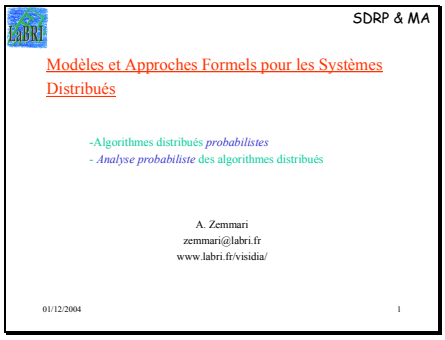
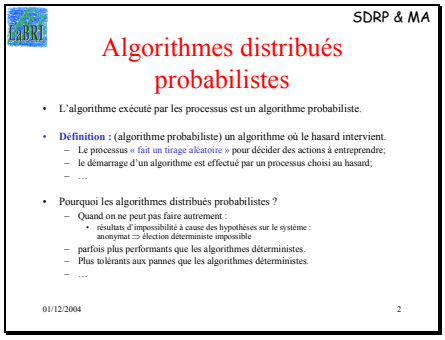
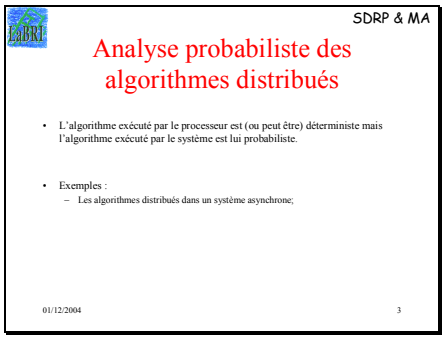
Diapositive 1



