

Intégration de Monte-Carlo

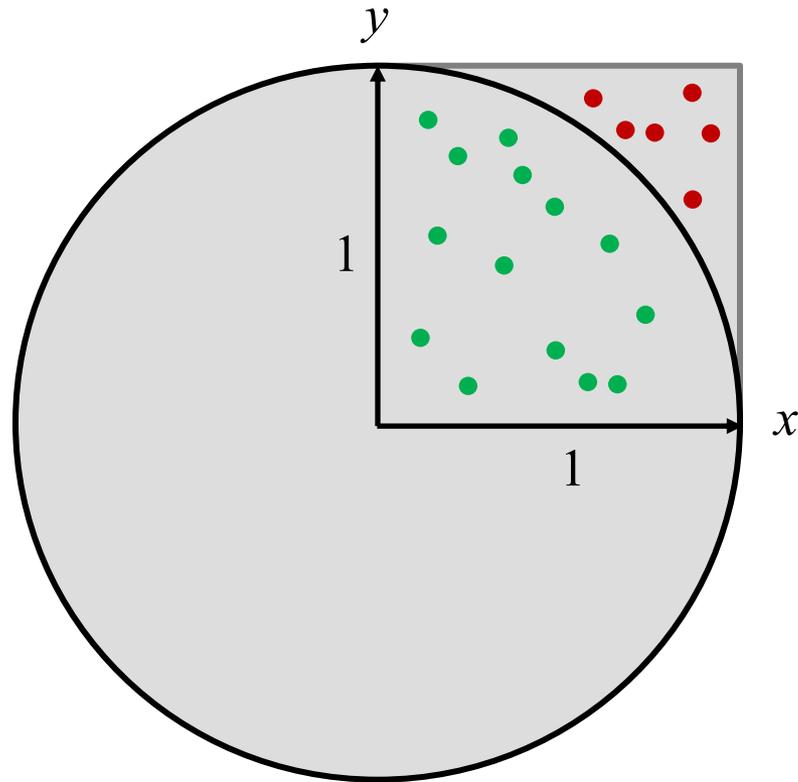
Crédits :

Advanced Global Illumination, Philip Dutré, Kavita Bala et Philip Bekaert

Physically based rendering : from theory to implementation, Matt Pharr et Greg Humphreys

www.scratchapixel.com

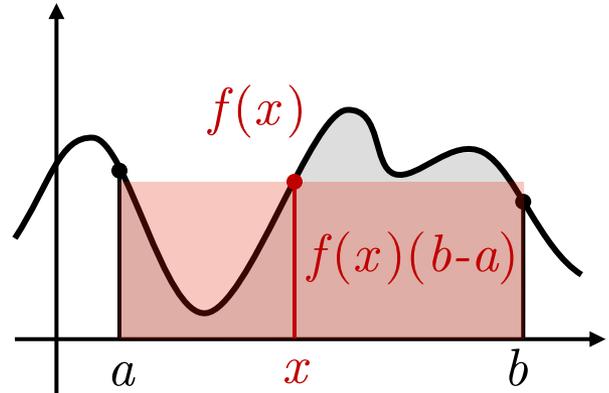
Estimation de π



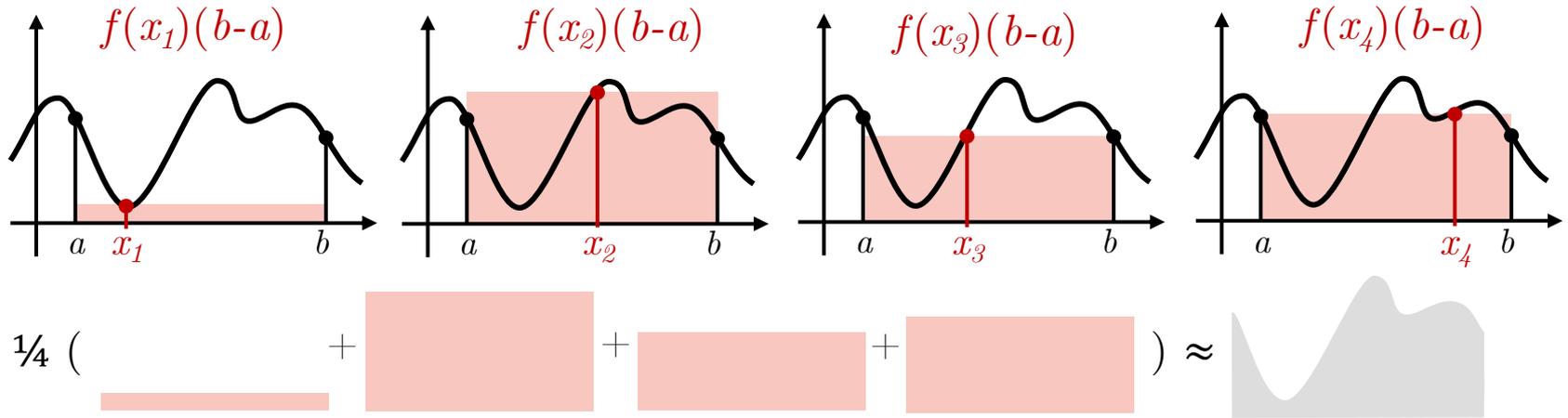
Aire du disque unitaire ?

Intégration en 1D

$$I = \int_a^b f(x) dx$$



Intégration en 1D



$$\langle I^N \rangle = (b - a) \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(X_i)$$

avec $X_i = a + \xi(b - a)$

\Rightarrow **Estimateur de Monte-Carlo**

\uparrow
variable aléatoire
uniforme dans $[0, 1]$

Variable aléatoire **discrète**

Probabilité p_i associée à chaque événement x_i

Espérance :
$$E[x] = \sum_i p_i x_i$$

Variance :

$$\sigma^2 = E[(x - E[x])^2] = \sum_i (x_i - E[x])^2 p_i$$

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \left(\sum_i x_i p_i \right)^2$$

Propriétés

Espérance :

$$E(x + y) = E[x] + E[y]$$

$$E(ax) = aE[x]$$

Variance :

$$\sigma^2[x + y] = \sigma^2[x] + \sigma^2[y] + 2Cov[x, y]$$

$$\text{avec } Cov(x, y) = E[xy] - E[x]E[y]$$

$$\sigma^2[ax] = a^2\sigma^2[x]$$

Fonction de v. a. **discrètes**

Soit $f(x)$ la fonction où x prend la valeur x_i avec probabilité $p_i \Rightarrow$ aussi une **variable aléatoire**

Espérance :
$$E[f(x)] = \sum_{i=1} p_i f(x_i)$$

Variance :
$$\sigma^2 = E[(f(x) - E[f(x)])^2]$$

Variable aléatoire **à densité**

À une variable aléatoire réelle x , on associe une **densité de probabilité (PDF)** $p(x)$ telle que :

$$Pr(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx$$

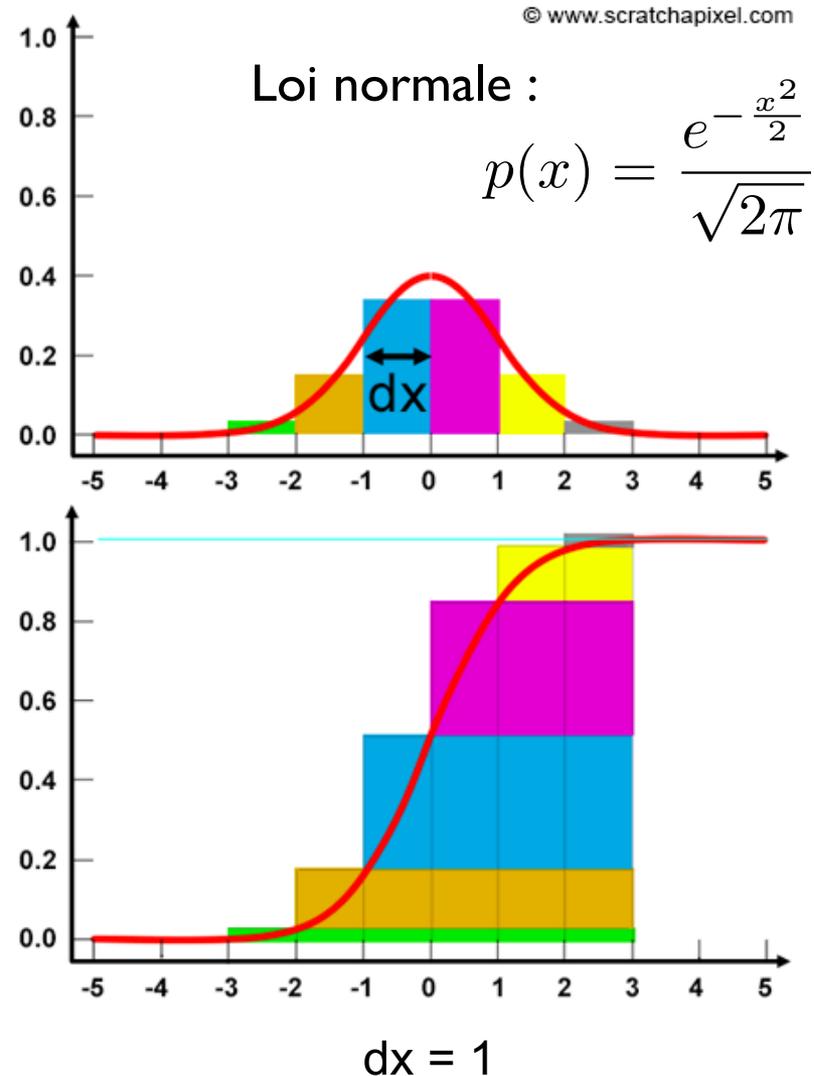
Fonction de répartition (CDF) $P(y)$:

$$P(y) = Pr(x \leq y) = \int_{-\infty}^y p(x) dx$$

Variable aléatoire **continue**

**Densité de probabilité
(PDF)**

**Fonction de répartition
(CDF)**



Variable aléatoire à densité

Propriétés : $\forall x, p(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}$$

$$\begin{aligned} Pr(a \leq x \leq b) &= Pr(x \leq b) - Pr(x \leq a) \\ &= P(b) - P(a) = \int_a^b p(x) dx \end{aligned}$$

Variable aléatoire à densité

Espérance : $E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$$

Variance :

$$\sigma^2 = E[(x - E[x])^2] = \int (x - E[x])^2 p(x)dx$$

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 = \int x^2 p(x)dx - \left(\int xp(x)dx \right)^2$$

Somme pondérée de v. a.

Soient $g(x_1) \dots g(x_N)$ N variables aléatoires, avec x_i des variables **indépendantes identiquement distribuées** suivant **la même densité** $p(x)$ et

$$G = \sum_{j=1}^N w_j g(x_j) = \sum_{j=1}^N w_j g_j(x)$$

Espérance :
$$E[G] = \sum_{j=1}^N w_j E[g_j(x)]$$

Somme pondérée de v. a.

$$\text{Si } w_j = \frac{1}{N} \quad \forall j, \quad G = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g_j(x)$$

Espérance :

$$\begin{aligned} E[G] &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E[g_j(x)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E[g(x)] \\ &= E[g(x)] \end{aligned}$$

$\Rightarrow G$ **estimateur** de l'espérance de $g(x)$

Somme pondérée de v. a.

$$\begin{aligned}\text{Variance : } \sigma^2[G(x)] &= \sigma^2\left[\sum_{j=0}^N \frac{g_j(x)}{N}\right] \\ &= \sum_{j=0}^N \sigma^2\left[\frac{g_j(x)}{N}\right] \quad \text{car } x_i \text{ IID} \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\sigma^2[g(x)]}{N^2} \\ &= \frac{\sigma^2[g(x)]}{N}\end{aligned}$$

⇒ Plus N grand, meilleur G est un estimateur de $E[g(x)]$
Sa déviation standard σ diminue en \sqrt{N}

Estimateur de Monte-Carlo

Estimation de $I = \int_a^b f(x) dx$ à l'aide de N échantillons tirés aléatoirement dans $[a, b]$ selon la densité $p(x)$:

$$\langle I^N \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$$

Estimateur de Monte-Carlo

Espérance :

$$\begin{aligned} E[\langle I^N \rangle] &= E \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i)}{p(x_i)} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} E \left[\frac{f(x_i)}{p(x_i)} \right] \\ &= \frac{1}{N} N \int \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx \\ &= \int f(x) dx \\ &= I \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle I^N \rangle$ **estimateur de I sans biais**

