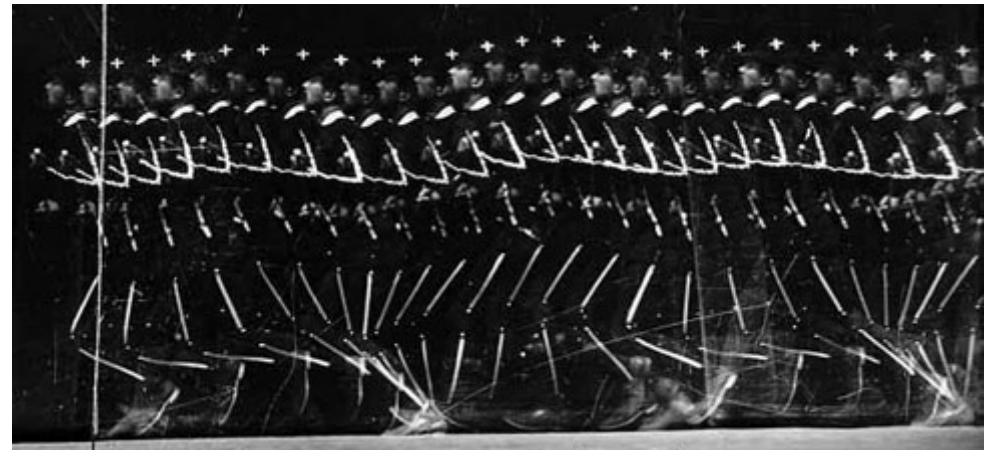


Plan

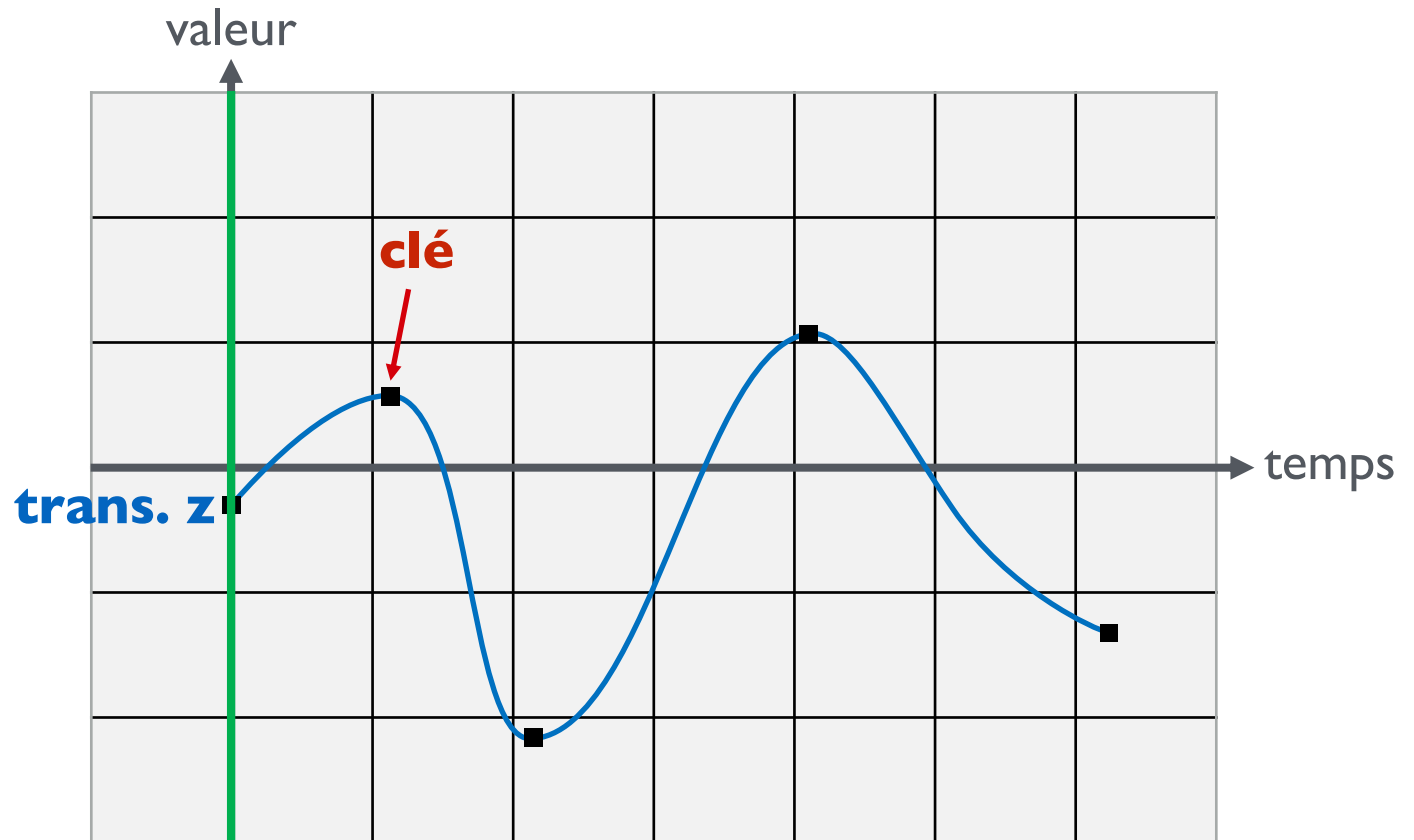
1. Introduction
2. **Cinématique**
 - **Interpolation positions / vitesses / rotations**
 - Modélisation hiérarchique
 - Cinématique directe
 - Cinématique inverse
3. Déformation de surfaces

