}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D\rightarrow]} [D\rightarrow]$$

$$\frac{\frac{}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta} [G\neg]}{\frac{}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [D\neg]} [G\neg]$$

$$\frac{\frac{}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [D\neg]}{\frac{}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D\neg]} [D\neg]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\wedge] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [D\wedge]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\vee] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D\vee]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D\rightarrow]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\neg] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D\neg]$$

Observation: les règles réduisent le nombre de connecteurs

Calcul des Séquents

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\neg]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D\neg]$$

Calcul des Séquents

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\neg] \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \neg \Gamma \vee A \vee \Delta \\ \longleftarrow \neg \neg A \vee \neg \Gamma \vee \Delta \end{array}$$

Calcul des Séquents

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\begin{array}{l} \neg A \vee \neg \Gamma \vee \Delta \longrightarrow \\ \neg \Gamma \vee \neg A \vee \Delta \longrightarrow \end{array} \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D\neg]$$

Calcul des Séquents

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\neg]$$

Δ vide

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D\neg]$$

Calcul des Séquents

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow} [G\neg]$$

Δ vide

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A} [D\neg]$$

Calcul des Séquents

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \perp} [G\neg]$$

Δ vide

Avoir rien à droite
du \Rightarrow correspond à \perp

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow \neg A} [D\neg]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D\rightarrow]$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B$$

$$\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} [D \vee]$$

$$\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{A, A \rightarrow B \Rightarrow B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B} [D \neg]$$

$$\frac{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} [D \vee]$$

$$\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{A \Rightarrow A, B \quad A, B \Rightarrow B}{A \Rightarrow A, B \quad A, B \Rightarrow B} [G \rightarrow]$$

$$\frac{A, A \rightarrow B \Rightarrow B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B} [D \neg]$$

$$\frac{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} [D \vee]$$

$$\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{A \Rightarrow A, B \quad A, B \Rightarrow B}{A \Rightarrow A, B \quad A, B \Rightarrow B} [G \rightarrow]$$

$$\frac{A, A \rightarrow B \Rightarrow B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B} [D \neg]$$

$$\frac{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} [D \vee]$$

$$\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A \Rightarrow A, B} [Ax] \quad \frac{}{A, B \Rightarrow B} [Ax]}{A \Rightarrow A, B \Rightarrow B} [G \rightarrow] \quad \frac{A, A \rightarrow B \Rightarrow B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B} [D \neg]}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} [D \vee] \quad \neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A \Rightarrow A, B} [Ax] \quad \frac{}{A, B \Rightarrow B} [Ax]}{A \Rightarrow A, B \Rightarrow B} [G \rightarrow] \quad \frac{A, A \rightarrow B \Rightarrow B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B} [D \neg]}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} [D \vee] \quad \frac{A, \neg A \vee B \Rightarrow B}{\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B} [D \rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A \Rightarrow A, B} [Ax] \quad \frac{}{A, B \Rightarrow B} [Ax]}{A \Rightarrow A, B \Rightarrow B} [G \rightarrow] \quad \frac{A, A \rightarrow B \Rightarrow B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B} [D \neg]}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} [D \vee] \quad \frac{A, \neg A \Rightarrow B \quad A, B \Rightarrow B}{A, \neg A \vee B \Rightarrow B} [G \vee] \quad \frac{A, \neg A \vee B \Rightarrow B}{\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B} [D \rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A \Rightarrow A, B} [Ax] \quad \frac{}{A, B \Rightarrow B} [Ax]}{A \Rightarrow A, B \Rightarrow B} [G \rightarrow] \quad \frac{A, A \rightarrow B \Rightarrow B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B} [D \neg]}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} [D \vee] \quad \frac{A, \neg A \Rightarrow B \quad A, B \Rightarrow B}{A, \neg A \vee B \Rightarrow B} [G \vee] \quad \frac{A, \neg A \vee B \Rightarrow B}{\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B} [D \rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A \Rightarrow A, B} [Ax] \quad \frac{}{A, B \Rightarrow B} [Ax]}{A, A \rightarrow B \Rightarrow B} [G \rightarrow] \quad \frac{A \Rightarrow A, B}{A, \neg A \Rightarrow B} [G \neg] \quad \frac{}{A, B \Rightarrow B} [Ax]}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B} [D \neg] \quad \frac{A, \neg A \vee B \Rightarrow B}{\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B} [D \vee]}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} [D \vee]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A \Rightarrow A, B} [Ax] \quad \frac{}{A, B \Rightarrow B} [Ax]}{A, A \rightarrow B \Rightarrow B} [G \rightarrow] \quad \frac{A \Rightarrow A, B}{A, \neg A \Rightarrow B} [G \neg] \quad \frac{}{A, B \Rightarrow B} [Ax]}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A, B} [D \neg] \quad \frac{A, \neg A \vee B \Rightarrow B}{\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B} [D \vee]}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} [D \vee]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