Estimateur de Monte-Carlo

Variance :

$$\sigma^2[\langle I^N \rangle] = \frac{1}{N} \int \left(\frac{f(x)}{p(x)} - I \right)^2 p(x) dx$$

⇒ **Convergence** de l'estimateur en \sqrt{N}

⇒ 4 fois plus d'échantillons nécessaires pour diviser l'erreur d'estimation par 2

Estimateur de la variance

Avec les **même** N échantillons, on peut estimer la variance de $\langle I^N \rangle$ avec l'estimateur :

$$\langle \sigma^2[\langle I^N \rangle] \rangle = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f(x_i)}{p(x_i)} \right)^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)} \right)^2}{N - 1}$$

Bilan – intégration de Monte-Carlo

Étapes :

1. Générer N échantillons selon la PDF
2. Évaluer la fonction à intégrer en ces échantillons
3. Moyenner ces évaluations et diviser par la PDF

Pros. & Cons. :

- ✓ Pas de contrainte sur la fonction (continuité, régularité)
- ✓ Même convergence quelle que soit la dimension
- ✓ Implémentation simple
- ✗ Convergence lente
- ✗ Implémentation **efficace** pas toujours facile

Bilan – intégration de Monte-Carlo

Étapes :

1. Générer N échantillons selon la PDF

⇒ **Comment faire ?**

3. Moyenner ces évaluations en divisant par la PDF

Pros. & Cons. :

- ✓ Pas de contrainte sur la fonction (continuité, régularité)
- ✓ Même convergence quelle que soit la dimension
- ✓ Implémentation simple
- ✗ Convergence lente
- ✗ Implémentation **efficace** pas toujours facile

Méthode de la transformée inverse

Cas discret :

On veut choisir x_i avec une probabilité p_i

La CDF discrète associée à p_i vaut $P_i = \sum_{j=1}^i p_j$

Tirer un nombre aléatoire ξ uniformément sur $[0, 1[$

Trouver k tel que :

$$P_{k-1} \leq \xi < P_k$$

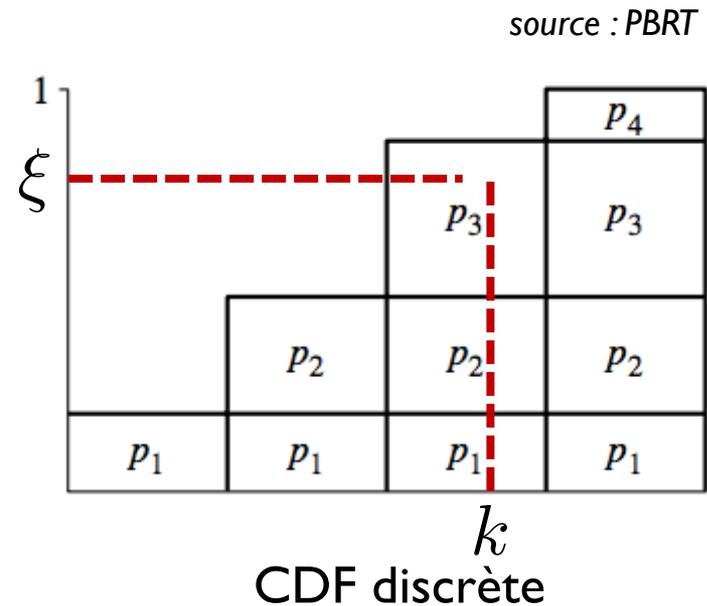
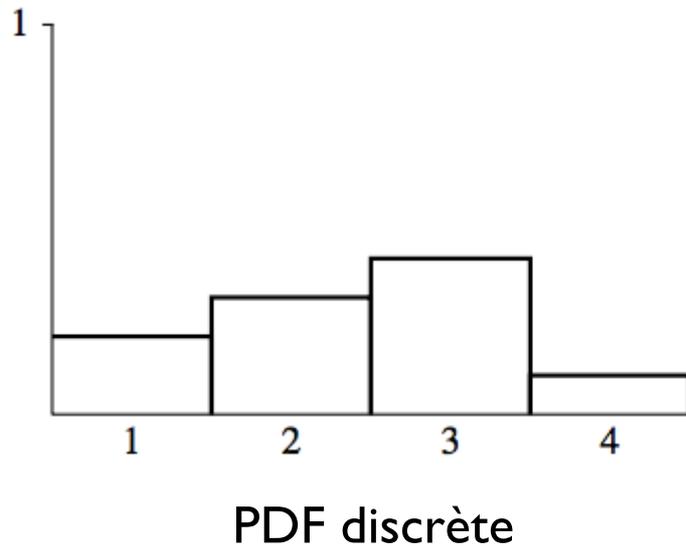
$$P_{k-1} \leq \xi < P_{k-1} + p_k$$

\Rightarrow probabilité que ξ soit dans cet intervalle : $P_k - P_{k-1}$

\Rightarrow **probabilité de sélectionner k est p_k**

Méthode de la transformée inverse

Cas discret :

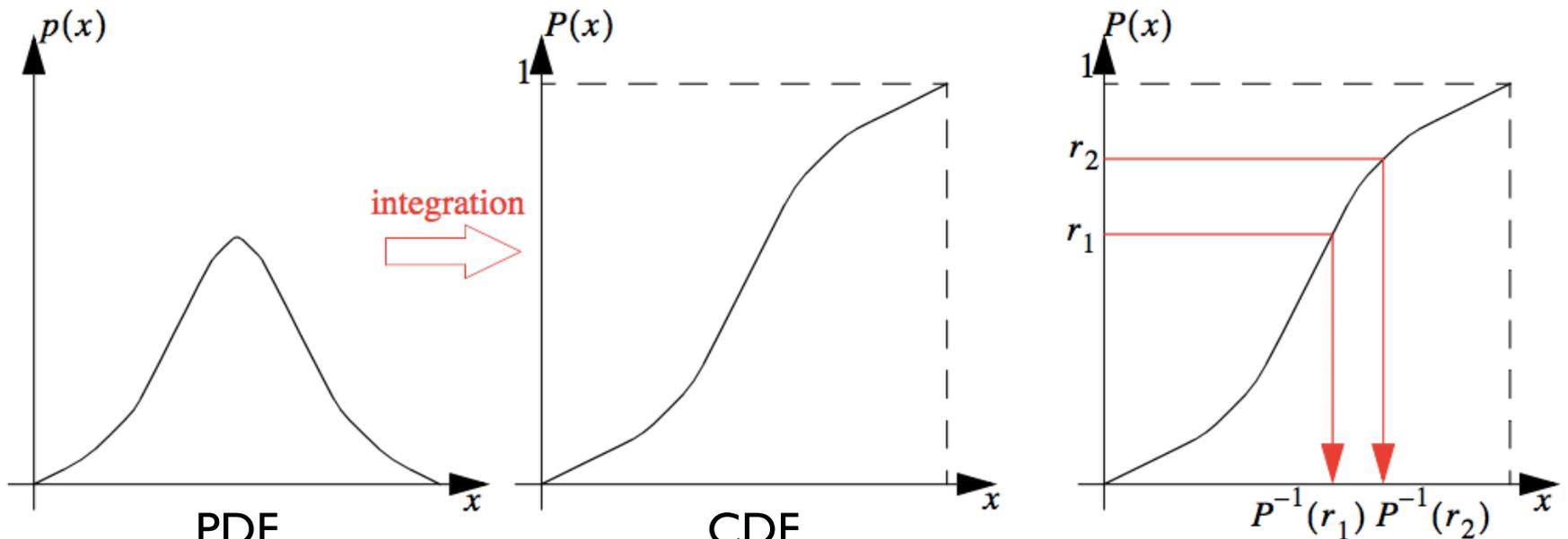


Calcul de la CDF discrète en $O(N)$

Recherche de k en $O(\log_2(N))$

Méthode de la transformée inverse

Cas continue : **idem !** $y = P^{-1}(\xi)$



source : Advanced Global Illumination

\Rightarrow **nécessité d'inverser** la **CDF** ...pas toujours possible !

En plus haute dimension ?

Si densité **séparable** : $p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$
échantillonnage indépendant ID de p_x et p_y

Sinon, calcul de la **densité marginale** :

$$p(x) = \int p(x, y) dy$$

et de la **densité conditionnelle** :

$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}$$

et échantillonnage indépendant ID de $p(x)$ et $p(y|x)$

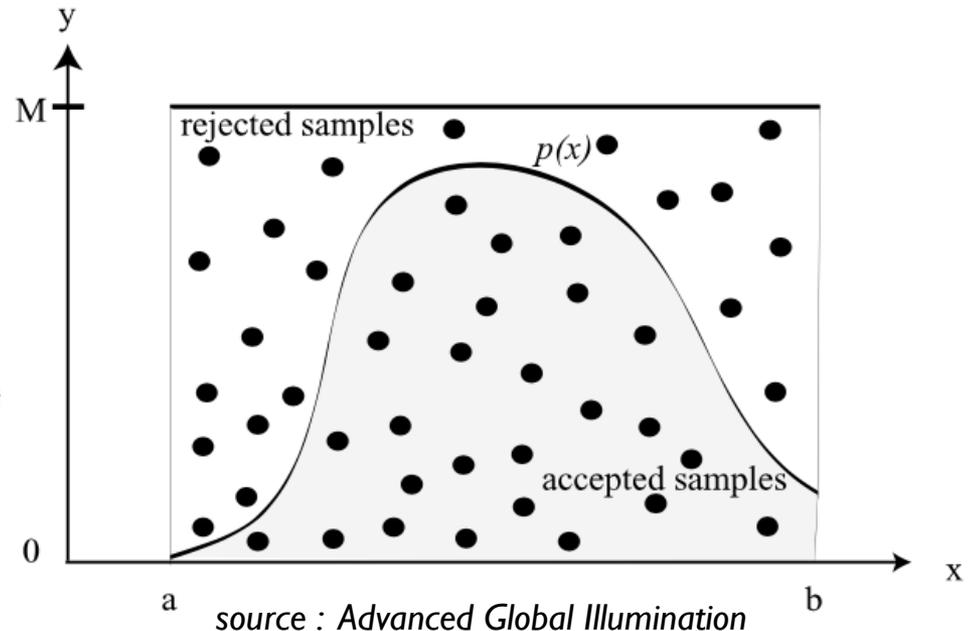
Méthode de rejet

Si la valeur maximale de $p(x)$ dans $[a, b]$ est M ,
alors considérer la **fonction 2D** dans $[a, b] \times [0, M]$

L'échantillonner **uniformément** en (x, y)

Rejeter les échantillons si $p(x) < y$

- ✓ valide pour toute PDF
- ✓ en toute dimension
- ✗ potentiellement inefficace

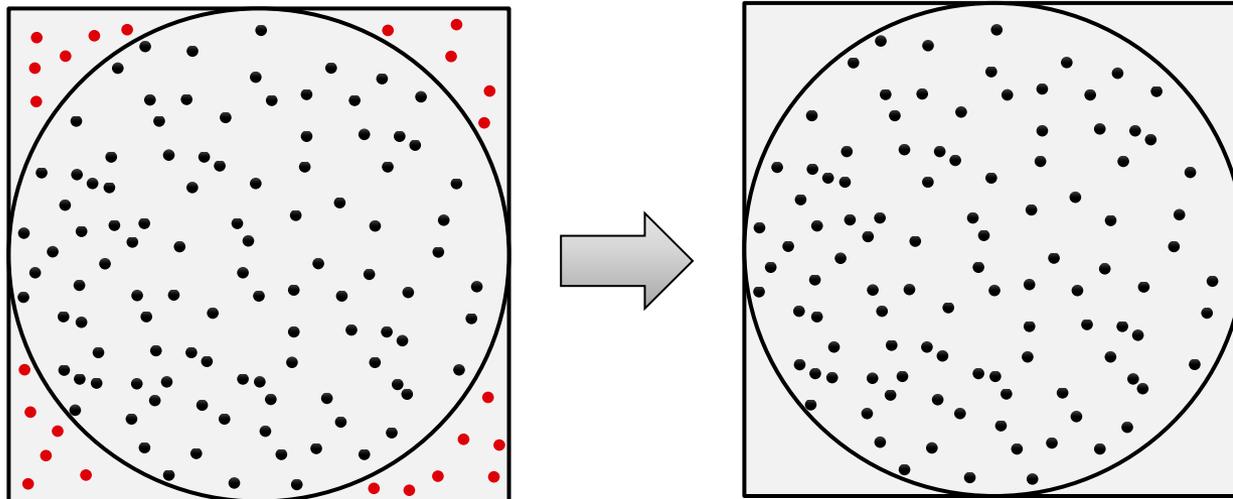


Échantillonner un disque

Rejection sampling

Les échantillons hors du disque sont rejetés

- ✓ pas de distorsions
- ✗ perte d'échantillons (21% !)