Courbe d'animation

Etienne-Jules Marey (1830-1904)



Courbe d'animation



Interpolation

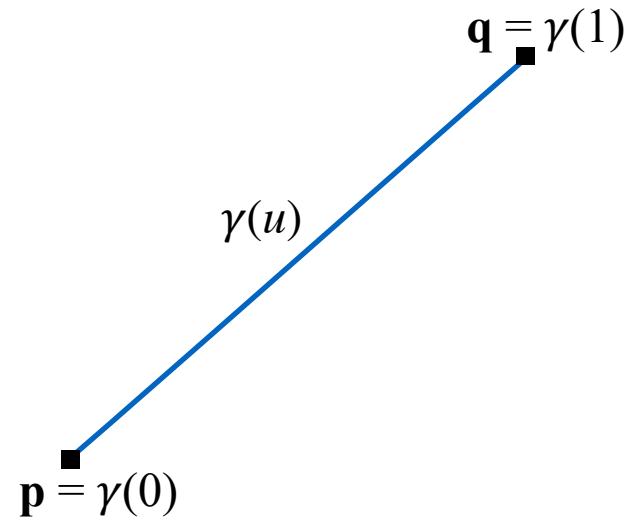
Entrées : valeurs clés (positions)

Objectif : **interpoler** ces valeurs clés par une fonction continue \Rightarrow **courbes d'animation**

- **Fonction linéaire** :

$$\gamma(u) = (1-u) \mathbf{p} + u \mathbf{q}$$

- **Continuité C^0**
(position)



