

Structure Galoisienne sur l'orbite des marches dans le quart de plan

Pierre Bonnet
en collaboration avec Charlotte Hardouin

LaBRI

14 Novembre 2023
Rencontres orbitales

Plan

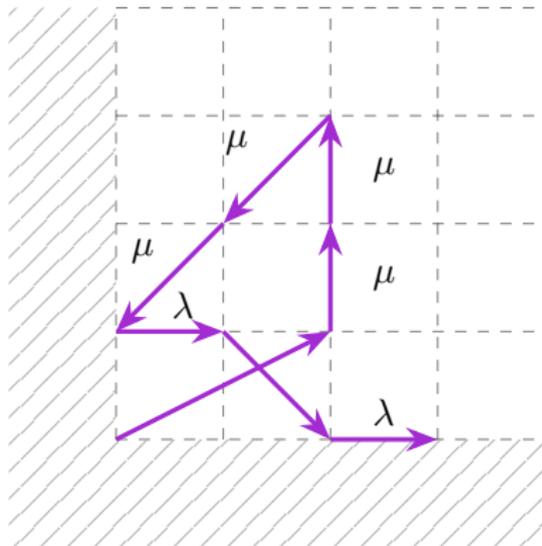
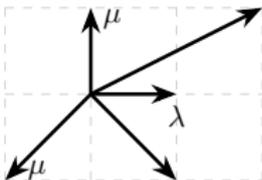
Introduction

Orbite et formalisme Galoisien

Invariants et découplage

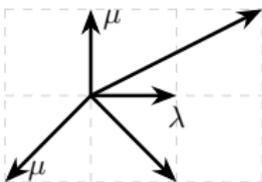
Marches à poids dans le quart de plan

$$\mathcal{G}^{\lambda, \mu} =$$

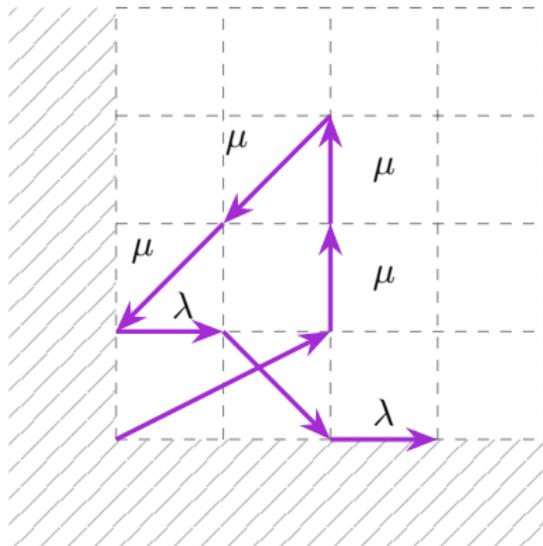


Marches à poids dans le quart de plan

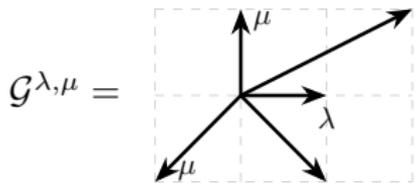
$\mathcal{G}^{\lambda, \mu} =$



$$S(X, Y) = \mu Y + \frac{\mu}{XY} + X^2 Y + \lambda X + \frac{X}{Y}$$

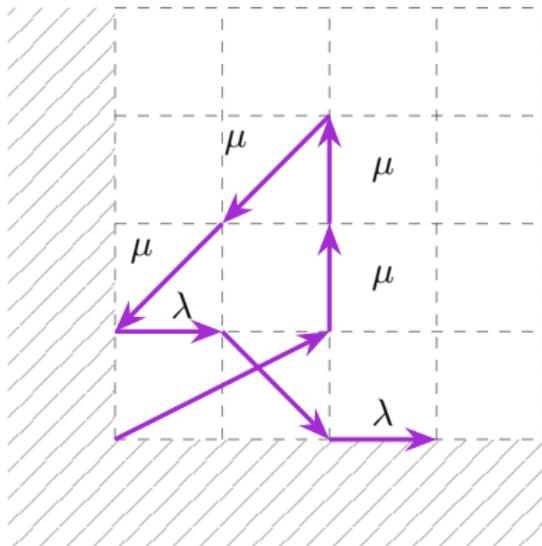


Marches à poids dans le quart de plan



$$S(X, Y) = \mu Y + \frac{\mu}{XY} + X^2 Y + \lambda X + \frac{X}{Y}$$

$$Q(X, Y, t) = \sum_{i, j, n \geq 0} q_{i, j, n} X^i Y^j t^n$$



Équation fonctionnelle

Réurrence naturelle :

$$Q(X, Y, t) = 1 + \sum_{s \in \mathcal{S}} tX^{s_x} Y^{s_y} w_s Q_s(X, Y, t).$$

Noyau :

$$K(X, Y, t) = 1 - tS(X, Y)$$
$$\tilde{K}(X, Y, t) = X^{m_x} Y^{m_y} K(X, Y, t)$$

Forme normale :

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = X^{m_x} Y^{m_y} + \sum_i A_i(X, Y)F_i(X) + \sum_j B_j(X, Y)G_j(Y)$$

Classification :

rationnelle \subset algébrique \subset D-finie \subset D-algébrique

Équation fonctionnelle

Récurrance naturelle :

$$Q(X, Y, t) = 1 + \sum_{s \in \mathcal{S}} t X^{s_x} Y^{s_y} w_s Q_s(X, Y, t).$$

Noyau :

$$K(X, Y, t) = 1 - tS(X, Y)$$
$$\tilde{K}(X, Y, t) = X^{m_x} Y^{m_y} K(X, Y, t)$$

Forme normale :

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = X^{m_x} Y^{m_y} + \sum_i A_i(X, Y)F_i(X) + \sum_j B_j(X, Y)G_j(Y)$$

Classification :

rationnelle \subset algébrique \subset D-finie \subset D-algébrique

Équation fonctionnelle

Récurrence naturelle :

$$Q(X, Y, t) = 1 + \sum_{s \in \mathcal{S}} t X^{s_x} Y^{s_y} w_s Q_s(X, Y, t).$$

Noyau :

$$K(X, Y, t) = 1 - tS(X, Y)$$
$$\tilde{K}(X, Y, t) = X^{m_x} Y^{m_y} K(X, Y, t)$$

Forme normale :

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = X^{m_x} Y^{m_y} + \sum_i A_i(X, Y)F_i(X) + \sum_j B_j(X, Y)G_j(Y)$$

Classification :

rationnelle \subset algébrique \subset D-finie \subset D-algébrique

Petits pas

Un modèle est dit à petits pas s'ils sont dans $\{-1, 0, 1\}^2$.

En éliminant les cas triviaux (unidirectionnels, unidimensionnels, symétries. . .), on se ramène à 79 modèles non-triviaux (M. Bousquet-Mélou, M. Mishna).

Pour ces 79 modèles :

- 4 + 19 modèles : $Q(x, y; t)$ algébrique ou D-finie, (A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, M. van Hoeij, M. Kauers, M. Mishna . . .)
- 56 modèles : $Q(x, y; t)$ pas D-finie
Combinatoire : S. Melczer, M. Mishna, A. Rechnitzer, . . .
Calcul formel : A. Bostan, B. Salvy, . . .
Probabilités / analyse : K. Raschel, I. Kurkova, . . .
Galois diff : C. Hardouin, J. Roques, M. Singer, . . .

Plan

Introduction

Orbite et formalisme Galoisien

Invariants et découplage

Le groupe de la marche

(Fayolle, puis Bousquet-Mélou et Mishna)

Pour les petits pas, on écrit

$$\begin{aligned}S(X, Y) &= A_{-1}(X)Y^{-1} + A_0(X) + A_1(X)Y \\ &= B_{-1}(Y)X^{-1} + B_0(Y) + B_1(Y)X\end{aligned}$$

On définit deux transformations birationnelles de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\Phi: (X, Y) \mapsto \left(\frac{A_1(X)}{YA_{-1}(X)}, Y \right) \quad \Psi: (X, Y) \mapsto \left(X, \frac{B_1(Y)}{XB_{-1}(Y)} \right)$$

$S(u, v) = S(u, v')$ ssi $(u, v') = (u, v)$ ou $(u, v') = \Psi(u, v)$.

Le groupe de la marche est $G = \langle \Phi, \Psi \rangle$.