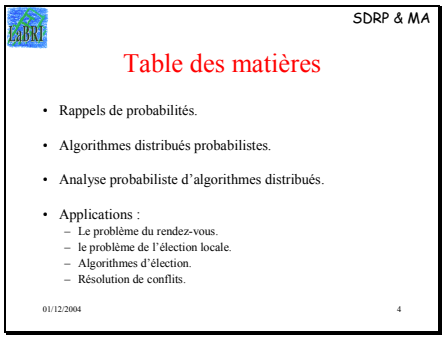
Diapositive 2



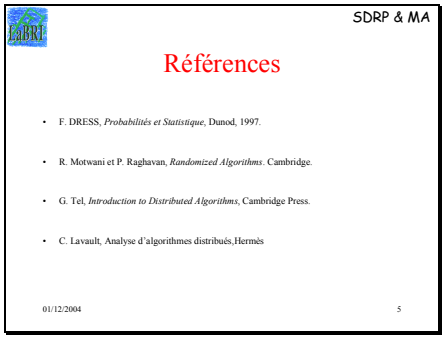
Diapositive 3



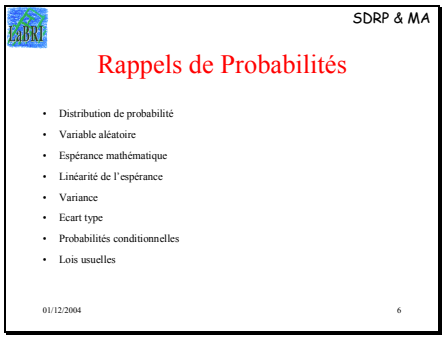
Diapositive 4



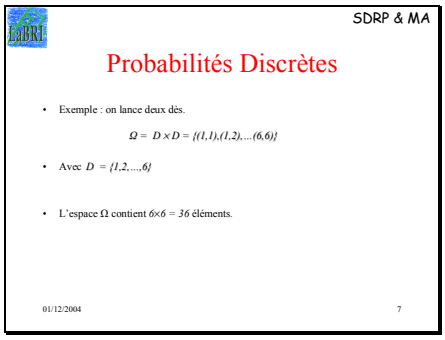
Diapositive 5



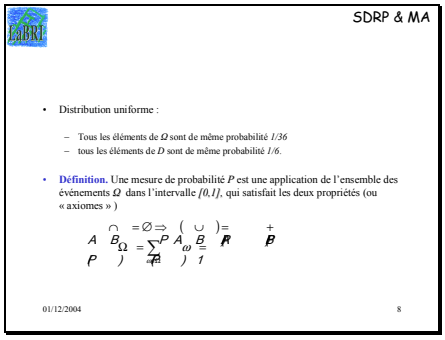
Diapositive 6



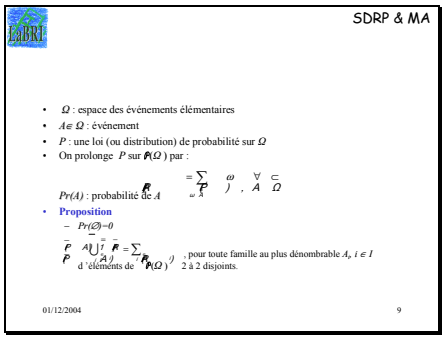
Diapositive 7



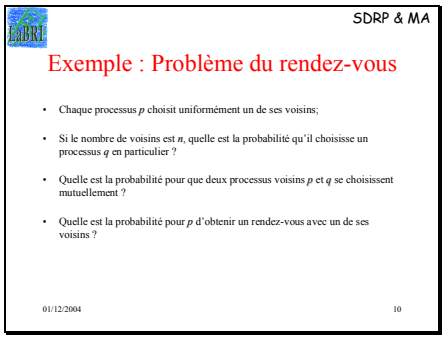
Diapositive 8



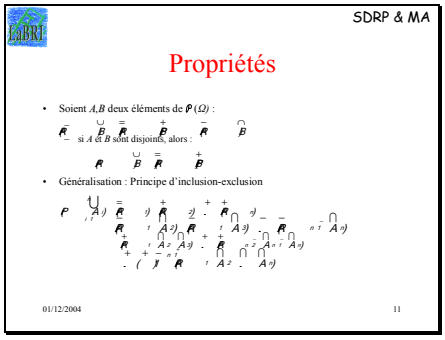
Diapositive 9



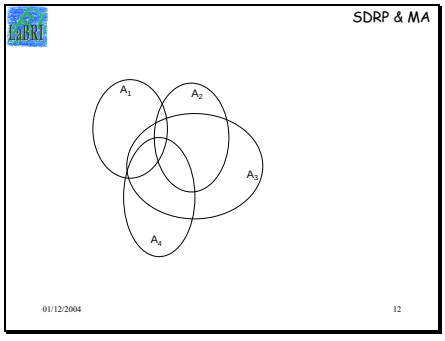
Diapositive 10



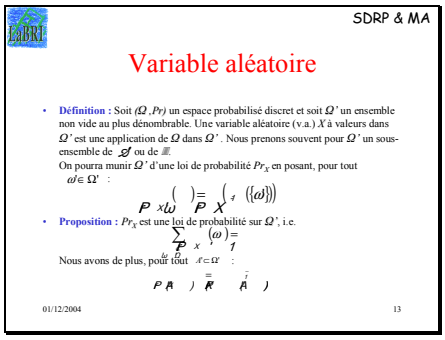
Diapositive 11



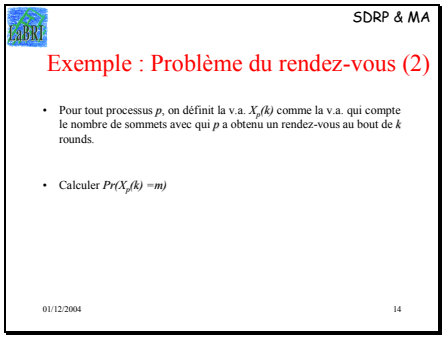
Diapositive 12



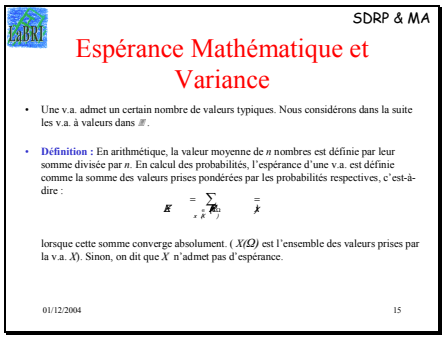
Diapositive 13



Diapositive 14



Diapositive 15



Diapositive 16

Exemple : Problème du rendez-vous (3)

- Quelle est l'espérance du temps que mettra p pour obtenir un rendez-vous ?
- Si tous les processus du système appliquent le même algorithme, quelle est l'espérance du nombre de rendez-vous dans tout le système ?
- …

Diapositive 17

Linéarité de l'espérance

- **Proposition :** Soit X et Y deux v.a. définies sur le même espace probabilisé discret (Ω, Pr) et admettant toutes deux une espérance.

  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ Alors :

  $$E(\alpha X) = \alpha EX$$
  $$E(X+Y)=EX+EY.$$

- Que peut-on dire de l'espérance d'un produit de v.a. ?

Diapositive 18

Loi conjointe

- **Définitions :** Soit les v.a. X et Y définies sur le même espace probabilisé discret (Ω, Pr). La loi (ou distribution) conjointe est la donnée de

  $$Pr_{XY}(X=x, Y=y)=Pr(\{\omega \in \Omega, X(\omega)=x, Y(\omega)=y\})$$

  pour tout x et tout y possibles.

  X et Y sont dites indépendantes, si pour tout x et tout y possibles, on a
  $Pr_{XY}(X=x, Y=y)=Pr_X(x)\ Pr_Y(y)$.

- **Proposition :** Si X et Y sont deux v.a. indépendantes admettant une espérance, alors la v.a. produit XY admet une espérance et
  $E(XY)=EXEY$

Diapositive 19

Variance

- **Définition :** la quantité qui mesure la dispersion d'une v.a. X définie sur (Ω,Pr) est la variance. Elle est définie par

$$VX=E((X-EX)^2).$$

Diapositive 20

Ecart type

- **Définition :** la racine carrée de la variance est appelée écart-type et est notée par σ :

$$\sigma X = \sqrt{VX}$$

- **Proposition :** Nous avons :

$$VX=E(X^2) - (EX)^2$$

- **Proposition :** Si X et Y sont deux v.a. indépendantes admettant chacune une variance, alors la v.a. $X+Y$ admet une variance qui est la somme des deux variances.

