

1-2-3 Conjecture signée

Rapport de stage de L3

Sven Meyer

Juin - Juillet 2023

Stage effectué au Laboratoire Bordelais
de Recherche en Informatique (LaBRI)

Sous la direction de J. Bensmail, H. Hocquard, C. Marcille

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Problème original	1
1.2	Problème étudié	2
2	Recherche de k-pondérations optimales	2
2.1	Existence de pondérations	2
2.2	Borne constante	3
2.3	Graphes éparses	6
2.3.1	Degré moyen maximal 2 implique 3-pondérabilité	6
2.3.2	Degré moyen maximal 3 implique 7-pondérabilité	7
3	Relaxation du problème : Choix de la polarisation	8
4	Relaxation du problème : Absence de valeur absolue	9
4.1	Recherche de k -pondérations optimales	9
4.2	Choix de la polarisation	11
5	Conclusion	12
	Références bibliographiques	13
	ANNEXE	
A	Recherche de k-pondérations optimales	i
A.1	Notations et définitions	i
A.2	Existence de pondérations	i
A.3	Borne constante	i
A.4	Graphes éparses	xiii
A.4.1	Degré moyen maximal 2 implique 3-pondérabilité	xiii
A.4.2	Degré moyen maximal 3 implique 7-pondérabilité : configurations réductibles	xvi
A.4.3	Degré moyen maximal 3 implique 7-pondérabilité : déchargement	xxvi
B	Relaxation du problème : Choix de polarisation	xxvii
C	Relaxation du problème : Absence de valeur absolue	xxx
C.1	Recherche de k -pondérations optimales	xxx
C.2	Choix de la polarisation	xxxii

1 Introduction

Mon stage s'est concentré sur l'étude de généralisations d'un problème de théorie des graphes, introduit par Michał Karoński, Tomasz Łuczak et Andrew Thomason dans [9] en 2004. Dans ce problème initial, pour un entier k quelconque, chaque arête est pondérée par une valeur dans $\{1, \dots, k\}$. On construit alors une coloration des sommets définie par la somme des pondérations des arêtes incidentes. On cherche alors le plus petit entier k tel que la coloration permet de distinguer toute paire de sommets adjacents. Karonski *et al.* ont alors conjecturé que ceci est possible en utilisant uniquement les valeurs 1,2 et 3 sur les arêtes.

Dans ce qui suit, je commence par présenter formellement le problème original, nommé 1-2-3 Conjecture, puis la généralisation que j'ai étudiée, qui consiste à ajouter une polarisation aux arêtes, pour laquelle j'ai proposé une conjecture similaire et démontré une borne pour tous les graphes, avant de chercher une meilleure borne sur des classes de graphes plus restreintes, puis d'étudier des variantes intéressantes à cette généralisation.

Je ne donne dans ce rapport qu'un aperçu des preuves des résultats que j'ai démontrés. La totalité des preuves des différents résultats énoncés au cours de ce rapport se trouvent en annexe, la référence du résultat étant indiquée à chaque idée de preuve.

Le travail que j'ai réalisé au cours de ce stage doit donner lieu à une soumission dans une revue internationale.

1.1 Problème original

Définition 1. Soit $G = (V, E)$ un graphe, d'ensemble de sommets V et d'arêtes E .

Un graphe G est dit *bon* s'il est simple, connexe, différent de K_2 .

Pour un entier naturel k , une k -pondération de G est une fonction $\ell : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

Une k -pondération est *propre* quand pour toute paire de sommets u, v adjacents, $\sum_{w \in N(u)} \ell(uw) \neq \sum_{w \in N(v)} \ell(vw)$, c'est-à-dire quand la somme induite forme une coloration propre.

Le problème qui nous intéresse est :

Problème. Pour tout graphe G , quel est l'entier k minimal noté $\chi_\Sigma(G)$ tel que G admet une k -pondération propre ?

On donne donc des poids aux arêtes, mais le problème de coloration se situe au niveau des sommets. Karonski *et al.* proposent alors la conjecture suivante :

Conjecture (1-2-3 Conjecture [9]). Pour tout graphe G , $\chi_\Sigma(G) \leq 3$.

Dans ces énoncés, on se concentre sur les graphes qui sont connexes et ne sont pas K_2 (le graphe complet à 2 sommets), car il n'existe aucune pondération propre de K_2 , et que c'est le seul graphe avec cette propriété.

Karonski *et al.* montrent initialement que le résultat est vrai pour les graphes bipartis, les graphes 3-chromatiques, et qu'il existe un ensemble de 30 réels qui suffisent pour tous les graphes. Après diverses approches permettant de diminuer le nombre de valeurs différentes à utiliser (voir [13]), Kalkowski, Karoński et Pfender montrent dans [8] que $\chi_\Sigma(G) \leq 5$ pour tout bon graphe G , en proposant un algorithme simple et pratique à utiliser, y compris dans les généralisations que j'ai étudiées. Avec une variante initiale de leur algorithme, Kalkowski montre dans [7] que si on autorise également à donner un poids aux sommets (comptabilisé dans le calcul des sommes), alors 1, 2, 3 est suffisant pour tout graphe. En considérant des classes de graphes plus restreintes, des techniques de preuves différentes émergent. Ainsi, on a $\chi_\Sigma(G) = 3$ pour tout bon graphe complet G [5], $\chi_\Sigma(G) \leq 2$ pour tout bon arbre G , et $\chi_\Sigma(G) \leq 2$ pour tout bon graphe biparti G sauf pour G appartenant à une sous-classe caractérisée précisément dans [14] telle que $\chi_\Sigma(G) = 3$. Alors qu'une bonne partie des graphes semble pouvoir être 2-pondérables, savoir si un graphe est 2-pondérable est NP-complet [6]. Récemment, Keusch propose dans [10] une solution à la conjecture. Un résumé plus complet de l'état de l'art est disponible dans [13].

1.2 Problème étudié

Lors de mon stage, j'ai étudié une généralisation de la 1-2-3 Conjecture aux graphes signés.

Définition 2. Un graphe signé $G = (V, E, \sigma)$ est un graphe $G' = (V, E)$ muni d'une signature $\sigma : E \rightarrow \{-1, +1\}$. On dit qu'une arête $e \in E$ est positive si $\sigma(e) = +1$, et négative si $\sigma(e) = -1$. Un graphe signé $G = (V, E, \sigma)$ est dit *bon* si $G' = (V, E)$ est un bon graphe.

Dans la suite, on considère toujours un bon graphe signé noté G , où l'ensemble de ses sommets est noté V , l'ensemble de ses arêtes E et la signature σ .

La notion de pondération propre s'adapte alors.

Définition 3. Dans un graphe signé $G = (V, E, \sigma)$, une *k-pondération* est une fonction $\ell : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

Étant donné ℓ une *k-pondération*, pour $u \in V$, on pose $s_\sigma^\ell(u) = \sum_{v \in N(u)} \sigma(uv)\ell(uv)$, ainsi que $s_{|\sigma|}^\ell(u) = |s_\sigma^\ell(u)|$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on notera s_σ et $s_{|\sigma|}$ à la place de s_σ^ℓ et $s_{|\sigma|}^\ell$. On dit qu'un graphe signé G est *k-pondérable* lorsqu'il existe une *k-pondération* ℓ telle que $s_{|\sigma|}$ forme une coloration propre des sommets, c'est-à-dire que pour toute paire de sommets u, v adjacents, $s_{|\sigma|}(u) \neq s_{|\sigma|}(v)$. On dit alors également que ℓ est une pondération propre de G .

La question principale étudiée tout au long de mon stage est :

Problème. Pour un graphe signé G , quel est l'entier k minimal noté $\chi_{|\Sigma|}(G)$ tel que G est *k-pondérable*?

Le problème posé est une généralisation du problème initial, car quand on fixe $\sigma = +1$, $s_{|\sigma|}$ est identique à la somme sans signature. La généralisation du problème permet d'étudier l'impact que la polarisation a sur les différentes techniques de preuves existantes. Le problème est plus compliqué dans les graphes signés, et la valeur absolue augmente la difficulté du problème, car les sommes perdent une partie de leur expressivité, et le lien entre le poids d'une arête et la somme des sommets incidents est brisé, ce qui change la dynamique des sommes.

Cependant, je propose la conjecture suivante :

Conjecture. Pour tout bon graphe G signé, $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 3$.

En effet, il n'est pas possible d'espérer mieux, car il existe des graphes non 2-pondérables (en prenant $\sigma = +1$), mais l'apport de complexité dû à la valeur absolue semble se compenser avec l'ajout de la signature qui donne plus de choix de sommes quand il y a peu d'arêtes d'une polarité donnée, ou donne plus de liberté dans le choix d'une somme quand il y a à peu près autant d'arêtes incidentes de chaque polarité.

Pendant l'ensemble du stage, je n'ai considéré que les graphes signés connexes, la pondérabilité étant une notion uniquement locale aux sommets adjacents, s'étendant donc de manière transparente à différentes composantes connexes.