Le groupe de la marche

(Fayolle, puis Bousquet-Mélou et Mishna)

Pour les petits pas, on écrit

$$\begin{aligned}S(X, Y) &= A_{-1}(X)Y^{-1} + A_0(X) + A_1(X)Y \\ &= B_{-1}(Y)X^{-1} + B_0(Y) + B_1(Y)X\end{aligned}$$

On définit deux transformations birationnelles de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\Phi: (X, Y) \mapsto \left(\frac{A_1(X)}{YA_{-1}(X)}, Y \right) \quad \Psi: (X, Y) \mapsto \left(X, \frac{B_1(Y)}{XB_{-1}(Y)} \right)$$

$S(u, v) = S(u, v')$ ssi $(u, v') = (u, v)$ ou $(u, v') = \Psi(u, v)$.

Le groupe de la marche est $G = \langle \Phi, \Psi \rangle$.

Le groupe de la marche

(Fayolle, puis Bousquet-Mélou et Mishna)

Pour les petits pas, on écrit

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= A_{-1}(X)Y^{-1} + A_0(X) + A_1(X)Y \\ &= B_{-1}(Y)X^{-1} + B_0(Y) + B_1(Y)X \end{aligned}$$

On définit deux transformations birationnelles de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\Phi: (X, Y) \mapsto \left(\frac{A_1(X)}{YA_{-1}(X)}, Y \right) \quad \Psi: (X, Y) \mapsto \left(X, \frac{B_1(Y)}{XB_{-1}(Y)} \right)$$

$$S(u, v) = S(u, v') \text{ ssi } (u, v') = (u, v) \text{ ou } (u, v') = \Psi(u, v).$$

Le groupe de la marche est $G = \langle \Phi, \Psi \rangle$.

Le groupe de la marche

(Fayolle, puis Bousquet-Mélou et Mishna)

Pour les petits pas, on écrit

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= A_{-1}(X)Y^{-1} + A_0(X) + A_1(X)Y \\ &= B_{-1}(Y)X^{-1} + B_0(Y) + B_1(Y)X \end{aligned}$$

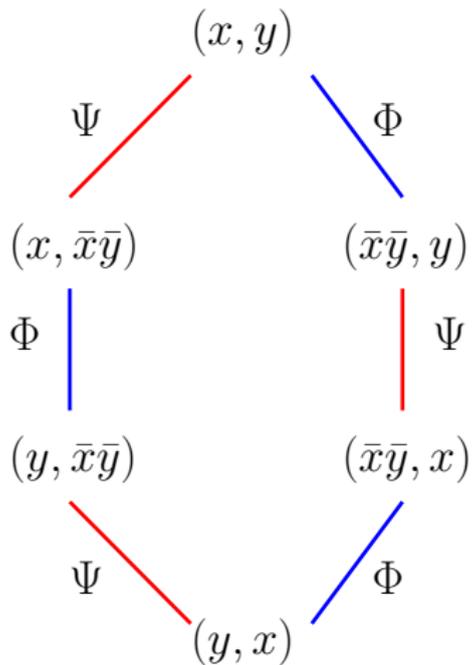
On définit deux transformations birationnelles de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\Phi: (X, Y) \mapsto \left(\frac{A_1(X)}{YA_{-1}(X)}, Y \right) \quad \Psi: (X, Y) \mapsto \left(X, \frac{B_1(Y)}{XB_{-1}(Y)} \right)$$

$S(u, v) = S(u, v')$ ssi $(u, v') = (u, v)$ ou $(u, v') = \Psi(u, v)$.

Le *groupe de la marche* est $G = \langle \Phi, \Psi \rangle$.

Orbite du groupe de la marche



$$\Psi(u, v) = (u, \bar{u}\bar{v})$$

$$\Phi(u, v) = (\bar{u}\bar{v}, v)$$

$$G = \langle \Phi, \Psi \rangle \simeq D_6$$

Exemple de simplification

$$xyK(x, y, t)Q(x, y, t) = xy - R(x, t) - S(y, t)$$

$$x_1yK(x, y)Q(\bar{x}y, y) = x_1y - R(x_1, t) - S(y, t)$$

$$x_1y_1K(x, y, t)Q(x, y, t) = x_1y_2 - R(x_1, t) - S(y_1, t)$$

...

$$K(x, y, t)(xyQ(x, y, t) + G(x, y, t)) = H(x, y, t)$$

$$xyQ(x, y, t) = [x^> y^>] H(x, y, t)/K(x, y, t)$$

Exemple de simplification

$$xyK(x, y, t)Q(x, y, t) = xy - R(x, t) - S(y, t)$$

$$x_1yK(x, y)Q(\bar{x}y, y) = x_1y - R(x_1, t) - S(y, t)$$

$$x_1y_1K(x, y, t)Q(x, y, t) = x_1y_2 - R(x_1, t) - S(y_1, t)$$

...

$$K(x, y, t)(xyQ(x, y, t) + G(x, y, t)) = H(x, y, t)$$

$$xyQ(x, y, t) = [x^> y^>] H(x, y, t) / K(x, y, t)$$

Exemple de simplification

$$xyK(x, y, t)Q(x, y, t) = xy - R(x, t) - S(y, t)$$

$$x_1yK(x, y)Q(\bar{x}y, y) = x_1y - R(x_1, t) - S(y, t)$$

$$x_1y_1K(x, y, t)Q(x, y, t) = x_1y_2 - R(x_1, t) - S(y_1, t)$$

...

$$K(x, y, t)(xyQ(x, y, t) + G(x, y, t)) = H(x, y, t)$$

$$xyQ(x, y, t) = [x^>y^>] H(x, y, t)/K(x, y, t)$$

Orbite (tout court)

(Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer)

\mathcal{W} modèle 2D à poids non trivial, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{C}(x, y)}$

Pour $(u, v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ avec $S(u, v) = S(u', v')$:

- $(u, v) \sim^x (u', v')$ si $u = u'$
- $(u, v) \sim^y (u', v')$ si $v = v'$
- $(u, v) \sim (u', v')$ si $(u, v) \sim^x (u', v')$ ou $(u, v) \sim^y (u', v')$

L'*orbite* est l'ensemble des paires (u, v) telles que $(x, y) \sim^* (u, v)$, et est notée \mathcal{O} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \dots = S(u, v)$$

Orbite (tout court)

(Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer)

\mathcal{W} modèle 2D à poids non trivial, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{C}(x, y)}$

Pour $(u, v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ avec $S(u, v) = S(u', v')$:

- $(u, v) \sim^x (u', v')$ si $u = u'$
- $(u, v) \sim^y (u', v')$ si $v = v'$
- $(u, v) \sim (u', v')$ si $(u, v) \sim^x (u', v')$ ou $(u, v) \sim^y (u', v')$

L'*orbite* est l'ensemble des paires (u, v) telles que $(x, y) \sim^* (u, v)$, et est notée \mathcal{O} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

Orbite (tout court)

(Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer)

\mathcal{W} modèle 2D à poids non trivial, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{C}(x, y)}$

Pour $(u, v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ avec $S(u, v) = S(u', v')$:

- $(u, v) \sim^x (u', v')$ si $u = u'$
- $(u, v) \sim^y (u', v')$ si $v = v'$
- $(u, v) \sim (u', v')$ si $(u, v) \sim^x (u', v')$ ou $(u, v) \sim^y (u', v')$

L'*orbite* est l'ensemble des paires (u, v) telles que $(x, y) \sim^* (u, v)$, et est notée \mathcal{O} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

Orbite (tout court)

(Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer)

\mathcal{W} modèle 2D à poids non trivial, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{C}(x, y)}$

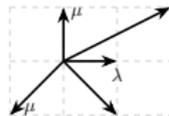
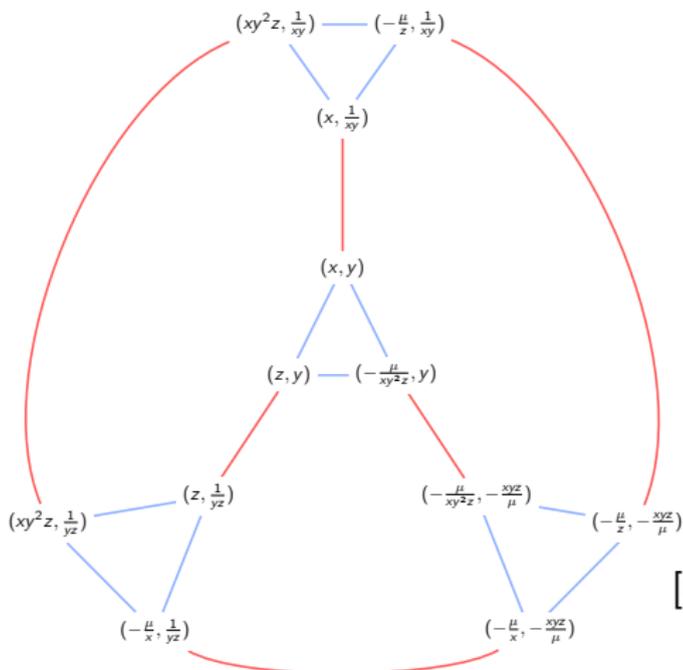
Pour $(u, v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ avec $S(u, v) = S(u', v')$:

- $(u, v) \sim^x (u', v')$ si $u = u'$
- $(u, v) \sim^y (u', v')$ si $v = v'$
- $(u, v) \sim (u', v')$ si $(u, v) \sim^x (u', v')$ ou $(u, v) \sim^y (u', v')$

L'*orbite* est l'ensemble des paires (u, v) telles que $(x, y) \sim^* (u, v)$, et est notée \mathcal{O} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

Exemple à grands pas ($\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$)



$$[\mathbb{C}(x, y, z) : \mathbb{C}(x, y)] = 2$$

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si \mathbb{K}/L est une extension de corps, un L -automorphisme de \mathbb{K} est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma|_L = \text{id}_L$.

Pour σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} , on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans \mathcal{O} et σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

$$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

$$\text{Conclusion : } (x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$ -automorphismes de \mathbb{K} et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$ -automorphismes de \mathbb{K} , qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si \mathbb{K}/L est une extension de corps, un L -automorphisme de \mathbb{K} est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma|_L = \text{id}_L$.

Pour σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} , on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans \mathcal{O} et σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

$$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

$$\text{Conclusion : } (x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$ -automorphismes de \mathbb{K} et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$ -automorphismes de \mathbb{K} , qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si \mathbb{K}/L est une extension de corps, un L -automorphisme de \mathbb{K} est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma|_L = \text{id}_L$.

Pour σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} , on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans \mathcal{O} et σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

$$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

$$\text{Conclusion : } (x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$ -automorphismes de \mathbb{K} et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$ -automorphismes de \mathbb{K} , qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si \mathbb{K}/L est une extension de corps, un L -automorphisme de \mathbb{K} est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma|_L = \text{id}_L$.

Pour σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} , on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans \mathcal{O} et σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

$$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

$$\text{Conclusion : } (x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$ -automorphismes de \mathbb{K} et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$ -automorphismes de \mathbb{K} , qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si \mathbb{K}/L est une extension de corps, un L -automorphisme de \mathbb{K} est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma|_L = \text{id}_L$.

Pour σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} , on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans \mathcal{O} et σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

$$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

$$\text{Conclusion : } (x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$ -automorphismes de \mathbb{K} et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$ -automorphismes de \mathbb{K} , qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si \mathbb{K}/L est une extension de corps, un L -automorphisme de \mathbb{K} est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma|_L = \text{id}_L$.

Pour σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} , on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans \mathcal{O} et σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

$$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

$$\text{Conclusion : } (x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$ -automorphismes de \mathbb{K} et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$ -automorphismes de \mathbb{K} , qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si \mathbb{K}/L est une extension de corps, un L -automorphisme de \mathbb{K} est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma|_L = \text{id}_L$.

Pour σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} , on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans \mathcal{O} et σ un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{K} .

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

$$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$$

$$\text{Conclusion : } (x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$ -automorphismes de \mathbb{K} et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$ -automorphismes de \mathbb{K} , qui préservent les adjacences.

Le groupe généralisé

On pose $k = \mathbb{C}(S(x, y))$, $k(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées d'éléments de l'orbite.

Proposition

Les extensions $k(\mathcal{O})/k(x)$ et $k(\mathcal{O})/k(y)$ sont Galoisiennes.

Notons G_x et G_y leurs groupes de Galois respectifs, $G = \langle G_x, G_y \rangle$

Théorème (B., Hardouin 22)

Le groupe G agit fidèlement et transitivement sur l'orbite par automorphismes de graphe. Cette action est finiment engendrée.

Le groupe généralisé

On pose $k = \mathbb{C}(S(x, y))$, $k(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées d'éléments de l'orbite.

Proposition

Les extensions $k(\mathcal{O})/k(x)$ et $k(\mathcal{O})/k(y)$ sont Galoisiennes.

Notons G_x et G_y leurs groupes de Galois respectifs, $G = \langle G_x, G_y \rangle$

Théorème (B., Hardouin 22)

Le groupe G agit fidèlement et transitivement sur l'orbite par automorphismes de graphe. Cette action est finiment engendrée.

Le groupe généralisé

On pose $k = \mathbb{C}(S(x, y))$, $k(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées d'éléments de l'orbite.

Proposition

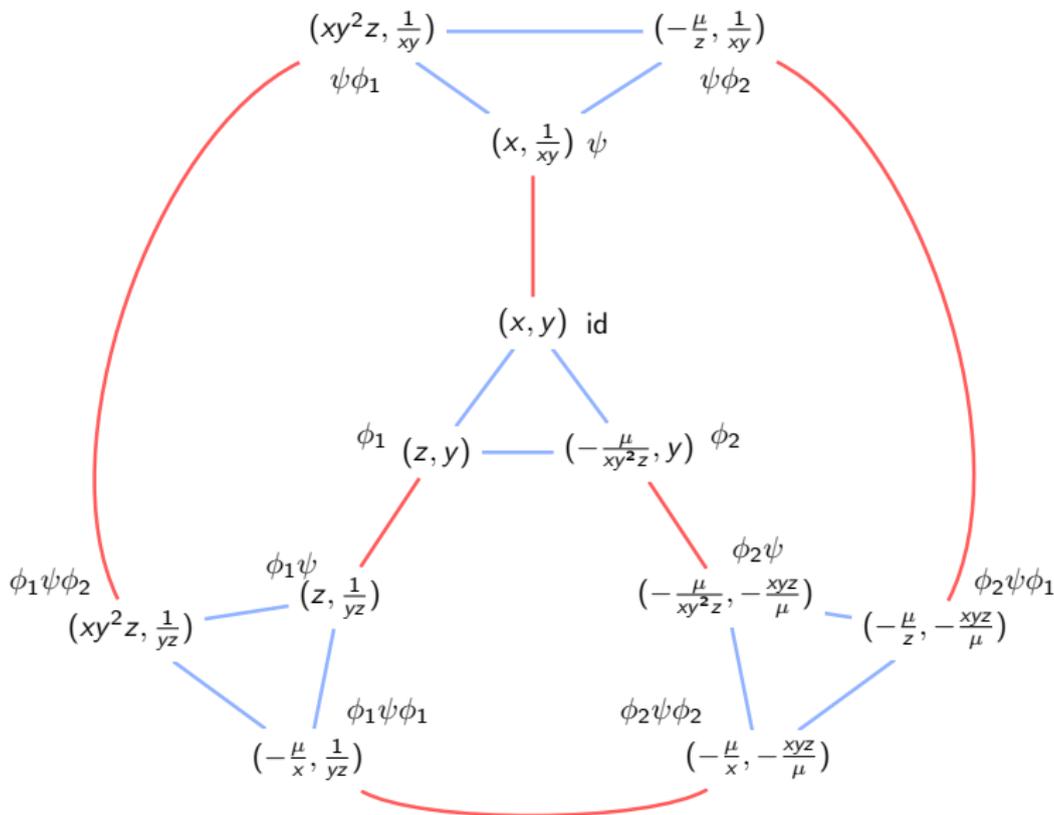
Les extensions $k(\mathcal{O})/k(x)$ et $k(\mathcal{O})/k(y)$ sont Galoisiennes.

Notons G_x et G_y leurs groupes de Galois respectifs, $G = \langle G_x, G_y \rangle$

Théorème (B., Hardouin 22)

Le groupe G agit fidèlement et transitivement sur l'orbite par automorphismes de graphe. Cette action est finiment engendrée.

