

Algébricité de modèles de marches à grands pas dans le quart de plan

Pierre Bonnet

- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite
- 4 Invariants et découplage
- 5 Bilan et perspectives

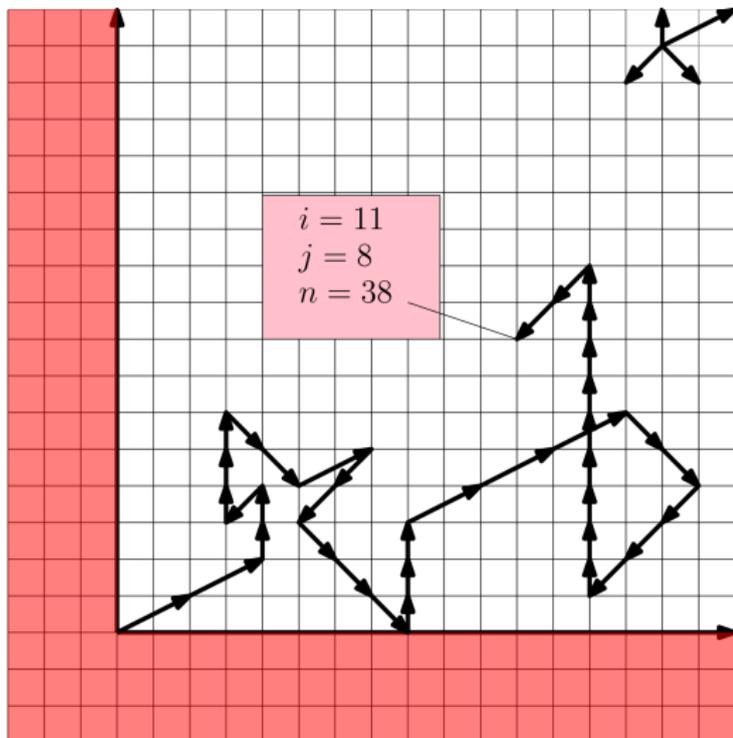
Plan

- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite
- 4 Invariants et découplage
- 5 Bilan et perspectives

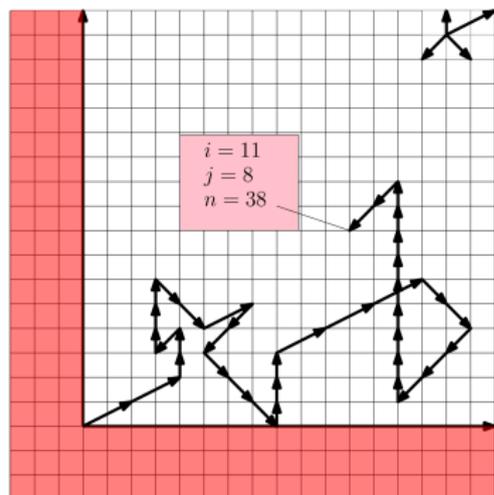
Marche dans le quart de plan

$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$

Bernardi, Bostan,
Bousquet-Mélou, Gessel,
Hardouin, Mishna, Raschel,
Singer, Zeilberger ...



Mise en équation



$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \bar{x}\bar{y} + y + x^2y + x\bar{y}$$

(On note $\bar{x} = \frac{1}{x}$)

$$Q(x, y) = 1$$

$$+ tyQ(x, y)$$

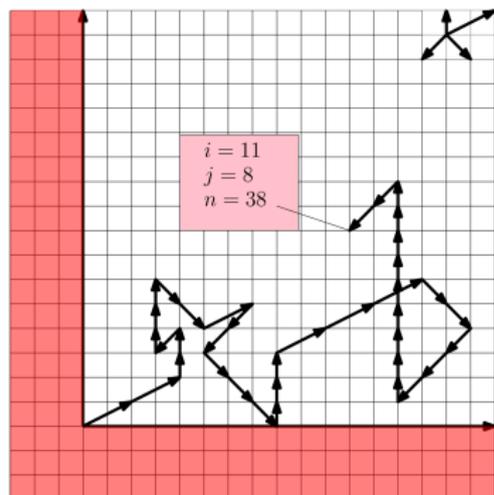
$$+ tx^2yQ(x, y)$$

$$+ tx\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0))$$

$$+ t\bar{x}\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0) - Q(0, y))$$

$$+ Q(0, 0)$$

Mise en équation



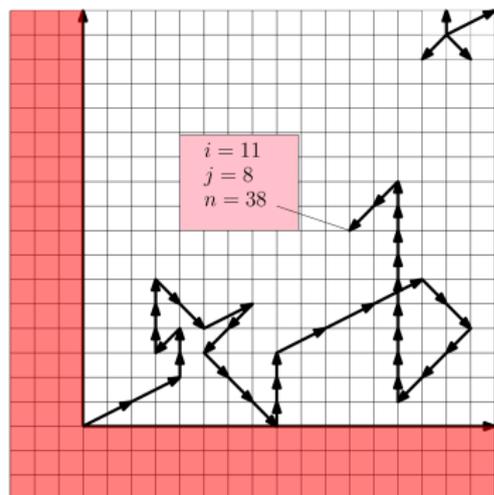
$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \bar{x}\bar{y} + y + x^2y + x\bar{y}$$

(On note $\bar{x} = \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned}
 Q(x, y) &= 1 \\
 &+ tyQ(x, y) \\
 &+ tx^2yQ(x, y) \\
 &+ tx\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0)) \\
 &+ t\bar{x}\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0) - Q(0, y) \\
 &+ Q(0, 0))
 \end{aligned}$$

Mise en équation



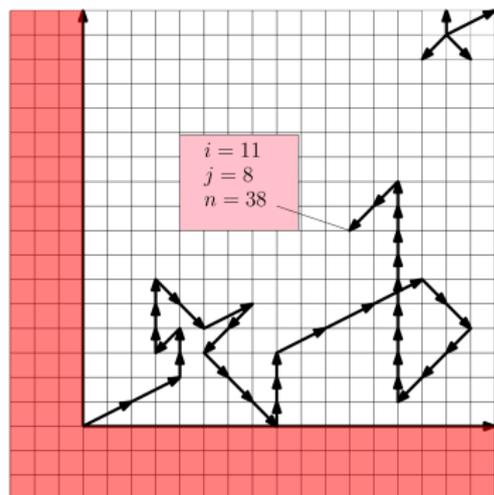
$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \bar{x}\bar{y} + y + x^2y + x\bar{y}$$