Interpolation

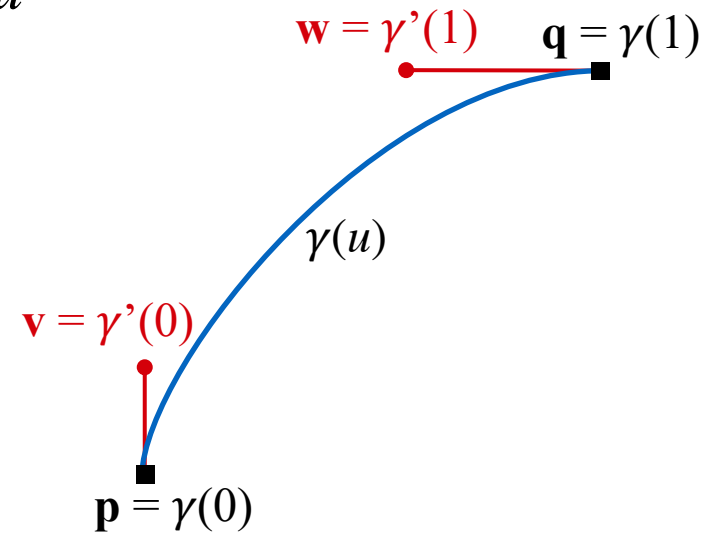
Entrées : valeurs clés (positions et **vitesse**s)

Objectif : **interpol**er ces valeurs clés par une fonction continue \Rightarrow **courbes d'animation**

- **Polynôme de degré 3** de la forme :

$$\gamma(u) = \sum_{n=0..3} a_n u^n$$

- Continuité C^1 entre deux clés (positions et tangentes)
- Déterminer les paramètres a_n interpolant (ou approximant) au mieux les valeurs clés
- Degré 3 \Rightarrow 4 contraintes suffisantes pour résolution exacte



Interpolation

Polynôme d'Hermite (spline)

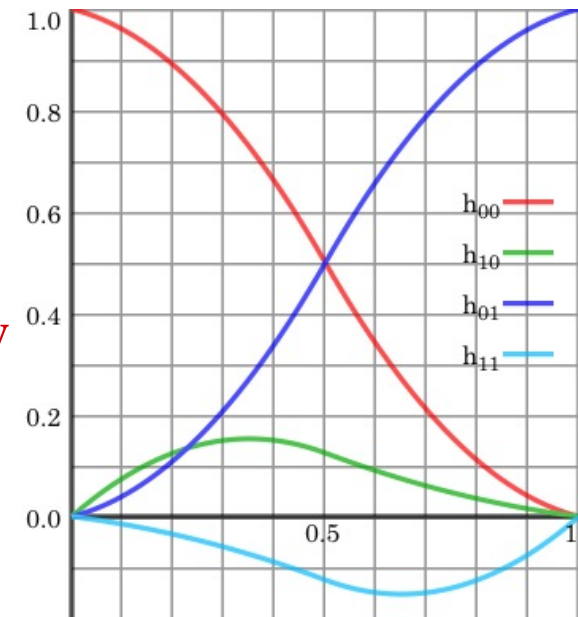
$$\gamma(u) = h_{00}(u) \mathbf{p} + h_{01}(u) \mathbf{q} + h_{10}(u) \mathbf{v} + h_{11}(u) \mathbf{w}$$

$$\text{avec } h_{00}(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$$

$$h_{01}(u) = -2u^3 + 3u^2$$

$$h_{10}(u) = u^3 - 2u^2 + u$$

$$h_{11}(u) = u^3 - u^2$$



polynômes de base

Notation matricielle :

$$\gamma(u) = \underbrace{[\mathbf{p} ; \mathbf{q} ; \mathbf{v} ; \mathbf{w}]}_{\text{matrice géométrie}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice de base}} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$$