Exemple sur $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$



Plan

Introduction

Orbite et formalisme Galoisien

Invariants et découplage

Petits pas qui reculent : exemple de $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$

$$S(X, Y) = \mu Y + \frac{\mu}{XY} + X^2 Y + \lambda X + \frac{X}{Y}$$

$$\tilde{K}(X, Y, t) = XY - t(\mu XY^2 + \mu + X^3 Y^2 + \lambda X^2 Y + X^2)$$

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY - t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, Y, t) + t\mu Q(0, 0, t)$$

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY + A(X, t) + B(Y, t)$$

Petits pas qui reculent : exemple de $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$

$$S(X, Y) = \mu Y + \frac{\mu}{XY} + X^2 Y + \lambda X + \frac{X}{Y}$$

$$\tilde{K}(X, Y, t) = XY - t(\mu XY^2 + \mu + X^3 Y^2 + \lambda X^2 Y + X^2)$$

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY - t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, Y, t) + t\mu Q(0, 0, t)$$

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY + A(X, t) + B(Y, t)$$

t -équivalence

$$\mathbb{C}_{\text{mul}}(X, Y)[[t]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(X, Y)}{B_n(X)C_n(Y)} t^n \mid A_n, B_n, C_n \text{ polynômes} \right\}$$

Il existe une relation d'équivalence \equiv sur $\mathbb{C}_{\text{mul}}(X, Y)[[t]]$ compatible avec l'addition et la multiplication.

t -Invariants : $I(X, t) \equiv J(Y, t)$

Lemme

Si les coefficients de $I(X, t)$ et $J(Y, t)$ n'ont pas de pôle en $X = 0$ et $Y = 0$, alors il existe $A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que

$$I(X, t) = J(Y, t) = A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

Intérêt : les solutions d'équations d'une variable catalytique sont algébriques (Popescu, Bousquet-Mélou–Jehanne, Notarantonio–Yurkevych...)

t -équivalence

$$\mathbb{C}_{\text{mul}}(X, Y)[[t]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(X, Y)}{B_n(X)C_n(Y)} t^n \mid A_n, B_n, C_n \text{ polynômes} \right\}$$

Il existe une relation d'équivalence \equiv sur $\mathbb{C}_{\text{mul}}(X, Y)[[t]]$ compatible avec l'addition et la multiplication.

t -Invariants : $I(X, t) \equiv J(Y, t)$

Lemme

Si les coefficients de $I(X, t)$ et $J(Y, t)$ n'ont pas de pôle en $X = 0$ et $Y = 0$, alors il existe $A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que

$$I(X, t) = J(Y, t) = A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

Intérêt : les solutions d'équations d'une variable catalytique sont algébriques (Popescu, Bousquet-Mélou–Jehanne, Notarantonio–Yurkevych...)

t -équivalence

$$\mathbb{C}_{\text{mul}}(X, Y)[[t]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(X, Y)}{B_n(X)C_n(Y)} t^n \mid A_n, B_n, C_n \text{ polynômes} \right\}$$

Il existe une relation d'équivalence \equiv sur $\mathbb{C}_{\text{mul}}(X, Y)[[t]]$ compatible avec l'addition et la multiplication.

t -Invariants : $I(X, t) \equiv J(Y, t)$

Lemme

Si les coefficients de $I(X, t)$ et $J(Y, t)$ n'ont pas de pôle en $X = 0$ et $Y = 0$, alors il existe $A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que

$$I(X, t) = J(Y, t) = A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

Intérêt : les solutions d'équations d'une variable catalytique sont algébriques (Popescu, Bousquet-Mélou–Jehanne, Notarantonio–Yurkevych...)

t -équivalence

$$\mathbb{C}_{\text{mul}}(X, Y)[[t]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(X, Y)}{B_n(X)C_n(Y)} t^n \mid A_n, B_n, C_n \text{ polynômes} \right\}$$

Il existe une relation d'équivalence \equiv sur $\mathbb{C}_{\text{mul}}(X, Y)[[t]]$ compatible avec l'addition et la multiplication.

t -Invariants : $I(X, t) \equiv J(Y, t)$

Lemme

Si les coefficients de $I(X, t)$ et $J(Y, t)$ n'ont pas de pôle en $X = 0$ et $Y = 0$, alors il existe $A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que

$$I(X, t) = J(Y, t) = A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

Intérêt : les solutions d'équations d'une variable catalytique sont algébriques (Popescu, Bousquet-Mélou–Jehanne, Notarantonio–Yurkevych...)

t -équivalence

$$\mathbb{C}_{\text{mul}}(X, Y)[[t]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(X, Y)}{B_n(X)C_n(Y)} t^n \mid A_n, B_n, C_n \text{ polynômes} \right\}$$

Il existe une relation d'équivalence \equiv sur $\mathbb{C}_{\text{mul}}(X, Y)[[t]]$ compatible avec l'addition et la multiplication.

t -Invariants : $I(X, t) \equiv J(Y, t)$

Lemme

Si les coefficients de $I(X, t)$ et $J(Y, t)$ n'ont pas de pôle en $X = 0$ et $Y = 0$, alors il existe $A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que

$$I(X, t) = J(Y, t) = A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

Intérêt : les solutions d'équations d'une variable catalytique sont algébriques (Popescu, Bousquet-Mélou–Jehanne, Notarantonio–Yurkevych. . .)

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY + A(X, t) + B(Y, t)$$

$$XY \equiv F(X, t) + G(Y, t) \quad (1)$$

$$0 \equiv XY + A(X, t) + B(Y, t) \quad (2)$$

$$I_1(X, t) = A(X, t) + F(X, t) \equiv -B(Y, t) - G(Y, t) = J_1(Y, t) \quad (3)$$

$$I_2(X, t) \equiv J_2(Y, t) \quad (4)$$

...

$$P(I_1(X, t), I_2(X, t)) \equiv P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) \quad (5)$$

$$P(I_1(X, t), I_2(X, t)) = P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) = D(t) \quad (6)$$

$\Rightarrow Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY + A(X, t) + B(Y, t)$$

$$XY \equiv F(X, t) + G(Y, t) \quad (1)$$

$$0 \equiv XY + A(X, t) + B(Y, t) \quad (2)$$

$$I_1(X, t) = A(X, t) + F(X, t) \equiv -B(Y, t) - G(Y, t) = J_1(Y, t) \quad (3)$$

$$I_2(X, t) \equiv J_2(Y, t) \quad (4)$$

...

$$P(I_1(X, t), I_2(X, t)) \equiv P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) \quad (5)$$

$$P(I_1(X, t), I_2(X, t)) = P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) = D(t) \quad (6)$$

$\Rightarrow Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$

Preuve générique d'algèbricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY + A(X, t) + B(Y, t)$$

$$XY \equiv F(X, t) + G(Y, t) \quad (1)$$

$$0 \equiv XY + A(X, t) + B(Y, t) \quad (2)$$

$$\boxed{l_1(X, t) = A(X, t) + F(X, t) \equiv -B(Y, t) - G(Y, t) = J_1(Y, t)} \quad (3)$$

$$\boxed{l_2(X, t) \equiv J_2(Y, t)} \quad (4)$$

...

$$P(l_1(X, t), l_2(X, t)) \equiv P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) \quad (5)$$

$$P(l_1(X, t), l_2(X, t)) = P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) = D(t) \quad (6)$$

$\Rightarrow Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY + A(X, t) + B(Y, t)$$

$$XY \equiv F(X, t) + G(Y, t) \quad (1)$$

$$0 \equiv XY + A(X, t) + B(Y, t) \quad (2)$$

$$\boxed{l_1(X, t) = A(X, t) + F(X, t) \equiv -B(Y, t) - G(Y, t) = J_1(Y, t)} \quad (3)$$

$$\boxed{l_2(X, t) \equiv J_2(Y, t)} \quad (4)$$

...

$$P(l_1(X, t), l_2(X, t)) \equiv P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) \quad (5)$$

$$P(l_1(X, t), l_2(X, t)) = P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) = D(t) \quad (6)$$

$\Rightarrow Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$

Preuve générique d'algèbricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY + A(X, t) + B(Y, t)$$

$$XY \equiv F(X, t) + G(Y, t) \quad (1)$$

$$0 \equiv XY + A(X, t) + B(Y, t) \quad (2)$$

$$\boxed{l_1(X, t) = A(X, t) + F(X, t) \equiv -B(Y, t) - G(Y, t) = J_1(Y, t)} \quad (3)$$

$$\boxed{l_2(X, t) \equiv J_2(Y, t)} \quad (4)$$

...

$$P(l_1(X, t), l_2(X, t)) \equiv P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) \quad (5)$$

$$P(l_1(X, t), l_2(X, t)) = P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) = D(t) \quad (6)$$

