

Algébricité de modèles de marches à grands pas dans le quart de plan

Pierre Bonnet

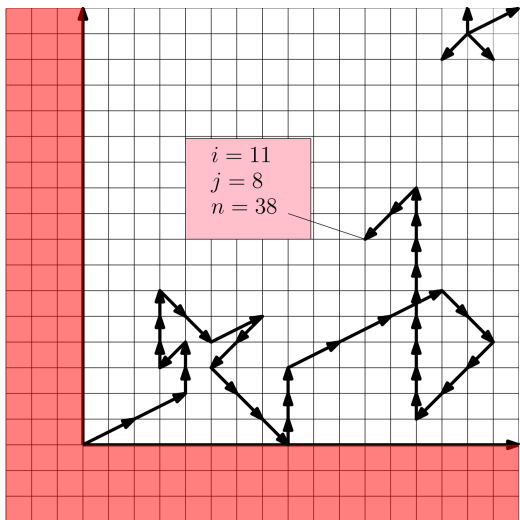
- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite
- 4 Invariants et découplage
- 5 Appendice

Plan

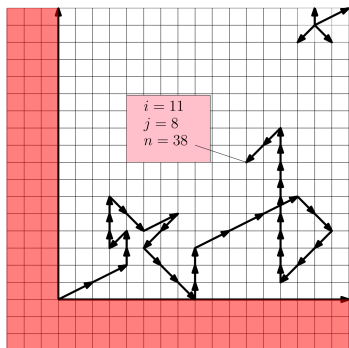
- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite
- 4 Invariants et découplage
- 5 Appendice

Marche dans le quart de plan

$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$



Équation fonctionnelle



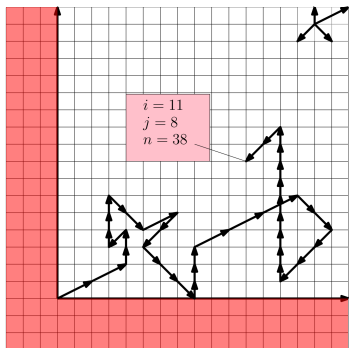
$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \bar{x}\bar{y} + y + x^2y + x\bar{y}$$

(On note $\bar{x} = \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned}
 Q(x, y) &= 1 \\
 &+ tyQ(x, y) \\
 &+ tx^2yQ(x, y) \\
 &+ tx\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0)) \\
 &+ t\bar{x}\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0) - Q(0, y) \\
 &+ Q(0, 0))
 \end{aligned}$$

Équation fonctionnelle



$$xy(1 - tS(x, y))Q(x, y)$$

$$= xy - t(x^2 + 1)Q(x, 0) - tQ(0, y) + tQ(0, 0)$$

En règle générale, si les pas qui reculent sont petits, la série génératrice Q vérifie une équation de la forme :

$$K(x, y)Q(x, y) = xy + A(x) + B(y)$$

$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \bar{x}\bar{y} + y + x^2y + x\bar{y}$$

$$K(x, y) = xy(1 - tS(x, y))$$

Classification

Comptage direct des marches : trop difficile

Classification des séries génératrices des marches :

- Rationnelle
- Algébrique
- D-finie (solution d'une EDL à coefficients rationnels)
- D-algébrique (solution d'une équation polynomiale impliquant des dérivées partielles)
- D-transcendante ?

Classification

Comptage direct des marches : trop difficile

Classification des séries génératrices des marches :

- Rationnelle
- Algébrique
- D-finie (solution d'une EDL à coefficients rationnels)
- D-algébrique (solution d'une équation polynomiale impliquant des dérivées partielles)
- D-transcendante ?

Classification

Comptage direct des marches : trop difficile

Classification des séries génératrices des marches :

- Rationnelle
- Algébrique
- D-finie (solution d'une EDL à coefficients rationnels)
- D-algébrique (solution d'une équation polynomiale impliquant des dérivées partielles)
- D-transcendante ?

Classification

Comptage direct des marches : trop difficile

Classification des séries génératrices des marches :

- Rationnelle
- Algébrique
- D-finie (solution d'une EDL à coefficients rationnels)
- D-algébrique (solution d'une équation polynomiale impliquant des dérivées partielles)
- D-transcendante ?