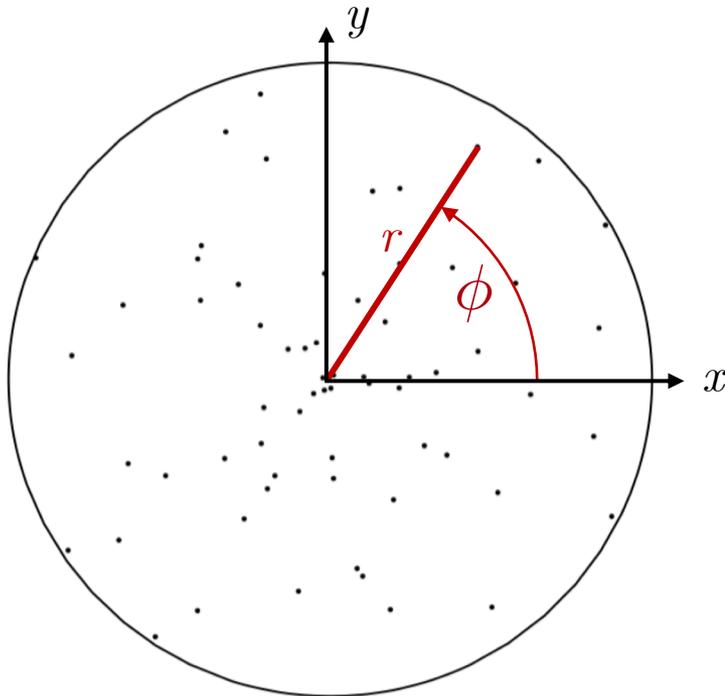
Échantillonner un disque

Coordonnées **polaires**

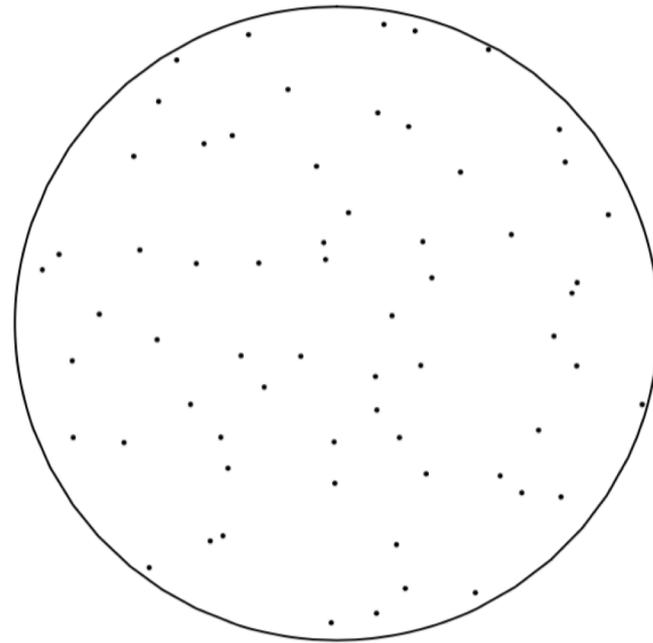
mapping entre le carrée $[0,1[\times [0,1[$ et le disque unitaire :

$$(r = \xi_1, \phi = 2\pi\xi_2)$$

⇒ **pas uniforme** : plus d'échantillons au centre



Changement de variable



Rejection sampling

Échantillonner un disque

Prise en compte de l'aire

Échantillonnage uniforme \Rightarrow PDF constante $p(x, y) = c$

$$\text{or } \iint p(x, y) dx dy = 1 \quad \Rightarrow \quad c \underbrace{\iint dx dy}_{\text{aire du disque unitaire}} = 1$$
$$\Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$$

Échantillonner un disque

Prise en compte de l'aire

Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \stackrel{?}{\implies} p(r, \theta) \neq p(x, y)$$

Transformer une distribution

En ID : soit la variable aléatoire x_i tirée selon $p_x(x)$
et $y_i = y(x_i)$ avec $y(x)$ une fonction **bijective**

$$Pr(Y \leq y(x)) = Pr(X \leq x)$$

$$\Rightarrow P_y(y) = P_x(x) \quad (\text{égalité des CDF})$$

$$\Rightarrow p_y(y)dy = p_x(x)dx \quad (\text{égalité des PDF})$$

$$\Rightarrow p_y(y) = \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} p_x(x)$$

Transformer une distribution

En nD : $Y = T(X)$ avec $T = (T_1(x) \dots T_n(x))$
une **bijection**

$$p_y(y) = p_x(T(x)) = \frac{p_x(x)}{|J_T(x)|}$$

où $|J_T|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de T :

$$J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Échantillonner un disque

Prise en compte de l'aire

Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$|J_T| = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

$$\Rightarrow p(r, \theta) = r p(x, y) = \frac{r}{\pi}$$

Échantillonner un disque

Prise en compte de l'aire

Calcul de la **densité marginale** :

$$p(r) = \int_0^{2\pi} p(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi} d\theta = \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 2r$$

et de la **densité conditionnelle** :

$$p(\theta|r) = \frac{p(r, \theta)}{p(r)} = \frac{1}{2\pi}$$

Échantillonner un disque

Prise en compte de l'aire

Intégration pour calculer les CDF :

$$\begin{aligned}P(r) &= \int_0^r p(r)dr \\ &= \int_0^r 2rdr \\ &= r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\theta) &= \int_0^\theta p(\theta|r)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta d\theta \\ &= \frac{\theta}{2\pi}\end{aligned}$$

Inversion des CDF :

$$P^{-1}(r) = \sqrt{r}$$

$$P^{-1}(\theta) = 2\pi\theta$$

Échantillonner un disque

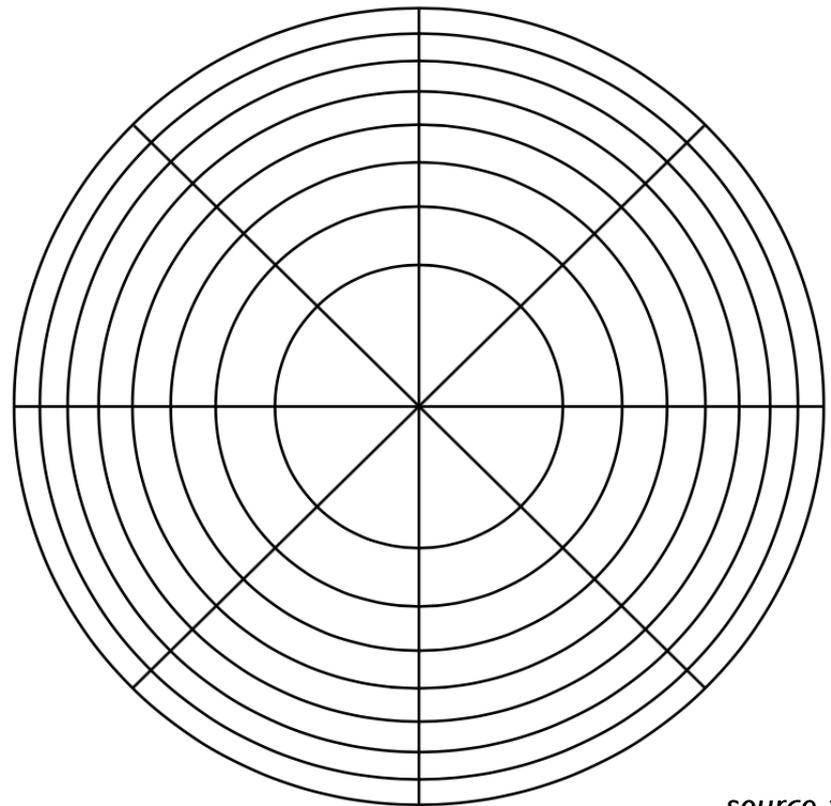
Prise en compte de l'aire

mapping entre le carrée $[0,1[\times [0,1[$ et le disque unitaire :

$$(r = \sqrt{\xi_1}, \phi = 2\pi\xi_2)$$

⇒ uniforme

⇒ mais **fortes distorsions**



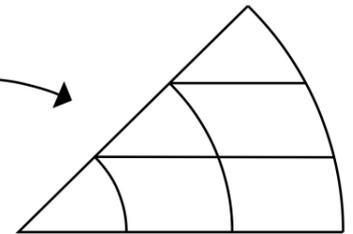
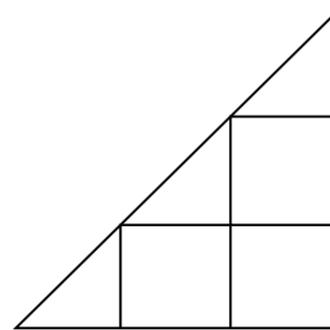
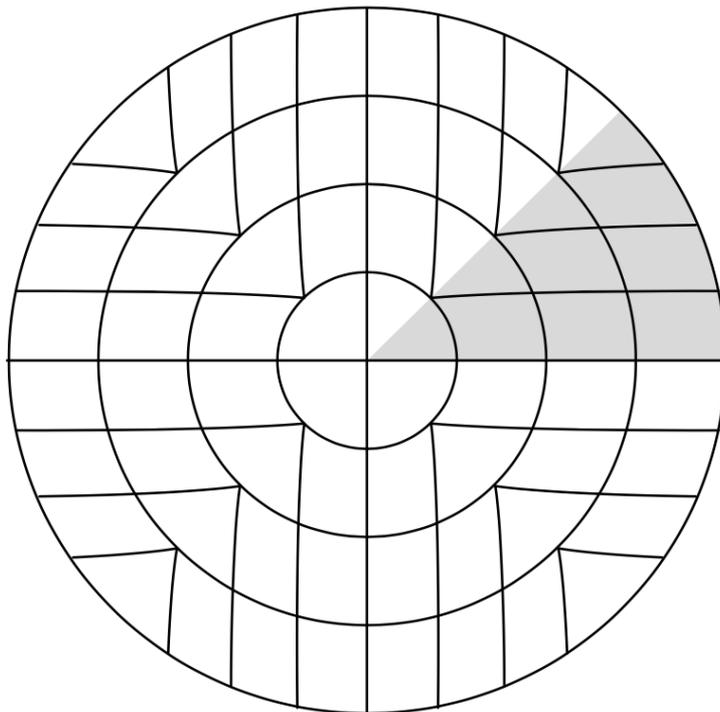
Échantillonner un disque

Concentric Map [Shirley 97]

mapping entre le carrée $[0,1[\times [0,1[$ et le disque unitaire

⇒ uniforme

⇒ distorsions minimisées (non nulles)



$$(x > y, x > -y) \rightarrow \left(r = x, \phi = \frac{\pi y}{4 x} \right)$$

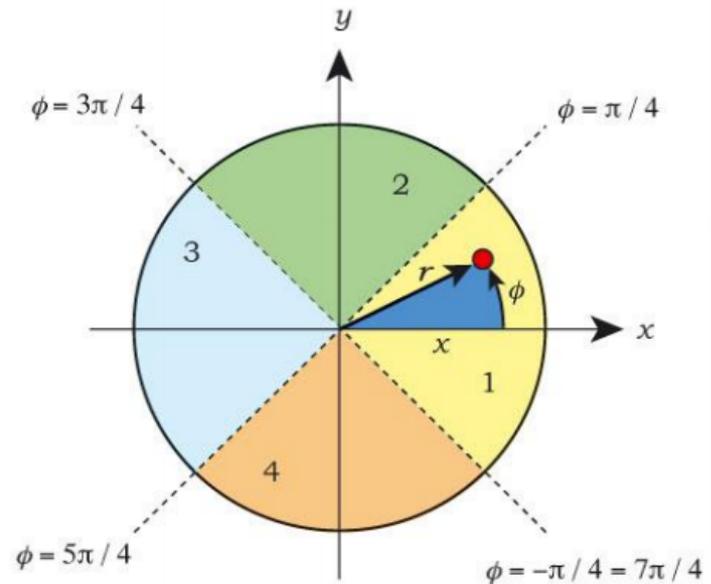
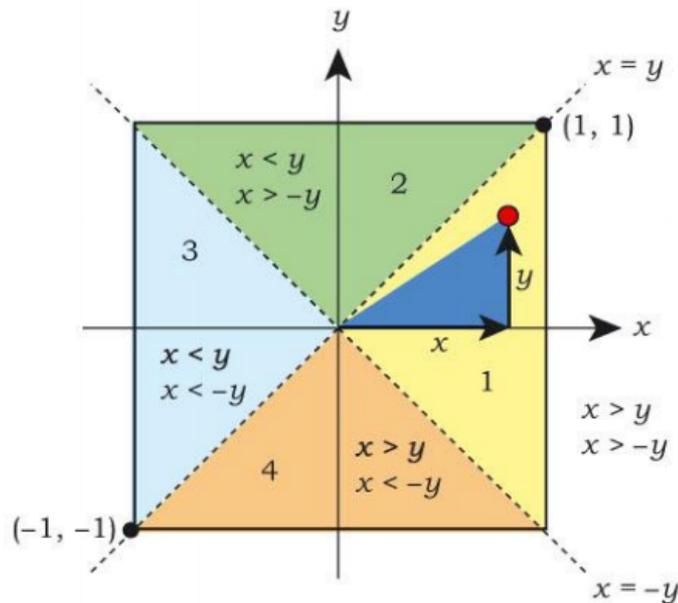
Échantillonner un disque