Plus abstrait: mais on peut voir qu'une formule $\neg A \vee B$ se comporte pareil qu'une formule $A \rightarrow B$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

Plus abstrait: mais on peut voir qu'une formule $\neg A \vee B$ se comporte pareil qu'une formule $A \rightarrow B$

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \neg] \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \vee] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, B, \Delta} [D \neg] \quad \frac{}{\Gamma \Rightarrow \neg A \vee B, \Delta} [D \vee]}$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Remarque 1: pour les règles [G∀] et [D∃] on garde la formule complexe et on peut la réutiliser plus tard

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Remarque 2: A[x:=t] veut dire la formule A avec toutes les occurrences de la variable x remplacé par un terme t de notre choix

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Remarque 3: A[x:=y] veut dire la formule A avec toutes les occurrences de la variable x remplacé par une variable y (qui n'est pas libre)

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

$$\frac{f(x,y), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

Correct !
$$\frac{f(x,y), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

x remplacé par x même
 x n'apparaît pas ailleurs

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

$$\frac{f(x,w), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

Erreur !
$$\frac{f(x,w), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

On n'a pas le droit de
remplacer y

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

$$\frac{f(v,y), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

Erreur !
$$\frac{f(y,y), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

La variable v est libre dans $\Gamma = g(v)$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

$$\frac{f(y,y), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

Erreur !
$$\frac{f(y,y), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

La variable y est libre dans $A = f(x,y)$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

$$\frac{f(w,y), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

Correct !
$$\frac{f(w,y), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

x remplacé par w qui n'apparaît pas ailleurs

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

$$\frac{f(z,y), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

Correct !
$$\frac{f(z,y), g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [G\exists]$$

Mais à éviter: il y a aussi une occurrence lié de z

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

$$\frac{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow h(a), \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [D\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

Correct !
$$\frac{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow h(a), \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [D\exists]$$

a est un terme alors, alors
ceci est valide

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

$$\frac{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow h(v), \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [D\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

Correct !
$$\frac{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow h(v), \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [D\exists]$$

v a un occurrence libre, mais
le règle n'a pas de condition

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

$$\frac{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow h(\text{fun}(v)), \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [D\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Exemple:

Correct ! $\frac{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow h(\text{fun}(v)), \exists z.[h(z)]}{\exists x.[f(x,y)], g(v) \Rightarrow \exists z.[h(z)]} [D\exists]$

on a le droit d'utiliser une fonction aussi

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\forall x.[h(x) \rightarrow m(x)], h(s) \Rightarrow m(s)$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\frac{h(s) \rightarrow m(s), \forall x.[h(x) \rightarrow m(x)], h(s) \Rightarrow m(s)}{\forall x.[h(x) \rightarrow m(x)], h(s) \Rightarrow m(s)} [L\forall]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

Pour nous simplifier la preuve on oubliera la formule $\forall x.[h(x) \rightarrow m(x)]$

$$\frac{h(s) \rightarrow m(s), \forall x.[h(x) \rightarrow m(x)], h(s) \Rightarrow m(s)}{\forall x.[h(x) \rightarrow m(x)], h(s) \Rightarrow m(s)} [L\forall]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\frac{h(s) \rightarrow m(s), h(s) \Rightarrow m(s)}{\forall x.[h(x) \rightarrow m(x)], h(s) \Rightarrow m(s)} [L\forall]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\frac{h(s) \Rightarrow h(s), m(s) \quad m(s) \Rightarrow h(s), m(s)}{h(s) \rightarrow m(s), h(s) \Rightarrow m(s)} [L\rightarrow] \quad \frac{h(s) \rightarrow m(s), h(s) \Rightarrow m(s)}{\forall x.[h(x) \rightarrow m(x)], h(s) \Rightarrow m(s)} [L\forall]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\frac{h(s) \Rightarrow h(s), m(s) \quad m(s) \Rightarrow h(s), m(s)}{h(s) \rightarrow m(s), h(s) \Rightarrow m(s)} [L\rightarrow] \quad \frac{h(s) \rightarrow m(s), h(s) \Rightarrow m(s)}{\forall x.[h(x) \rightarrow m(x)], h(s) \Rightarrow m(s)} [L\forall]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\frac{h(s) \Rightarrow h(s), m(s) \quad m(s) \Rightarrow h(s), m(s)}{h(s) \rightarrow m(s), h(s) \Rightarrow m(s)} [L\rightarrow] \quad \frac{h(s) \rightarrow m(s), h(s) \Rightarrow m(s)}{\forall x.[h(x) \rightarrow m(x)], h(s) \Rightarrow m(s)} [L\forall]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\forall x.[p(x)] \rightarrow q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\frac{\Rightarrow \forall x.[p(x)], \exists x.[p(x) \rightarrow q] \quad q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)] \rightarrow q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L\rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\frac{\Rightarrow p(y), \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)], \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [D\forall] \quad q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)] \rightarrow q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L\rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\frac{\Rightarrow p(y), p(y) \rightarrow q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow p(y), \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [D\exists] \quad q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)], \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [D\forall] \quad q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)] \rightarrow q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L\rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans A, Γ ou Δ

