

Diapositive 1

SDRP & MA

Problème du rendez vous :
un algorithme probabiliste et une analyse probabiliste

A. Zemmari
zemmari@labri.fr
www.labri.fr/visidia/

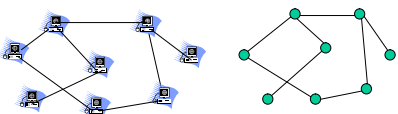
01/12/2004 1

Diapositive 2

SDRP & MA

Le modèle

- Un réseau asynchrone de processus anonymes;
- Les processus communiquent par échange de messages en mode asynchrone;
- Modélisation : un graphe.



01/12/2004 2

Diapositive 3

SDRP & MA

Présentation

- Dans une communication par envoi de messages en mode synchrone, l'émetteur et le récepteur doivent être tous les deux prêts \Rightarrow les deux processus ont un rendez-vous.
- Ici, on se place dans un réseau anonyme, où les processeurs communiquent par échange de messages en mode asynchrone.
- **Un rendez-vous est-il possible sous de telles hypothèses ?**

01/12/2004 3

Diapositive 4

SDRP & MA

Pourquoi le rendez-vous

- Un des modèles de communication de base dans le cas des algorithmes distribués codés par les calculs locaux : les règles de réécriture sont de la forme :

ou

ou encore :

- Exemples
 - Calcul d'arbre couvrant;
 - Election dans un arbre;
 - ...

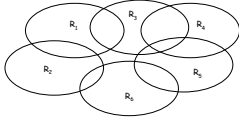
01/12/2004 4

Diapositive 5

SDRP & MA

Pourquoi le rendez-vous -(2)

- Communication dans un réseau de robots :



01/12/2004 5

Diapositive 6

SDRP & MA

Problème

- Théorème (Angluin) :** Il n'existe pas d'algorithme déterministe pour implémenter une communication par passage de messages en mode synchrone dans un réseau anonyme communiquant par échange de messages en mode asynchrone.

01/12/2004 6

Diapositive 7

SDRP & MA

Solution : un algorithme probabiliste

- Chaque sommet v répète tout le temps :
 - Le sommet v choisit un de ses voisins $c(v)$ au hasard;
 - v envoie I à $c(v)$;
 - v envoie O à tous ses autres voisins
 - v reçoit les messages de tous ses voisins.

(* il y a rendez-vous entre v et $c(v)$ si v reçoit I de $c(v)$ *)

01/12/2004 7

Diapositive 8

SDRP & MA

Premiers résultats

- **Définition** : Soit $\mathcal{G}=(V,E)$ un graphe. Un appel sur \mathcal{G} est une fonction c de V dans V qui envoie un sommet v sur un de ses voisins.
- \Rightarrow soit c un appel, il y a un rendez-vous sur \mathcal{G} si il existe deux sommets v et w tels que $c(v) = w$ et $c(w) = v$.
- **Définition** : un appel c est un **succès** s'il y a au moins un rendez-vous dans le graphe. Sinon c est dit **échec**.

01/12/2004 8

Diapositive 9

SDRP & MA

Questions posées

- Quel est le nombre moyen de rendez-vous dans le graphe ?
- Quelle est la probabilité de succès ?
- (Question plus dure) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement k rendez-vous dans le graphe ?

01/12/2004 9

Diapositive 10

SDRP & MA

Graphe d'appel

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. A chaque appel c sur G correspond un graphe orienté $G_c = (V, A)$, où un arc $a = (v, w) \in A$ si et seulement si $c(v) = w$.
- **Exemple :**

$$\begin{aligned} c(a) &= b \\ c(b) &= a \\ c(c) &= b \\ c(d) &= a \\ c(d) &= f \\ c(f) &= e \\ c(g) &= d \end{aligned}$$

01/12/2004 10

Diapositive 11

SDRP & MA

- **Fait :** Soit c un appel sur un graphe G . c est un échec si et seulement si G_c n'a pas de cycle de longueur 2.
- **Corollaire :** Si $G = (V, E)$ est un arbre, alors tout appel sur G est un succès.
- **Preuve :** Par récurrence sur la taille de G .

01/12/2004 11

Diapositive 12

SDRP & MA

Probabilité de succès

- Tous les sommets voisins d'un sommet ont la même probabilité $1/d(v)$ d'être choisi par v .
- On définit la mesure de probabilité qui affecte à tout appel c sur G une probabilité :

$$\alpha(G) = \prod_{v \in V} \frac{1}{d(v)}$$

- **Lemme :** Si on note par $s(G)$ la probabilité de succès et $f(G) = 1 - s(G)$. On a alors :
 $f(G) = \alpha(G)N(G)$ et $s(G) = 1 - \alpha(G)N(G)$,
 où $N(G)$ est le nombre d'appels c sur G pour lesquels G_c n'a pas de cycle de longueur 2.

01/12/2004 12

Diapositive 13

SDRP & MA

Exemple

- Anneau de taille $n = 3$:

01/12/2004 13

Diapositive 14

SDRP & MA

Cas du graphe anneau

- Soit G un anneau de taille n . Le nombre $N(G)$ d'appels sans cycle de longueur 2 est égal à 2. Donc

$$f(G) = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad s(G) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$
- L'espérance du nombre d'appels pour obtenir un succès est

$$\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} + 2 \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \dots = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} - 1}$$