Concentric Map [Shirley 97]

mapping entre le carrée $[0,1[\times [0,1[$ et le disque unitaire

\Rightarrow uniforme

\Rightarrow distorsions minimisées (non nulles)



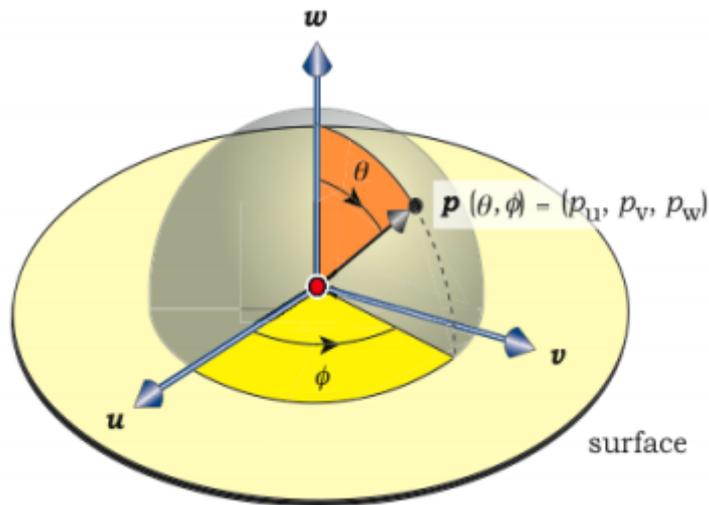
Échantillonner un hémisphère

Passage en coordonnées **sphériques**

mapping entre le carrée $[0,1[\times [0,1[$ et l'hémisphère :

$$(\phi = 2\pi\xi_1, \theta = \cos^{-1} \xi_2)$$

\Rightarrow **uniforme**



$$\mathbf{p} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{u} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{v} + \cos \theta \mathbf{w}$$

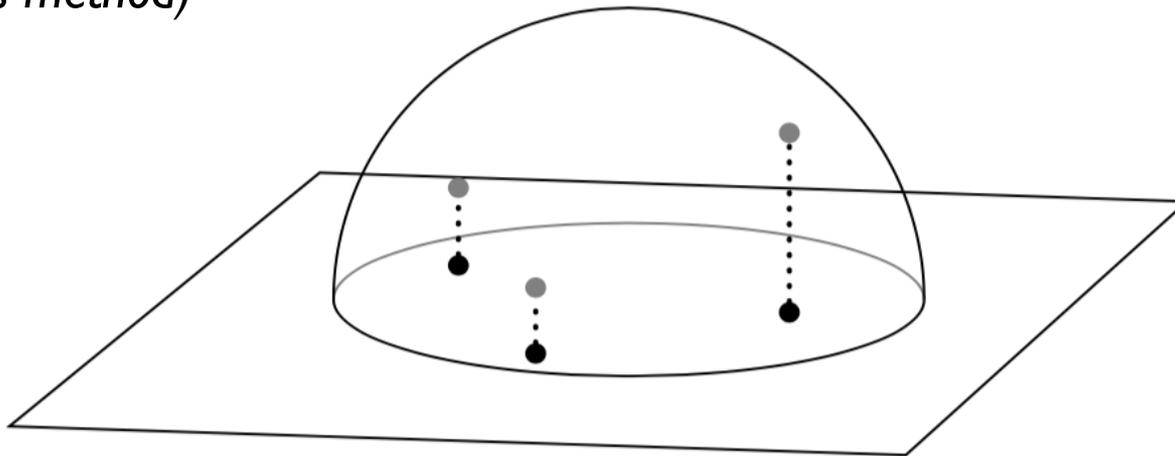
Échantillonner un hémisphère

Pondération par le cosinus

mapping entre le carrée $[0,1[\times [0,1[$ et l'hémisphère :

$$\left(\phi = 2\pi\xi_1, \theta = \cos^{-1} \left(\sqrt{1 - \xi_2} \right) \right)$$

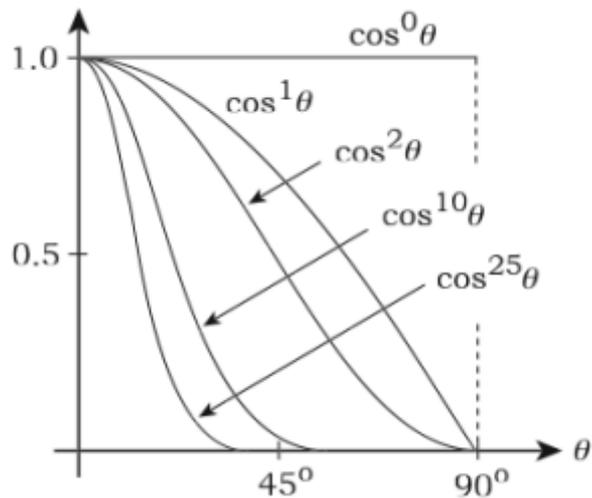
ou **projeter** les échantillons d'un disque sur l'hémisphère :
(Malley's method)



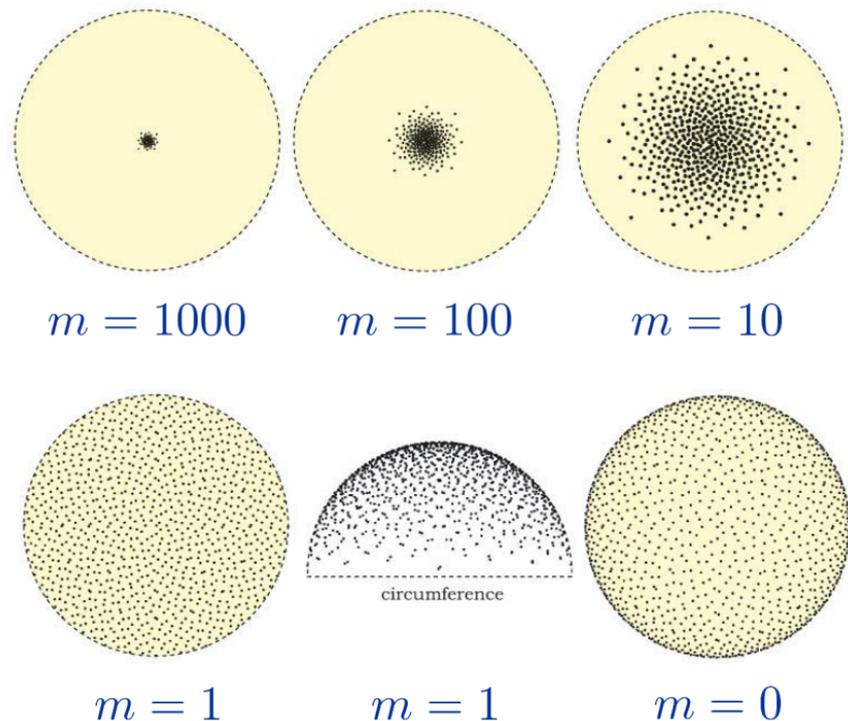
Échantillonner un hémisphère

Loi du cosinus surélevé

$$\left(\phi = 2\pi\xi_1, \theta = \cos^{-1} \left[(1 - \xi_2)^{1/(m+1)} \right] \right)$$



Loi du cosinus surélevé



Bilan – intégration de Monte-Carlo

Étapes :

1. Générer N échantillons selon la PDF
2. Évaluer la fonction à intégrer en ces échantillons
3. Moyenner ces évaluations et diviser par la PDF

Pros. & Cons. :

- ✓ Pas de contrainte sur la fonction (continuité, régularité)
- ✓ Même convergence quelle que soit la dimension
- ✓ Implémentation simple
- ✗ Convergence lente

⇒ **Comment l'accélérer ?**

réduction de la variance

Échantillonnage préférentiel

Idée : échantillonner selon une PDF $p(x)$ **non-uniforme** pour minimiser la variance de l'estimateur :

$$\sigma^2[\langle I^N \rangle] = \frac{1}{N} \int \left(\frac{f(x)}{p(x)} - I \right)^2 p(x) dx$$

On peut montrer que l'optimum vaut :

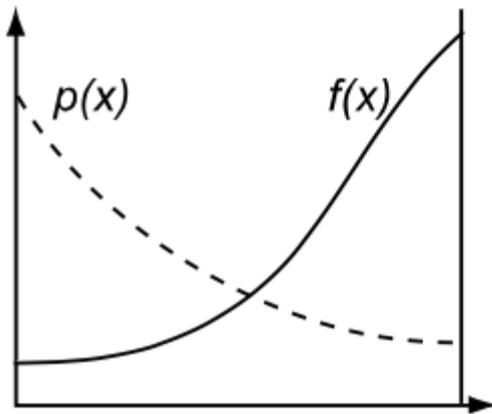
$$p(x) = \frac{|f(x)|}{\int f(x) dx}$$

Problème : on ne sait précisément pas intégrer $f \dots$

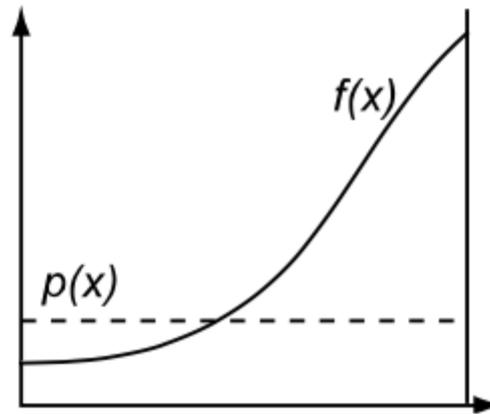
⇒ **trouver une fonction qui lui ressemble !**

Échantillonnage préférentiel

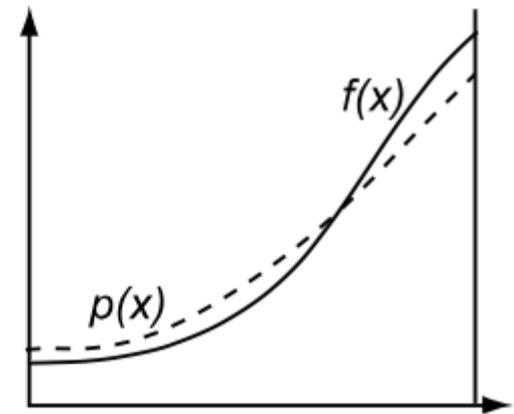
source : *Advanced Global Illumination*



Pire



OK



Meilleur

...mais dans tous les cas* $E[\langle I^N \rangle] = I$,
seule la vitesse de convergence change

(*) tant que $p(x)$ est non-nul quand $f(x)$ est non-nul

Stratégies d'échantillonnage

1. **Stratification**
2. Quasi-Monte Carlo

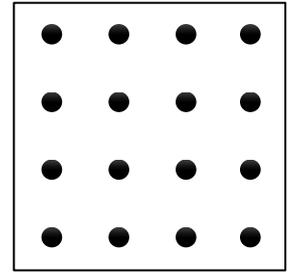
Propriétés désirées

Distribution **uniforme sur la surface**

Distribution **uniforme après projection** sur les axes

⇒ Maximiser la plus petite **distance entre 2 échantillons**
pour éviter les zones sous- ou sur-échantillonnées