$\Rightarrow Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$

Preuve générique d'algèbricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY + A(X, t) + B(Y, t)$$

$$XY \equiv F(X, t) + G(Y, t) \quad (1)$$

$$0 \equiv XY + A(X, t) + B(Y, t) \quad (2)$$

$$\boxed{l_1(X, t) = A(X, t) + F(X, t) \equiv -B(Y, t) - G(Y, t) = J_1(Y, t)} \quad (3)$$

$$\boxed{l_2(X, t) \equiv J_2(Y, t)} \quad (4)$$

...

$$P(l_1(X, t), l_2(X, t)) \equiv P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) \quad (5)$$

$$P(l_1(X, t), l_2(X, t)) = P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) = D(t) \quad (6)$$

$\Rightarrow Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY + A(X, t) + B(Y, t)$$

$$XY \equiv F(X, t) + G(Y, t) \quad (1)$$

$$0 \equiv XY + A(X, t) + B(Y, t) \quad (2)$$

$$\boxed{l_1(X, t) = A(X, t) + F(X, t) \equiv -B(Y, t) - G(Y, t) = J_1(Y, t)} \quad (3)$$

$$\boxed{l_2(X, t) \equiv J_2(Y, t)} \quad (4)$$

...

$$P(l_1(X, t), l_2(X, t)) \equiv P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) \quad (5)$$

$$P(l_1(X, t), l_2(X, t)) = P(J_1(Y, t), J_2(Y, t)) = D(t) \quad (6)$$

$\Rightarrow Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$

Fractions et éléments de $k(\mathcal{O})$

Pour $H(X, Y, t) = \frac{A(X, Y, t)}{B(X, Y, t)}$ et \tilde{K} ne divisant pas B (H régulière),

$H_{(u,v)} = H(u, v, 1/S(x, y)) \in k(\mathcal{O})$ est bien définie pour $(u, v) \in \mathcal{O}$.

$$H_c = \sum_{(u,v) \in \mathcal{O}} c_{u,v} H_{(u,v)} \in k(\mathcal{O})$$

Exemple : $c = (x, y) + 2(x, y') - (u, v)$ et $H = XY^2$

$$H_c = xy^2 + 2x(y')^2 - uv^2$$

Fractions et éléments de $k(\mathcal{O})$

Pour $H(X, Y, t) = \frac{A(X, Y, t)}{B(X, Y, t)}$ et \tilde{K} ne divisant pas B (H régulière),

$H_{(u,v)} = H(u, v, 1/S(x, y)) \in k(\mathcal{O})$ est bien définie pour $(u, v) \in \mathcal{O}$.

$$H_c = \sum_{(u,v) \in \mathcal{O}} c_{u,v} H_{(u,v)} \in k(\mathcal{O})$$

Exemple : $c = (x, y) + 2(x, y') - (u, v)$ et $H = XY^2$

$$H_c = xy^2 + 2x(y')^2 - uv^2$$

Fractions et éléments de $k(\mathcal{O})$

Pour $H(X, Y, t) = \frac{A(X, Y, t)}{B(X, Y, t)}$ et \tilde{K} ne divisant pas B (H régulière),

$H_{(u,v)} = H(u, v, 1/S(x, y)) \in k(\mathcal{O})$ est bien définie pour $(u, v) \in \mathcal{O}$.

$$H_c = \sum_{(u,v) \in \mathcal{O}} c_{u,v} H_{(u,v)} \in k(\mathcal{O})$$

Exemple : $c = (x, y) + 2(x, y') - (u, v)$ et $H = XY^2$

$$H_c = xy^2 + 2x(y')^2 - uv^2$$

Fractions et éléments de $k(\mathcal{O})$

Pour $H(X, Y, t) = \frac{A(X, Y, t)}{B(X, Y, t)}$ et \tilde{K} ne divisant pas B (H régulière),

$H_{(u,v)} = H(u, v, 1/S(x, y)) \in k(\mathcal{O})$ est bien définie pour $(u, v) \in \mathcal{O}$.

$$H_c = \sum_{(u,v) \in \mathcal{O}} c_{u,v} H_{(u,v)} \in k(\mathcal{O})$$

Exemple : $c = (x, y) + 2(x, y') - (u, v)$ et $H = XY^2$

$$H_c = xy^2 + 2x(y')^2 - uv^2$$

Invariants et découplage Galoisien

Proposition

$$H(X, Y, t) \equiv H'(X, Y, t) \Rightarrow H(x, y, 1/S(x, y)) = H'(x, y, 1/S(x, y)).$$

	t -equivalence	Égalité dans $k(\mathcal{O})$
Invariants	$I(X, t) \equiv J(Y, t)$	$f \in k(x) \cap k(y) = k_{\text{inv}}$
Découplage	$H(X, Y, t) \equiv F(X, t) + G(Y, t)$	$H(x, y, 1/S(x, y)) = f + g \in k(x) + k(y)$

Existence de t -invariants/ t -découplage de H seulement si et seulement si existence d'invariants découplage Galoisien qui admettent un relèvement.

Invariants et découplage Galoisien

Proposition

$$H(X, Y, t) \equiv H'(X, Y, t) \Rightarrow H(x, y, 1/S(x, y)) = H'(x, y, 1/S(x, y)).$$

	t -equivalence	Égalité dans $k(\mathcal{O})$
Invariants	$I(X, t) \equiv J(Y, t)$	$f \in k(x) \cap k(y) = k_{\text{inv}}$
Découplage	$H(X, Y, t) \equiv F(X, t) + G(Y, t)$	$H(x, y, 1/S(x, y)) = f + g \in k(x) + k(y)$

Existence de t -invariants/ t -découplage de H seulement si et seulement si existence d'invariants découplage Galoisien qui admettent un relèvement.

Invariants et découplage Galoisien

Proposition

$$H(X, Y, t) \equiv H'(X, Y, t) \Rightarrow H(x, y, 1/S(x, y)) = H'(x, y, 1/S(x, y)).$$

	t -equivalence	Égalité dans $k(\mathcal{O})$
Invariants	$I(X, t) \equiv J(Y, t)$	$f \in k(x) \cap k(y) = k_{\text{inv}}$
Découplage	$H(X, Y, t) \equiv F(X, t) + G(Y, t)$	$H(x, y, 1/S(x, y)) = f + g \in k(x) + k(y)$

Existence de t -invariants/ t -découplage de H seulement si et seulement si existence d'invariants découplage Galoisien qui admettent un relèvement.

Invariants

Théorème (Fried 78 ; B., Hardouin 22)

Il y a équivalence entre

1. *Orbite finie*
2. *Groupe fini*
3. *Existence d'invariants Galoisien non-triviaux*

Algo : si l'orbite est finie, on montre que $k_{\text{inv}} = k(f)$ pour f transcendant sur k , et f est n'importe quel coefficient d'un polynôme annulateur des coordonnées gauches ou droites de l'orbite.

Pour $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$:

$$\left(\frac{(-\lambda^2 \mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3)t^2 - X^2 \lambda (X^2 - \mu)t + X^3}{t^2 X (X^2 + \mu)^2}, \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \right).$$

Invariants

Théorème (Fried 78 ; B., Hardouin 22)

Il y a équivalence entre

1. *Orbite finie*
2. *Groupe fini*
3. *Existence d'invariants Galoisien non-triviaux*

Algo : si l'orbite est finie, on montre que $k_{\text{inv}} = k(f)$ pour f transcendant sur k , et f est n'importe quel coefficient d'un polynôme annulateur des coordonnées gauches ou droites de l'orbite.

Pour $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$:

$$\left(\frac{(-\lambda^2 \mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3)t^2 - X^2 \lambda (X^2 - \mu)t + X^3}{t^2 X (X^2 + \mu)^2}, \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \right).$$

Invariants

Théorème (Fried 78 ; B., Hardouin 22)

Il y a équivalence entre

1. *Orbite finie*
2. *Groupe fini*
3. *Existence d'invariants Galoisien non-triviaux*

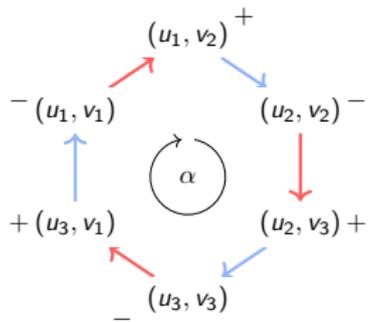
Algo : si l'orbite est finie, on montre que $k_{\text{inv}} = k(f)$ pour f transcendant sur k , et f est n'importe quel coefficient d'un polynôme annulateur des coordonnées gauches ou droites de l'orbite.