(On note $\bar{x} = \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned}
 Q(x, y) &= 1 \\
 &+ tyQ(x, y) \\
 &+ tx^2yQ(x, y) \\
 &+ tx\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0)) \\
 &+ t\bar{x}\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0) - Q(0, y) \\
 &+ Q(0, 0))
 \end{aligned}$$

Mise en équation



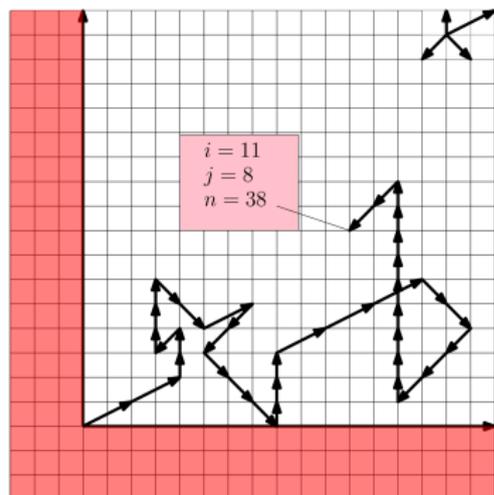
$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \bar{x}\bar{y} + y + x^2y + x\bar{y}$$

(On note $\bar{x} = \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned}
 Q(x, y) &= 1 \\
 &+ tyQ(x, y) \\
 &+ tx^2yQ(x, y) \\
 &+ tx\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0)) \\
 &+ t\bar{x}\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0) - Q(0, y) \\
 &+ Q(0, 0))
 \end{aligned}$$

Mise en équation



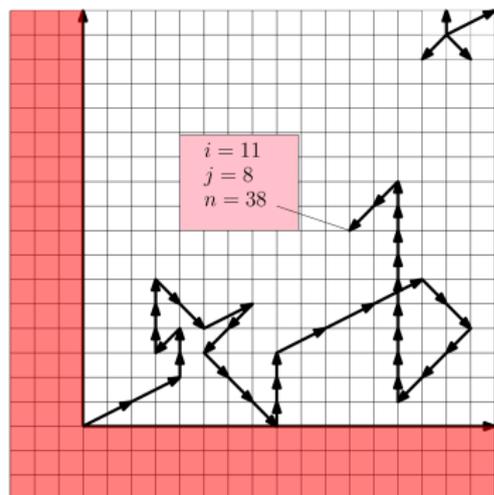
$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \bar{x}\bar{y} + y + x^2y + x\bar{y}$$

(On note $\bar{x} = \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= 1 \\ &+ tyQ(x, y) \\ &+ tx^2yQ(x, y) \\ &+ tx\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0)) \\ &+ t\bar{x}\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0) - Q(0, y) \\ &+ Q(0, 0)) \end{aligned}$$

Mise en équation



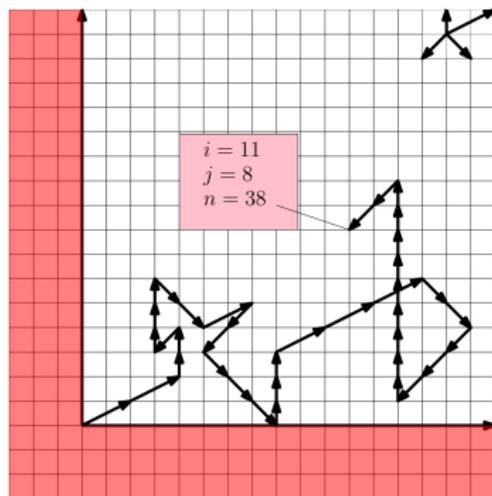
$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \bar{x}\bar{y} + y + x^2y + x\bar{y}$$

(On note $\bar{x} = \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned}
 Q(x, y) &= 1 \\
 &+ tyQ(x, y) \\
 &+ tx^2yQ(x, y) \\
 &+ tx\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0)) \\
 &+ t\bar{x}\bar{y}(Q(x, y) - Q(x, 0) - Q(0, y) \\
 &+ Q(0, 0))
 \end{aligned}$$

Mise en équation



$$xy(1 - tS(x, y))Q(x, y)$$

$$= xy - t(x^2 + 1)Q(x, 0) - tQ(0, y) + tQ(0, 0)$$

En règle générale, si les pas qui reculent sont petits, la série génératrice Q vérifie une équation de la forme :

$$K(x, y)Q(x, y) = xy + A(x) + B(y)$$

$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n} q_n^{(i,j)} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \bar{x}\bar{y} + y + x^2y + x\bar{y}$$

$$K(x, y) = xy(1 - tS(x, y))$$

Séries algébriques

Une série génératrice est dite *algébrique* si elle est annihilée par un polynôme à coefficients dans le corps des fractions rationnelles.

Pléthore d'algorithmes pour calculer les coefficients, calcul d'asymptotique, description "langage formels" des objets. . .

Conjecture : ces deux modèles donnent lieu à des séries algébriques :



Plan

- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite
- 4 Invariants et découplage
- 5 Bilan et perspectives

Invariants

Définition (Divisibilité)

Soit $H \in \mathbb{Q}(x, y)((t))$. On dit que H est à pôles d'ordre borné (pob) si ses coefficients en t sont de la forme $\frac{v_n(x, y)}{a_n(x)b_n(y)}$ et s'il existe une borne sur l'ordre des pôles en $x = 0$ et $y = 0$ de ces coefficients.

On dira d'une série de Laurent H qu'elle est divisible par K si $\frac{H}{K}$ est à pôles d'ordre borné.

Définition (Invariants)

Une paire de séries génératrices $(I(x; t), J(y; t))$ est une paire d'invariants si $K(x, y)$ divise $I(x) - J(y)$.

Invariants

Définition (Invariants)

Une paire de séries génératrices $(I(x; t), J(y; t))$ est une paire d'invariants si $K(x, y)$ divise $I(x) - J(y)$.

Exemple



$$(I(x), J(y)) = \left(\frac{tx^3 - t + x}{tx^2}, \frac{ty^3 - t + y}{ty^2} \right) : \frac{I(x) - J(y)}{K(x, y)} = \frac{y - x}{txy}.$$

Invariants

Définition (Invariants)

Une paire de séries génératrices $(I(x; t), J(y; t))$ est une paire d'invariants si $K(x, y)$ divise $I(x) - J(y)$.

Proposition (Stabilité par addition et multiplication)

Les paires d'invariants sont stables par addition et multiplication.

Lemme (dit des invariants)

Si $(I(x), J(y))$ est une paire d'invariants tels que tous les coefficients en t de $\frac{I(x) - J(y)}{K(x, y)}$ sont sans pôle en $x = 0$ et en $y = 0$, alors $I(x) = J(y) = A(t)$. On parle d'invariants triviaux.