Diapositive 21

Indépendance

- **Définitions :**
  - Deux événements A et B sont dit indépendants, si : $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$.
  - Une famille A_i, $i=1,\ldots,n$, d'événements est dite indépendante dans son ensemble, si pour tout sous-ensemble $J \subset \{1,\ldots,n\}$:

$$\Pr\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \Pr(A_i)$$

- **Remarque :** Pour démontrer l'indépendance d'une famille A_i, $i=1,\ldots,n$, il suffit de prouver que les A_i sont 2 à 2 indépendants.

Diapositive 22

Probabilités conditionnelles

- C'est une notion introduite pour formaliser le concept de la probabilité de l'occurrence d'un événement *B* sachant qu'un autre *A* s'est produit.
- **Remarque :** *B* conditionné par *A* n'implique pas que *A* précède nécessairement *B* (dans l'ordre chronologique).
- **Exemple :** Un dé uniforme est lancé et nous savons que le point obtenu est pair (événement *A*). Quelle est la probabilité pour que le point soit au moins 4 (événement B) ?

Diapositive 23

- Il est clair que le nouvel espace (conditionné par l'événement *A*) sur lequel les événements élémentaires sont à définir est $\Omega'=A$, qui contient 3 éléments.

  Or, la portion de *A* qui est en même temps favorable à *B* en contient 2.

  Il est donc raisonnable de définir la probabilité de *B* conditionné par *A* par le ratio 2/3.

- **Définition :** Soit (Ω,Pr) un espace probabilisé discret et soit *A* un événement de probabilité non nulle. On définit sur $P(\Omega)$, l'application $Pr(./A)$ à valeurs dans $[0,1]$ par :

$$\Pr(B/A)=\frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(A)},\forall B\in P(\Omega)$$

  On appelle $Pr(B/A)$ probabilité conditionnelle de *B* sachant *A*.

Diapositive 24

- **Proposition :** Soit $A_1,A_2,\ldots,A_n$ une partition de Ω. Si chacun de ces ensembles est de probabilité non nulle, alors :

$$\Pr(B)=\sum_{i=1}^{n}\Pr(A_i)\Pr(B/A_i),\forall B\in P(\Omega)$$

- **Exemple :** On lance deux dés uniformes.
  Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points vaut 8 ?

Diapositive 25

Espérance conditionnelle

- Soit X une v.a. et soit A un événement de probabilité non nulle. L'espérance de X sachant A est définie par :

  ou

  $$E(X/A) = E_{\Pr(./A)}X$$

  $$E(X/A) = \frac{1}{\Pr(A)}\sum_{\omega\in A} X(\omega)\Pr(\{\omega\})$$

- Exemple : Quelle est l'espérance d'un dé uniforme sachant que le nombre sorti est inférieur ou égal à 3 ?

  Soit X la v.a. associée au lancer du dé. L'événement A associé à la condition est l'ensemble {1,2,3}. La probabilité de la condition A est 1/2. L 'espérance conditionnelle recherchée vaut :

  $$E(X/A) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right] = 2$$

Diapositive 26

Quelques distributions discrètes

- **Loi de Bernoulli**. La v.a. X prend deux valeurs : 1 avec probabilité p et 0 avec la probabilité q; on suppose que $p,q \in [0,1]$ et $p+q = 1$. Nous avons :
  - $EX = p$
  - $VX = pq$
  - $\sigma X = \sqrt{pq}$

- Utilisation : Cette loi intervient souvent de façon implicite lorsqu'on veut traiter une probabilité comme une espérance. En effet c'est la loi de la v.a. qui est la fonction indicatrice d'un événement A de probabilité p :

  $$Pr(A) = E\mathbf{1}_A$$

Diapositive 27

- **Loi binomiale**. On effectue n épreuves identiques et indépendantes; la probabilité de succès dans chacune étant supposée égale à p et celle d'échec à $q=1-p$. Posons X = le nombre total de succès obtenus dans les épreuves.

  X est une v.a. qui peut prendre la valeur k dans l'intervalle $[0,n]$ avec la probabilité :

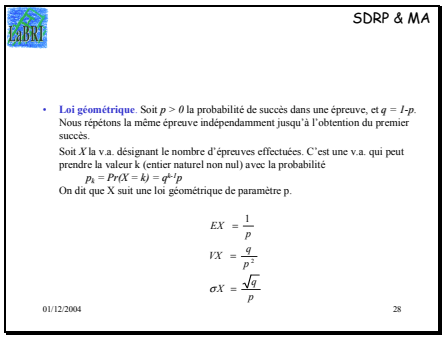
  $$p_k = \Pr(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

  On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

- Remarque : X peut être vue comme la somme de n v.a. de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p.

  Nous avons donc $EX=np$, $VX=npq$ et $\sigma X = \sqrt{npq}$

Diapositive 28



Diapositive 29