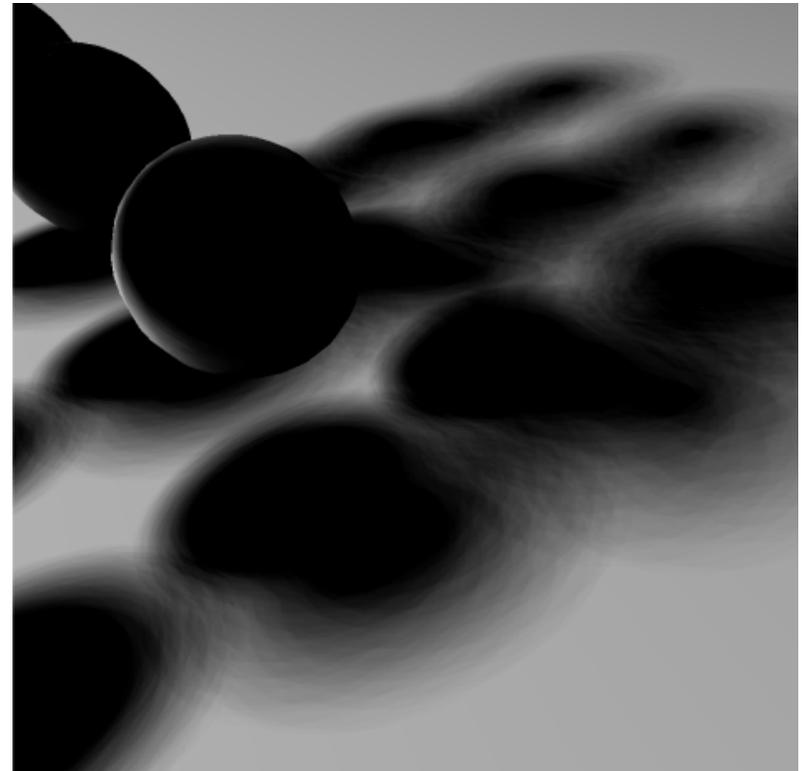
Régulier



Distribuer sur une **grille régulière**

⇒ échantillons corrélés

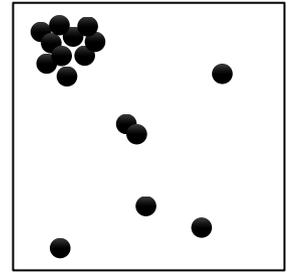
⇒ aliasing : la régularité se voit dans l'image



Aléatoire uniforme

Tirer **uniformément** dans $[0,1[\times [0,1[$

- ⇒ remplace l'aliasing par du bruit
- ⇒ nécessite moins d'échantillons
- ⇒ localement pas uniforme
(ex. : tous les échantillons dans un coin)



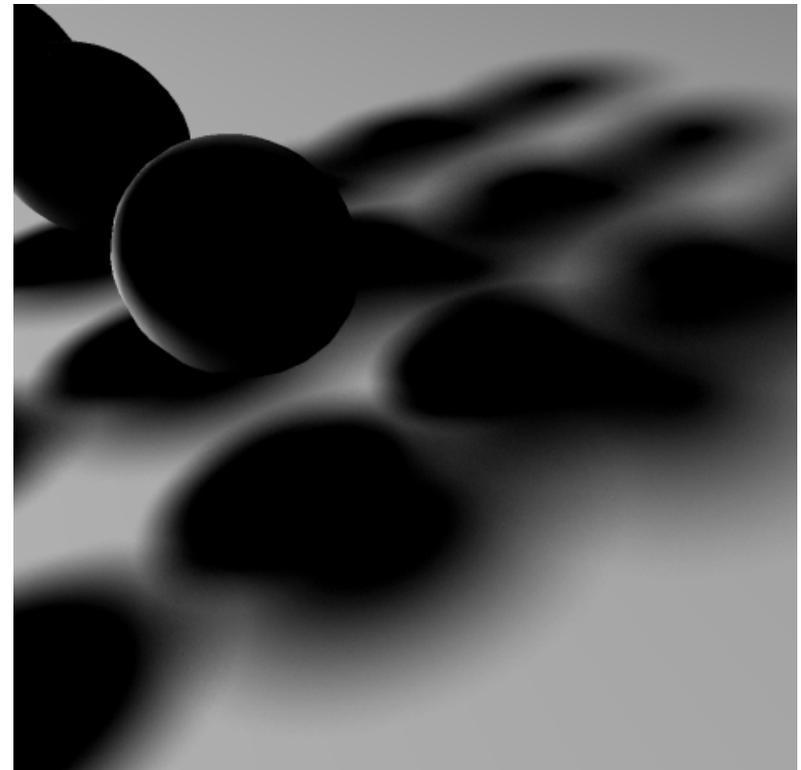
Stratified sampling

•		•	
•		•	•
•	•	•	•
•	•	•	•

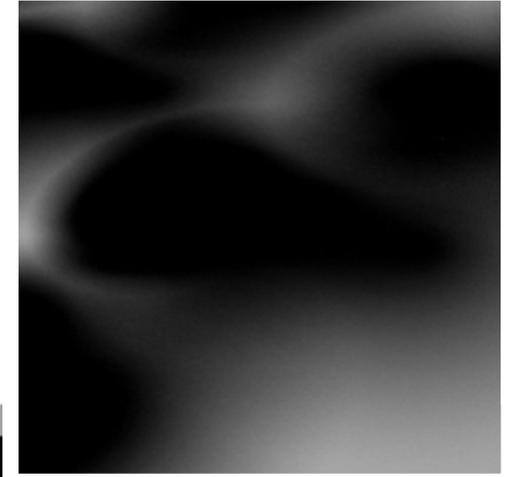
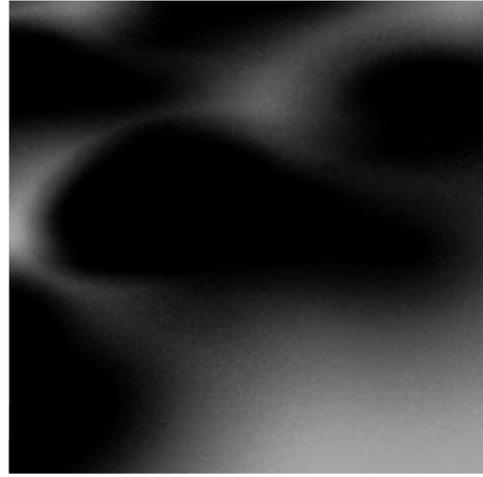
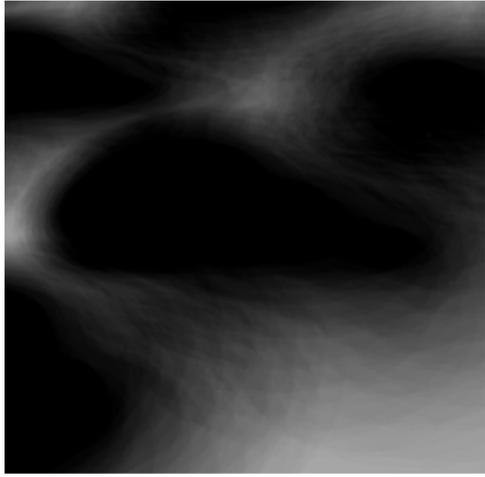
1. **Subdiviser le domaine** en sous-régions (*stratum*) sans recouvrements

2. **Tirer un échantillon par *stratum***

- ⇒ réduit les agrégats,
mais pas toujours uniforme
- ⇒ nombre d'échantillons fixé
par la grille



Stratégies d'échantillonnage

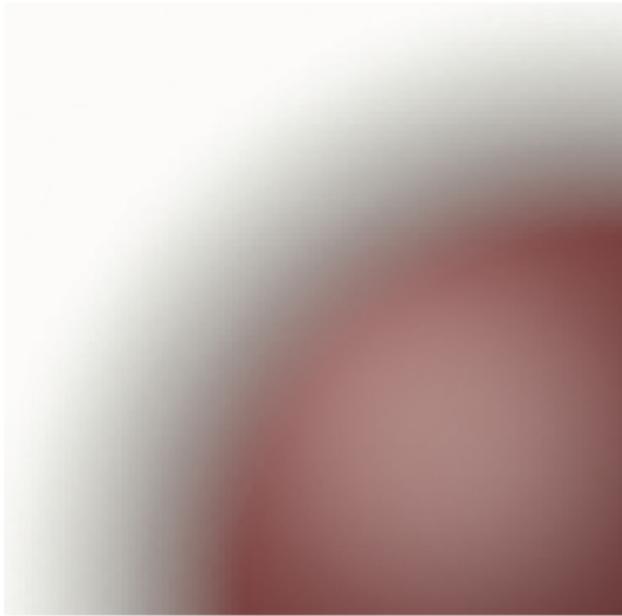


64 échantillons réguliers

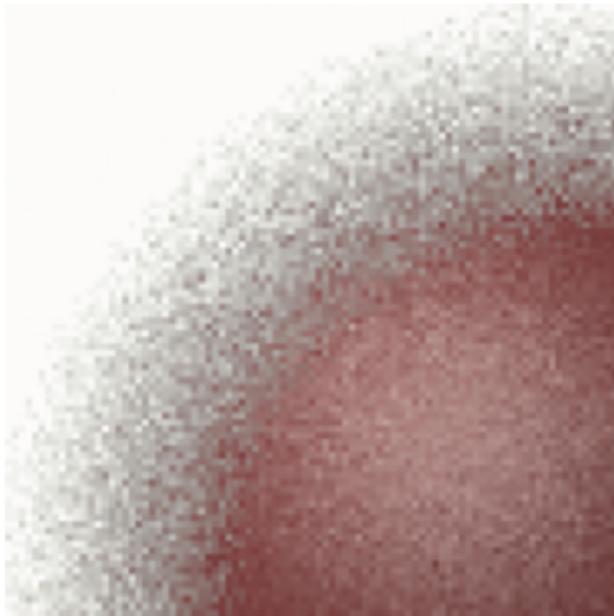
64 échantillons aléatoires

64 échantillons stratifiés

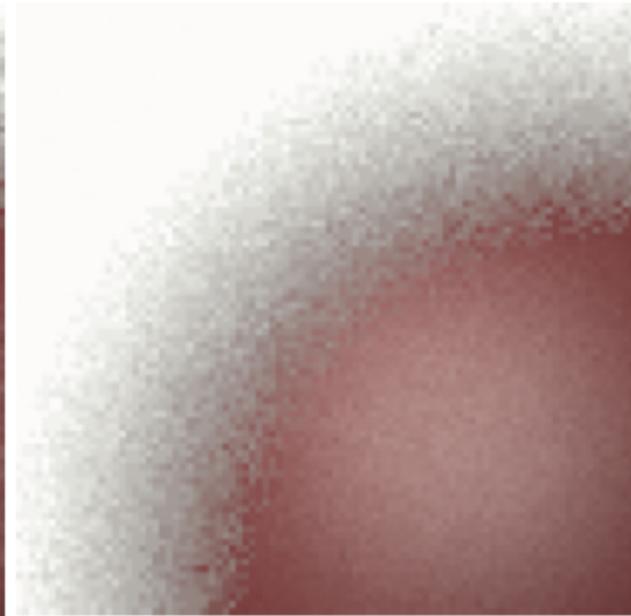
Stratégies d'échantillonnage



référence



N échantillons aléatoires



N échantillons stratifiés

Latin Hypercube Sampling (LHS)

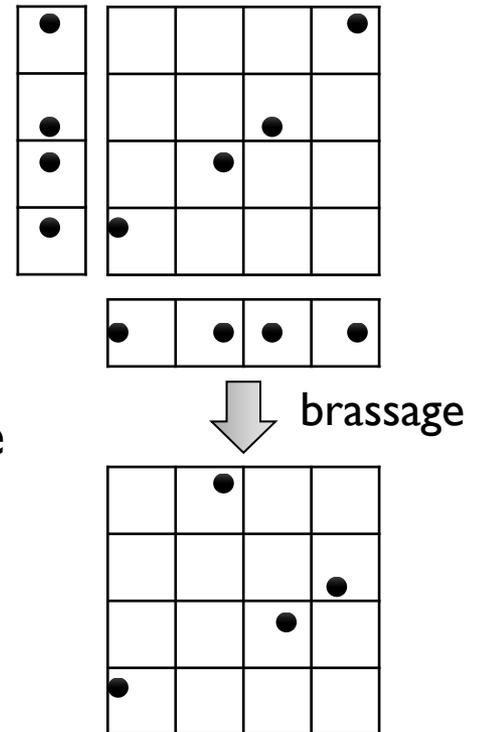
1. Générer un échantillon par cellule de la **diagonale**