Pour $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$:

$$\left(\frac{(-\lambda^2 \mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3)t^2 - X^2 \lambda (X^2 - \mu)t + X^3}{t^2 X (X^2 + \mu)^2}, \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \right).$$

Découplage

Considérons α une 0-chaîne induite par un cycle bicoloré :



$$\alpha = (u_1, v_2) - (u_1, v_1) + (u_2, v_3) - (u_2, v_2) + (u_3, v_1) - (u_3, v_3)$$

$$F(X)_\alpha = F(u_1) - F(u_1) + F(u_2) - F(u_2) + F(u_3) - F(u_3) = 0$$

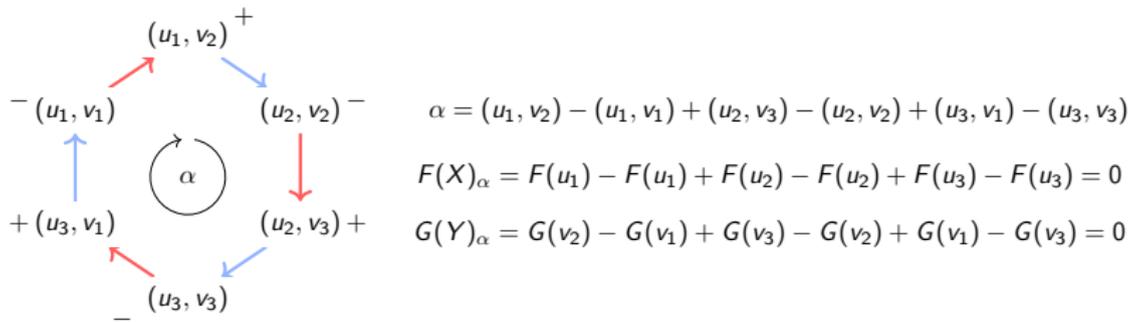
$$G(Y)_\alpha = G(v_2) - G(v_1) + G(v_3) - G(v_2) + G(v_1) - G(v_3) = 0$$

Si $H(X, Y, t)$ découple, alors $H_\alpha = 0$.

Réciproque ?

Découplage

Considérons α une 0-chaîne induite par un cycle bicoloré :

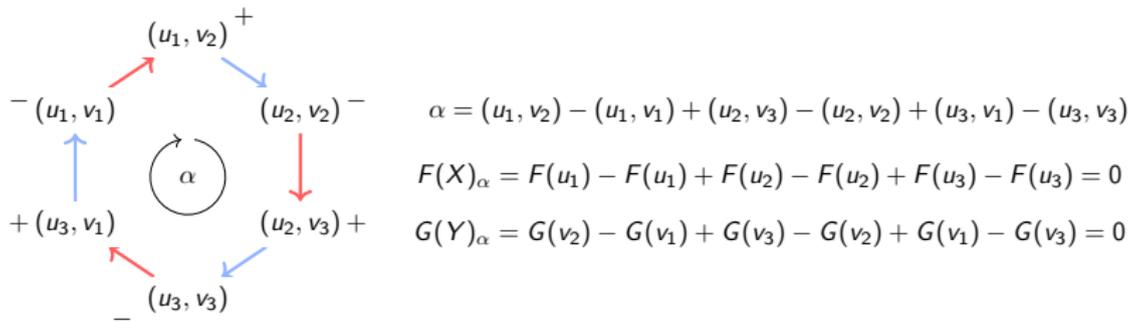


Si $H(X, Y, t)$ découple, alors $H_\alpha = 0$.

Réciproque ?

Découplage

Considérons α une 0-chaîne induite par un cycle bicoloré :



Si $H(X, Y, t)$ découple, alors $H_\alpha = 0$.

Réciproque ?

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

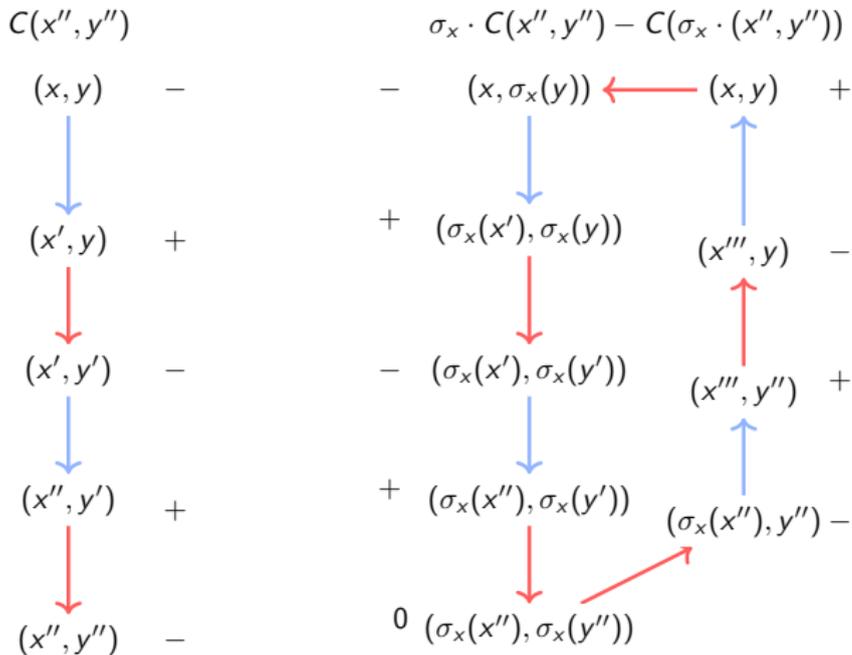
- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Idée maîtresse



$\forall \sigma_x \in G_x, \sigma_x \cdot H_{C(x'', y'')} = H_{C(x'', y'')}$ donc $H_{C(x'', y'')} \in k(x)$ si H découple

$$v - (x, y) = C(v) + C'(v)$$

$$\frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{v \in \mathcal{O}} v - (x, y) = \frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{v \in \mathcal{O}} C(v) + \frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{v \in \mathcal{O}} C'(v)$$

$$v - (x, y) = C(v) + C'(v)$$

$$\frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{v \in \mathcal{O}} v - (x, y) = \frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{v \in \mathcal{O}} C(v) + \frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{v \in \mathcal{O}} C'(v)$$

Découplage dans l'orbite

Théorème (B., Hardouin 23)

Dans toute orbite finie, (x, y) admet un découplage (explicite).

Si de plus l'orbite vérifie une propriété de *distance-transitivité* (qui n'est pas systématique), alors le découplage est donné comme combinaison de *0-chaînes symétriques* explicites (qui sont de la forme)

$$\sum_{(u,v) \in \mathcal{O} | P(u)=0} (u, v) \quad \text{ou} \quad \sum_{(u,v) \in \mathcal{O} | P(v)=0} (u, v)$$

Formule :

$$\gamma_x = -\frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{i \geq 0} |\mathcal{X}_i| \sum_{\substack{j \leq i \\ j \text{ odd}}} \frac{X_j}{|\mathcal{X}_j|} - \frac{X_{j-1}}{|\mathcal{X}_{j-1}|} \quad \text{and} \quad \gamma_y = -\frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{i \geq 0} |\mathcal{Y}_i| \sum_{\substack{j \leq i \\ j \text{ odd}}} \frac{Y_j}{|\mathcal{Y}_j|} - \frac{Y_{j-1}}{|\mathcal{Y}_{j-1}|}$$

Découplage dans l'orbite

Théorème (B., Hardouin 23)

Dans toute orbite finie, (x, y) admet un découplage (explicite).