Une stratégie de preuve d'algébricité

- 1 Obtenir une paire d'invariants rationnels.
- 2 Obtenir une paire d'invariants faisant intervenir les fonctions inconnues (il suffit pour cela de *découpler* xy sous la forme $xy = F(x) + G(y) \pmod{K(x, y)}$ dans l'équation).
- 3 Combiner ces deux paires avec des opérations algébriques pour former une paire d'invariants satisfaisant les conditions du lemme des invariants, donc des invariants triviaux, et donc des équations d'une variable catalytique impliquant l'une des spécialisations.
- 4 Prouver l'algébricité des solutions d'une des équations à une variable catalytique obtenue avec la méthode de Bousquet-Mélou et Jehanne de 2006.

Plan

- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite**
- 4 Invariants et découplage
- 5 Bilan et perspectives

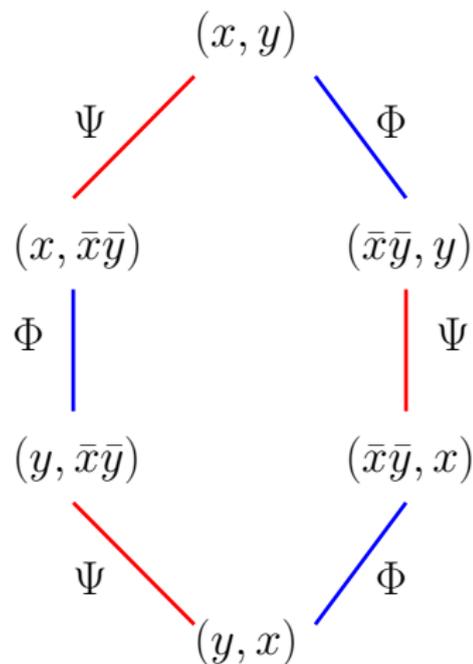
Définition

Notion introduite dans un article de 2018 de Mireille Bousquet-Mélou, Alin Bostan et Stephen Melczer.

L'*orbite du modèle*, notée \mathcal{O} , est l'ensemble des couples (u, v) d'éléments algébriques formés de la manière suivante :

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \dots = S(u, v).$$

Un exemple d'orbite

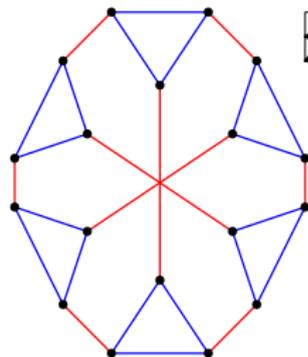
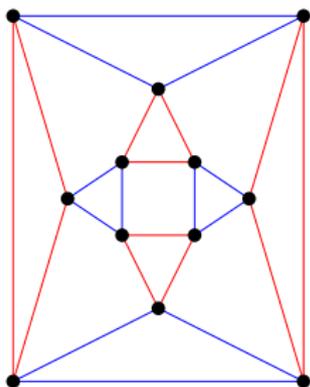
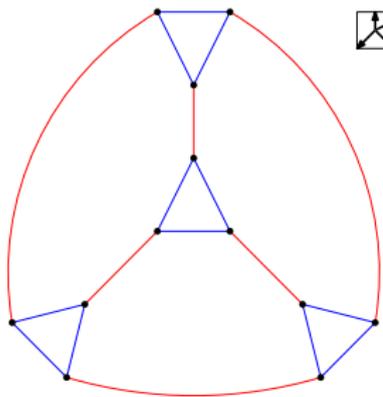


$$\Psi(u, v) = (u, \bar{u}\bar{v})$$

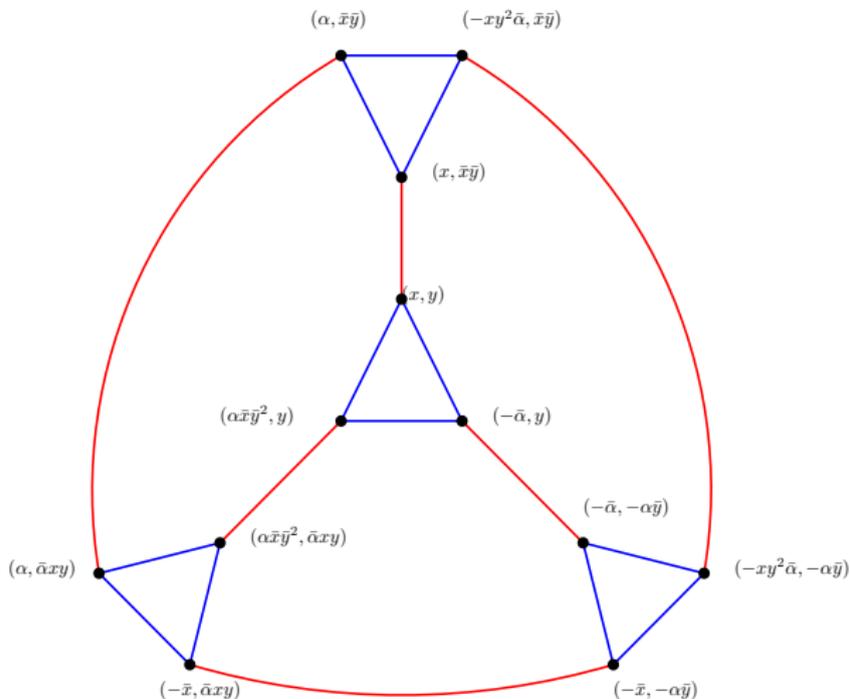
$$\Phi(u, v) = (\bar{u}\bar{v}, v)$$

$$G = \langle \Phi, \Psi \rangle \simeq D_6$$

D'autres exemples d'orbites



L'orbite du premier modèle



Rappels de théorie de Galois

Définition

Soit L/k une extension de corps. Elle est dite normale si L est stable par tout morphisme de corps fixant k .

Théorème (Correspondance de Galois)

Si L/k est normale de caractéristique nulle, toute extension intermédiaire de L/k est caractérisée par le groupe de k -automorphismes qui la fixe.

Si L/k est finie, appartenir à un sous-corps est équivalent à vérifier un nombre fini de conditions algébriques.

Généralisation du groupe à une orbite finie quelconque

Définition

On définit $k = \mathbb{Q}(S(x, y))$, $L = k(\mathcal{O}^1, \mathcal{O}^2)$ et $k_0 = k(x) \cap k(y)$.