Classification

Comptage direct des marches : trop difficile

Classification des séries génératrices des marches :

- Rationnelle
- Algébrique
- D-finie (solution d'une EDL à coefficients rationnels)
- D-algébrique (solution d'une équation polynomiale impliquant des dérivées partielles)
- D-transcendante ?

Classification

Comptage direct des marches : trop difficile

Classification des séries génératrices des marches :

- Rationnelle
- Algébrique
- D-finie (solution d'une EDL à coefficients rationnels)
- D-algébrique (solution d'une équation polynomiale impliquant des dérivées partielles)
- D-transcendante ?

Classification

Comptage direct des marches : trop difficile

Classification des séries génératrices des marches :

- Rationnelle
- Algébrique
- D-finie (solution d'une EDL à coefficients rationnels)
- D-algébrique (solution d'une équation polynomiale impliquant des dérivées partielles)
- D-transcendante ?

Petits pas

Un modèle est dit à petits pas s'ils sont dans $\{-1, 0, 1\}^2$.

En éliminant les cas triviaux (unidirectionnels, unidimensionnels, symétries...), on se ramène à 79 modèles non-triviaux (M. Bousquet-Mélou, M. Mishna).

Pour ces 79 modèles :

- 4 + 19 modèles : $Q(x, y; t)$ algébrique ou D-finie, (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, M. van Hoeij, M. Kauers, M. Mishna ...)
- 56 modèles : $Q(x, y; t)$ pas D-finie
 - Combinatoire : S. Melczer, M. Mishna, A. Rechnitzer, ...
 - Calcul formel : A. Bostan, B. Salvy, ...
 - Probabilités / analyse : K. Raschel, I. Kurkova, ...
 - Galois diff : C. Hardouin, J. Roques, M. Singer, ...

Petits pas

Un modèle est dit à petits pas s'ils sont dans $\{-1, 0, 1\}^2$.

En éliminant les cas triviaux (unidirectionnels, unidimensionnels, symétries...), on se ramène à 79 modèles non-triviaux (M. Bousquet-Mélou, M. Mishna).

Pour ces 79 modèles :

- 4 + 19 modèles : $Q(x, y; t)$ algébrique ou D-finie, (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, M. van Hoeij, M. Kauers, M. Mishna ...)
- 56 modèles : $Q(x, y; t)$ pas D-finie
 - Combinatoire : S. Melczer, M. Mishna, A. Rechnitzer, ...
 - Calcul formel : A. Bostan, B. Salvy, ...
 - Probabilités / analyse : K. Raschel, I. Kurkova, ...
 - Galois diff : C. Hardouin, J. Roques, M. Singer, ...

Petits pas

Un modèle est dit à petits pas s'ils sont dans $\{-1, 0, 1\}^2$.

En éliminant les cas triviaux (unidirectionnels, unidimensionnels, symétries...), on se ramène à 79 modèles non-triviaux (M. Bousquet-Mélou, M. Mishna).

Pour ces 79 modèles :

- 4 + 19 modèles : $Q(x, y; t)$ algébrique ou D-finie, (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, M. van Hoeij, M. Kauers, M. Mishna ...)
- 56 modèles : $Q(x, y; t)$ pas D-finie
 - Combinatoire : S. Melczer, M. Mishna, A. Rechnitzer, ...
 - Calcul formel : A. Bostan, B. Salvy, ...
 - Probabilités / analyse : K. Raschel, I. Kurkova, ...
 - Galois diff : C. Hardouin, J. Roques, M. Singer, ...

Petits pas

Un modèle est dit à petits pas s'ils sont dans $\{-1, 0, 1\}^2$.

En éliminant les cas triviaux (unidirectionnels, unidimensionnels, symétries...), on se ramène à 79 modèles non-triviaux (M. Bousquet-Mélou, M. Mishna).