Si de plus l'orbite vérifie une propriété de *distance-transitivité* (qui n'est pas systématique), alors le découplage est donné comme combinaison de *0-chaînes symétriques* explicites (qui sont de la forme)

$$\sum_{(u,v) \in \mathcal{O} | P(u)=0} (u, v) \quad \text{ou} \quad \sum_{(u,v) \in \mathcal{O} | P(v)=0} (u, v)$$

Formule :

$$\gamma_x = -\frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{i \geq 0} |\mathcal{X}_i| \sum_{\substack{j \leq i \\ j \text{ odd}}} \frac{X_j}{|\mathcal{X}_j|} - \frac{X_{j-1}}{|\mathcal{X}_{j-1}|} \quad \text{and} \quad \gamma_y = -\frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{i \geq 0} |\mathcal{Y}_i| \sum_{\substack{j \leq i \\ j \text{ odd}}} \frac{Y_j}{|\mathcal{Y}_j|} - \frac{Y_{j-1}}{|\mathcal{Y}_{j-1}|}$$

Découplage dans l'orbite

Théorème (B., Hardouin 23)

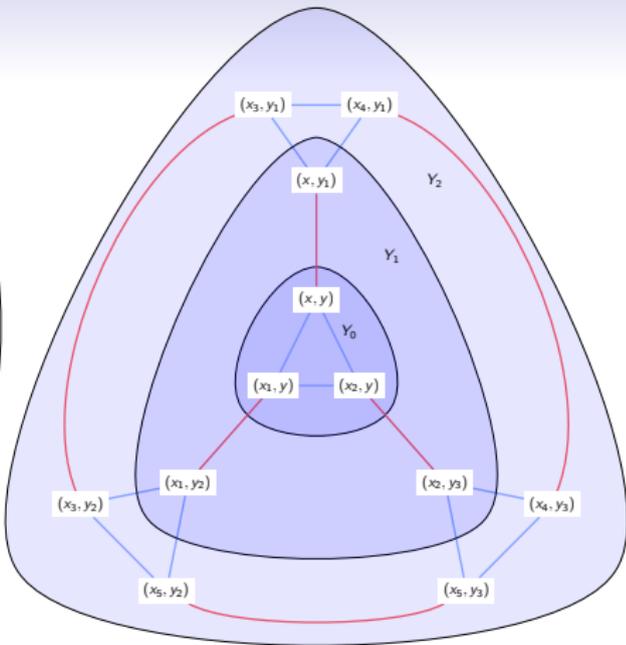
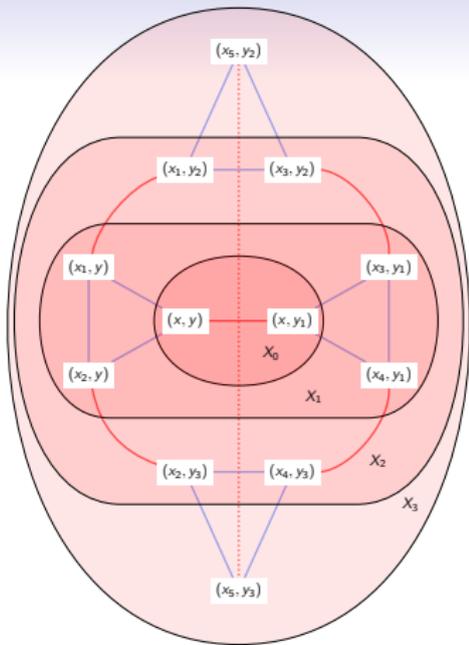
Dans toute orbite finie, (x, y) admet un découplage (explicite).

Si de plus l'orbite vérifie une propriété de *distance-transitivité* (qui n'est pas systématique), alors le découplage est donné comme combinaison de *0-chaînes symétriques* explicites (qui sont de la forme)

$$\sum_{(u,v) \in \mathcal{O} | P(u)=0} (u, v) \quad \text{ou} \quad \sum_{(u,v) \in \mathcal{O} | P(v)=0} (u, v)$$

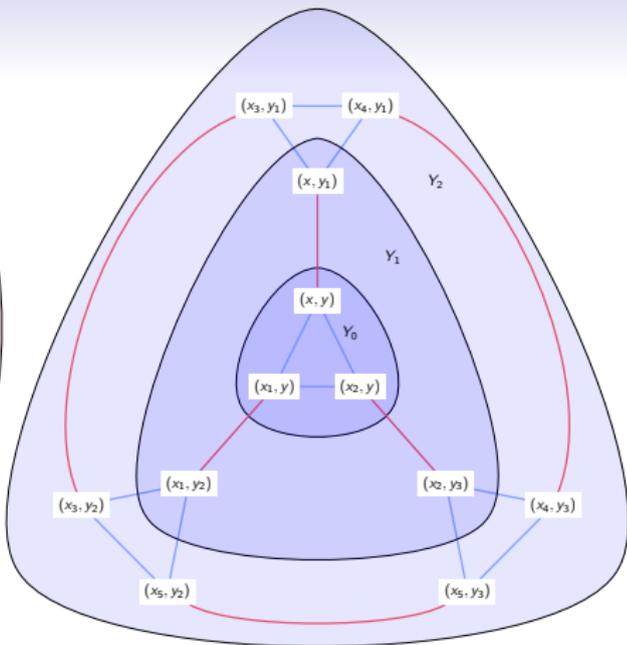
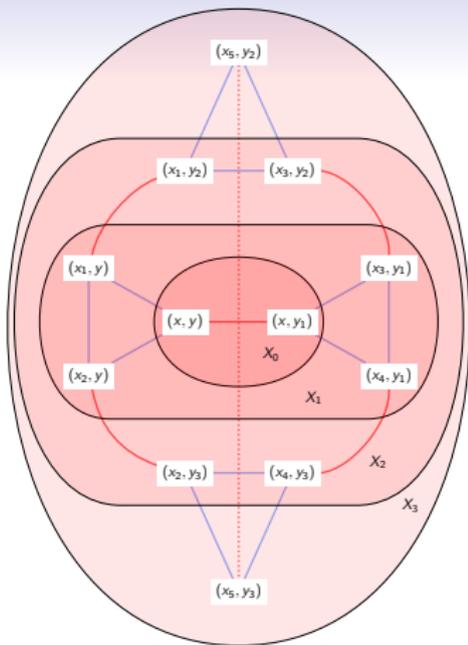
Formule :

$$\gamma_x = -\frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{i \geq 0} |\mathcal{X}_i| \sum_{\substack{j \leq i \\ j \text{ odd}}} \frac{X_j}{|\mathcal{X}_j|} - \frac{X_{j-1}}{|X_{j-1}|} \quad \text{and} \quad \gamma_y = -\frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{i \geq 0} |\mathcal{Y}_i| \sum_{\substack{j \leq i \\ j \text{ odd}}} \frac{Y_j}{|\mathcal{Y}_j|} - \frac{Y_{j-1}}{|Y_{j-1}|}$$



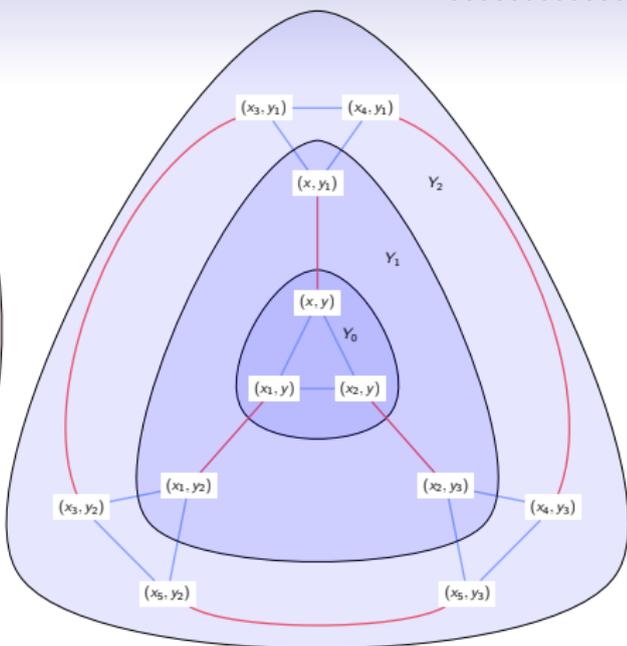
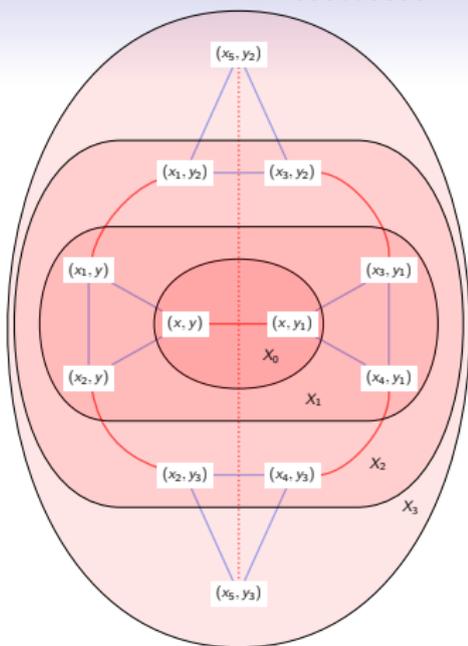
$$(x, y) = \left(\frac{X_0}{2} - \frac{X_1}{8} + \frac{X_2}{8} \right) + \left(\frac{Y_0}{4} - \frac{Y_1}{4} \right) + \alpha,$$