2 Recherche de *k-pondérations* optimales

2.1 Existence de pondérations

Avant de chercher à trouver une borne supérieure au problème établi, je me suis assuré que la notion de bon graphe étudiée tout au long du stage a bien un sens, c'est-à-dire que $\chi_{|\Sigma|}(G)$ est bien définie. Les bons graphes non signés admettent tous une pondération, car ils ne sont pas isomorphes à K_2 . On retrouve le même résultat dans la généralisation.

Proposition 4. *Pour tout bon graphe signé G , $\chi_{|\Sigma|}(G)$ est bien définie (tout bon graphe signé est pondérable).*

Idée de preuve (A2). Dénotons arbitrairement par $e_1, \dots, e_k, \dots, e_{|E|}$ les arêtes de G . Pour $e_k \in E$, si $\sigma(e_k) = 1$, alors on pose $\ell(e_k) = 2^{|E|+2+k}$, sinon $\ell(e_k) = 2^k$. Avec cette pondération, on peut, pour tout sommet u , retrouver dans l'écriture en binaire de $s_{|\sigma|}(u)$ l'ensemble des arêtes incidentes à u , et ainsi déduire que la pondération est propre. \square

2.2 Borne constante

La Proposition 4 donnant des pondérations avec des valeurs non bornées (fonction de la taille du graphe), l'étape suivante a donc été de trouver un entier k fixé tel que tous les bons graphes signés sont k -pondérables. Pour cela, j'ai adapté l'algorithme présenté par Kalkowski dans [8].

Théorème 5. *Pour tout bon graphe signé G de degré maximum au moins égal à 4, $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 9$.*

Idée de preuve (A3). L'algorithme introduit en 2011 par Kalkowski dans [8] a la particularité d'être pratique et simple à utiliser. Il se décompose en deux parties, en traitant les sommets le long d'un arbre couvrant enraciné des feuilles à la racine notée v_n . Lors de la première partie, on traite tous les sommets sauf v_n . Quand on traite un sommet, l'idée est de laisser un certain degré de liberté sur les pondérations des arêtes incidentes à des sommets déjà traités, en autorisant à ce qu'elles puissent prendre deux valeurs différentes, sans que cela ne crée de conflits entre les sommets déjà traités, quelles que soient les valeurs choisies parmi la paire autorisée pour chaque arête. On utilise ces degrés de liberté sur les arêtes afin de trouver assez de sommes différentes pour un sommet, et de choisir une somme qui sera assez différente de celles des autres sommets pour garantir une absence de conflit pour la suite quand on modifie une arête incidente à ce sommet. Le résultat a permis de descendre drastiquement la borne k , en montrant qu'il existe une 5-pondération pour les bons graphes non signés, de manière algorithmique sans considérer des cas particuliers. La première partie repose donc sur le fait qu'on puisse modifier les poids des arêtes de telle manière à produire assez de sommes différentes.

Cependant, quand on utilise deux degrés de libertés on peut se déplacer vers plus de valeurs de sommes dans les graphes non signés, mais ce même procédé dans un graphe signé peut faire retourner au point de départ, et ne pas débloquent des sommes pour le sommet incident à cause de la valeur absolue. Ainsi, compte tenu que l'espace possible des sommes est divisé par 2 (on n'a pas accès aux sommes négatives), il est intuitif que multiplier par 2 l'espace des degrés de liberté permet de contrebalancer cette perte, ce qui explique qu'on passe d'une 5-pondération pour les graphes non signés à une 9-pondération, afin d'avoir assez de sommes différentes.

Lors de la deuxième étape consistant à utiliser les degrés de liberté sur les arêtes incidentes à v_n afin de trouver une somme pour v_n distincte de celles de ses voisins, il n'est pas possible de contrôler l'impact du degré de liberté sur la manière dont change $s_{|\sigma|}(v_n)$, ce qui force à considérer plusieurs cas particuliers et conduit à la condition de degré maximal au moins égal à 4, certains cas particuliers de faible degré ne laissant pas assez de liberté dans le choix de $s_{|\sigma|}(v_n)$. \square

Cette technique de preuve ne semble pas être améliorable en l'état. En effet, afin d'assurer la construction dans la première partie, utiliser moins de valeurs possibles pour les pondérations ne contrebalance pas assez la perte de l'expressivité des sommes.

Ce résultat reste toutefois central dans mon stage, car il constitue la meilleure borne trouvée qui tienne pour les graphes de hauts degrés, et représente une forte amélioration vis-à-vis du premier résultat qui n'assurait qu'une pondération prenant un nombre exponentiel de valeurs en fonction de la taille du graphe. Pour étendre ce théorème à l'ensemble des bons graphes signés, j'ai donc ensuite étudié différentes classes de graphes, afin d'y trouver des résultats potentiellement plus fins. Comme les graphes non couverts par la preuve sont de petits degrés, j'ai étudié plus précisément ces graphes.

Proposition 6. *Pour tout bon graphe signé G de degré maximal 2, $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 3$.*

Idée de preuve (A4). Les graphes de degré maximal 2 sont les chaînes et les cycles. L'idée principale est que sur une chaîne, en posant comme pondération dans l'ordre de la chaîne successivement les poids 1,1,2,2, quelle que soit la polarisation des arêtes, un sommet sur deux a une somme paire, et les autres une somme impaire (sauf potentiellement le dernier sommet). En étudiant les configurations aux extrémités des chaînes, on montre que les chaînes sont 2-pondérables. Pour les cycles, on utilise la construction sur les chaînes en ne considérant d'abord pas le cycle, puis on règle à la main les pondérations au niveau du raccord du cycle. \square

Le but étant de trouver un résultat pour tous les bons graphes signés, et comme il manquait à ce moment un résultat sur les graphes de degré maximal 3, le théorème de Brooks [4] stipulant

que les graphes de degré maximal 3 sont soit K_4 , soit bipartis, soit 3-chromatiques, a donné une direction de recherche.

J'ai donc commencé par étudier les graphes bipartis. L'idée principale existant sur les graphes non signés de nombre chromatique donné, est d'utiliser une technique par patron. Pour un graphe de nombre chromatique k , on considère une partition V_0, \dots, V_{k-1} en stables du graphe. On cherche une k -pondération telle que pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $s_{|\sigma|}(u) \bmod k = i$ pour tout $u \in V_i$. Pour obtenir un tel résultat, on commence par une pondération avec toutes les arêtes valant k , ce qui donne des sommes multiples de k , puis en considérant deux sommets u, v (s'ils existent) n'ayant pas une bonne somme, on modifie les valeurs des arêtes selon un chemin entre u et v bien choisi, de manière à ce que $s_{|\sigma|}(u)$ et $s_{|\sigma|}(v)$ aient un bon reste modulo k , et que les restes des sommes des autres sommets n'aient pas été altérés. L'altération des valeurs sur un chemin se fait alternativement en modifiant les valeurs des arêtes de $+1$ et -1 modulo k , ce qui conserve les congruences des sommes sauf sur les extrémités du chemin.

Proposition 7. *Pour tout bon graphe biparti signé G de bipartition $A \cup B$ avec $|A|$ paire, on a $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 2$.*

Idée de preuve (A5). Ce résultat est déjà connu pour les graphes non signés, et il est facile d'adapter le résultat, parce que la parité des sommes est conservée par la valeur absolue. Ainsi, en commençant par donner le poids 2 à toutes les arêtes et en utilisant le processus décrit précédemment, on peut descendre de 2 le nombre de sommets dans A ayant une somme paire à chaque utilisation du processus. Le fait que $|A|$ soit paire est donc ici important, et on obtient que la somme des sommets est impaire dans A , et paire dans B . \square

Il reste donc à trouver une propriété sur les graphes bipartis dont la bipartition est composée de deux parties de taille impaire.

Théorème 8. *Pour tout bon graphe biparti signé G de bipartition $A \cup B$, on a $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 3$.*

Idée de preuve (A6). Dans la Proposition 7, la parité de la cardinalité d'une des deux parties était primordiale afin d'obtenir une 2-pondération. En raisonnant modulo 3, on veut que les sommes des sommets dans A soient multiples de 3 et non multiples de 3 dans B . Le procédé identique au cas précédent fonctionne afin de décroître de deux en deux le nombre de sommets de B qui ont une somme multiple de 3. Quand $|B|$ n'est pas paire, il est possible de remodifier la valeur d'un autre sommet de B afin de modifier le reste modulo 3 du dernier sommet, tout en assurant que cet autre sommet garde une somme non multiple de 3. \square

Dans la preuve du Théorème 5, on a expliqué qu'il est normal de s'attendre à ce que doubler le nombre de poids que peuvent prendre les arêtes permette d'obtenir une pondération propre pour les graphes signés. Les deux résultats pour les graphes bipartis non signés étaient déjà connus, mais on arrive à fournir une preuve qui donne un même résultat sans devoir utiliser plus de poids différentes pour les arêtes. Cependant, alors qu'il existe une bonne caractérisation des graphes bipartis non 2-pondérables [14], d'autres graphes bipartis signés ne sont pas 2-pondérables, en particulier certains arbres, sur lesquels on perd donc la propriété de 2-pondérabilité.