$$\frac{\frac{\frac{p(y) \Rightarrow p(y), q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow p(y), p(y) \rightarrow q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [R\rightarrow] \quad \frac{p(a), q \Rightarrow q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{q \Rightarrow p(a) \rightarrow q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [D\exists]}{\Rightarrow p(y), \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [D\forall] \quad \frac{q \Rightarrow p(a) \rightarrow q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L\rightarrow]}{\forall x.[p(x)] \rightarrow q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L\rightarrow]$$

Résolution

- La résolution pour le calcul propositionnel s'applique aux clauses du forme $q_1 \wedge \dots \wedge q_n \rightarrow p$
- La résolution pour le calcul des prédicats s'applique aux clauses du forme $\forall x_1, \dots, x_n. [q_1 \wedge \dots \wedge q_n \rightarrow p]$
- On va travailler en deux étapes: d'abord on bouge les quantificateurs (\forall et \exists) vers l'extérieur, après on élimine les quantificateurs existentiels (\exists).

Calcul des Séquents Forme Normale Prénexe

- Une formule est en forme normale prénexe si et seulement si les quantificateurs sont tous à l'extérieur des autres connecteurs.
- On peut transformer chaque formule en forme normale prénexe.

Calcul des Séquents Forme Normale Prénexe

- On peut transformer chaque formule en forme normale prénexe.
- Étape 1: on renomme chaque variable qui a des occurrences libres et des occurrences liés, on renomme aussi chaque variable qui a plusieurs occurrences du forme $\forall x$ ou $\exists x$

$$(\forall x.[p(x)] \rightarrow \exists x.[q(x)]) \wedge r(x)$$

Calcul des Séquents Forme Normale Prénex

- On peut transformer chaque formule en forme normale prénexe.
- Etape 1: on renomme chaque variable qui a des occurrences libres et des occurrences liés, on renomme aussi chaque variable qui a plusieurs occurrences du forme $\forall x$ ou $\exists x$

$$(\forall x.[p(x)] \rightarrow \exists x.[q(x)]) \wedge r(z)$$

Calcul des Séquents Forme Normale Prénex

- On peut transformer chaque formule en forme normale prénexe.
- Etape 1: on renomme chaque variable qui a des occurrences libres et des occurrences liés, on renomme aussi chaque variable qui a plusieurs occurrences du forme $\forall x$ ou $\exists x$

$$(\forall x.[p(x)] \rightarrow \exists y.[q(y)]) \wedge r(z)$$

Calcul des Séquents Forme Normale Prénex

- Etape 1: on renomme chaque variable qui a des occurrences libres et des occurrences liés, on renomme aussi chaque variable qui a plusieurs occurrences du forme $\forall x$ ou $\exists x$
- Etape 2: on utilise les équivalences suivants pour bouger les quantificateurs vers l'extérieur de la formule.

$$(\forall x.[p(x)] \rightarrow \exists y.[q(y)]) \wedge r(z)$$

Lois De Morgan

$$\neg \forall x.F \equiv \exists x.\neg F$$

$$\neg \exists x.F \equiv \forall x.\neg F$$

Forme Prénex

$$\textcircled{1} \forall x.[F] \wedge G \equiv \forall x.[F \wedge G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{2} \forall x.[F] \vee G \equiv \forall x.[F \vee G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{3} \forall x.[F] \rightarrow G \equiv \exists x.[F \rightarrow G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{4} G \rightarrow \forall x.[F] \equiv \forall x.[G \rightarrow F] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

Forme Prénex

$$\textcircled{1} \exists x.[F] \wedge G \equiv \exists x.[F \wedge G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{2} \exists x.[F] \vee G \equiv \exists x.[F \vee G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{3} \exists x.[F] \rightarrow G \equiv \forall x.[F \rightarrow G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{4} G \rightarrow \exists x.[F] \equiv \exists x.[G \rightarrow F] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