Pour ces 79 modèles :

- 4 + 19 modèles : $Q(x, y; t)$ algébrique ou D-finie, (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, M. van Hoeij, M. Kauers, M. Mishna ...)
- 56 modèles : $Q(x, y; t)$ pas D-finie
 - Combinatoire : S. Melczer, M. Mishna, A. Rechnitzer, ...
 - Calcul formel : A. Bostan, B. Salvy, ...
 - Probabilités / analyse : K. Raschel, I. Kurkova, ...
 - Galois diff : C. Hardouin, J. Roques, M. Singer, ...

Grands pas

Classification des pas de taille 3 (dans $\{-1, 0, 1, 2\}^2$) (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, S. Melczer) :

13079 modèles non-triviaux :

- 2 ? modèles algébriques (G1 et G2)
- 227 + 11 ? modèles D-finis (Hadamard + sporadiques)
- 12854 + 16 ? modèles non D-finis

Grands pas

Classification des pas de taille 3 (dans $\{-1, 0, 1, 2\}^2$) (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, S. Melczer) :

13079 modèles non-triviaux :

- 2 ? modèles algébriques (G1 et G2)
- 227 + 11 ? modèles D-finis (Hadamard + sporadiques)
- 12854 + 16 ? modèles non D-finis

Grands pas

Classification des pas de taille 3 (dans $\{-1, 0, 1, 2\}^2$) (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, S. Melczer) :

13079 modèles non-triviaux :

- 2 ? modèles algébriques (G1 et G2)
- 227 + 11 ? modèles D-finis (Hadamard + sporadiques)
- 12854 + 16 ? modèles non D-finis

Grands pas

Classification des pas de taille 3 (dans $\{-1, 0, 1, 2\}^2$) (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, S. Melczer) :

13079 modèles non-triviaux :

- 2 ? modèles algébriques (G1 et G2)
- 227 + 11 ? modèles D-finis (Hadamard + sporadiques)
- 12854 + 16 ? modèles non D-finis

Grands pas

Classification des pas de taille 3 (dans $\{-1, 0, 1, 2\}^2$) (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, S. Melczer) :

13079 modèles non-triviaux :

- 2 ? modèles algébriques (G1 et G2)
- 227 + 11 ? modèles D-finis (Hadamard + sporadiques)
- 12854 + 16 ? modèles non D-finis

Algébricité des modèles G1 et G2

Théorème (P. B.)

Ces deux modèles donnent lieu à des séries algébriques :



Plan

- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite
- 4 Invariants et découplage
- 5 Appendice

Équations d'une variable catalytique

Théorème (Popescu, puis Bousquet-Mélou et Jehanne)

Les solutions d'une équation à une variable catalytique bien formée sont algébriques, et ce de manière effective.

⇒ trouver des équations d'une variable catalytique sur les séries inconnues $Q(x, 0)$ et $Q(0, y)$.

Équations d'une variable catalytique

Théorème (Popescu, puis Bousquet-Mélou et Jehanne)

Les solutions d'une équation à une variable catalytique bien formée sont algébriques, et ce de manière effective.

⇒ trouver des équations d'une variable catalytique sur les séries inconnues $Q(x, 0)$ et $Q(0, y)$.

Invariants (O. Bernardi, M. Bousquet-Mélou, K. Raschell)

Définition

Soit $H = \sum_n c_n(x, y)t^n \in Q(x, y)((t))$. On dit que H est à pôles d'ordre borné si $c_n = \frac{v_n(x, y)}{a_n(x)b_n(y)}$ et l'ordre des pôles en $x = 0$ et $y = 0$ de ces coefficients est borné indépendamment de n .

Définition (Invariants)

Une paire de séries génératrices $(I(x; t), J(y; t))$ est une paire d'invariants si $(I(x) - J(y))/K(x, y)$ est à pôles d'ordre borné.

Invariants

Exemple (Kreweras)



$$K(x, y) = xy - tx - ty - tx^2y^2$$
$$(I(x), J(y)) = \left(\frac{tx^3 - t + x}{tx^2}, \frac{ty^3 - t + y}{ty^2} \right) : \frac{I(x) - J(y)}{K(x, y)} = \frac{y - x}{txy}.$$

Invariants

Proposition (Stabilité)

Les paires d'invariants sont stables par addition et multiplication.