Proposition 9. *Il existe une infinité d'arbres signés G tels que $\chi_{|\Sigma|}(G) = 3$.*

Idée de preuve (A8). Le graphe de la Figure 1 constitue un contre-exemple.

Il est possible de l'étendre en lui ajoutant des arêtes de polarités bien choisies, et de construire une classe de contre-exemples infinie. \square

La construction obtenue d'arbres non 2-pondérables se cantonne à des arbres de degré maximal 3 qui sont en fait des chenilles. Je n'ai cependant pas réussi à déterminer si tous les arbres signés de degré maximal au moins 4 sont 2-pondérables, ou si les contre-exemples que j'ai trouvés sont les seuls. Ici le contre-exemple est construit en arrivant à bloquer la valeur de toutes les arêtes à partir d'un choix d'une unique arête, en raison du petit degré de chaque sommet. De plus grands degrés donnent plus de libertés, et donc il paraît possible que les arbres de grands degrés soient 2-pondérables.

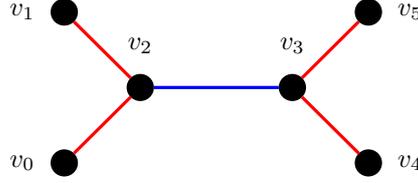


Figure 1: Un arbre signé G tel que $\chi_{|\Sigma|}(G) = 3$

On voudrait adapter l'idée de donner une somme modulo 3 identique à chaque sommet dans une partie pour les graphes 3-chromatiques, mais on remarque que le fait que la valeur absolue ne conserve pas le reste modulo 3 est problématique. En effet, en utilisant un procédé analogue au cas biparti, on peut assurer une construction telle qu'un reste modulo 3 de s_σ est choisi pour chaque partie, mais cela n'empêche pas des collisions de restes pour $s_{|\sigma|}$. En conservant cette idée d'affectation de restes pour chaque partie du graphe, mais en étendant l'espace des valeurs autorisées, on peut alors construire des pondérations avec plus de poids différents.

Théorème 10. *Pour tout bon graphe 3-chromatique signé G , on a $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 5$.*

Idée de preuve (A9). Au lieu de considérer les sommes modulo 3, on les considère modulo 5, et avec la tripartition A, B, C , on construit une 5-pondération, telle que dans A les sommes des sommets sont multiples de 5, congrues à 2 ou 3 dans B et congrues à 1 ou 4 dans C . Ainsi, lorsqu'une altération de ℓ , pour un sommet u , $s_\sigma(u)$ varie d'un multiple de 5, alors $s_{|\sigma|}(u)$ varie de telle manière que le reste de $s_{|\sigma|}(u)$ reste dans la même catégorie (c'est-à-dire que si avant l'altération $s_{|\sigma|}(u)$ est congrue à 0 modulo 5, alors c'est également le cas après, et de même si $s_{|\sigma|}(u)$ est congrue à 1 ou 4 modulo 5 ou 2 ou 3 modulo 5).

La deuxième idée est que plutôt que de considérer des chemins entre deux sommets, on considère des cycles passant par un sommet, et il est possible de modifier les poids des arêtes sur le cycle de telle manière à ce que seul le reste modulo 5 de la somme de ce sommet change de catégorie. Cela me permet donc de construire une 5-pondération sans avoir à regarder la parité de la taille des parties.

Plus précisément, on considère un cycle de taille impaire (qui existe car G n'est pas biparti) passant par un sommet u et modifie les poids des arêtes successivement de sorte que la contribution sur s_σ augmente de +1 modulo 5, puis diminue de 1 modulo 5. De cette manière la somme s_σ sur les sommets intermédiaires ne change que d'un multiple de 5, ce qui ne fait pas changer la catégorie de modulo, mais change le reste de $s_\sigma(u)$ de +2, ce qui permet de donner un bon reste aux différents sommets. \square

J'ai d'abord obtenu ce résultat avec une 8-pondération puis j'ai affiné en une 5-pondération, le résultat étant d'abord un moyen de résoudre un problème rencontré en essayant de 4-pondérer les graphes 3-chromatiques. En adaptant la preuve, on en déduit alors le résultat suivant :

Théorème 11 (A10). *Pour tout bon graphe 4-chromatique signé G , on a $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 6$.*

Toutefois, en utilisant cette technique, pour les graphes 3-chromatiques, on ne peut pas trouver de 3-pondérations, et la construction proposée n'est pas adaptable pour une 4-pondération par un argument d'invariant de parité posant un problème quand pour toute partition les trois parties sont toutes de taille impaire.

Je pense qu'en utilisant cette technique de preuve, il est possible de montrer qu'en général, si un graphe signé est k -chromatique, alors il admet une $(2k - 1)$ -pondération.

Grâce aux différents résultats montrés sur les différentes classes de graphes de nombre chromatique fixé, et en utilisant le théorème de Brooks, on en déduit alors le théorème général suivant :

Théorème 12 (A12). *Pour tout bon graphe signé G , on a $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 9$.*

J'ai également essayé de trouver une méthode de pondération spécifique aux graphes complets, mais n'ai pas réussi. Alors qu'on a l'impression que l'ajout de la polarisation ajoute un fort degré de liberté pour les sommes, ce n'est en fait pas le cas en général :

Proposition 13 (A13). *Si $n \geq 4$ pair, il existe une polarisation non triviale des arêtes de K_n qui n'est pas 2-pondérable.*

2.3 Graphes éparses

Outre le fait de vouloir étudier les graphes de degré maximal borné, j'ai ensuite étudié une notion plus fine que le degré moyen, celle de *mad*.

Définition 14. Le *mad* (maximum average degree) d'un graphe G est le degré moyen maximal parmi tous les sous-graphes de G , noté

$$\text{mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}.$$

Un graphe de petit degré maximal va avoir un petit *mad*, mais les graphes ayant un *mad* inférieur à une certaine valeur sont bien plus généraux, car le degré maximal n'est pas borné. La notion de *mad* permet de caractériser à quel point un graphe est peu dense, globalement et localement. Ainsi, un graphe de petit *mad* est globalement peu dense, mais en regardant des parties locales, on ne peut pas trouver de cliques de grande taille et des sommets de petits degrés doivent être présents un peu partout dans le graphe.

Essayer de trouver des résultats de pondération dans ces graphes donne donc des résultats pour plus de graphes que ceux de degré maximal fixé et est également intéressant car permet d'étudier structurellement comment se comportent les pondérations et les sommes induites.

Quand on travaille sur la pondérabilité de graphes de *mad* borné, il existe une méthode de preuve particulière, appelée preuve par *déchargement*. On pose m une constante et considère G un graphe contre-exemple minimal pour la mesure $|V| + |E|$ pour une propriété donnée parmi les graphes avec $\text{mad}(G) < m$. Pour cela, on définit $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(u) = d(u) - m$. Alors $\sum_{u \in V} \omega(u) < 0$. On va déplacer les charges entre les différents sommets, ici de sorte que les sommets de grand degré donnent de la charge à des sommets de petit degré, tout en conservant la même charge totale, de manière à obtenir une fonction de charge finale ω^* telle que pour tout $u \in V$, on a $\omega^*(u) \geq 0$, mais avec $\sum_{u \in V} \omega^*(u) = \sum_{u \in V} \omega(u) < 0$, ce qui conduira à une contradiction.

Afin de rendre le déchargement possible, il faut d'abord faire une première phase de recherche de configurations, qui sont des graphes qui ne peuvent pas être sous-graphe d'un graphe G contre-exemple minimal parmi les graphes avec $\text{mad}(G) < m$ pour la propriété qu'on veut prouver. On dit que de telles configurations sont *réductibles*. Afin de montrer que des configurations sont réductibles, on utilise le fait que G est minimal, et donc en considérant le sous-graphe duquel on enlève les arêtes présentes dans la configuration, on y a une pondération propre, qu'on étend ensuite au graphe tout entier. Le fait qu'on ait besoin du degré moyen maximal et non pas du degré moyen intervient ici. En effet, en considérant un sous-graphe H de G , on a $\text{mad}(H) \leq \text{mad}(G) < m$, donc H vérifie la propriété voulue par hypothèse de minimalité (à quelques détails techniques près).

En pratique, en cherchant à trouver des configurations réductibles de plus en plus complexes, on peut améliorer les preuves pour un *mad* plus grand, mais souvent pour un gain marginal face à des preuves pas forcément intéressantes et souvent bien plus complexes.