01/12/2004 14

Diapositive 15

SDRP & MA

Couplage de graphe

- Définition :** Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un couplage sur G est un sous-ensemble M de E tel que :

$$\forall e, e' \in M, e \cap e' = \emptyset$$

01/12/2004 15

Diapositive 16

SDRP & MA

Rendez-vous \leftrightarrow couplages

01/12/200416

Diapositive 17

SDRP & MA

- **Notation** : soit $e \in E$, on note par e^1 (resp. e^0) l'événement : il y a un rendez-vous sur e (resp. il n'y a pas de rendez-vous sur e).
Si $e = \{v, w\}$, alors $Pr(e^1) = 1/d(v)d(w)$.
- Pour tout couplage $M = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, la probabilité pour M d'être un ensemble de rendez-vous est
 $Pr(M) = Pr(e_1^1 \wedge e_2^1 \wedge \dots \wedge e_k^1) = \prod_{(v,w) \in M} (1/d(v)d(w))$.
- Soit k un entier, un k -couplage sur \mathcal{G} est un couplage de taille k .
Soit \mathcal{M}_k l'ensemble des k -couplages sur \mathcal{G} .
On note :
 $q_k = \sum_{M \in \mathcal{M}_k} Pr(M)$, $k=0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$

01/12/200417

Diapositive 18

SDRP & MA

- **Proposition** : Soit q_k la séquence définie ci-dessus pour $k = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$. Pour tout entier l , la probabilité d'obtenir exactement l rendez-vous sur le graphe \mathcal{G} est :

$$P_l = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{k+l} \binom{l}{k} q_k$$

la probabilité de succès est alors :

$$s(\mathcal{G}) = P_1 = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{k+1} q_{k+1}$$


01/12/200418

Diapositive 19

SDRP & MA

Remarque

- **Question** : quel est l'impact de l'ajout d'une arête dans le graphe sur la probabilité de succès ?
- Si on rajoute une arête à un arbre, la probabilité de succès diminue.
- Si on ajoute une arête au graphe suivant, cette probabilité augmente.



(exemple dû à Austin et Volker)

01/12/2004 19

Diapositive 20

SDRP & MA

Espérance du temps entre deux rendez-vous

- Pour un sommet v :

$$\frac{d(v)}{\sum_{w \text{ voisin de } v} d(w)}$$
- Pour une arête $e = (v, w)$:

$$\frac{1}{d(v)d(w)}$$
- Si le graphe est de degré borné par d , alors
 - Pour un sommet, l'espérance est bornée par d
 - Pour une arête, elle est bornée par d^2

01/12/2004 20

Diapositive 21

SDRP & MA

Espérance du nombre de rendez-vous dans le graphe

- Soit X la v.a. définie par
 $X = \text{nbre. de rendez-vous dans } \mathcal{G}$
 et soit $E(X)$ son espérance mathématique.
- Pour toute arête e , notons par X_e la v.a. de définie par $X_e = 1$ si il y a un rendez-vous sur e et 0 sinon.
 On a alors :

$$X = \sum_{e \in E} X_e$$
- Or, la linéarité de l'espérance nous assure que :

$$E(X) = \sum_{e \in E} E(X_e)$$

01/12/2004 21

Diapositive 22

SDRP & MA

X_e est une v.a. qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/d(v)d(w)$ si $e=\{v,w\}$. Donc $E(X_e) = 1/d(v)d(w)$.

D'où :

$$E(X) = \sum_{\{v,w\} \in E} \frac{1}{d(v)d(w)}$$

01/12/2004 22

Diapositive 23

SDRP & MA

Applications

- Si G est un graphe complet de taille n , alors $E(X) = \binom{n}{2} \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{n}{2(n-1)}$
- Si G est un anneau, alors : $E(X) = \frac{n}{4}$
- Si G est un graphe de degré majoré par d , alors : $E(X) \geq \frac{|E|}{d^2}$
- Si G est un arbre, alors $E(X) \geq \frac{n-1}{d^2}$

01/12/2004 23

Diapositive 24

SDRP & MA

Graphe minimisant $E(X)$

Impact de l'ajout d'une arête n'est pas monotone :

01/12/2004 24

Diapositive 25

SDRP & MA

Graphe minimisant E(X) -(2)-

- **Proposition :** Pour n fixe, le graphe complet K_n est le graphe qui minimise l'espérance du nombre de rendez-vous dans tous les graphes de taille n . Le nombre minimum de rendez-vous est alors $E(X) = n/2(n-1)$.
- **Preuve.** (voir tableau ☺)

01/12/2004 25

Diapositive 26

SDRP & MA

Étude de cas particuliers
1. graphes de degrés bornés

- $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe de degré maximum d .
- **Proposition :**

$$s(G) \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{d^2}\right)^{|V|}$$
- **Preuve :** (voir le tableau).
- **Corollaire :**

$$f(G) \leq e^{\frac{-n}{2d}}$$

01/12/2004 26

Diapositive 27

SDRP & MA

Étude de cas particuliers
2. Graphes complets

- Soit K_n le graphe complet de taille n .
- **Proposition :**
 - $s(K_n) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k! 2^k (n-2k)! (n-1)^{2k}}$
 - $s(K_n)$ est asymptotiquement égal à $1 - e^{-1/2}$.
 - L'espérance du nombre d'appels nécessaires pour obtenir un rendez-vous est asymptotiquement égal à

$$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$$

01/12/2004 27



Borne générale pour $s(G)$

- **Théorème** : Soit $G=(V,E)$ un graphe quelconque. La probabilité de succès $s(G)$ est minorée par $1 - e^{-E[X(G)]}$, où $X(G)$ désigne le nombre de rendez-vous dans G et $E[X(G)]$ son espérance.
- **Preuve** : (voir le tableau).
- **Corollaire** : La probabilité de succès $s(G)$ est minorée par $1 - e^{-1/2}$
- **Question** : est-ce que le graphe complet minimise la probabilité de succès ?
- **Réponse** : OUI (d'après Martin Dietzfelbinger dans ISAAC 2002).