Proposition (Normalité de l'orbite)

L'extension L/k_0 est galoisienne finie.

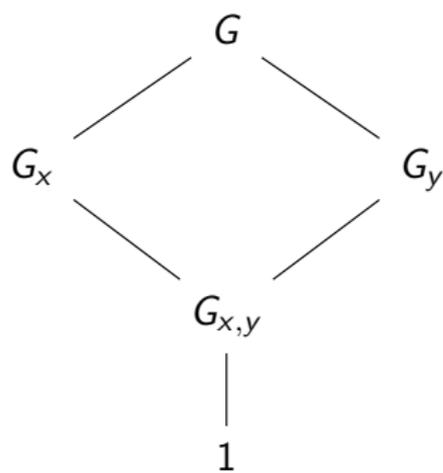
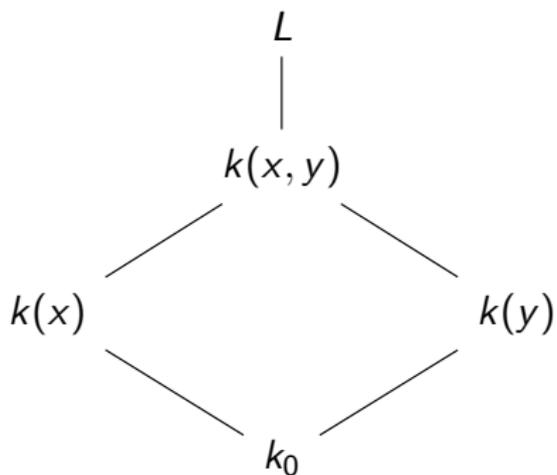
Définition

On définit le groupe de la marche $G = \text{Gal}(L/k_0)$.

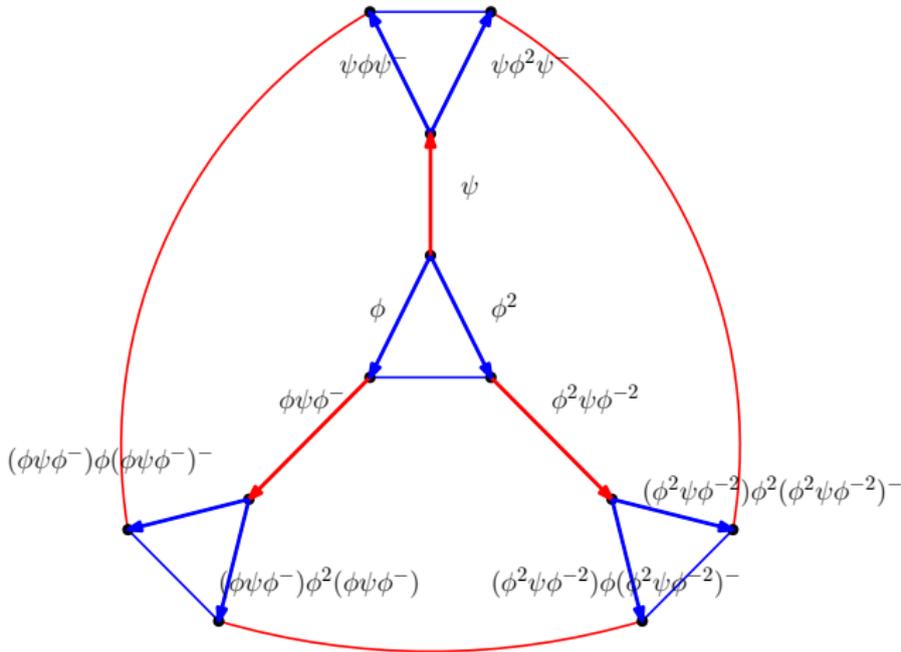
Théorème

Le groupe G agit transitivement sur l'orbite.

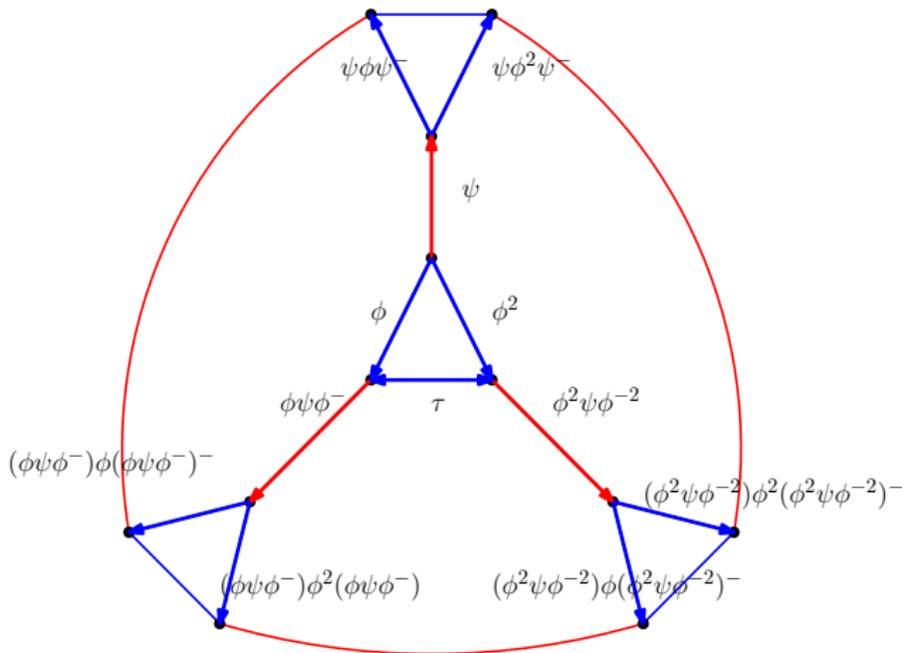
La structure de l'extension de l'orbite



Exemple de l'action de G sur O_{12}



Exemple de l'action de G sur O_{12}



$$\begin{cases} \tau(x) = x \\ \tau(y) = y \\ \tau(\alpha) = -xy^2\bar{\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} \psi(x) = x \\ \psi(y) = \overline{xy} \\ \psi(\alpha) = -\bar{\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} \phi(x) = \overline{\alpha xy^2} \\ \phi(y) = y \\ \phi(\alpha) = -\bar{x} \end{cases}$$

Plan

- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite
- 4 Invariants et découplage**
- 5 Bilan et perspectives

Échauffement : construction d'invariants rationnels

Si $(I(x), J(y)) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$ est une paire d'invariants rationnels, alors $i = I(x, 1/S(x, y)) = J(y, 1/S(x, y)) \in k(x) \cap k(y) = k_0$.