2.3.1 Degré moyen maximal 2 implique 3-pondérabilité

Le but étant de trouver des classes de graphes qui valident la conjecture, j'ai d'abord cherché un résultat pour les graphes 3-pondérables. Pour cela on a une unique configuration réductible :

Configuration 1. *Un sommet a de degré n ($n \geq 2$) adjacent à au moins $n-1$ sommets de degré 1.*

La Configuration 1 de la Figure 2 se lit de la manière suivante : u est adjacent à des sommets de degré 1. Comme on a des arêtes entre u et les sommets u_1 à u_{n-1} , il y en a au moins $n-1$ de degré 1, et u est de degré n parce qu'on a ce nombre indiqué dans le sommet. Il y a donc une arête incidente à u et à un autre sommet de degré quelconque qui ne fait donc pas partie de la configuration.

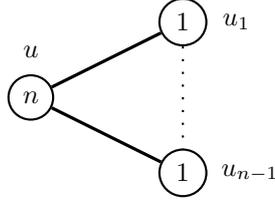


Figure 2: Configuration 1 pour le Théorème 15

Théorème 15. *Si G est un bon graphe signé avec $\text{mad}(G) < 2$, alors $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 3$.*

Idée de preuve (A19). Quand on considère G contre-exemple minimal avec $\text{mad}(G) < 2$, comme la Configuration 1 n'est pas sous-graphe de G , on sait que si un sommet u est adjacent à des sommets de degré 1, alors u est adjacent à au moins deux sommets de degré au moins 2.

On a $\omega(u) = -1$ pour un sommet de degré 1, et $\omega(u) \geq 0$ sinon. Les sommets de degré 1 doivent donc récupérer une charge, et les autres peuvent en donner au plus $d(u) - 2$.

Ainsi, en prenant comme règle que les sommets de degré 1 récupèrent une charge de leur voisin, on obtient $\omega^*(u) \geq 0$ pour tous les sommets, car les sommets de degré 1 gagnent une charge, et les sommets de degré 2 en cèdent au plus $d(u) - 2$. On a donc une contradiction au fait que G soit un contre-exemple minimal, donc il n'existe pas de contre-exemple. \square

Les graphes de degré moyen maximal strictement inférieur à 2 sont en fait exactement les arbres. En effet, si un graphe n'est pas un arbre et donc possède un cycle, en considérant le cycle comme sous-graphe, celui-ci a un degré moyen de 2 et le mad du graphe total est donc au moins 2. Ce théorème donne donc en fait une preuve différente permettant de montrer que $\chi_{\Sigma}(G) \leq 3$ pour tout arbre G , sans passer par les graphes bipartis, mais en raisonnant directement sur la structure d'un arbre.

2.3.2 Degré moyen maximal 3 implique 7-pondérabilité

En voulant essayer de montrer un résultat pour un graphe G où $\text{mad}(G)$ est plus élevé, considérer des 3-pondérations entraînait trop de configurations où essayer d'étendre une pondération depuis un sous-graphe était impossible. Il était en effet facile de construire des situations forçant la pondération des arêtes de la configuration et permettant alors d'empêcher une extension sans conflit. J'ai essayé d'améliorer avec des 5-pondérations, mais j'avais le même problème. J'ai donc étudié des 7-pondérations, résultat pour lequel la preuve a tout de même nécessité l'utilisation d'outils variés, dont certains algébriques [1]. On montre alors que les sept configurations de la Figure 3 sont réductibles.

Théorème 16. *Si G est un bon graphe signé tel que $\text{mad}(G) < 3$, alors $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 7$.*

Idée de preuve (A27). Les différentes configurations permettent de contrôler la structure du graphe. On a $\omega(u) = d(u) - 3$ pour tout sommet $u \in V$, donc si u est de degré 1, alors $\omega(u) = -2$, si $d(u) = 2$, alors $\omega(u) = -1$. En utilisant la technique des fantômes [3], technique qui est un raffinement de la méthode de déchargement et permet de produire une contradiction tout en demandant à ce que certains sommets récupèrent moins de charge, il suffit de montrer que $\omega^*(u) \geq -1$ pour u de degré 1, et $\omega^*(u) \geq 0$ sinon afin d'obtenir une contradiction. On a donc besoin que les sommets de degré 1 ou 2 récupèrent une charge, et que les autres sommets u n'en donnent pas plus de $d(u) - 3$.

Ainsi, soit u un sommet de degré 2, qui ne peut pas recevoir de charge d'un sommet de degré 3 ou moins. La Configuration 1 assure que u n'est pas adjacent à un sommet de degré 1. Les Configurations 6 et 7 combinées avec la Configuration 1 garantissent que u est adjacent à un sommet de degré au moins 4, dont il pourra récupérer une charge.

Soit u un sommet de degré 1, adjacent à un sommet v . La Configuration 2 indique que si $d(v) < 4$, alors les autres sommets adjacents à v sont de degré au moins 4. La Configuration 1 indique que si $d(v) < 4$, alors u est l'unique voisin de v de degré 1 et que $d(v) = 3$. On va donc

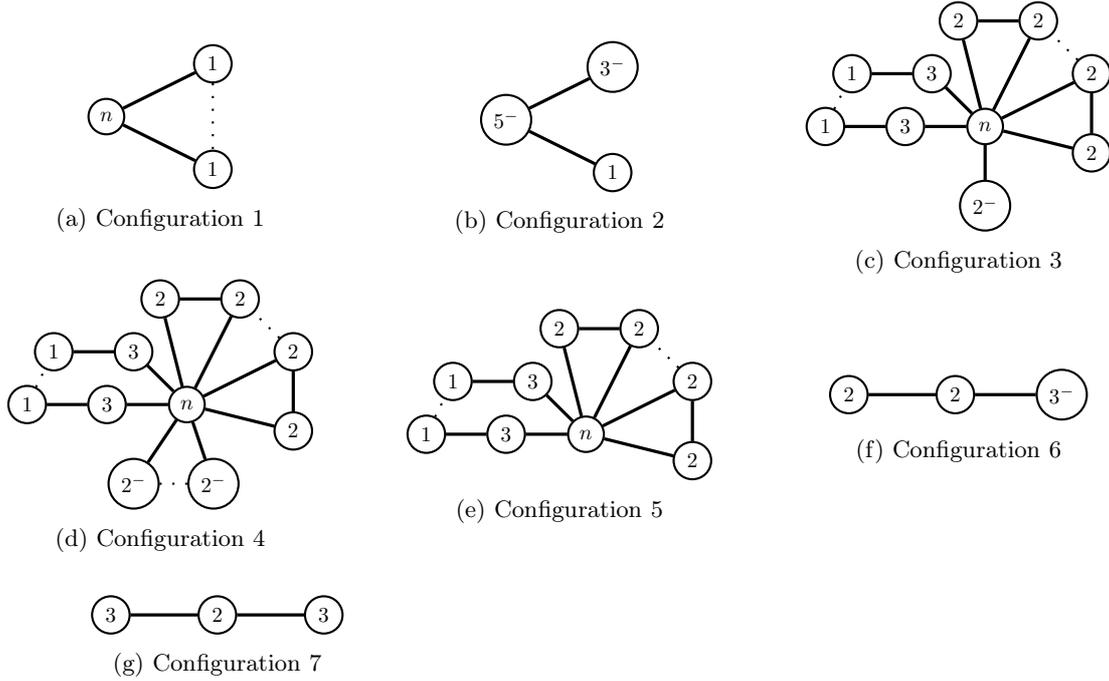


Figure 3: Configurations réductibles pour le Théorème 16

vouloir que u récupère une charge de son voisin s'il est de degré au moins 4, et d'un voisin de v si v est de degré 3.

Les Configurations 3, 4 et 5 permettent d'assurer que les sommets de degré au moins 4 ne cèdent pas trop de charges, en particulier pas plus de $d(u) - 3$. Il est donc possible de décharger de manière à obtenir ω^* qui respecte les conditions énoncées précédemment. \square

Ce résultat est une première avancée pour montrer que les graphes sont 7-pondérables, comme amélioration du Théorème 5. Comme la 1-2-3 Conjecture dans les graphes non signés semble être prouvée, et que la valeur absolue supprime la moitié des sommes possibles, il semble crédible de s'attendre à être capable de montrer que $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 6$ pour tout bon graphe signé G .

J'ai également étudié des variantes du problème posé. En effet, la généralisation du problème a conduit à deux nouveaux paramètres : l'ajout d'une signature et l'ajout de la valeur absolue. Dans la suite de mon stage, j'ai alors étudié l'impact qu'a la modification de ces deux paramètres, à savoir le choix de la polarisation et la présence ou non de la valeur absolue.

3 Relaxation du problème : Choix de la polarisation

J'ai tout d'abord étudié comment évolue le problème quand on considère qu'on a le choix de la polarisation.

Définition 17. On dit qu'un graphe G est k -polarisable s'il existe une signature σ de G telle que G ainsi polarisé est k -pondérable.

Savoir si G est k -polarisable revient à se demander quelle est la meilleure polarisation qui induise la meilleure pondération.

Problème. Pour un graphe G , quel est l'entier k minimal noté $\chi_{|\Sigma|}^+(G)$ tel que G est k -polarisable ?