2. **Brassage aléatoire** des échantillons dans chaque dimension

⇒ distribution reste uniforme selon les axes

⇒ permet de générer un nombre **arbitraire** d'échantillons (taille de la diagonale)

...mais pas de garantie quant à l'uniformité globale des échantillons en 2D



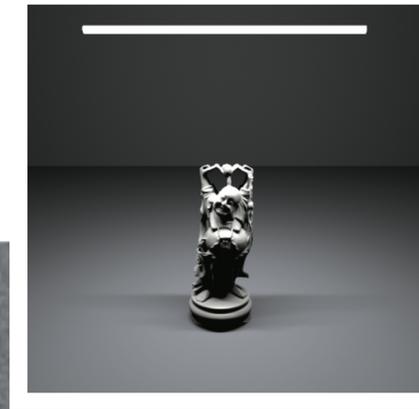
En plus hautes dimensions

Générer n^d échantillons

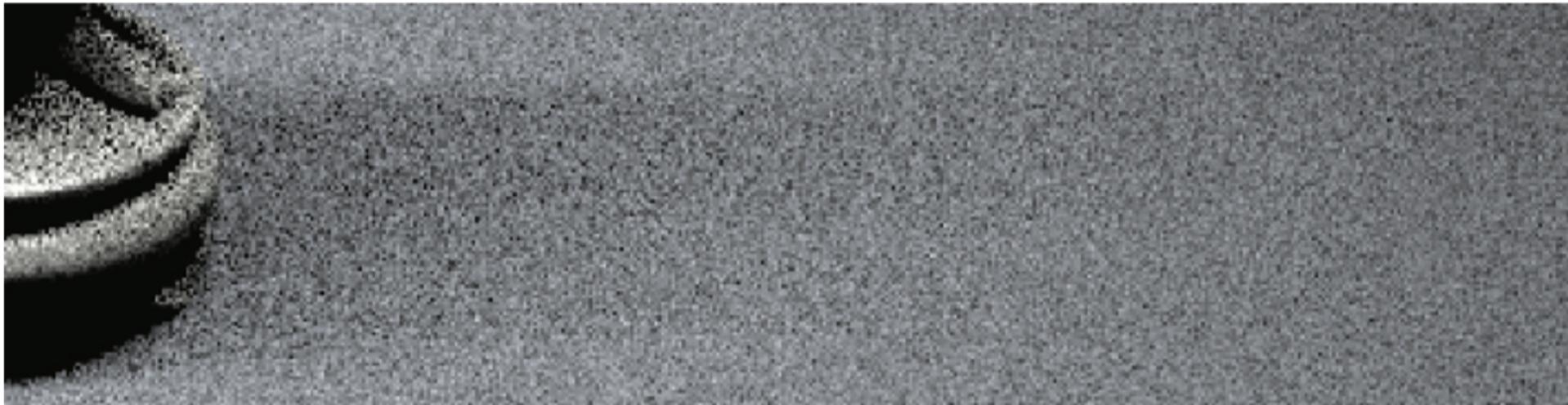
- $d = 2 \Rightarrow$ surface (lampe, pixel...)
- $d = 3 \Rightarrow$ surface + temps
- $d = 5 \Rightarrow$ pixel + temps + lentille

Au lieu de générer n^5 échantillons, générer $n^2 + n + n^2$ échantillons et les combiner aléatoirement

En plus hautes dimensions



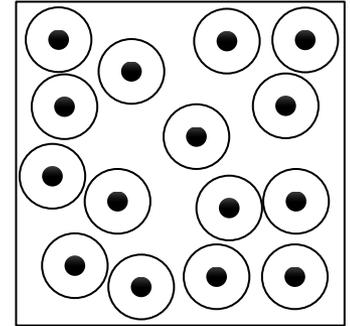
16 échantillons par pixel – 16 échantillons stratifiés d'ombre



16 échantillons stratifiés par pixel – 1 échantillons aléatoires d'ombre

source : PBRT

Poisson disk sampling



Distribution des photorécepteurs de la rétine

Distribution aléatoire, mais **distance minimum**
entre 2 échantillons

Dart Throwing [Cook 86]

- générer un échantillon aléatoirement et tester s'il est valide
- convergence non garantie

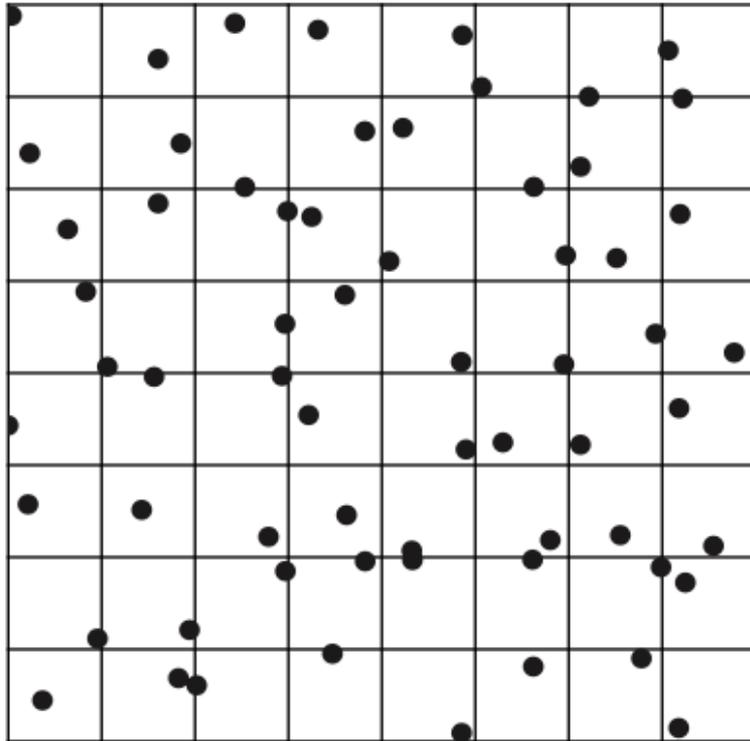
```
i = 0
while i < N
    xi = randfrom [0,1[
    yi = randfrom [0,1[
    reject = false
    for j=0 to i-1
        if (xi - xj)2 + (yi -
yj)2 < d2
            reject = true
            break
    if not reject
```

```
i = i+1
```

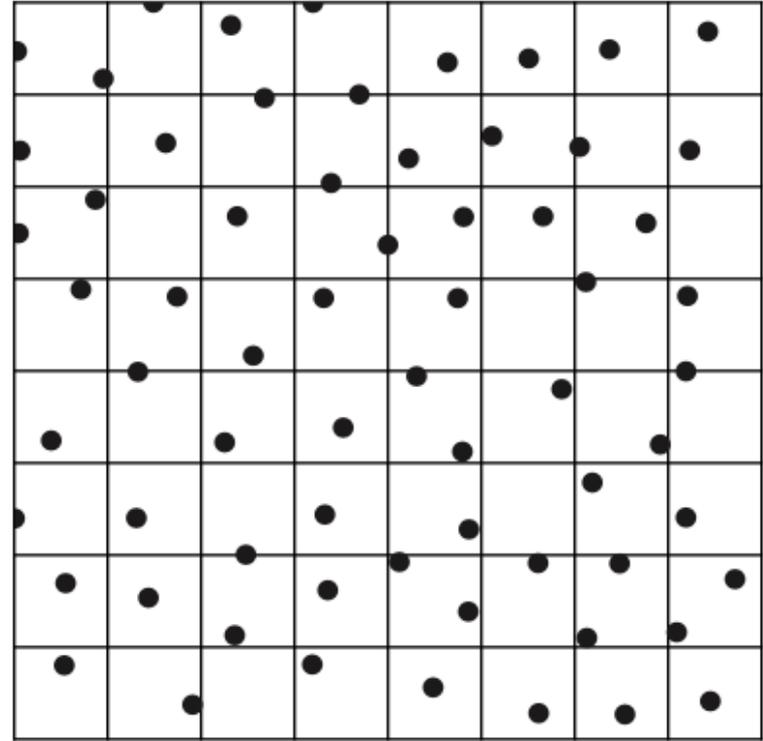
Best-candidate [Mitchell 91]

Approximation :

- générer aléatoirement k candidats (k grand)
- garder celui étant le plus éloigné de tous les précédents