Par la correspondance de Galois, cela revient à exiger que i soit fixé par G .

On fabrique un tel élément en calculant $i = \sum_{\sigma \in G} \sigma(h)$, pour h quelconque dans L .

Pour une fraction rationnelle $H(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$, cela revient à calculer $\sum_{(u,v) \in \mathcal{O}} H(u, v, 1/S(x, y))$, puis à relever cet élément de L de deux manières dans $\mathbb{Q}(x, t)$ et dans $\mathbb{Q}(y, t)$.

Échauffement : construction d'invariants rationnels

Si $(I(x), J(y)) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$ est une paire d'invariants rationnels, alors $i = I(x, 1/S(x, y)) = J(y, 1/S(x, y)) \in k(x) \cap k(y) = k_0$.

Par la correspondance de Galois, cela revient à exiger que i soit fixé par G .

On fabrique un tel élément en calculant $i = \sum_{\sigma \in G} \sigma(h)$, pour h quelconque dans L .

Pour une fraction rationnelle $H(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$, cela revient à calculer $\sum_{(u,v) \in \mathcal{O}} H(u, v, 1/S(x, y))$, puis à relever cet élément de L de deux manières dans $\mathbb{Q}(x, t)$ et dans $\mathbb{Q}(y, t)$.

Échauffement : construction d'invariants rationnels

Si $(I(x), J(y)) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$ est une paire d'invariants rationnels, alors $i = I(x, 1/S(x, y)) = J(y, 1/S(x, y)) \in k(x) \cap k(y) = k_0$.

Par la correspondance de Galois, cela revient à exiger que i soit fixé par G .

On fabrique un tel élément en calculant $i = \sum_{\sigma \in G} \sigma(h)$, pour h quelconque dans L .

Pour une fraction rationnelle $H(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$, cela revient à calculer $\sum_{(u,v) \in \mathcal{O}} H(u, v, 1/S(x, y))$, puis à relever cet élément de L de deux manières dans $\mathbb{Q}(x, t)$ et dans $\mathbb{Q}(y, t)$.

Échauffement : construction d'invariants rationnels

Si $(I(x), J(y)) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$ est une paire d'invariants rationnels, alors $i = I(x, 1/S(x, y)) = J(y, 1/S(x, y)) \in k(x) \cap k(y) = k_0$.

Par la correspondance de Galois, cela revient à exiger que i soit fixé par G .

On fabrique un tel élément en calculant $i = \sum_{\sigma \in G} \sigma(h)$, pour h quelconque dans L .

Pour une fraction rationnelle $H(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$, cela revient à calculer $\sum_{(u,v) \in \mathcal{O}} H(u, v, 1/S(x, y))$, puis à relever cet élément de L de deux manières dans $\mathbb{Q}(x, t)$ et dans $\mathbb{Q}(y, t)$.

Découplage d'une fonction

Si $H(x, y) = F(x) + G(y)$ modulo K , alors $H(x, y, 1/S(x, y)) = F(x, 1/S(x, y)) + G(y, 1/S(x, y)) \in k(x) + k(y)$.

Par la correspondance de Galois, cela revient au système linéaire suivant dans L : $h = f + g$ avec f fixée par G_x et g fixée par G_y .

On trouve une base de L/k_0 , on écrit le système de manière matricielle, puis on résout pour f et g , qu'on relève ensuite dans $\mathbb{Q}(x, t)$ et $\mathbb{Q}(y, t)$.

Découplage d'une fonction

Si $H(x, y) = F(x) + G(y)$ modulo K , alors $H(x, y, 1/S(x, y)) = F(x, 1/S(x, y)) + G(y, 1/S(x, y)) \in k(x) + k(y)$.

Par la correspondance de Galois, cela revient au système linéaire suivant dans L : $h = f + g$ avec f fixée par G_x et g fixée par G_y .

On trouve une base de L/k_0 , on écrit le système de manière matricielle, puis on résout pour f et g , qu'on relève ensuite dans $\mathbb{Q}(x, t)$ et $\mathbb{Q}(y, t)$.

Découplage d'une fonction

Si $H(x, y) = F(x) + G(y)$ modulo K , alors $H(x, y, 1/S(x, y)) = F(x, 1/S(x, y)) + G(y, 1/S(x, y)) \in k(x) + k(y)$.

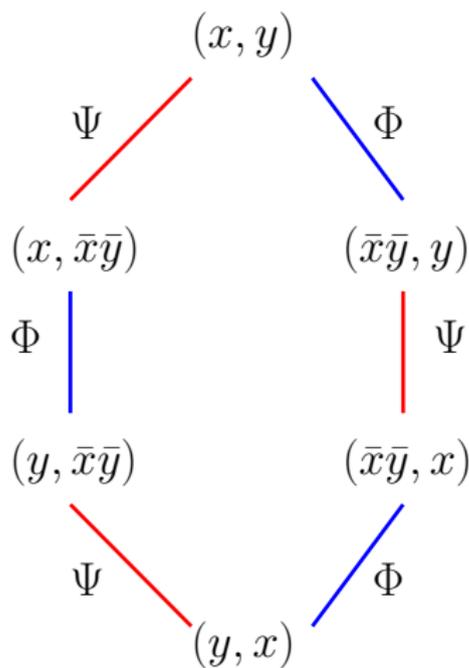
Par la correspondance de Galois, cela revient au système linéaire suivant dans L : $h = f + g$ avec f fixée par G_x et g fixée par G_y .

On trouve une base de L/k_0 , on écrit le système de manière matricielle, puis on résout pour f et g , qu'on relève ensuite dans $\mathbb{Q}(x, t)$ et $\mathbb{Q}(y, t)$.

Problèmes

- Dépend fortement du calcul d'une base de L/k_0 .
- Ne donne pas de critère de découplage.
- Ressemble peu au cas des petits pas.

Cas des petits pas



$$\begin{aligned}
 6 \text{ id} &= (1 - \Psi + \Phi\Psi - \Psi\Phi\Psi \\
 &\quad + \Phi\Psi\Phi\Psi - \Psi\Phi\Psi\Phi\Psi) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(1 + \Psi)(5 - 3(\Phi\Psi)^2 + (\Phi\Psi)) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(1 + \Phi)(5 - 3(\Psi\Phi)^2 + (\Psi\Phi))
 \end{aligned}$$

Découplage de (x, y)

On considère des combinaisons linéaires formelles de nœuds de l'orbite.