Le problème est en fait plus simple que la recherche de pondération pour les graphes non signés. En effet, en choisissant $\sigma = 1$, on obtient exactement le problème de pondération dans les graphes non signés. On a donc $\chi_{|\Sigma|}^+(G) \leq \chi_{\Sigma}(G)$ pour tout graphe G . En utilisant alors le résultat de [10], tous les bons graphes signés sont 3-polarisables. Je propose la conjecture suivante :

Conjecture. Pour tout bon graphe G , $\chi_{|\Sigma|}^+(G) \leq 2$.

Il existe de nombreux choix de polarisations pour un graphe, et comme la polarisation triviale assure une 3-pondération, peut-être qu'en prenant peu d'arêtes négatives, l'impact de la valeur absolue n'est pas trop grand pour permettre d'obtenir des 2-pondérations.

Tous les graphes ne sont néanmoins pas 1-polarisables. Plus précisément, C. Marcille a montré que savoir si un graphe est 1-polarisable est NP-complet (non publié).

Il existe cependant différentes classes de graphes pour lesquelles j'ai pu montrer que les graphes sont 2-polarisables. Étonnamment, car ce sont les graphes qui ont le plus de contraintes, les graphes complets en font partie.

Théorème 18. Pour $n \geq 3$, on a $\chi_{|\Sigma|}^+(K_n) = 2$.

Idée de preuve (A34). La preuve est constructive, en exhibant une polarisation et une 2-pondération associée. On commence par construire une solution pour K_n quand n est multiple de 4 puis on ajoute au plus trois sommets à cette structure, en choisissant la polarisation et la pondération des nouvelles arêtes sans que cela ne crée de conflit.

L'idée quand n est multiple de 4 est de découper l'ensemble des sommets en deux. Une première moitié aura une grande somme supérieure à n en étant incident uniquement à des arêtes positives dont un certain nombre au poids 2, et la deuxième moitié est incidente à quelques arêtes négatives, telle que les sommes sont inférieures à n . Il s'agit alors de connaître le nombre de différentes arêtes positives de poids 2 et négatives de poids 1 incidentes à chaque sommet qui est différent pour chaque sommet et permet alors d'assurer des sommes distinctes pour tous les sommets. \square

Pour les graphes bipartis et les cycles, le résultat est moins surprenant, parce que pour une bonne partie de ces graphes, ils sont déjà 2-pondérables en prenant $\sigma = 1$, et on a de bonnes caractérisations quand ils ne sont pas 2-pondérables avec $\sigma = 1$.

Théorème 19. Pour un bon graphe biparti G , on a $\chi_{|\Sigma|}^+(G) \leq 2$.

Idée de preuve (A36). En utilisant la caractérisation des graphes bipartis non 2-pondérables quand $\sigma = 1$ [14], en enlevant deux sommets bien choisis (ils sont de degré 2), le graphe devient 2-polarisable avec $\sigma = 1$, et il est alors facilement possible d'étendre la pondération et la polarisation aux dernières arêtes. \square

Proposition 20. Pour un bon cycle G , $\chi_{|\Sigma|}^+(G) \leq 2$.

Idée de preuve (A37). En prenant toutes les arêtes positives sauf deux arêtes adjacentes négatives, il est possible de trouver une 2-pondération, en prenant une 2-pondération sur la partie positive sauf une arête (on a un chemin), et en l'étendant aux dernières arêtes. \square

Ces deux derniers résultats sont obtenus en utilisant une majorité d'arêtes positives et au plus deux arêtes négatives, parce que les structures sont assez éparées pour qu'un conflit lors d'une 2-pondération dans le graphe non signé soit évitable quasiment tout le temps.

4 Relaxation du problème : Absence de valeur absolue

Le deuxième paramètre ajouté dans le problème étudié était la valeur absolue. Je me suis donc intéressé à l'impact qu'a réellement la valeur absolue, en considérant la variante sans valeur absolue.

4.1 Recherche de k -pondérations optimales

Problème. Pour un bon graphe signé G , quel est l'entier k minimal noté $\chi_{\Sigma}(G)$ tel que G admet une k -pondération propre pour s_{σ} ?

On utilise ici la même notation χ_{Σ} pour désigner le nombre de poids différents pris par les arêtes de la meilleure pondération dans le cas non signé et dans le cas signé sans valeur absolue, parce

qu'un graphe non signé est un graphe signé avec $\sigma = 1$, et que la signature sans valeur absolue est une généralisation plus directe qu'avec la valeur absolue.

Le problème est plus simple qu'avec la valeur absolue, parce qu'une pondération propre pour $s_{|\sigma|}$ est propre pour s_σ . On a donc $\chi_\Sigma(G) \leq \chi_{|\Sigma|}(G)$ pour tout graphe signé G . De plus, les sommes retrouvent leur expressivité, et on récupère également le fait que modifier la valeur d'une arête modifie de manière déterministe la somme des sommets incidents.

La pondérabilité dans les graphes signés sans valeur absolue est un problème réellement plus simple qu'avec la valeur absolue, comme l'attestent les deux propositions suivantes.

Proposition 21. *Il existe un bon graphe signé G tel que $\chi_\Sigma(G) = 1$ et $\chi_{|\Sigma|}(G) \geq 2$.*

Idée de preuve (A38). Les valeurs représentées dans la Figure 4 sur chaque sommet est s_σ . Comme on veut 1-pondérer, on n'a aucun choix à faire.

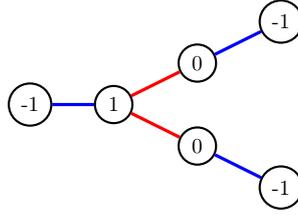


Figure 4: Un arbre signé G tel que $\chi_\Sigma(G) = 1$ mais $\chi_{|\Sigma|}(G) = 2$.

Ce graphe est 1-pondérable pour s_σ , mais pas pour $s_{|\sigma|}$. □

Proposition 22. *Il existe un bon graphe signé G tel que $\chi_\Sigma(G) = 2$ et $\chi_{|\Sigma|}(G) \geq 3$.*

Idée de preuve (A39). En considérant des 2-pondérations, dans le cas des graphes non signés, il est possible d'utiliser des gadgets ([2] et [6]) afin d'interdire une certaine somme d'un sommet [6], et il est également possible de produire un nombre quelconque d'arêtes qui ne peuvent prendre que la valeur 1 [2], si la 2-pondération est propre.

En combinant ces gadgets, on peut produire deux sommets u, v adjacents tels que pour toute 2-pondération propre pour s_σ , $s_\sigma(u) = 7$ et $s_\sigma(v) = -7$. Il n'est donc pas possible d'avoir une 2-pondération propre pour $s_{|\sigma|}$. □

Ici pour les différents exemples présentés, on a $\chi_{|\Sigma|}(G) = \chi_\Sigma(G) + 1$. Je n'ai cependant pas réussi à déterminer s'il existe un graphe signé G tel que $\chi_\Sigma(G) = 1$ et $\chi_{|\Sigma|}(G) = 3$, ce qui voudrait dire que la valeur absolue peut fortement augmenter la difficulté de la recherche de pondérations propres.

La pondérabilité sans la valeur absolue n'est cependant pas forcément plus simple que dans les graphes non signés. On ne retrouve en particulier pas le fait que les arbres soient 2-pondérables pour s_σ .

Proposition 23. *Il existe un bon arbre signé G tel que $\chi_\Sigma(G) = 3$.*

Idée de preuve (A40). Le graphe de la Figure 5 constitue un contre-exemple :

Comme toutes les sommes sont positives pour une 2-pondération, la valeur absolue n'a ici aucun impact. □

La relaxation étudiée m'a tout de même permis d'établir des résultats équivalents à ceux connus dans les graphes non signés.

Théorème 24. *Pour tout bon graphe signé 3-chromatique G , on a $\chi_\Sigma(G) \leq 3$.*

Idée de preuve (A41). Dans la partie précédente, on a montré que pour G un graphe signé 3-chromatique, $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 5$. La valeur absolue empêchait de montrer que ces graphes sont 3-pondérables car elle ne conserve pas les sommes modulo 3. Sans la valeur absolue, on peut donc à nouveau construire une pondération telle que pour la tripartition A, B, C les sommets dans A aient

une somme multiple de 3, ceux dans B congrue à 1 modulo 3 et ceux dans C à 2 modulo 3, en appliquant la même modification sur des chemins entre deux sommets de mauvais reste, comme dans le cas non signé [9]. \square

Théorème 25. *Pour tout bon graphe signé G , on a $\chi_\Sigma(G) \leq 5$.*

Idée de preuve (A42). Sans la valeur absolue, on ne perd plus l'expressivité des sommes. L'algorithme de Kalkowski [8] est alors facilement adaptable. L'utilisation des degrés de liberté est alors analogue au cas non signé, et le traitement du dernier sommet identique, ne demandant pas une forte étude de cas. \square

La polarisation des graphes sans considérer la valeur absolue semble être une notion relativement transparente qui ajoute moins de profondeur structurelle au problème initial que son analogue avec valeur absolue, car plus de techniques de preuves s'utilisent de la même manière.