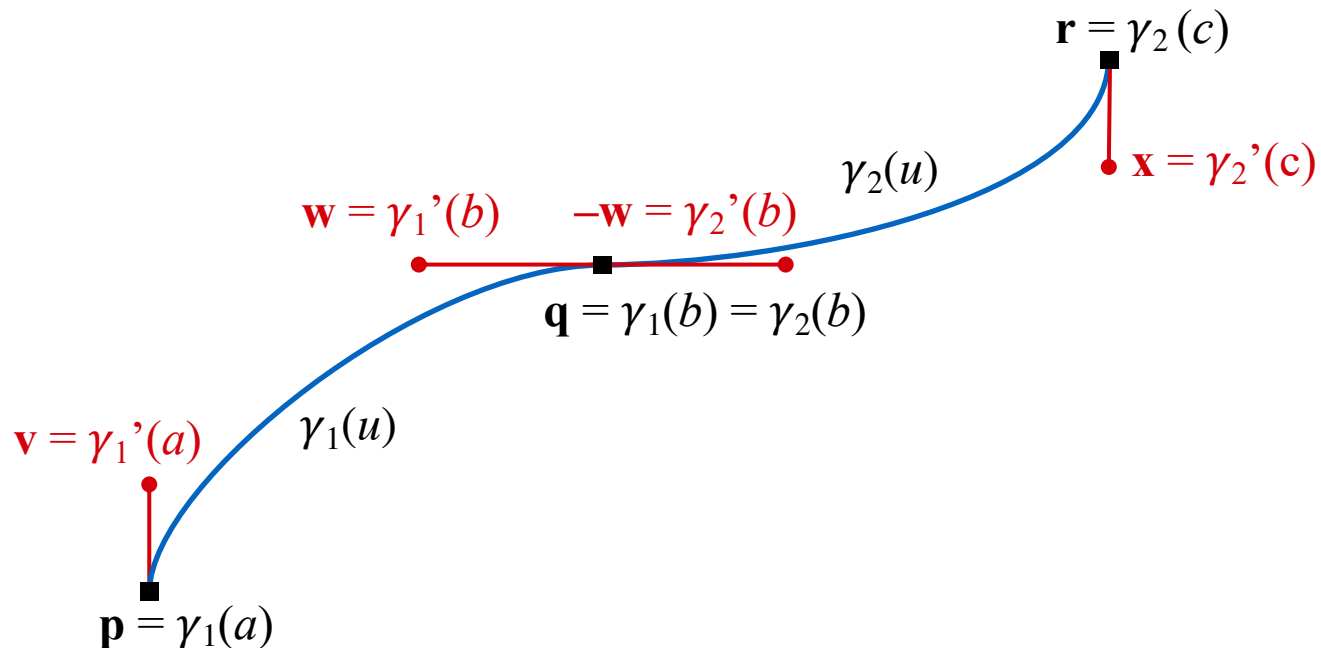
$$\gamma(u) = \mathbf{GMT}(u)$$

Interpolation

Avec 3 clés, interpolation par morceaux :

$$\gamma_1(u) = h_{00}(t_1) \mathbf{p} + h_{01}(t_1) \mathbf{q} + h_{10}(t_1) \mathbf{v} (b-a) + h_{11}(t_1) \mathbf{w} (b-a) \quad \text{avec } t_1 = (u-a) / (b-a)$$

$$\gamma_2(u) = h_{00}(t_2) \mathbf{q} + h_{01}(t_2) \mathbf{r} + h_{10}(t_2) \mathbf{-w} (c-b) + h_{11}(t_2) \mathbf{x} (c-b) \quad \text{avec } t_2 = (u-b) / (c-b)$$



Interpolation des rotations

Représentation canonique

- Matrices orthonormales $SO(3)$
- Problème : $M_0, M_1 \in SO(3) \not\Rightarrow (1 - \alpha)M_0 + \alpha M_1 \in SO(3)$
- Interpoler les coefficients puis re-orthonormaliser
 \Rightarrow trop coûteux

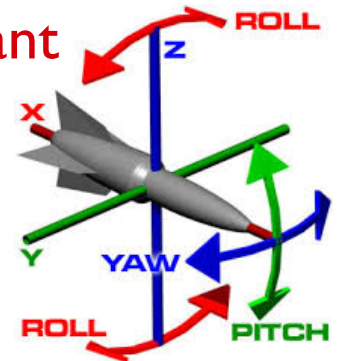
Angles d'Euler

- 1 angle par axe : $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$

- $M = R_{\theta_x} R_{\theta_y} R_{\theta_z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