Si on arrive à écrire $(x, y) = \gamma + \mu + \alpha$, avec γ fixé par G_x , μ fixé par G_y et α annulant $\mathbb{Q}(x, t)$ et $\mathbb{Q}(y, t)$, on aura $H(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$ découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et alors $H(x, y) = H_\gamma(x) + H_\mu(y)$.

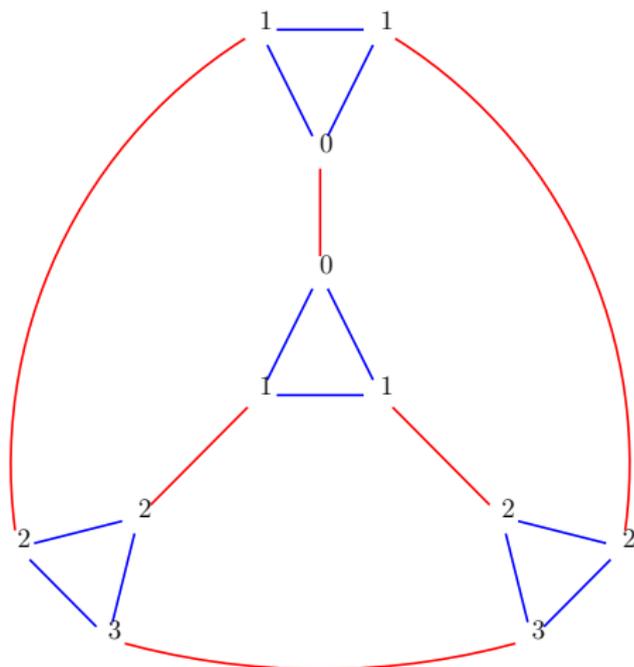
Pour trouver γ , μ et α , il suffit respectivement de considérer des combinaisons d'orbites sous l'action de G_x , d'orbites sous l'action de G_y et de cycles alternés.

Découplage de (x, y)

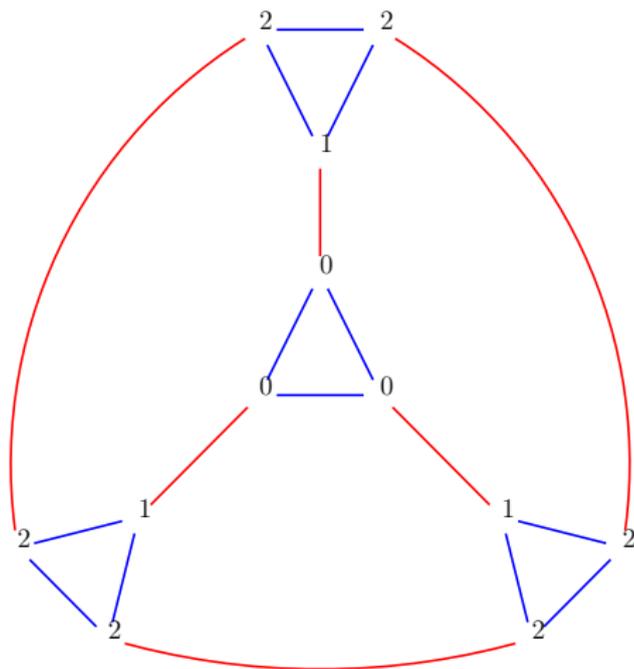
On considère des combinaisons linéaires formelles de nœuds de l'orbite.

Si on arrive à écrire $(x, y) = \gamma + \mu + \alpha$, avec γ fixé par G_x , μ fixé par G_y et α annulant $\mathbb{Q}(x, t)$ et $\mathbb{Q}(y, t)$, on aura $H(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y, t)$ découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et alors $H(x, y) = H_\gamma(x) + H_\mu(y)$.

Pour trouver γ , μ et α , il suffit respectivement de considérer des combinaisons d'orbites sous l'action de G_x , d'orbites sous l'action de G_y et de cycles alternés.

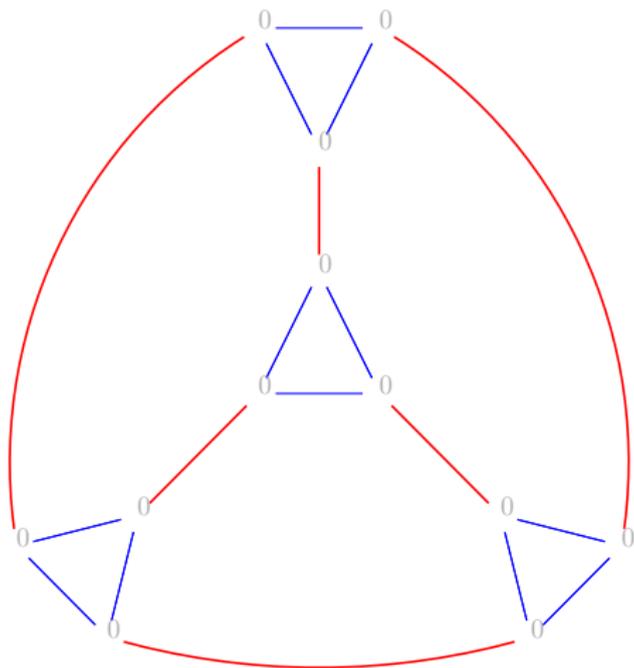
Classes selon G_X 

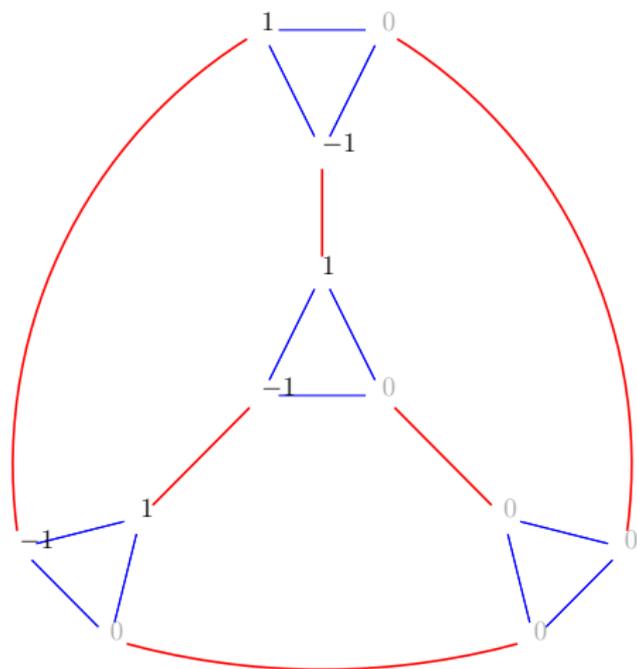
Classes modulo G_X :
 X_0, X_1, X_2 et X_3