stratified



best-candidate

Stratégies d'échantillonnage

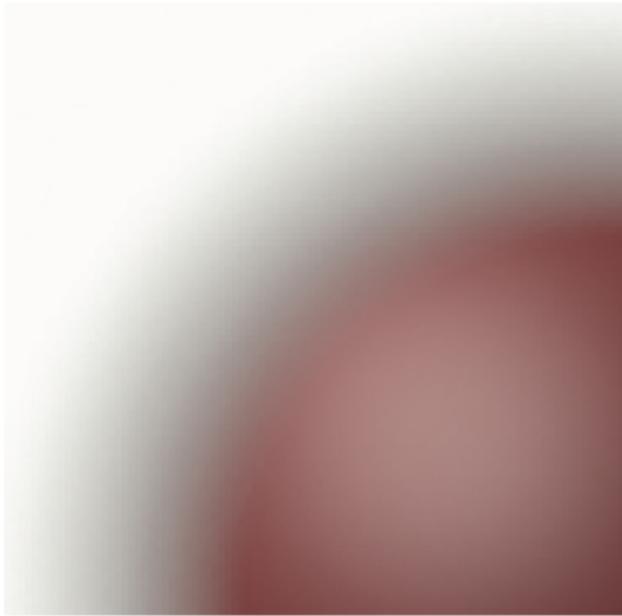


stratified sampling, 4 sample/pixel

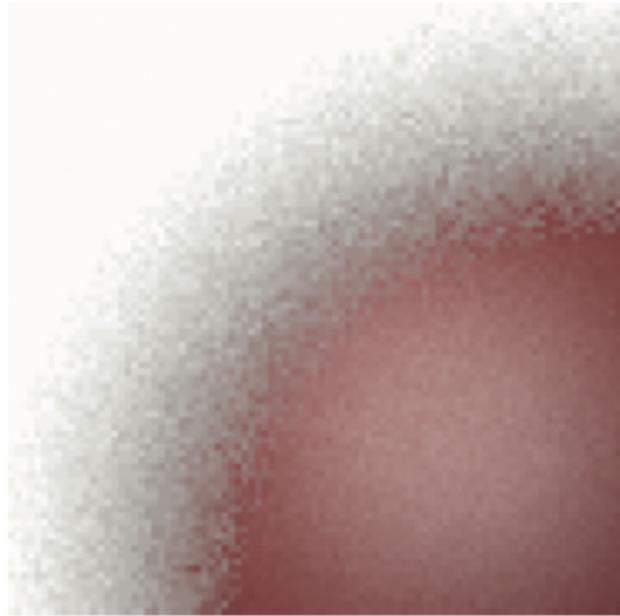


best-candidate, 4 sample/pixel

Stratégies d'échantillonnage



référence

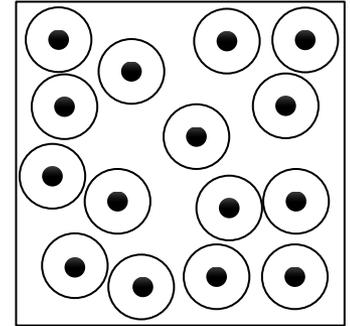


stratified sampling



best-candidate sampling

Poisson disk sampling



Distribution des photorécepteurs de la rétine

Distribution aléatoire, mais **distance minimum**
entre 2 échantillons

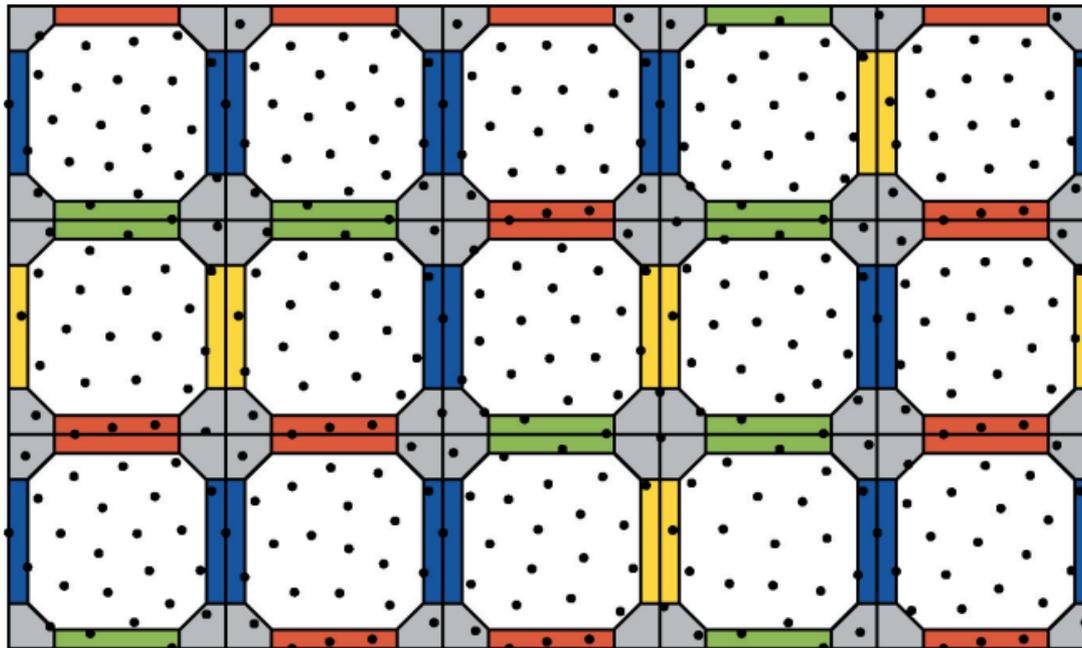
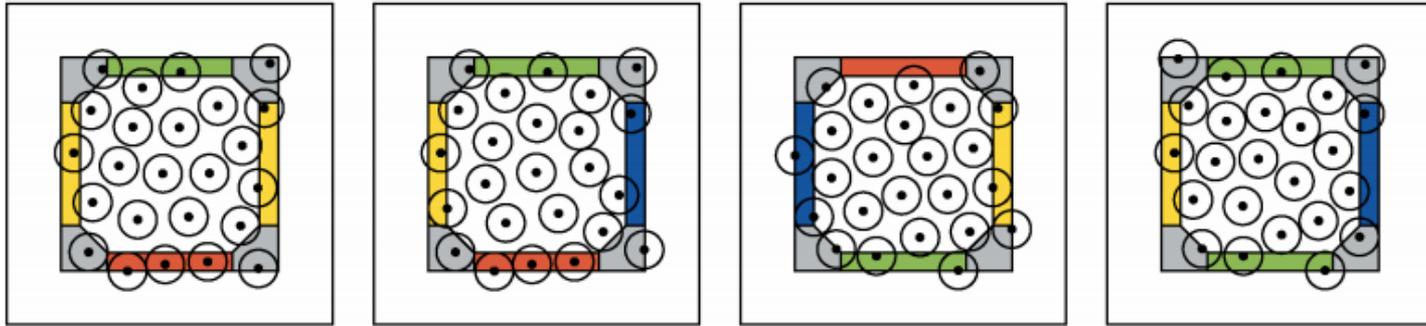
⇒ **structure d'accélération**, e.g., [Dunbar & Humphreys 06]

⇒ **pré-calcul de “tileable pattern”**

e.g., [Lagae & Dutré 05, Kopf et al. 06]

Poisson disk sampling par pavage

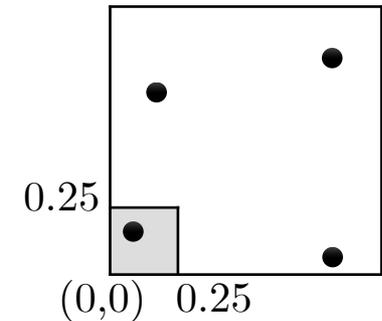
[Lagae & Dutré 05]



Stratégies d'échantillonnage

1. Stratification
2. **Quasi-Monte Carlo**

Low-Discrepancy Sampling



Principe général dans $[0,1]^d$

- Chaque fraction de l'espace à échantillonner devrait contenir la même fraction d'échantillons
- **Discrépance** : différence max entre ces deux fractions

⇒ plus la différence est faible, plus la discrétance est basse

$B = \{[0, v_1] \times [0, v_2] \times \dots \times [0, v_n]\}$ $0 \leq v_i \leq 1$ fractions de l'espace

$P = \{x_1 \dots x_n\}$ échantillons

$D_N^*(B, P) = \sup_{b \in B} \left| \frac{\#\{x_i \in b\}}{N} - \lambda(b) \right|$ discrétance

- Formule analytique en 1D :

$$D_N^*(x_i) = \frac{1}{2N} + \max_{1 \leq i \leq N} \left| x_i - \frac{2i-1}{2N} \right|$$

- Estimation numérique en dimensions supérieures

Low-Discrepancy Sampling

Les suites à **faible discrédance** sont **uniformes**

Aussi appelées **quasi-** ou **sous-aléatoires**

(suite déterministe, pas aléatoires ni pseudo-aléatoires)

⇒ **Comment les construire ?**

Radical Inverse

Un **entier positif** k peut s'écrire comme :

$$k = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_rp^r$$

avec une base p et $a_i \in [0, p - 1]$ les entiers correspondants à la décomposition de k dans la base p

La **radical inverse function** Φ_p convertit k en un réel dans $[0, 1[$:

$$\Phi_p(k) = 0.a_0a_1\dots a_r = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_r}{p^{r+1}}$$

```
p'=p, k'=k, f=0
while (k'>0) do
  a = (k' % p)
  f = f + a/p'
  k' = int(k'/p)
  p' = p'*p
```

Séquence de Van der Corput

Base **binaire** ($p = 2$)

k	binaire	<i>radical inverse</i> binaire	<i>radical inverse</i>	$\Phi_2(k)$
1	1	0.1	1/2	0.5
2	10	0.01	1/4	0.25
3	11	0.11	1/2 + 1/4	0.75
4	100	0.001	1/8	0.125
5	101	0.101	1/2 + 1/8	0.635
6	110	0.011	1/4 + 1/8	0.325
7	111	0.111	1/2 + 1/4 + 1/8	0.875
8	1000	0.0001	1/16	0.0625

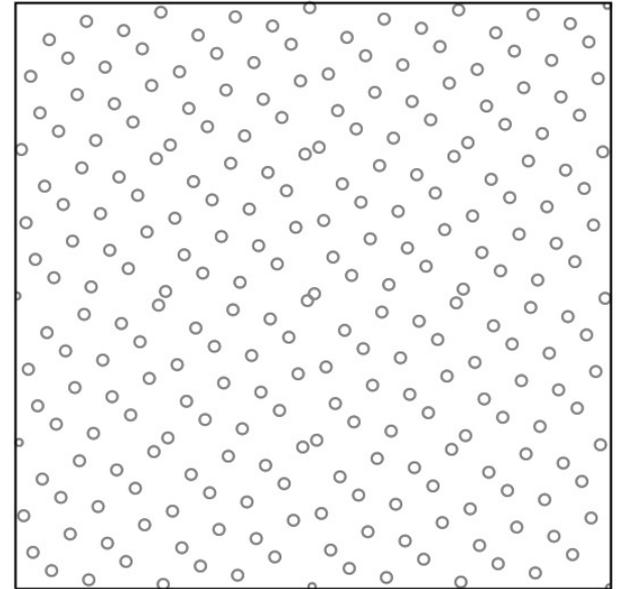
Séquence d'Hammersley

En 2D :

$$\left(\frac{k}{N}, \Phi_2(k) \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Discrépance : $D_N^* = \left(\frac{\log(N)}{N} \right)$

\Rightarrow limitation : N est fixé



256 échantillons

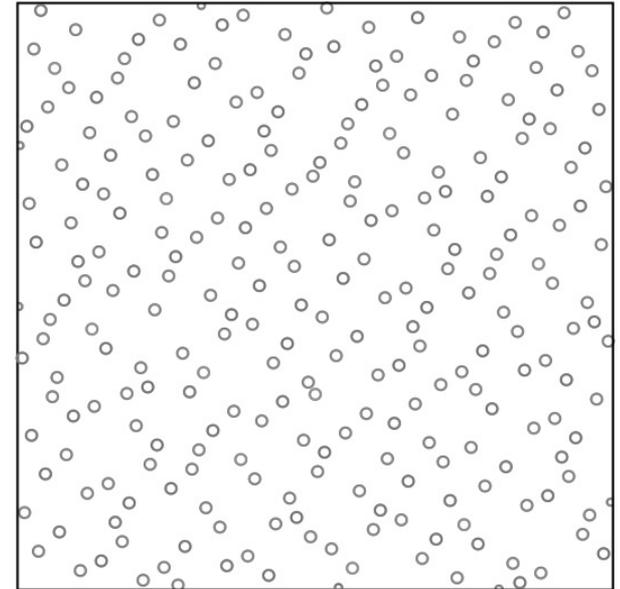
Séquence de Halton

En 2D :

$$(\Phi_{p_1}(k), \Phi_{p_2}(k)) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Discrépance : $D_N^* = \left(\frac{\log(N)^d}{N} \right)$

⇒ un peu moins bonne qu'Hammersley
mais N n'est pas fixé a priori



256 échantillons

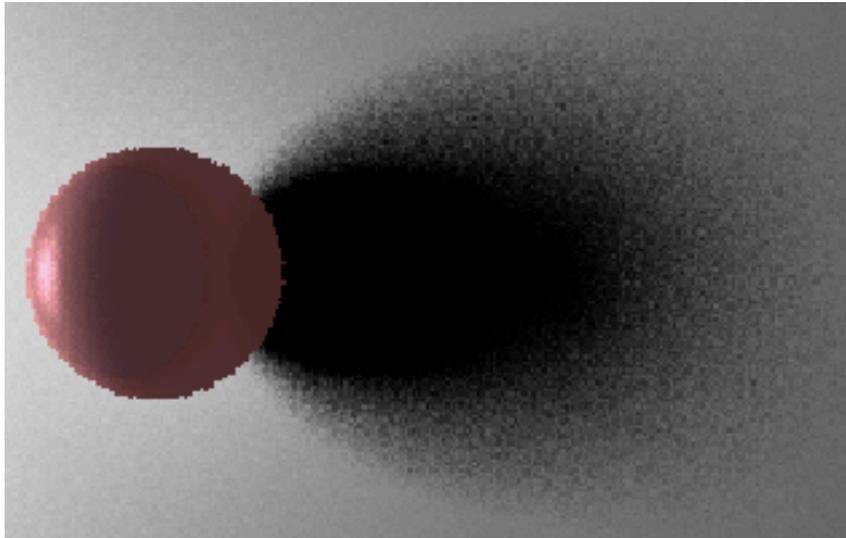
$p_1 = 2$, $p_2 = 3$

En n D :

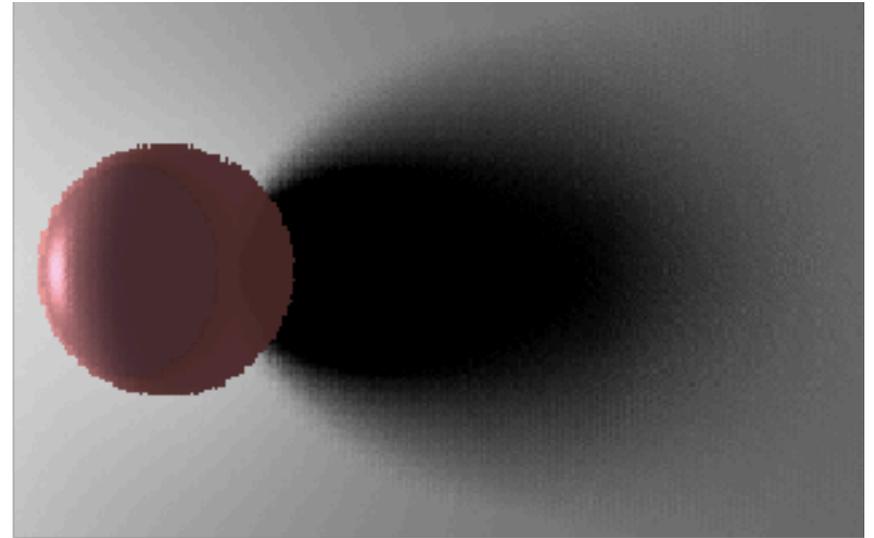
$$(\Phi_{p_1}(k), \Phi_{p_2}(k), \dots, \Phi_{p_n}(k)) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

où $p_1 \dots p_n$ sont premiers entre eux (ex : 2,3,5,...)