\Rightarrow attention, l'ordre des multiplications est important

- Interpoler chaque angle
 \Rightarrow intuitif et peu coûteux



Limitations des angles d'Euler

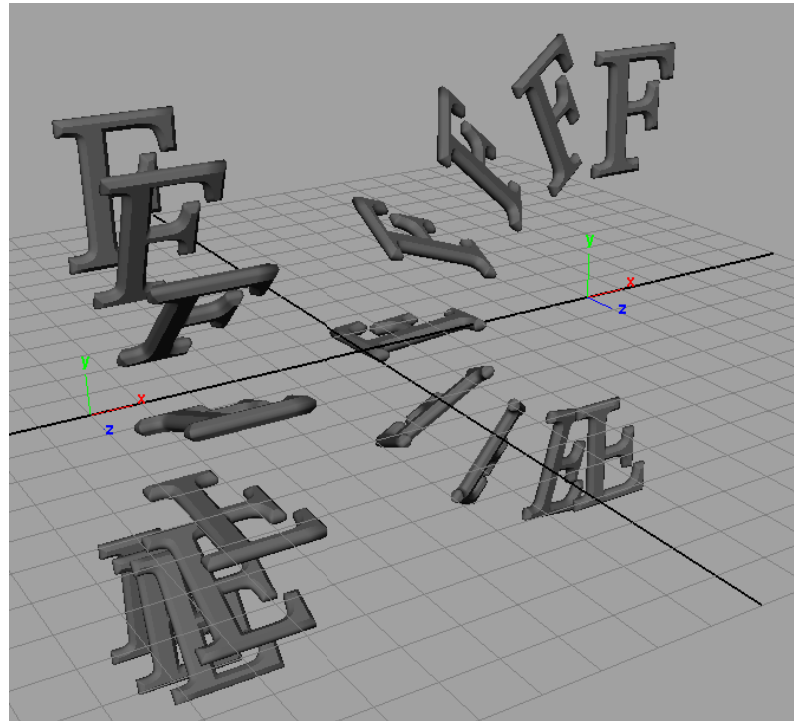
Non-unicité de la trajectoire

$$[\theta_x, \theta_y, \theta_z] = [0, 0, 0]$$



$$[\theta_x, \theta_y, \theta_z] = [\pi, 0, 0]$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$[\theta_x, \theta_y, \theta_z] = [0, 0, 0]$$