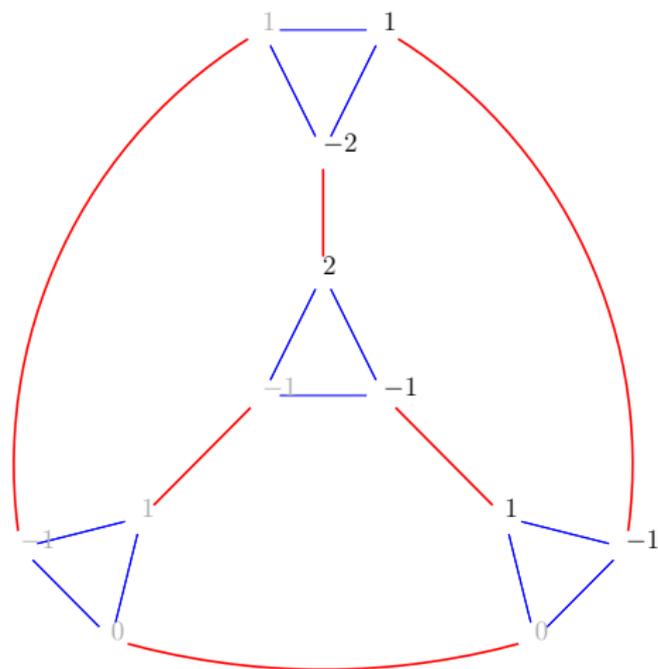
Classes selon G_y 

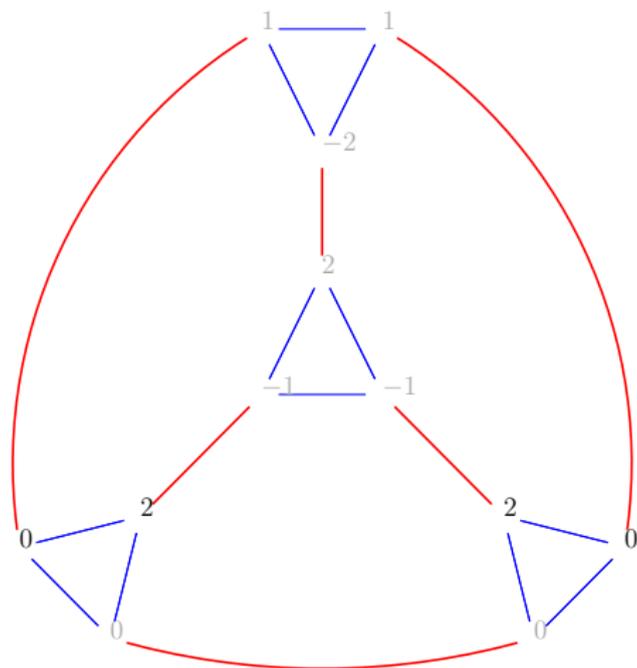
Classes modulo G_y :
 Y_0 , Y_1 et Y_2

Résolution sur O_{12}

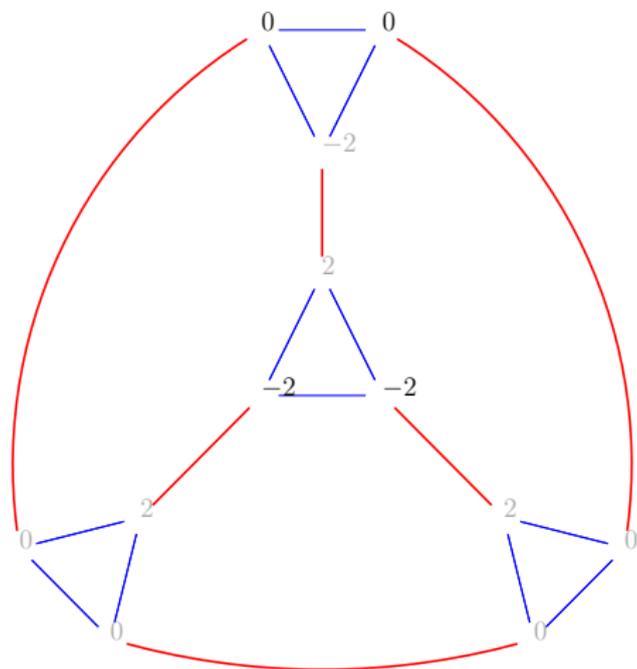


Résolution sur O_{12}  α_1

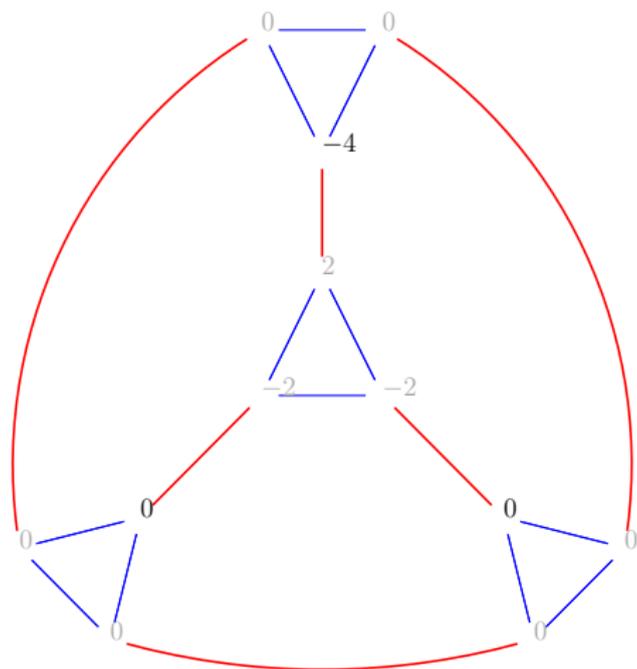
Résolution sur O_{12}  $\alpha_1 + \alpha_2$