$$xy = -\frac{3\lambda x^2/S(x, y) - \mu\lambda/S(x, y) - 4x}{4(x^2 + \mu)/S(x, y)} + \frac{-\lambda y - 4}{4y} + 0.$$



$$(x, y) = \left(\frac{X_0}{2} - \frac{X_1}{8} + \frac{X_2}{8} \right) + \left(\frac{Y_0}{4} - \frac{Y_1}{4} \right) + \alpha,$$

$$xy = -\frac{3\lambda x^2/S(x, y) - \mu\lambda/S(x, y) - 4x}{4(x^2 + \mu)/S(x, y)} + \frac{-\lambda y - 4}{4y} + 0.$$



$$(x, y) = \left(\frac{X_0}{2} - \frac{X_1}{8} + \frac{X_2}{8} \right) + \left(\frac{Y_0}{4} - \frac{Y_1}{4} \right) + \alpha,$$

$$xy = -\frac{3\lambda x^2/S(x, y) - \mu\lambda/S(x, y) - 4x}{4(x^2 + \mu)/S(x, y)} + \frac{-\lambda y - 4}{4y} + 0.$$

Preuve d'algébricité de $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY - t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, Y, t) + t\mu Q(0, 0, t)$$

$$XY \equiv -\frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2 + \mu)} + \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} \quad (1)$$

$$XY \equiv (t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, 0)) + t\mu Q(0, Y, t) \quad (2)$$

$$(t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, 0, t)) + \frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2 + \mu)} \equiv \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} - t\mu Q(0, Y, t) \quad (3)$$

$$\frac{(-\lambda^2 \mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3)t^2 - X^2 \lambda (X^2 - \mu)t + X^3}{t^2 X (X^2 + \mu)^2} \equiv \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \quad (4)$$

$P_2 (P_1 - \frac{\lambda}{4}) - P_1^3 + (2t\mu Q(0, 0) - \frac{\lambda}{4}) P_1^2 + (2\mu t \partial_Y(Q)(0, 0) - t^2 \mu^2 Q(0, 0)^2 + \frac{5\lambda^2}{16}) P_1$
 sans pôle en 0, donc $Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$. Prouve aussi que $Q(0, 0, t)$ est de degré 32 sur $\mathbb{C}(t)$, avec polynôme explicite.

Preuve d'algébricité de $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY - t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, Y, t) + t\mu Q(0, 0, t)$$

$$XY \equiv -\frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2 + \mu)} + \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} \quad (1)$$

$$XY \equiv (t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, 0)) + t\mu Q(0, Y, t) \quad (2)$$

$$(t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, 0, t)) + \frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2 + \mu)} \equiv \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} - t\mu Q(0, Y, t) \quad (3)$$

$$\frac{(-\lambda^2 \mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3)t^2 - X^2 \lambda (X^2 - \mu)t + X^3}{t^2 X (X^2 + \mu)^2} \equiv \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \quad (4)$$

$P_2 (P_1 - \frac{\lambda}{4}) - P_1^3 + (2t\mu Q(0, 0) - \frac{\lambda}{4}) P_1^2 + (2\mu t \partial_Y(Q)(0, 0) - t^2 \mu^2 Q(0, 0)^2 + \frac{5\lambda^2}{16}) P_1$
 sans pôle en 0, donc $Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$. Prouve aussi que $Q(0, 0, t)$ est de degré 32 sur $\mathbb{C}(t)$, avec polynôme explicite.

Preuve d'algébricité de $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY - t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, Y, t) + t\mu Q(0, 0, t)$$

$$XY \equiv -\frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2 + \mu)} + \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} \quad (1)$$

$$XY \equiv (t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, 0)) + t\mu Q(0, Y, t) \quad (2)$$

$$(t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, 0, t)) + \frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2 + \mu)} \equiv \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} - t\mu Q(0, Y, t) \quad (3)$$

$$\frac{(-\lambda^2 \mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3)t^2 - X^2 \lambda (X^2 - \mu)t + X^3}{t^2 X (X^2 + \mu)^2} \equiv \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \quad (4)$$

$P_2 (P_1 - \frac{\lambda}{4}) - P_1^3 + (2t\mu Q(0, 0) - \frac{\lambda}{4}) P_1^2 + (2\mu t \partial_y(Q)(0, 0) - t^2 \mu^2 Q(0, 0)^2 + \frac{5\lambda^2}{16}) P_1$
 sans pôle en 0, donc $Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$. Prouve aussi que $Q(0, 0, t)$ est de degré 32 sur $\mathbb{C}(t)$, avec polynôme explicite.

Preuve d'algébricité de $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY - t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, Y, t) + t\mu Q(0, 0, t)$$

$$XY \equiv -\frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2 + \mu)} + \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} \quad (1)$$

$$XY \equiv (t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, 0)) + t\mu Q(0, Y, t) \quad (2)$$

$$(t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, 0, t)) + \frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2 + \mu)} \equiv \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} - t\mu Q(0, Y, t) \quad (3)$$

$$\frac{(-\lambda^2 \mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3)t^2 - X^2 \lambda (X^2 - \mu)t + X^3}{t^2 X (X^2 + \mu)^2} \equiv \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \quad (4)$$

$P_2 (P_1 - \frac{\lambda}{4}) - P_1^3 + (2t\mu Q(0, 0) - \frac{\lambda}{4}) P_1^2 + (2\mu t \partial_Y(Q)(0, 0) - t^2 \mu^2 Q(0, 0)^2 + \frac{5\lambda^2}{16}) P_1$
 sans pôle en 0, donc $Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$. Prouve
 aussi que $Q(0, 0, t)$ est de degré 32 sur $\mathbb{C}(t)$, avec polynôme explicite.

Preuve d'algébricité de $\mathcal{G}^{\lambda, \mu}$

$$\tilde{K}(X, Y, t)Q(X, Y, t) = XY - t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, Y, t) + t\mu Q(0, 0, t)$$

$$XY \equiv -\frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2 + \mu)} + \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} \quad (1)$$

$$XY \equiv (t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, 0)) + t\mu Q(0, Y, t) \quad (2)$$

$$(t(X^2 + \mu)Q(X, 0, t) - t\mu Q(0, 0, t)) + \frac{3\lambda X^2 t - \mu\lambda t - 4X}{4t(X^2 + \mu)} \equiv \frac{-\lambda Y - 4}{4Y} - t\mu Q(0, Y, t) \quad (3)$$

$$\frac{(-\lambda^2 \mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3)t^2 - X^2 \lambda (X^2 - \mu)t + X^3}{t^2 X (X^2 + \mu)^2} \equiv \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \quad (4)$$

$P_2 (P_1 - \frac{\lambda}{4}) - P_1^3 + (2t\mu Q(0, 0) - \frac{\lambda}{4}) P_1^2 + (2\mu t \partial_Y(Q)(0, 0) - t^2 \mu^2 Q(0, 0)^2 + \frac{5\lambda^2}{16}) P_1$
 sans pôle en 0, donc $Q(X, Y, t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X, Y, t)$. Prouve aussi que $Q(0, 0, t)$ est de degré 32 sur $\mathbb{C}(t)$, avec polynôme explicite.

Questions subsidiaires :

- Algébricité ssi XY découple ?
- A-t-on une expression générale avec des chaînes symétriques ?
- Autres choix de 0-chaînes qui exploitent la structure du groupe ?

Questions subsidiaires :

- Algébricité ssi XY découple ?
- A-t-on une expression générale avec des chaînes symétriques ?
- Autres choix de 0-chaînes qui exploitent la structure du groupe ?

Questions subsidiaires :

- Algébricité ssi XY découple ?
- A-t-on une expression générale avec des chaînes symétriques ?
- Autres choix de 0-chaînes qui exploitent la structure du groupe ?

Questions subsidiaires :

- Algébricité ssi XY découple ?
- A-t-on une expression générale avec des chaînes symétriques ?
- Autres choix de 0-chaînes qui exploitent la structure du groupe ?

Merci de votre attention.