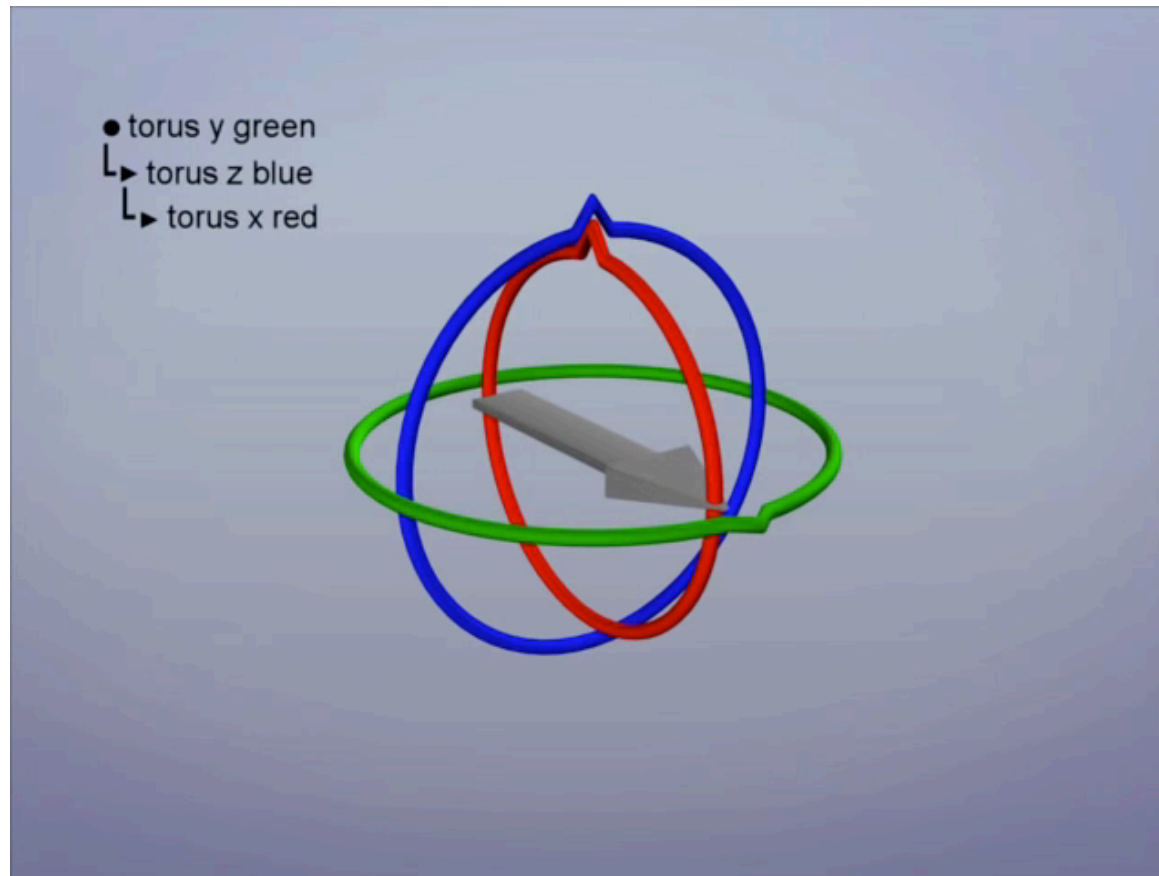
$$[\theta_x, \theta_y, \theta_z] = [0, \pi, \pi]$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Limitations des angles d'Euler

“**Gimbal lock**” : perte d'un degré de liberté

Par exemple, rotation en $\theta_x \Leftrightarrow$ rotation en θ_z



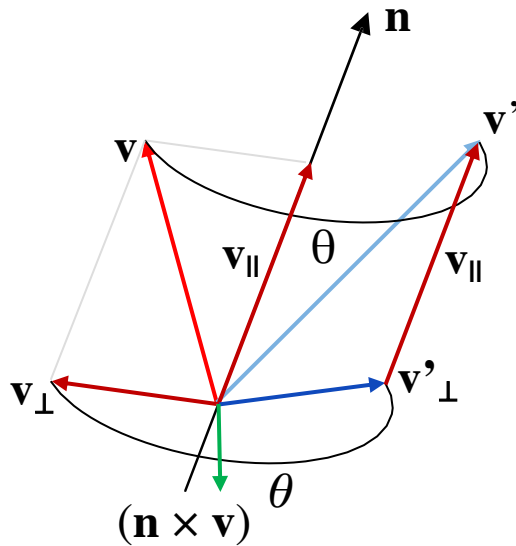
<http://www.youtube.com/watch?v=zc8b2Jo7mno>

Axe et angle

Toute rotation de \mathbb{R}^3 est une **rotation planaire** d'angle θ autour d'un axe \mathbf{n} :

$$\mathbf{v}' = R_{\theta, \mathbf{n}} \mathbf{v} = \cos\theta \mathbf{v} + \sin\theta (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + (1 - \cos\theta)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

formule de Rodrigues



$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

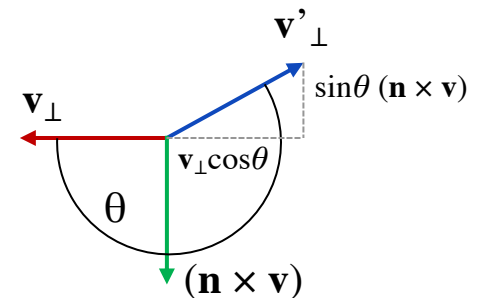
$$\mathbf{v}_{\perp} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}$$

$$\mathbf{v}'_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} \cos\theta + \sin\theta (\mathbf{n} \times \mathbf{v})$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp}$$

$$= \mathbf{v}_{\parallel} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}) \cos\theta + \sin\theta (\mathbf{n} \times \mathbf{v})$$