Résolution sur O_{12} 

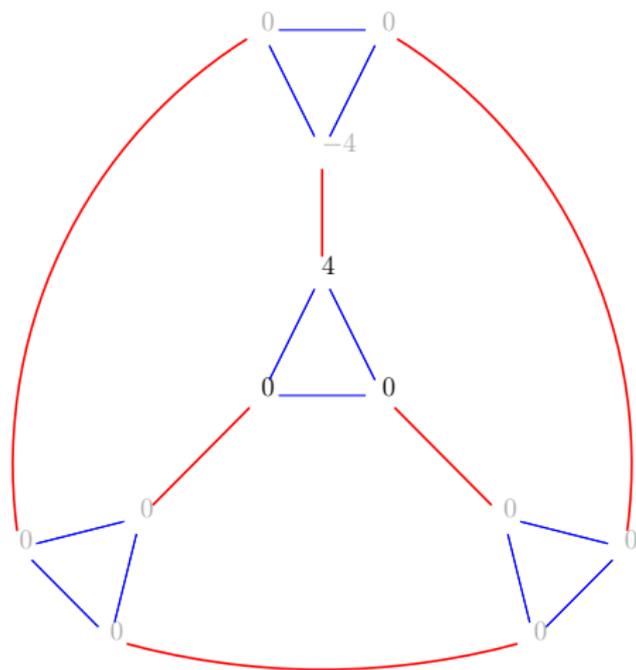
$$\alpha_1 + \alpha_2 + X_2$$

Résolution sur O_{12} 

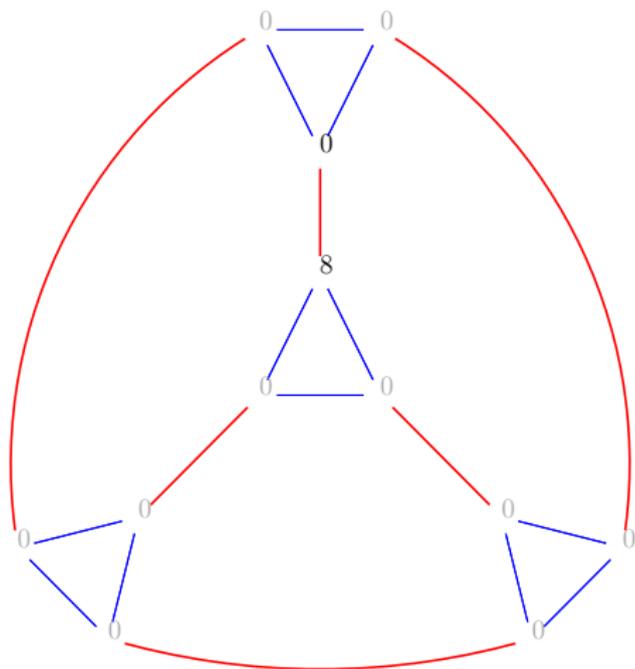
$$\alpha_1 + \alpha_2 + X_2 - X_1$$

Résolution sur O_{12} 

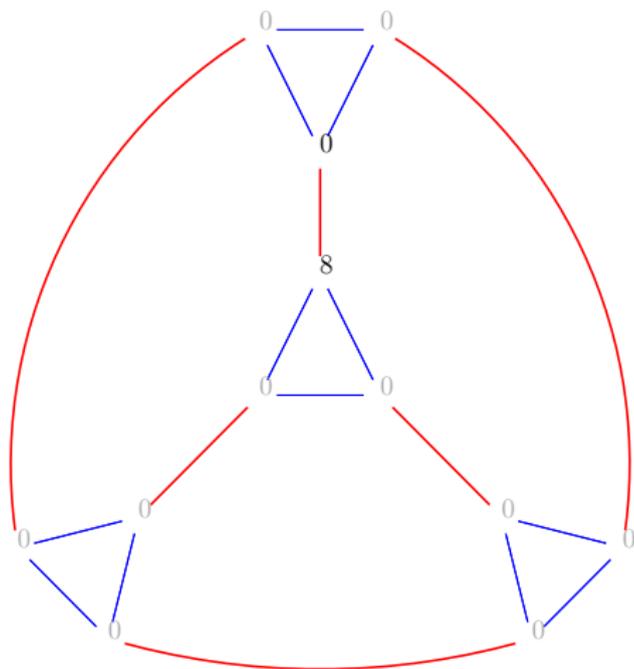
$$\alpha_1 + \alpha_2 + X_2 - X_1 \\ -2Y_1$$

Résolution sur O_{12} 

$$\alpha_1 + \alpha_2 + X_2 - X_1 \\ -2Y_1 + 2Y_0$$

Résolution sur O_{12} 

$$\alpha_1 + \alpha_2 + X_2 - X_1 \\ -2Y_1 + 2Y_0 + 4X_0$$

Résolution sur O_{12} 

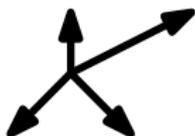
$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 + X_2 - X_1 \\ &-2Y_1 + 2Y_0 + 4X_0 \\ &= 8(x, y) \end{aligned}$$

Généralisation ?

Conjecture

Une telle décomposition de (x, y) existe toujours.

Bilan des invariants du premier modèle



Invariants rationnels :

$$(I_1, J_1) = \left(\frac{(x^6 + x^4 - x^2 - 1)t^2 - x^3}{xt^2(x^2 + 1)^2}, \frac{ty^4 - y^3 - t}{ty^2} \right)$$

Découplage :

$$xy = \frac{x}{t(x^2 + 1)} - \frac{1}{y} \pmod{K(x, y)}$$

$$(I_2, J_2) = \left(\frac{x}{t(x^2 + 1)} - t(x^2 + 1)Q(x, 0) + tQ(0, 0), \frac{1}{y} + tQ(0, y) \right)$$

CAS horribilis

> I4;

$$\frac{(t^2(x+1)^2 x Q(x, \theta)^2 - 2 Q(x, \theta)^2 x^2 - 2 D[2](Q)(\theta, \theta) t x + x^2 - 1) (t^2(x+1)^2 Q(x, \theta) - t^2(x+1) Q(\theta, \theta) - x)}{t x (x+1)^2}$$

> J4;

$$\frac{(t Q(\theta, y) y + 1) (Q(\theta, y)^2 t^3 y + (-2 t^3 y Q(\theta, \theta) + 2 t^2) Q(\theta, y) + Q(\theta, \theta)^2 t^3 y - 2 D[2](Q)(\theta, \theta) t^2 y + y^3 t - 2 t^2 Q(\theta, \theta) - y^2)}{t y^2}$$

Plan

- 1 Le problème
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Orbite
- 4 Invariants et découplage
- 5 Bilan et perspectives

Conclusion

On a pu effectivement à partir de ces invariants réduire le nombre de variables catalytiques, et prouver l'algébricité avec BMJ de ces deux modèles.



Ce sont les premiers modèles à grands pas non triviaux à avoir été prouvés algébriques.

Ils rejoignent ces quatre modèles à petits pas déjà connus comme algébriques.



Développements ultérieurs

- Rendre moins artisanale la construction du découplage
- Formuler de nouvelles conjectures d'algébricité pour de grands pas
- Plus grandes dimensions