Séquence de Halton

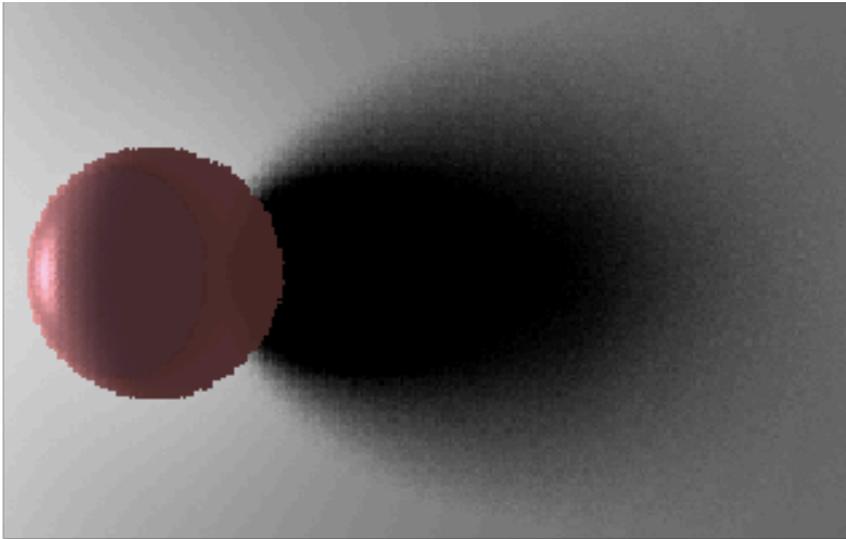


Aléatoire, 36 échantillons

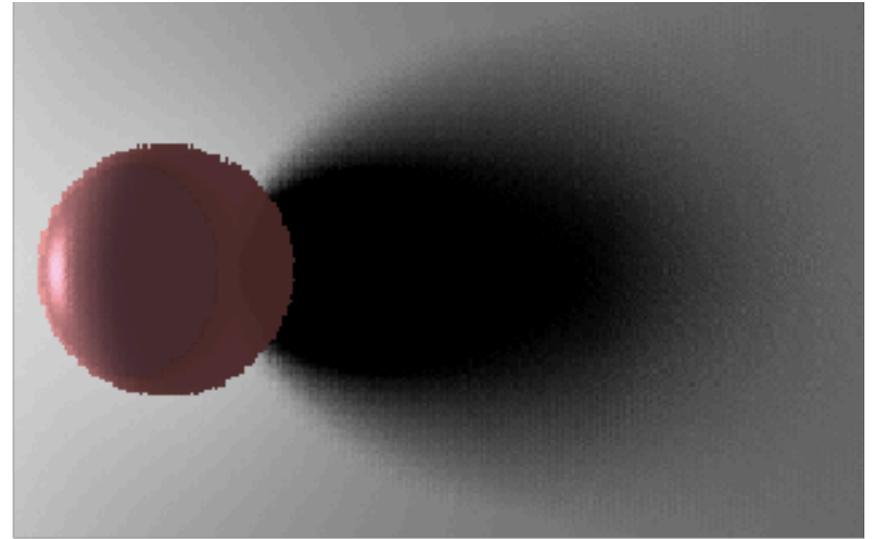


Halton, 36 échantillons

Séquence de Halton



Stratifié, 36 échantillons



Halton, 36 échantillons

référence

régulier

aléatoire

Hammersley

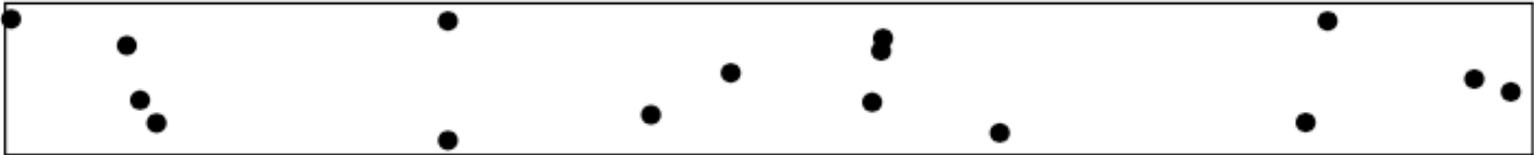
Halton 2-3

Poisson disk

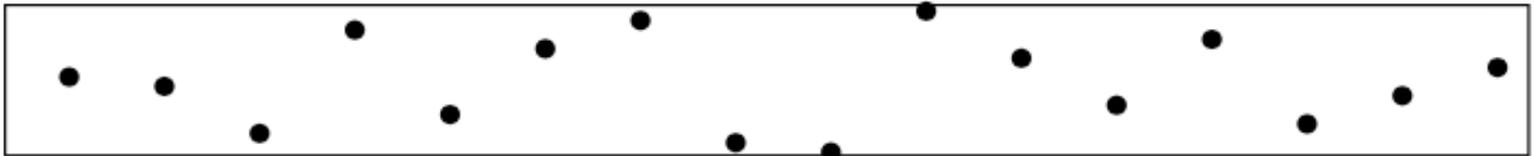
Distorsions

Échantillons tirés uniformément sur $[0,1[\times [0,1[$
sensibles aux **distorsions** après transformation

Stratified



Low-discrepancy



Reconstruction de l'image finale

Entrée : échantillons de la caméra (x_i, y_i)

Sortie : pixels de l'image finale $I(x, y)$

Théorie du signal :

1. reconstruire une image continue L à partir des échantillons
2. préfiltrer L pour supprimer les fréquences supérieures à l'espacement des pixels (Nyquist)
3. échantillonner L sur la grille de pixels

⇒ inutile de représenter L explicitement

⇒ effectuer 1. et 2. simultanément en **un seul filtre f** :

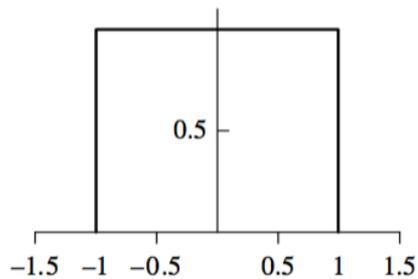
$$I(x, y) = \frac{\sum_i f(x - x_i, y - y_i) L(x_i, y_i)}{\sum_i f(x - x_i, y - y_i)}$$

Filtre de reconstruction

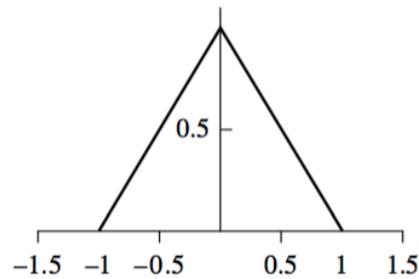
Box, Triangle, Gaussien, Mitchell... lequel choisir ?

- Pas un filtre idéal
- Dépend de la scène
- Dépend de la méthode d'échantillonnage

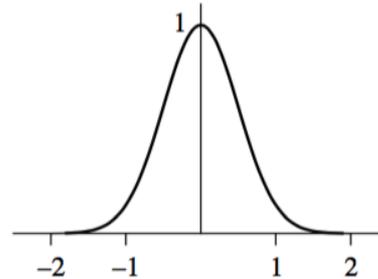
⇒ mesures **quantitative** (MSE) et jugement **qualitatif**



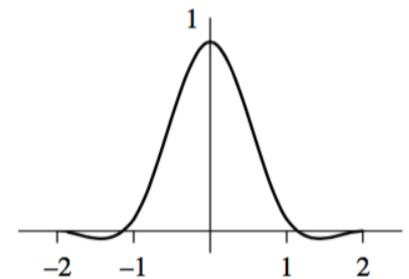
Box



Triangle

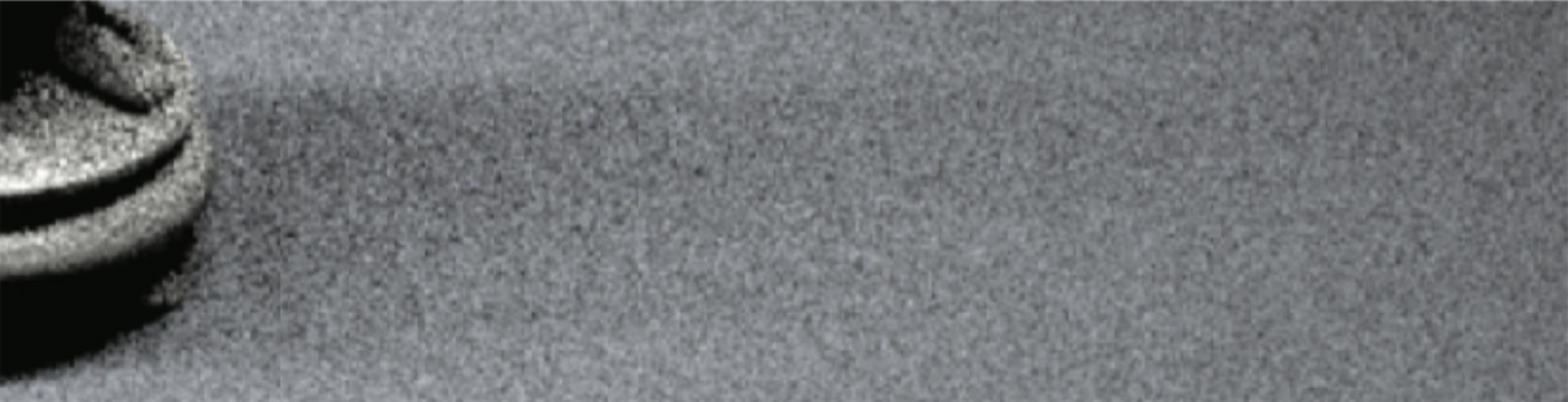


Gaussien

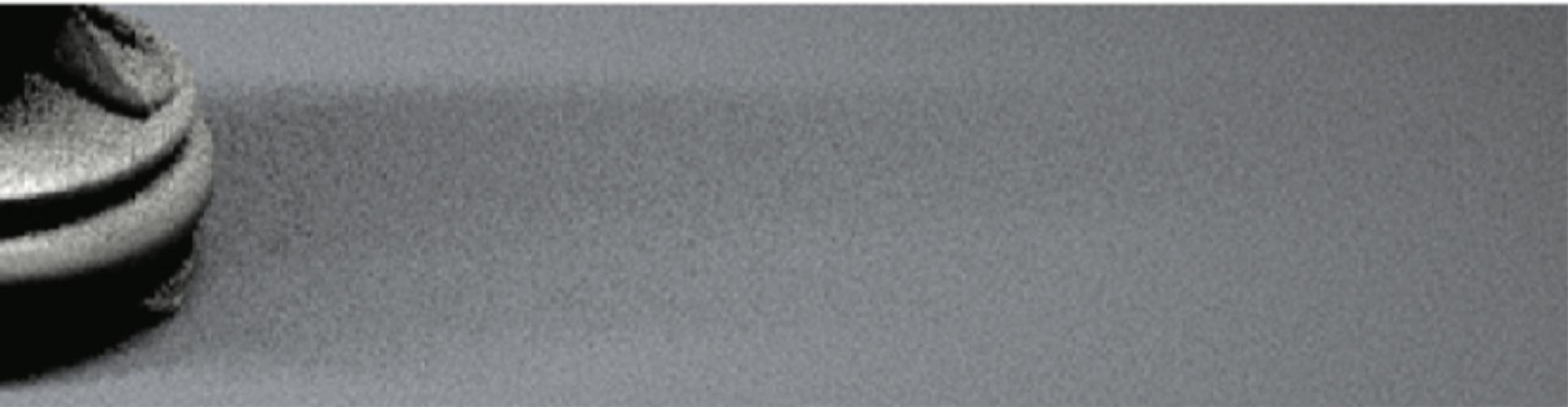


Mitchell

Filtre de reconstruction



Stratified sampling – filtre de Mitchell



Low-discrepancy sampling – filtre de Mitchell