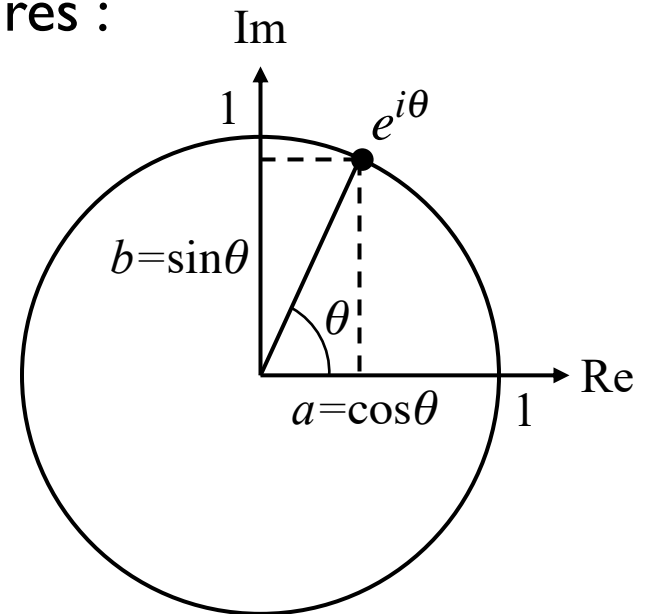
$$= (1 - \cos\theta) \mathbf{v}_{\parallel} + \cos\theta \mathbf{v} + \sin\theta (\mathbf{n} \times \mathbf{v})$$



Rotation par un complexe en 2D

Nombre complexe $a + bi$ avec $i^2 = -1$

- Si (a, b) vecteur **unitaire** du plan complexe 2D, alors θ est l'angle de la rotation associée
- Formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- Multiplication de deux complexes unitaires :
 $(a + ib)(c + di) = e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta + \phi)}$
 \Rightarrow composition des rotations



Quaternions

Représentation d'un **axe** et d'un **angle**

Extension des **nombre complexes** à la 3D :

$$q = [s, x, y, z] = s + ix + jy + kz = [s, \mathbf{n}]$$

$$\text{avec } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

et s, x, y, z des réels

Quaternions

Forment un **espace vectoriel**

- **addition :**

$$q_1 + q_2 = [s_1, \mathbf{n}_1] + [s_2, \mathbf{n}_2] = [s_1 + s_2, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2]$$

- **multiplication par un scalaire :**

$$aq = [as, a\mathbf{n}]$$

- **multiplication :**

$$q_1 q_2 = [s_1, \mathbf{n}_1] [s_2, \mathbf{n}_2] = [s_1 s_2 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2, s_1 \mathbf{n}_2 + s_2 \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2]$$

Attention, pas commutative : $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$

Quaternions – propriétés

Comme les nombres complexes :

- **Conjugué** : $\bar{q} = [s - ix - jy - kz] = [s, -\mathbf{n}]$
- **Norme** : $\|q\|^2 = q\bar{q} = s^2 + x^2 + y^2 + z^2$
- **Inverse** : $q^{-1} = \bar{q} / \|q\|^2$
- **Unité** : $\|q\|^2 = 1$
- **Inverse de l'unité** : $q^{-1} = \bar{q}$