Lemme (dit des invariants)

Si $(I(x), J(y))$ est une paire d'invariants tels que tous les coefficients en t de $\frac{I(x)-J(y)}{K(x,y)}$ sont sans pôle en $x = 0$ et en $y = 0$, alors $I(x) = J(y) = A(t)$.

Invariants

Où trouver des invariants ?

- À partir du noyau (invariants rationnels)
- À partir de l'équation (invariants faisant intervenir les séries inconnues)

$$K(x, y)Q(x, y) = xy + A(x) + B(y)$$

En supposant $xy = F(x) + G(y) + K(x, y)R(x, y)$,

$$F(x), G(y), R(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$$

$$\Rightarrow K(x, y)Q'(x, y) = (F(x) + A(x)) + (B(y) + G(y))$$

Suppose de *découpler* xy .

Invariants

Où trouver des invariants ?

- À partir du noyau (invariants rationnels)
- À partir de l'équation (invariants faisant intervenir les séries inconnues)

$$K(x, y)Q(x, y) = xy + A(x) + B(y)$$

En supposant $xy = F(x) + G(y) + K(x, y)R(x, y)$,

$$F(x), G(y), R(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$$

$$\Rightarrow K(x, y)Q'(x, y) = (F(x) + A(x)) + (B(y) + G(y))$$

Suppose de *découpler* xy .

Invariants

Où trouver des invariants ?

- À partir du noyau (invariants rationnels)
- À partir de l'équation (invariants faisant intervenir les séries inconnues)

$$K(x, y)Q(x, y) = xy + A(x) + B(y)$$

En supposant $xy = F(x) + G(y) + K(x, y)R(x, y)$,

$$F(x), G(y), R(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$$

$$\Rightarrow K(x, y)Q'(x, y) = (F(x) + A(x)) + (B(y) + G(y))$$

Suppose de *découpler* xy .

Invariants

Où trouver des invariants ?

- À partir du noyau (invariants rationnels)
- À partir de l'équation (invariants faisant intervenir les séries inconnues)

$$K(x, y)Q(x, y) = xy + A(x) + B(y)$$

En supposant $xy = F(x) + G(y) + K(x, y)R(x, y)$,

$$F(x), G(y), R(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$$

$$\Rightarrow K(x, y)Q'(x, y) = (F(x) + A(x)) + (B(y) + G(y))$$

Suppose de *découpler* xy .

Invariants

Où trouver des invariants ?

- À partir du noyau (invariants rationnels)
- À partir de l'équation (invariants faisant intervenir les séries inconnues)

$$K(x, y)Q(x, y) = xy + A(x) + B(y)$$

En supposant $xy = F(x) + G(y) + K(x, y)R(x, y)$,

$$F(x), G(y), R(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$$

$$\Rightarrow K(x, y)Q'(x, y) = (F(x) + A(x)) + (B(y) + G(y))$$

Suppose de *découpler* xy .

Invariants

Où trouver des invariants ?

- À partir du noyau (invariants rationnels)
- À partir de l'équation (invariants faisant intervenir les séries inconnues)

$$K(x, y)Q(x, y) = xy + A(x) + B(y)$$

En supposant $xy = F(x) + G(y) + K(x, y)R(x, y)$,

$$F(x), G(y), R(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$$

$$\Rightarrow K(x, y)Q'(x, y) = (F(x) + A(x)) + (B(y) + G(y))$$

Suppose de *découpler* xy .

Invariants

Où trouver des invariants ?

- À partir du noyau (invariants rationnels)
- À partir de l'équation (invariants faisant intervenir les séries inconnues)

$$K(x, y)Q(x, y) = xy + A(x) + B(y)$$

En supposant $xy = F(x) + G(y) + K(x, y)R(x, y)$,

$$F(x), G(y), R(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$$

$$\Rightarrow K(x, y)Q'(x, y) = (F(x) + A(x)) + (B(y) + G(y))$$

Suppose de *découpler* xy .