Forme Prénex

$$\textcircled{1} \exists x.[F] \wedge G \equiv \exists x.[F \wedge G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{2} \exists x.[F] \vee G \equiv \exists x.[F \vee G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{3} \exists x.[F] \rightarrow G \equiv \forall x.[F \rightarrow G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{4} G \rightarrow \exists x.[F] \equiv \exists x.[G \rightarrow F] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$(\forall x.[p(x)] \rightarrow \exists y.[q(y)]) \wedge r(z)$$

Forme Prénex

$$\textcircled{1} \exists x.[F] \wedge G \equiv \exists x.[F \wedge G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{2} \exists x.[F] \vee G \equiv \exists x.[F \vee G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{3} \exists x.[F] \rightarrow G \equiv \forall x.[F \rightarrow G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{4} G \rightarrow \exists x.[F] \equiv \exists x.[G \rightarrow F] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\exists y.[(\forall x.[p(x)] \rightarrow q(y))] \wedge r(z)$$

Forme Prénex

④ $\exists x.[F] \wedge G \equiv \exists x.[F \wedge G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\exists x.[F] \vee G \equiv \exists x.[F \vee G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\exists x.[F] \rightarrow G \equiv \forall x.[F \rightarrow G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $G \rightarrow \exists x.[F] \equiv \exists x.[G \rightarrow F]$ Pas d'occurrences de x en G

$$\exists y.[(\forall x.[p(x) \rightarrow q(y)] \wedge r(z))]$$

Forme Prénex

④ $\forall x.[F] \wedge G \equiv \forall x.[F \wedge G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\forall x.[F] \vee G \equiv \forall x.[F \vee G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\forall x.[F] \rightarrow G \equiv \exists x.[F \rightarrow G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $G \rightarrow \forall x.[F] \equiv \forall x.[G \rightarrow F]$ Pas d'occurrences de x en G

$$\exists y.[\exists x.[(p(x) \rightarrow q(y))] \wedge r(z)]$$

Forme Prénex

④ $\forall x.[F] \wedge G \equiv \forall x.[F \wedge G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\forall x.[F] \vee G \equiv \forall x.[F \vee G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\forall x.[F] \rightarrow G \equiv \exists x.[F \rightarrow G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $G \rightarrow \forall x.[F] \equiv \forall x.[G \rightarrow F]$ Pas d'occurrences de x en G

$$\exists y.[\exists x.[(p(x) \rightarrow q(y)) \wedge r(z)]]$$

Skolemisation

④ On a vu qu'on peut transformer chaque formule en une formule équivalente qui a les quantificateurs à l'extérieur

④ Maintenant on veut démontrer qu'on peut éliminer les quantificateurs existentiels \exists en gardant que les quantificateurs universels \forall .

④ Ce procédure, s'appelle Skolemisation, d'après son inventeur Thoralf Skolem.

Skolemisation

- L'idée est très simple. On peut remplacer un quantificateur existentiel par un nouveau constante.
- Alors on remplace x par a et y par b

$$\exists y. [\exists x. [(p(x) \rightarrow q(y)) \wedge r(z)]]$$

Skolemisation

- L'idée est très simple. On peut remplacer un quantificateur existentiel par un nouveau constante.
- Alors on remplace x par a et y par b
- En effet, on donne un nouveau nom à l'entité dont on sait qu'il doit exister. Ceci n'est pas trop différent des pratiques journalistiques: "Deep Throat" et "Zodiac Killer"

$$(p(a) \rightarrow q(b)) \wedge r(z)$$

Skolemisation

- Mais qu'est-ce qu'on fait dans le cas où l'existentiel est dans le portée d'un universel?
- Regardons l'exemple en bas.
- Si on remplace la formule par $\forall x. [p(x,a)]$ on change le sens de la formule (pourquoi?)

$$\forall x. [\exists y. [p(x,y)]]$$

Skolemisation

- Si on remplace la formule par $\forall x. [p(x,a)]$ on change le sens de la formule (pourquoi?)
- Si on interprète p comme "père de" la formule en bas signifie que chacun a un père.
- Le formule $\forall x. [p(x,a)]$ signifie que le constante "a" est le père de tout le monde.