Rotation par un quaternion

Rotation 3D \Leftrightarrow quaternion unitaire

($\|q\|=1 \Leftrightarrow$ point sur la sphère unité 4D)

$$q = [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{n}]$$

avec θ l'angle et \mathbf{n} l'axe de rotation

Appliquer une rotation à un point \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}' = R_{\theta, \mathbf{n}} \mathbf{v} \Leftrightarrow [0, \mathbf{v}'] = q[0, \mathbf{v}]q^{-1}$$

$$\text{avec } q = [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{n}]$$

$$\text{et } q^{-1} = [\cos(\theta/2), -\sin(\theta/2)\mathbf{n}]$$

(en développant et simplifiant, on retrouve la formule de Rodrigues :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternions_et_rotation_dans_l'espace)

Rotation par un quaternion

Propriétés :

- rotation de $\theta + 2\pi$: $[-\cos(\theta/2), -\sin(\theta/2)\mathbf{n}] = -q$
- rotation de $-\theta$: $[\cos(\theta/2), -\sin(\theta/2)\mathbf{n}] = q^{-1}$

Composition de rotations = **multiplication**

si q_1 représente la rotation R_1 et q_2 représente R_2 ,
alors q_1q_2 représente la rotation R_1R_2

Quiz

Quel quaternion unitaire représente :

- Pas de rotation ?
- Une rotation de 180° autour de l'axe z ?
- Une rotation de 90° autour de l'axe y ?
- Une rotation de -90° autour de l'axe x ?



Quiz

Quel quaternion unitaire représente :

- Pas de rotation ? le quaternion unitaire $[1, (0,0,0)]$
- Une rotation de 180° autour de l'axe z ?
- Une rotation de 90° autour de l'axe y ?
- Une rotation de -90° autour de l'axe x ?

Quiz

Quel quaternion unitaire représente :

- Pas de rotation ? le quaternion unitaire $[1, (0,0,0)]$
- Une rotation de 180° autour de l'axe z ? $[0, (0,0,1)]$
- Une rotation de 90° autour de l'axe y ?
- Une rotation de -90° autour de l'axe x ?

Quiz

Quel quaternion unitaire représente :

- Pas de rotation ? le quaternion unitaire $[1, (0,0,0)]$
- Une rotation de 180° autour de l'axe z ? $[0, (0,0,1)]$
- Une rotation de 90° autour de l'axe y ? $[\cos(\pi/4), (0, \sin(\pi/4), 0)]$
- Une rotation de -90° autour de l'axe x ?

Quiz

Quel quaternion unitaire représente :

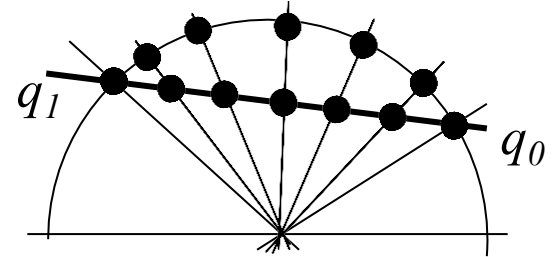
- Pas de rotation ? le quaternion unitaire $[1, (0,0,0)]$
- Une rotation de 180° autour de l'axe z ? $[0, (0,0,1)]$
- Une rotation de 90° autour de l'axe y ? $[\cos(\pi/4), (0, \sin(\pi/4), 0)]$
- Une rotation de -90° autour de l'axe x ? $[\cos(\pi/4), (-\sin(\pi/4), 0, 0)]$

Interpolation des rotations

Interpolation linéaire (lerp)

$$\text{lerp}(q_0, q_1, \alpha) = (1-\alpha)q_0 + \alpha q_1$$

⇒ vitesse angulaire non constante



Puissance

$$[\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{n}]^\alpha = [\cos(\alpha\theta/2), \sin(\alpha\theta/2)\mathbf{n}]$$

avec $\alpha \in [0,1]$

Interpolation sphérique (slerp)

[Ken Shoemake 85]

$$\begin{aligned} \text{slerp}(q_0, q_1, \alpha) &= q_0(q_0^{-1}q_1)^\alpha \\ &= (q_1q_0^{-1})^\alpha q_0 \end{aligned}$$