Une stratégie de preuve d'algébricité

- 1 Obtenir une paire d'invariants rationnels.
- 2 Obtenir une paire d'invariants faisant intervenir les fonctions inconnues.
- 3 Combiner ces deux paires d'invariants avec des opérations algébriques pour en éliminer les pôles.
- 4 Traiter les deux équations d'une variable catalytique données par le lemme des invariants avec Bousquet-Mélou / Jehanne.

Une stratégie de preuve d'algébricité

- 1 Obtenir une paire d'invariants rationnels.
- 2 Obtenir une paire d'invariants faisant intervenir les fonctions inconnues.
- 3 Combiner ces deux paires d'invariants avec des opérations algébriques pour en éliminer les pôles.
- 4 Traiter les deux équations d'une variable catalytique données par le lemme des invariants avec Bousquet-Mélou / Jehanne.

Une stratégie de preuve d'algébricité

- 1 Obtenir une paire d'invariants rationnels.
- 2 Obtenir une paire d'invariants faisant intervenir les fonctions inconnues.
- 3 Combiner ces deux paires d'invariants avec des opérations algébriques pour en éliminer les pôles.
- 4 Traiter les deux équations d'une variable catalytique données par le lemme des invariants avec Bousquet-Mélou / Jehanne.

Plan

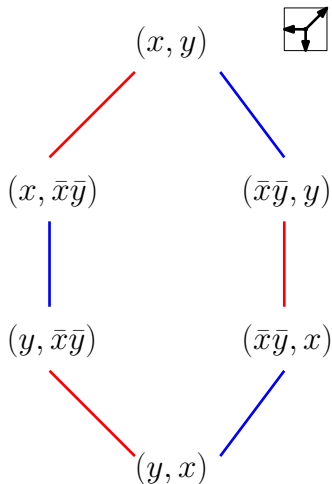
- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite**
- 4 Invariants et découplage
- 5 Appendice

Définition de l'orbite (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, S. Melczer)

L'*orbite du modèle*, notée \mathcal{O} , est l'ensemble des couples (u, v) d'éléments algébriques formés de la manière suivante :

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v).$$

Un exemple d'orbite



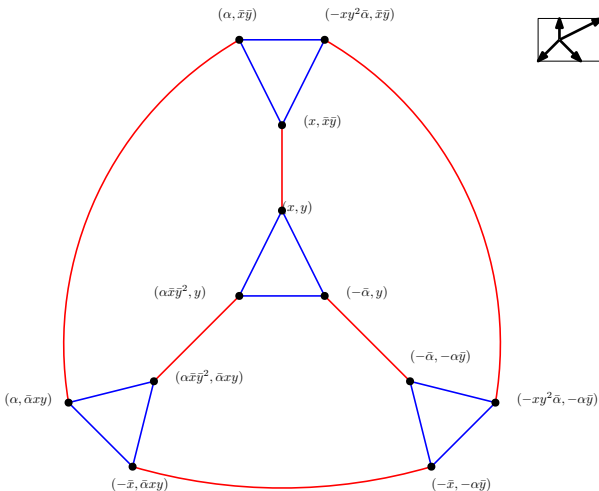
$$S(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$$

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \frac{1}{u'} + \frac{1}{v'} + u'v'$$

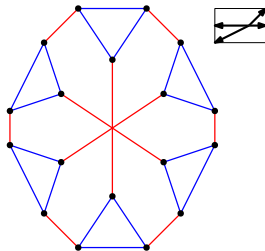
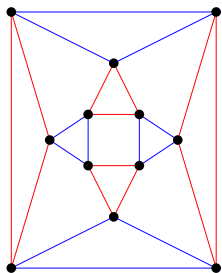
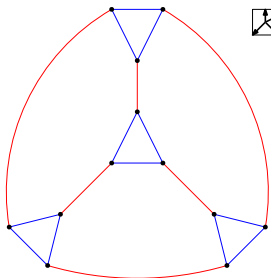
$$\Rightarrow \frac{v'-v}{vv'} = u(v'-v)$$

$$\Rightarrow v' = v \text{ ou } v' = \frac{1}{uv}$$

L'orbite du premier modèle



D'autres orbites à grands pas (Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer)



Plan

- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite
- 4 Invariants et découplage**
- 5 Appendice

Invariants

Théorème (Fried)

Il y a équivalence entre

- *l'orbite \mathcal{O} est finie*
- *il existe un invariant rationnel non-trivial*

Étant donné un modèle d'orbite finie, on dispose d'une procédure effective pour produire une paire d'invariants rationnels non-constants en x ou y .

