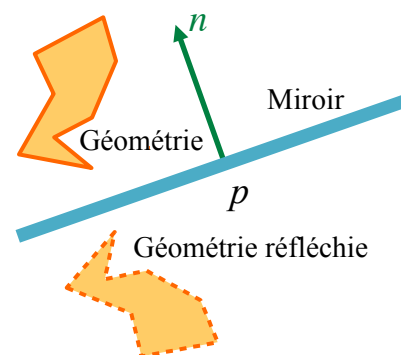


Vos réponses doivent être claires et concises (respect des maxima indiqués). L'examen est long mais noté sur 22, il n'est donc pas indispensable de répondre à toutes les questions.

A. Transformations de l'espace [4 pts]

Dans cet exercice nous supposons que nous avons accès à une fonction $rot(\theta, a)$ qui retourne une matrice de rotation d'angle θ autour de l'axe a , ainsi qu'une fonction $trans(t)$ qui retourne une matrice effectuant une translation d'un vecteur t et une fonction $scale(s_x, s_y, s_z)$ qui retourne une matrice de mise à l'échelle. Ces trois fonctions retournent des matrices 4×4 .

- A.1. Pourquoi utiliser une matrice 4×4 pour transformer des données 3D ?
- A.2. Donnez la matrice de rotation retournée par $rot(\theta, [0, 1, 0]^T)$.
- A.3. On veut effectuer la réflexion planaire d'un objet par rapport à un miroir centré au point p et orienté selon la normale n , donnez la combinaison et les paramètres des fonctions rot , $trans$ et $scale$ permettant d'arriver à ce résultat.



B. Lancer de rayon [3 pts]

- B.1. Décrivez le principe général du lancer de rayon récursif. (10 lignes max + 1 schéma)
- B.2. Voici un exemple de code calculant l'intersection entre un rayon r et un maillage triangulaire représenté sous la forme d'une liste de triangles :

```

1 : Hit intersect_mesh(const std::vector<Triangle>& mesh, Ray r) {
2 :     for(int i=0; i<mesh.size(); ++i) {
3 :         float t = intersect_triangle(mesh[i], r);
4 :         if(t>=0)
5 :             return Hit(t, mesh[i]); // retourne le paramètre d'intersection
6 :                                     // et le triangle intersecté
7 :     }
8 :     return InvalidHit; // retourne un objet Hit invalide (pas d'intersection trouvée)
9 : }

```

La fonction `intersect_triangle` retourne une valeur négative s'il n'y a pas d'intersection, et le paramètre t de l'intersection le long du rayon le cas échéant. Expliquez pourquoi l'image produite par lancer de rayon avec cette fonction sera incorrecte. Proposez une version corrigée du code ci-dessus.

C. Rendu temps-réel / OpenGL [6 pts]

L'objectif de cet exercice est de calculer l'éclairage d'un objet par une source lumineuse de type spot, via des shaders. Le spot est défini dans le repère global par :

- une position L_p ,
- une direction d'éclairage L_d ,
- un angle d'ouverture θ .

On note la fonction calculant l'intensité de lumière re-émise pour une surface **diffuse** définie à la position p , orientée selon une normale n , le tout exprimé dans le même repère :

```
float computeLighting(vec4 Lp, vec4 Ld, float theta, vec4 p, vec3 n){ }
```

Note : la valeur d'intensité retournée doit être comprise dans l'intervalle [0,1]

C.1. Proposez une implémentation de cette fonction.

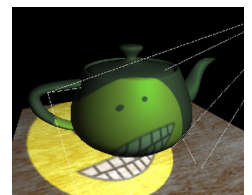
Cette fonction peut être utilisée pour calculer l'éclairage par sommet, comme décrit dans les vertex et fragment shaders ci-dessous :

Vertex shader	Fragment shader
<pre>in vec3 vtx_position, vtx_normal; uniform vec4 Lp, Ld; uniform float theta; uniform mat4 model_view_matrix; uniform mat3 normal_matrix; uniform mat4 projection_matrix; out float intensity; void main(void) { vec4 global_p = model_view_matrix * vec4(position,1.); vec3 global_n = normal_matrix * vtx_normal; intensity = computeLighting(Lp, Ld, theta, global_p, global_n); gl_Position = projection_matrix * global_p; }</pre>	<pre>in float intensity; out vec4 out_color; void main(void) { out_color = vec4(vec3(intensity),1.0); }</pre>

C.2. Modifiez ce code pour réaliser le calcul d'éclairage par fragment.

C.3. Quelles sont les avantages et inconvénients des deux solutions ? (3 lignes max)

C.4. Proposez une méthode pour transformer ce spot en un projecteur comme illustré par la figure ci-contre. (5 lignes max)



D. Géométrie et animation [5 pts]

D.1. Donnez l'équation implicite d'une sphère de rayon r et de centre c .

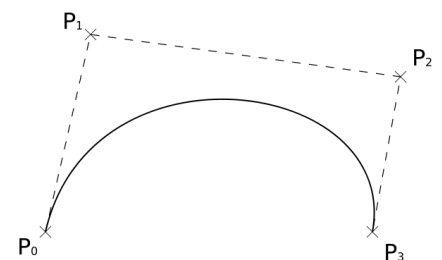
D.2. Une courbe cubique de Bézier $B_1(u), u \in [0,1], B_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par les quatre points de contrôle p_0, p_1, p_2, p_3 peut être exprimée de la manière suivante :

$$B_1(u) = (1-t)^3 p_0 + 3t(1-t)^2 p_1 + 3t^2(1-t) p_2 + t^3 p_3$$

D.2.1. En déduire une expression simple des vecteurs tangents t_0 et t_3 aux extrémités p_0 et p_3 .

D.2.2. Soit $B_2(u), u \in [0,1]$ une seconde courbe de Bézier définie par les points de contrôle p_4, p_5, p_6, p_7 . Nous souhaitons connecter les deux courbes en $B_1(1)$ et $B_2(0)$. Déduire de la question précédente les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir une continuité C^0 ? C^1 ? et enfin G^1 ?

D.3. Explicitez la différence entre cinématique directe et inverse. Donnez un exemple de leur utilisation respective. (4 lignes max)



E. CUDA [4 pts]

Nous disposons d'un grand nombre n de points \mathbf{p}_i auxquels sont associés des poids w_i . L'objectif est de calculer le centre de masse $\mathbf{c} = \sum_{i=0}^{n-1} w_i \mathbf{p}_i$ en utilisant CUDA. Nous supposons que les sommets \mathbf{p}_i et les poids w_i sont déjà stockés en mémoire GPU dans deux tableaux \mathbf{p} et \mathbf{w} :

```
float *p, *w ;
```

- E.1. Écrivez un noyau CUDA réalisant cette opération. Vous donnerez également le code C++ appelant le noyau sans vous soucier des allocations ni des copies mémoires.
- E.2. De votre point de vu, le code que vous avez proposé est-il optimal ? Si oui justifiez, sinon donnez des pistes d'amélioration possibles. (5 lignes max)