4.2 Choix de la polarisation

J'ai finalement étudié la relaxation des deux paramètres dans laquelle on a donc le choix de la polarisation et ne considère pas la valeur absolue.

Problème. Pour un bon graphe G , quel est l'entier k minimal noté $\chi_\Sigma^+(G)$ tel que G est k -polarisable pour s_σ ?

Ce dernier problème est évidemment plus simple que les précédents. On retrouve ainsi l'entièreté des résultats énoncés jusque-là.

Conjecture. Pour tout bon graphe signé G , on a $\chi_\Sigma^+(G) \leq 2$.

On sait en se référant au cas avec valeur absolue que les graphes signés sont 3-polarisables pour s_σ , en se basant sur le fait que la 1-2-3 Conjecture est vérifiée [10]. J'ai cependant remanié l'algorithme de Kalkowski, afin de montrer un résultat plus faible de manière plus élégante.

Une manière de voir ce nouveau problème est de se situer dans le problème original, mais où les pondérations ne sont pas dans $\{1, \dots, k\}$, mais dans $\{-k, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, k\}$. On a donc deux fois plus de valeurs pour chaque arête, à ceci près que les valeurs prises ne forment pas un intervalle, ce qui se révèle en fait problématique dans les cas suivants.

Proposition 26. *Pour tout bon graphe signé G , on a $\chi_\Sigma^+(G) \leq 4$.*

Idée de preuve (A43). L'idée principale dans l'algorithme de Kalkowski est que les arêtes commencent initialement avec le poids 3, et peuvent ensuite être changées pour prendre 1 ou 5. Certaines arêtes particulières peuvent être changées de poids afin d'avoir comme degré de liberté 2 ou 4. En particulier le fait qu'on change de parité est ici important. Ainsi, en considérant les valeurs d'arêtes $-1, 1, 2, 3, 4$, le comportement des arêtes valant $-1, 1, 3$ est celui des arêtes devant valoir $1, 3, 5$ dans la version originale, et celui des arêtes valant $2, 4$ est celui des arêtes valant $2, 4$ dans la version originale. On peut alors encore construire de la même manière la pondération. \square

En autorisant les arêtes à prendre la valeur 0, on a comblé le trou de l'intervalle de valeurs et obtient un résultat intéressant.

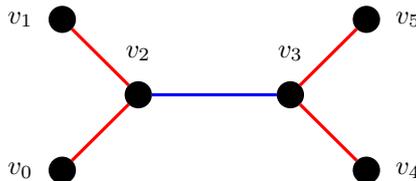


Figure 5: Un arbre signé G tel que $\chi_\Sigma(G) = 3$

Proposition 27. *Pour tout bon graphe G , il existe ℓ , une pondération propre pour s_σ telle que $\ell(e) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ pour tout $e \in E$.*

Idée de preuve (A44). La preuve se fait également en adaptant l'algorithme de Kalkowski. On remarque que seul le fait d'utiliser un intervalle de cinq valeurs est suffisant pour adapter de manière transparente le comportement de l'algorithme. \square

La Proposition 27 permet donc de s'approcher du résultat $\chi_\Sigma^+(G) \leq 2$ pour tout bon graphe G , à ceci près que le nombre d'arêtes de valeurs nulle n'est pas déterminable exactement. Il existe tout de même des graphes qui ne sont pas 1-polarisables, et cette question reste encore NP-complet comme dans le cas avec valeur absolue.

Théorème 28. *Savoir si un graphe est 1-polarisable pour s_σ est NP-complet.*

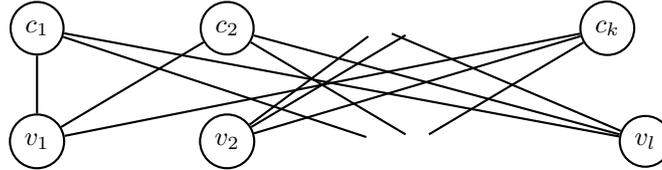
Le problème suivant est NP-complet [12]:

POSITIVE CUBIC 1 IN 3 3-SAT

Instance. Un ensemble V de variables, une collection C de clauses sur V telle que chaque clause $c \in C$ contient exactement 3 variables distinctes, chaque variable apparaissant dans exactement 3 clauses, avec aucune négation.

Question. Est-ce qu'il existe une distribution de vérité aux variables de V telle que chaque clause dans C a exactement une variable vraie ?

Idée de preuve (A45). La preuve se fait par réduction à partir du problème POSITIVE CUBIC 1 IN 3 3-SAT. Le but est, à partir d'une instance F de ce problème, de construire un graphe $G(F)$ tel que $G(F)$ est 1-polarisable si et seulement si F est satisfiable pour la question posée. Pour cela on construit le graphe suivant :



On prend un sommet pour chaque clause et chaque variable, et on a une arête entre un sommet de clause et de variable si et seulement si la variable apparaît dans la clause. Comme l'instance est cubique, les sommets sont de degré exactement 3. On ajoute ensuite des gadgets, des graphes qui ont certaines propriétés, au niveau de chaque sommet, afin que s'il existe une 1-polarisation propre, alors les arêtes incidentes à un sommet de variable sont toutes de même polarité, et que soit une arête incidente est positive et les deux autres négatives, soit une est négative et les deux autres positives pour tous les sommets de clauses. Ces propriétés sont obtenues en créant des gadgets qui interdisent des sommes précises sur les sommets voisins, quelle que soit la polarisation propre choisie. À partir de cette construction, on remarque alors qu'on a une polarisation propre si et seulement si la formule est satisfiable pour la question. \square

5 Conclusion

Je commence par rappeler les différents résultats dans les Tables 1 et 2. La colonne du milieu indique les résultats connus pour la 1-2-3 Conjecture dans les graphes non signés, et la colonne de droite indique mes résultats. J'expose ici les différents résultats pour le pire graphe de chaque classe. Ainsi un signe égalité veut seulement dire qu'il existe un graphe pour lequel la propriété est connue comme étant optimale.

On remarque qu'en fait souvent quand un exemple montre qu'une borne est optimale, alors l'exemple donne une borne pour la valeur absolue et sans la valeur absolue.

Chaque résultat pour chaque type de graphe et le résultat de complexité m'ont permis d'utiliser et de découvrir des techniques de preuves différentes : certains ont demandé à résoudre le problème dans les graphes manuellement quand ils étaient assez simples, les graphes à nombre chromatique fixé ont demandé une technique par patron, le résultat de NP-complétude une preuve par réduction, le *mad* une preuve par déchargement, le cas général une adaptation de preuve algorithmique. De

Table 1: Table récapitulative des résultats

Types de graphes	1-2-3 Conjecture	Cas signé
tous	$\chi_{\Sigma}(G) \leq 5$	$\chi_{ \Sigma }(G) \leq 9$ $\chi_{\Sigma}(G) \leq 5$
biparti	$\chi_{\Sigma}(G) = 3$	$\chi_{ \Sigma }(G) = \chi_{\Sigma}(G) = 3$ $\chi_{ \Sigma }^+(G) = \chi_{\Sigma}^+(G) = 2$
3-chromatique	$\chi_{\Sigma}(G) = 3$	$\chi_{ \Sigma }(G) \leq 5$ $\chi_{\Sigma}(G) = 3$
arbre	$\chi_{\Sigma}(G) = 2$	$\chi_{ \Sigma }(G) = \chi_{\Sigma}(G) = 3$
chaîne	$\chi_{\Sigma}(G) = 2$	$\chi_{ \Sigma }(G) = 2$
cycle	$\chi_{\Sigma}(G) = 3$	$\chi_{ \Sigma }(G) = \chi_{\Sigma}(G) = 3$ $\chi_{ \Sigma }^+(G) = \chi_{\Sigma}^+(G) = 2$
complet	$\chi_{\Sigma}(G) = 3$	$\chi_{ \Sigma }^+(G) = \chi_{\Sigma}^+(G) = 2$
mad < 3	$\chi_{\Sigma}(G) = 3$	$\chi_{ \Sigma }(G) \leq 7$

Table 2: Table récapitulative de la complexité des problèmes

Problème	1-2-3 Conjecture	Cas signé
1-pondérabilité	polynomial	NP-complet (avec et sans valeur absolue)
1-polarisabilité		
2-pondérabilité	NP-complet	??
2-polarisabilité		

plus, j'ai utilisé des programmes informatiques afin de tester les différentes propriétés sur des petits graphes, ce qui m'a aidé dans la recherche de contre-exemples. Je n'ai toutefois pu qu'apporter des éléments de réponse aux diverses questions que je me suis posées et certains résultats seraient améliorables, en particulier en adaptant la technique de preuve proposée par Keusch pour résoudre la 1-2-3 Conjecture initiale [10].

Remerciements

Je souhaite remercier mes maîtres de stage, Julien Bensmail, Hervé Hocquard et Clara Marcille de m'avoir permis d'effectuer ce stage au sein du LaBRI, pour leur très bon encadrement et très bons conseils, et plus particulièrement Clara Marcille pour sa présence quotidienne. Ce stage a été un moment très agréable et enrichissant.