Invariants

Théorème (Fried)

Il y a équivalence entre

- *l'orbite \mathcal{O} est finie*
- *il existe un invariant rationnel non-trivial*

Étant donné un modèle d'orbite finie, on dispose d'une procédure effective pour produire une paire d'invariants rationnels non-constants en x ou y .

Sommes d'orbite

Soit $H(X, Y, t) \in \mathbb{Q}(X, Y, t)$.

Si (u, v) est dans l'orbite, on peut évaluer $H(u, v)$.

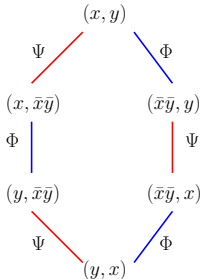
On étend cette évaluation à toute combinaison linéaire γ des paires de l'orbite en H_γ .

Ce procédé s'appelle une *somme d'orbite*.

Découplage et petits pas

Théorème (O. Bernardi, M. Bousquet-Mélou, K. Raschell)

Si l'orbite d'une marche à petits pas est finie, il existe une combinaison linéaire des paires de l'orbite $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$, telle que H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$.



$$\begin{aligned}
 6(x, y) &= \frac{1}{2}(1 + \Psi) (5 - 3(\Phi\Psi)^2 + (\Phi\Psi)) \\
 &+ \frac{1}{2}(1 + \Phi) (5 - 3(\Psi\Phi)^2 + (\Psi\Phi)) \\
 &+ (1 - \Psi + \Phi\Psi - \Psi\Phi\Psi \\
 &+ \Phi\Psi\Phi\Psi - \Psi\Phi\Psi\Phi\Psi)
 \end{aligned}$$

Découplage de (x, y)

Définition (Découplage de (x, y))

Soient γ_x , γ_y et α des combinaisons linéaires de sommets de l'orbite telles que $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$.

Si pour tout $H \in \mathbb{Q}(X, Y, t)$:

- $H_{\gamma_x} \in \mathbb{Q}(x, t)$
- $H_{\gamma_y} \in \mathbb{Q}(y, t)$
- $H_\alpha = 0$ si H découple

Alors on appelle cette équation un découplage de (x, y) .

Dans ce cas, H découple ssi $H_\alpha = 0$, et un découplage de H est donné par $H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage de (x, y)

Définition (Découplage de (x, y))

Soient γ_x , γ_y et α des combinaisons linéaires de sommets de l'orbite telles que $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$.

Si pour tout $H \in \mathbb{Q}(X, Y, t)$:

- $H_{\gamma_x} \in \mathbb{Q}(x, t)$
- $H_{\gamma_y} \in \mathbb{Q}(y, t)$
- $H_\alpha = 0$ si H découple

Alors on appelle cette équation un découplage de (x, y) .

Dans ce cas, H découple ssi $H_\alpha = 0$, et un découplage de H est donné par $H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

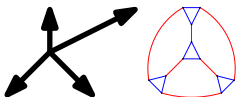
Le théorème de découplage

Théorème (P. B., C. Hardouin)

Pour n'importe quel modèle de pas dont l'orbite \mathcal{O} est finie, il existe un découplage de (x, y) .

Étant donné un modèle de pas dont l'orbite est finie, le calcul du découplage d'une fraction rationnelle est effectif.