$$\forall x. [\exists y. [p(x,y)]]$$

Skolemisation

- La formule $\forall x.[p(x,a)]$ signifie que la constante "a" est le père de tout le monde.
- L'idée de Skolem est de remplacer l'existentiel par une nouvelle fonction avec tout les universels avant l'existentiel comme arguments.
- Alors on finit avec les résultat en bas à droite. Un peut voir la fonction f dans ce cas comme la fonction "pere_de(x)"

$$\forall x.[\exists y.[p(x,y)]]$$

$$\forall x.[p(x,f(x))]$$

Horn Clause: Exemple

- Pour chaque deux gares il y a un voyage qui passe par les deux gares

Prenex

$$\forall x.\forall y.[(gare(x) \wedge gare(y)) \rightarrow \exists z. [(voyage(z) \wedge (passe(x,z) \wedge passe(y,z)))]]$$

Horn Clause: Exemple

- Pour chaque deux gares il y a un voyage qui passe par les deux gares

$$\forall x.\forall y.\exists z.[(gare(x) \wedge gare(y)) \rightarrow (voyage(z) \wedge (passe(x,z) \wedge passe(y,z)))]$$

Skolemisation: on remplace z par un fonction $v(x,y)$ "le voyage passant par x et y"

Horn Clause: Exemple

- Pour chaque deux gares il y a un voyage qui passe par les deux gares

$$\forall x.\forall y.[(gare(x) \wedge gare(y)) \rightarrow (voyage(v(x,y)) \wedge (passe(x,v(x,y)) \wedge passe(y,v(x,y))))]$$

Skolemisation: on remplace z par un fonction $v(x,y)$ "le voyage passant par x et y"

Horn Clause: Exemple

- Pour chaque deux gares il y a un voyage qui passe par les deux gares

$$\forall x. \forall y. [(gare(x) \wedge gare(y)) \rightarrow (voyage(v(x,y)) \wedge (passe(x,v(x,y)) \wedge passe(y,v(x,y))))]$$

On n'a pas encore de clause Horn, main on peut utiliser une simplification

$$A \rightarrow (B \wedge C) \Rightarrow (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$$

$$\neg A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$$

Horn Clause: Exemple

- Pour chaque deux gares il y a un voyage qui passe par les deux gares

$$\forall x. \forall y. [(gare(x) \wedge gare(y)) \rightarrow (voyage(v(x,y)) \wedge (passe(x,v(x,y)) \wedge passe(y,v(x,y))))]$$

On n'a pas encore de clause Horn, main on peut utiliser une simplification

$$A \rightarrow (B \wedge C) \Rightarrow (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$$

$$\forall x. [a(x) \rightarrow (b(x) \wedge c(x))] \Rightarrow \forall x. [a(x) \rightarrow b(x)] \wedge \forall x. [a(x) \rightarrow c(x)]$$

Horn Clause: Exemple

- Pour chaque deux gares il y a un voyage qui passe par les deux gares

$$\forall x. \forall y. [(gare(x) \wedge gare(y)) \rightarrow voyage(v(x,y))] \wedge \forall x. \forall y. [((gare(x) \wedge gare(y)) \rightarrow (passe(x,v(x,y)) \wedge passe(y,v(x,y))))]$$

Horn Clause: Exemple

- Pour chaque deux gares il y a un voyage qui passe par les deux gares

$$\forall x. \forall y. [(gare(x) \wedge gare(y)) \rightarrow voyage(v(x,y))] \wedge \forall x. \forall y. [(gare(x) \wedge gare(y)) \rightarrow passe(x,v(x,y))] \wedge \forall x. \forall y. [(gare(x) \wedge gare(y)) \rightarrow passe(y,v(x,y))]$$

Clauses de Horn

- Comme dans le cas propositionnel, ce n'est pas toujours possible de transformer une formule en clause de Horn
- Les clauses de Horn pour la logique du prédicats sont à la base de Prolog.

Horn Clause: Exemple

$$\begin{aligned} & \forall x. \forall y. [\text{gare}(x) \wedge \text{gare}(y) \rightarrow \text{voyage}(v(x,y))] \\ & \wedge \forall x. \forall y. [\text{gare}(x) \wedge \text{gare}(y) \rightarrow \text{passe}(x,v(x,y))] \\ & \wedge \forall x. \forall y. [\text{gare}(x) \wedge \text{gare}(y) \rightarrow \text{passe}(y,v(x,y))] \end{aligned}$$

$\text{voyage}(v(X,Y)) :-$
 $\text{gare}(X),$
 $\text{gare}(Y).$

$\text{passe}(X,v(X,Y)) :-$
 $\text{gare}(X),$
 $\text{gare}(Y).$

$\text{passe}(Y,v(X,Y)) :-$
 $\text{gare}(X),$
 $\text{gare}(Y).$