Références bibliographiques

- [1] N. Alon. “Combinatorial Nullstellensatz”. In: *Combinatorics, Probability and Computing* 8.1-2 (1999), 7–29. DOI: 10.1017/S0963548398003411.
- [2] J. Bensmail and F. Fioravantes. “On proper 2-labellings distinguishing by sums, multisets or products”. In: *Discussiones Mathematicae Graph Theory* (2022). DOI: <https://doi.org/10.7151/dmgt.2473>.
- [3] M. Bonamy. “Global discharging methods for coloring problems in graphs”. Theses. Université de Montpellier, Feb. 2015. URL: <https://theses.hal.science/tel-02083632>.
- [4] R. L. Brooks. “On colouring the nodes of a network”. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 37 (1941), pp. 194–197.

- [5] G. J. Chang et al. “Vertex-coloring Edge-weightings of Graphs”. In: *Taiwanese Journal of Mathematics* 15.4 (2011), pp. 1807–1813. DOI: 10.11650/twjm/1500406380. URL: <https://doi.org/10.11650/twjm/1500406380>.
- [6] Andrzej Dudek and David Wajc. “On the complexity of vertex-coloring edge-weightings”. In: *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* Vol. 13 no. 3.3 (Nov. 2011). Graphs and Algorithms, pp. 45–50. DOI: 10.46298/dmtcs.548. URL: <https://inria.hal.science/hal-00990502>.
- [7] M. Kalkowski. “A note on 1, 2-Conjecture”. PhD thesis. 2009.
- [8] M. Kalkowski, M. Karoński, and F. Pfender. “Vertex-coloring edge-weightings: Towards the 1-2-3-conjecture”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 100.3 (2010), pp. 347–349. ISSN: 0095-8956. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2009.06.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895609000586>.
- [9] M. Karoński, T. Łuczak, and A. Thomason. “Edge weights and vertex colours”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 91.1 (2004), pp. 151–157. ISSN: 0095-8956. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2003.12.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895603001412>.
- [10] R. Keusch. *A Solution to the 1-2-3 Conjecture*. 2023. arXiv: 2303.02611 [math.CO].
- [11] K. S. Lyngsie. “On neighbour sum-distinguishing $\{0, 1\}$ -edge-weightings of bipartite graphs”. In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* Vol. 20 no. 1 (June 2018). DOI: 10.23638/DMTCS-20-1-21. URL: <https://dmtcs.episciences.org/4554>.
- [12] C. Moore and J. M. Robson. *Hard Tiling Problems with Simple Tiles*. 2000. arXiv: math/0003039 [math.CO].
- [13] B. Seamone. *The 1-2-3 Conjecture and related problems: a survey*. 2012. arXiv: 1211.5122 [math.CO].
- [14] C. Thomassen, Y. Wu, and C.-Q. Zhang. “The 3-flow conjecture, factors modulo k , and the 1-2-3-conjecture”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 121 (2016). Fifty years of The Journal of Combinatorial Theory, pp. 308–325. ISSN: 0095-8956. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2016.06.010>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009589561630051X>.

ANNEXE

A Recherche de k -pondérations optimales

A.1 Notations et définitions

Définition 1. Un bon graphe est un graphe $G = (V, E)$ simple, connexe, différent de K_2 .

Un graphe signé $G = (V, E)$ est un graphe muni d'une signature $\sigma : E \rightarrow \{-1, +1\}$. On dit qu'une arête $e \in E$ est positive si $\sigma(e) = +1$, et négative si $\sigma(e) = -1$. Pour $u \in V$, on note $N^+(u)$ l'ensemble des voisins de u tel que l'arête est positive, et $N^-(u)$ l'ensemble des voisins tel que l'arête est négative.

Une k -pondération est une fonction $\ell : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

Pour $u \in V$, on note $s_\sigma^+(u) = \sum_{v \in N^+(u)} \ell(uv)$, et $s_\sigma^-(u) = \sum_{v \in N^-(u)} \ell(uv)$, ainsi que $s_\sigma(u) = s_\sigma^+(u) - s_\sigma^-(u)$, et $s_{|\sigma|}(u) = |s_\sigma(u)| = |s_\sigma^+(u) - s_\sigma^-(u)|$. Dans le cas où il y aurait différentes pondérations à considérer, on le signifie, par exemple pour une pondération ℓ , on obtient $s_{|\sigma|}^\ell, s_\sigma^\ell, s_{-\sigma}^\ell$ et $s_{+\sigma}^\ell$.

On dit que G est k -pondérable lorsqu'il existe $\ell : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tel que $s_{|\sigma|}$ forme une coloration propre des sommets. On dit qu'alors ℓ est une pondération propre.

On se restreint à l'étude des bons graphes. Pour un résultat sur un graphe simple mais non connexe, il suffit de répéter le résultat de manière indépendante sur chaque composante connexe. On peut donc fixer un bon graphe $G = (V, E)$ muni d'une signature σ .

A.2 Existence de pondérations

Proposition 2. *Tout bon graphe signé est pondérable.*

Preuve. On nomme $E = \{e_1, \dots, e_{|E|}\}$ l'ensemble des arêtes numérotées arbitrairement. Si $\sigma(e_k) = 1$, on pose $\ell(e_k) = 2^{k+|E|+1}$, sinon $\ell(e_k) = 2^k$. On a $s_\sigma^-(v_i) < 2^{|E|+1}$ (somme de puissance de deux distinctes inférieures à $2^{|E|}$), et si v_i est incident à une arête positive, $s_\sigma^+(v_i) \geq 2^{|E|+2}$. Soient deux sommets v_i et v_j voisins:

- Si v_i est incident à une arête positive et pas v_j , alors $s_{|\sigma|}(v_i) = |s_\sigma^+(v_i) - s_\sigma^-(v_i)| > 2^{|E|+1} > s_\sigma^-(v_i) = s_{|\sigma|}(v_j)$.
- Par symétrie, la preuve est la même si v_j incident à une arête positive et pas v_i .
- Si aucun des deux n'est incident à une arête positive, alors on a $s_{|\sigma|}(v_i) = s_\sigma^-(v_i) \neq s_\sigma^-(v_j) = s_{|\sigma|}(v_j)$. En effet, dans le cas contraire, comme la représentation en base 2 de $s_\sigma^-(v_i)$ correspond aux arêtes incidentes à v_i , ces arêtes sont exactement les mêmes que celles incidentes à v_j . Donc $v_i v_j$ forme K_2 (le graphe est simple).
- Si les deux sont incidents à au moins une arête positive, alors :
 - Si $s_\sigma^+(v_i) = s_\sigma^+(v_j)$, alors de même que dans le cas précédent, les arêtes positives incidentes à v_i et v_j sont exactement les mêmes, donc $s_\sigma^-(v_i) \neq s_\sigma^-(v_j)$, sinon cela forme K_2 .
 - Sinon, on a : $|s_\sigma^+(v_i) - s_\sigma^+(v_j)| \geq 2^{|E|+2}$, et $|s_\sigma^-(v_j) - s_\sigma^-(v_i)| < 2^{|E|+1}$, donc $(s_\sigma^+(v_i) - s_\sigma^+(v_j)) + (s_\sigma^-(v_j) - s_\sigma^-(v_i)) \neq 0$. En particulier $s_{|\sigma|}(v_i) \neq s_{|\sigma|}(v_j)$

Dans tous les cas on a donc $s_{|\sigma|}(v_i) \neq s_{|\sigma|}(v_j)$ pour deux sommets v_i, v_j adjacents, donc la pondération décrite convient. \square

A.3 Borne constante

Théorème 3. *Pour tout bon graphe signé G de degré maximal au moins égal à 4, $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 9$.*

Preuve. Le résultat se base sur une adaptation de l'algorithme présenté dans [8], montrant qu'un graphe (non signé) est 5-pondérable.

On peut numérotter les sommets v_1, \dots, v_n tel que v_n est de degré maximal (donc $\deg(v_n) \geq 3$), et tel que pour $1 \leq i \leq n-1$, v_i a un voisin dans $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$. En effet, on choisit les sommets dans l'ordre inverse, et comme le graphe est connexe on peut toujours trouver un sommet adjacent aux sommets déjà choisis. On va appliquer une pondération ℓ aux arêtes, avec les valeurs entre 1 et 9, qu'on va modifier au fur et à mesure.

Initialement, on pose $\ell(e) = 5$ pour toute arête e . Pour $i < n$, on va choisir un entier $w(v_i)$ positif tel que $w(v_i) \in \{0, 1, 2, 3\} \pmod{8}$, et on pose $W(v_i) = \{w(v_i), w(v_i) + 4\}$. On va vouloir que $s_{|\sigma|}^\ell(v_i) \in W(v_i)$, et que si $v_j v_i \in E(G)$, $W(v_j) \cap W(v_i) = \emptyset$.