Bilan des invariants du premier modèle



Invariants rationnels :

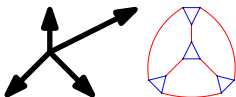
$$(I_1, J_1) = \left(\frac{(x^6 + x^4 - x^2 - 1)t^2 - x^3}{xt^2(x^2 + 1)^2}, \frac{ty^4 - y^3 - t}{ty^2} \right)$$

Découplage :

$$xy = \frac{x}{t(x^2 + 1)} - \frac{1}{y} + K(x, y)R(x, y)$$

$$(I_2, J_2) = \left(\frac{x}{t(x^2 + 1)} - t(x^2 + 1)Q(x, 0) + tQ(0, 0), \frac{1}{y} + tQ(0, y) \right)$$

Bilan des invariants du premier modèle



Invariants rationnels :

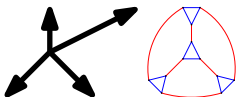
$$(I_1, J_1) = \left(\frac{(x^6 + x^4 - x^2 - 1)t^2 - x^3}{xt^2(x^2 + 1)^2}, \frac{ty^4 - y^3 - t}{ty^2} \right)$$

Découplage :

$$xy = \frac{x}{t(x^2 + 1)} - \frac{1}{y} + K(x, y)R(x, y)$$

$$(I_2, J_2) = \left(\frac{x}{t(x^2 + 1)} - t(x^2 + 1)Q(x, 0) + tQ(0, 0), \frac{1}{y} + tQ(0, y) \right)$$

Bilan des invariants du premier modèle



Invariants rationnels :

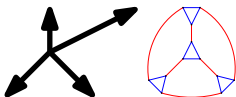
$$(I_1, J_1) = \left(\frac{(x^6 + x^4 - x^2 - 1)t^2 - x^3}{xt^2(x^2 + 1)^2}, \frac{ty^4 - y^3 - t}{ty^2} \right)$$

Découplage :

$$xy = \frac{x}{t(x^2 + 1)} - \frac{1}{y} + K(x, y)R(x, y)$$

$$(I_2, J_2) = \left(\frac{x}{t(x^2 + 1)} - t(x^2 + 1)Q(x, 0) + tQ(0, 0), \frac{1}{y} + tQ(0, y) \right)$$

Bilan des invariants du premier modèle



Invariants rationnels :

$$(I_1, J_1) = \left(\frac{(x^6 + x^4 - x^2 - 1)t^2 - x^3}{xt^2(x^2 + 1)^2}, \frac{ty^4 - y^3 - t}{ty^2} \right)$$

Découplage :

$$xy = \frac{x}{t(x^2 + 1)} - \frac{1}{y} + K(x, y)R(x, y)$$

$$(I_2, J_2) = \left(\frac{x}{t(x^2 + 1)} - t(x^2 + 1)Q(x, 0) + tQ(0, 0), \frac{1}{y} + tQ(0, y) \right)$$

Simplification de pôles

> I4;

$$\frac{(t^2 (x+1)^2 x^2 Q(x, \theta)^2 - 2 Q(x, \theta)^2 x^2 - 2 D[2](Q)(\theta, \theta) t x + x^2 - 1) (t^2 (x+1)^2 Q(x, \theta)^2 - t^2 (x+1)^2 Q(\theta, \theta) - x)}{t x (x+1)^2}$$

> J4;

$$\frac{(t Q(\theta, y) y + 1) (Q(\theta, y)^2 t y + (-2 t^3 y Q(\theta, \theta) + 2 t^2) Q(\theta, y) + Q(\theta, \theta)^2 t y - 2 D[2](Q)(\theta, \theta) t y + y^3 t - 2 t^2 Q(\theta, \theta) - y^2)}{t y^2}$$

BMJ \Rightarrow ces deux modèles sont algébriques

Conclusion

- On a terminé une partie de la classification des modèles de taille 3.
- La notion de « groupe de la marche » qui existait dans le cas des petits pas a été généralisée à une orbite quelconque.
- On dispose d'une procédure systématique pour découpler des fractions rationnelles pour tout modèle d'orbite finie.

Développements ultérieurs

- Trouver un critère général pour décider de la finitude de l'orbite.
- Formuler de nouvelles conjectures d'algébricité pour les grands pas, systématiser cette preuve.
- Exploiter ces différentes constructions pour simplifier des sections de l'équation.

Plan

- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite
- 4 Invariants et découplage
- 5 Appendice**

L'action du groupe sur \mathcal{O}_{12}