Pour v_1 , on ne change pas ℓ et choisit $w(v_1)$ qui correspond tel que $W(v_1) = \{w(v_1), w(v_1) + 4\}$ et $w(v_1) \in \{0, 1, 2, 3\} \pmod{8}$, avec $s_{|\sigma|}^\ell(v_1) \in W(v_1)$.

Soit $2 \leq k \leq n-1$ et en supposant que les $W(v_i)$ sont choisis pour $i < k$ et

- $W(v_i) \cap W(v_{i'}) = \emptyset$ si $v_i v_{i'} \in E$ avec $1 \leq i, i' < k$
- $s_{|\sigma|}^\ell(v_i) \in W(v_i)$ pour $i < k$
- $\ell(v_k v_j) = 5$ si $v_k v_j \in E$ où $j > k$
- Si $\ell(v_i v_k) \neq 5$ pour une arête où $i < k$, si $s_{|\sigma|}^\ell(v_i) = w(v_i)$, alors l'unique changement de $\ell(v_i v_k)$ pour que $s_{|\sigma|}^\ell(v_i) = w(v_i) + 4$, sans que $s_{|\sigma|}^\ell(v_i)$ ne change de signe est tel que $\ell(v_i v_k)$ reste dans $\{1, \dots, 9\}$. Si $s_{|\sigma|}^\ell(v_i) = w(v_i) + 4$, alors de même le changement pour que $s_{|\sigma|}^\ell(v_i) = w(v_i)$ conserve $\ell(v_i v_k)$ dans $\{1, \dots, 9\}$.

Pour une arête $v_i v_k$ où $i < k$, on peut ainsi changer $\ell(v_i v_k)$ de plus ou moins 4 tel que $s_{|\sigma|}^\ell(v_i) \in W(v_i)$, en ayant changé cette somme. En effet, si $\ell(v_i v_k) = 5$, on peut choisir $\ell(v_i v_k) = 1$ ou $\ell(v_i v_k) = 9$ selon qu'il faille augmenter ou diminuer $s_{|\sigma|}^\ell(v_i)$, et si $\ell(v_i v_k) \neq 5$, la quatrième hypothèse assure qu'une telle modification est possible. Cette modification affecte $s_{|\sigma|}^\ell(v_k)$ de 4, dans un sens ou dans l'autre (non déterminé par le fait que l'arête soit positive ou négative). On fixe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que j est l'entier minimal avec $j > k$ et $v_j v_k \in E$. On s'autorise de plus à changer $\ell(v_j v_k)$, d'une valeur dans $\{1, 2, 3\}$. Avec tous ces changements de pondération possible, les sommes prenables par $s_{|\sigma|}^\ell(v_k)$ forment un intervalle. (des sauts de 4 et les valeurs intermédiaires sont atteignables grâce à l'altération de $\ell(v_j v_k)$).

On veut changer les valeurs des arêtes telles que :

1. $s_{|\sigma|}^\ell(v_i) \in W(v_i)$ pour $1 \leq i \leq k$.
2. $w(v_i) \neq w(v_k)$ pour $v_i v_k \in E$ et $i < k$, ce qui donnera $W(v_i) \cap W(v_k) = \emptyset$, et donc $W(v_i) \cap W(v_{i'}) = \emptyset$ si $v_i v_{i'} \in E$ avec $1 \leq i, i' \leq k$.
3. Si $s_{|\sigma|}^\ell(v_k) = w(v_k)$, la valeur de $\ell(v_k v_j)$ est telle que modifier la valeur de l'arête pour qu'on ait $s_{|\sigma|}^\ell(v_k) = w(v_k) + 4$ reste dans l'intervalle $\{1, \dots, 9\}$, et pareillement si initialement $s_{|\sigma|}^\ell(v_k) = w(v_k) + 4$ pour atteindre $s_{|\sigma|}^\ell(v_k) = w(v_k)$.

Si on arrive à respecter ces trois conditions, alors les hypothèses de récurrences seront vérifiées pour l'étape $k+1$. En effet, la condition 1 valide la deuxième hypothèse de récurrence, la condition 2 valide la première hypothèse. De plus, les seules modifications des valeurs des arêtes sont sur des arêtes $v_i v_k$ où $i < k$ ou $v_j v_k$. Ainsi la troisième hypothèse est toujours vérifiée. Finalement, comme on ne modifie uniquement les valeurs des arêtes incidentes au sommet en cours de traitement, la prochaine fois qu'on peut modifier $s_{|\sigma|}^\ell(v_k)$, c'est quand on traite v_j par hypothèse de minimalité de j , donc grâce à la condition 3 la dernière hypothèse sera vérifiée.

Il s'agit donc de trouver une valeur pour $s_{|\sigma|}^\ell(v_k)$ qui définit alors de manière unique $w(v_k)$ pour que $w(v_k) \pmod{8} \in \{0, 1, 2, 3\}$ et que $w(v_k) \in \{s_{|\sigma|}^\ell(v_k), s_{|\sigma|}^\ell(v_k) - 4\}$ parmi l'intervalle de valeurs que peut prendre cette somme qui respecte les 3 conditions.

On note d le nombre de voisins de v_k qui arrivent avant dans l'ordre des sommets. On considère l'intervalle des valeurs que peut prendre $s_{\sigma}^{\ell}(v_k)$, la somme sans la valeur absolue. En choisissant la valeur des arêtes $v_i v_k$ où $i < k$ de manière à ce que cela réduise $s_{\sigma}^{\ell}(v_k)$ le plus possible (tout en respectant que $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_i) \in W(v_i)$), on peut alors encore diminuer cette valeur de 3 en changeant $\ell(v_j v_k)$. On note a cette valeur minimale atteinte. En modifiant toutes les valeurs d'arêtes $v_i v_k$ avec $i < k$ afin d'atteindre l'autre position autorisée, on augmente $s_{\sigma}^{\ell}(v_k)$ de $4 \cdot d$. De plus, en choisissant $\ell(v_j v_k)$ tel que la contribution soit opposée de 3 par rapport à la normale, on augmente encore de 6 la somme de v_k . Ainsi, l'ensemble des valeurs prenables par $s_{\sigma}^{\ell}(v_k)$ est $[a, a + 4d + 6]$.

Afin de respecter la deuxième condition, il suffit que $s_{\sigma}^{\ell}(v_k)$ ne soit pas parmi les valeurs $w(v_i)$, $-w(v_i)$, $w(v_i) + 4$ et $-(w(v_i) + 4)$ pour tout $i < k$ où $v_i v_k \in E$, car on aura $s_{\sigma}^{\ell}(v_k) \in \{w(v_k), w(v_k) + 4\}$. Cela interdit au plus $4d$ valeurs de l'intervalle.

De plus, la troisième condition est vérifiée dès qu'on peut atteindre la valeur $s_{\sigma}^{\ell}(v_k)$ finale de cette étape avec une valeur de $\ell(v_j)(v_k)$ plus grande que 5 ou plus petite que 5 au choix. C'est le cas pour toutes les valeurs de l'intervalle sauf les 3 extrémales de chaque côté, donc la troisième condition n'interdit que 6 sommes possibles.

Or il y a $4d + 7$ valeurs de sommes prenables, donc afin de respecter les conditions, il reste au moins 1 valeur pour $s_{\sigma}^{\ell}(v_k)$ vérifiant les restrictions énoncées. Cette modification de ℓ donne alors une valeur $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_k)$, et une valeur de $w(v_k)$ qui respecte les trois conditions (on a dédoublé la deuxième condition pour s_{σ}^{ℓ} , et la dernière est indépendante de la valeur absolue, car on s'est laissé la possibilité de prendre une pondération qui donne la même somme en v_k mais avec dans un cas $\ell(v_j v_k) \geq 5$ et dans l'autre $\ell(v_j v_k) \leq 5$).

Récursivement, pour chaque sommet v_k avec $1 \leq k \leq n - 1$, on définit donc un ensemble $W(v_k)$ dans lequel évolue $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_k)$, avec $W(v_i) \cap W(v_j) = \emptyset$ pour $1 \leq i, j < n$ où $v_i v_j \in E$.

Il s'agit enfin de trouver une manière de modifier la pondération ℓ , telle que $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_k) \in W(v_k)$ pour $1 \leq k < n$, et que $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) \neq s_{|\sigma|}^{\ell}(v_i)$ pour $v_i v_n \in E$, $1 \leq i < n$. En effet, comme les $W(v_k)$ sont disjoints pour les sommets voisins, il n'y a pas de conflit possible entre les sommets différents de v_n , et il ne reste qu'à éviter les conflits en ce dernier sommet.

On note a la valeur atteinte si pour tous les voisins v_i de v_n , on choisit $\ell(v_i v_n)$ tel que $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_i) = w(v_i)$. On dira qu'un voisin v_i de v_n est *approchant* si en modifiant la valeur de $\ell(v_i v_n)$ conforme à $W(v_i)$, cela rapproche $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n)$ de 0 (avec potentiellement un "rebond" en 0), c'est-à-dire que si on bouge de 1 la valeur de $\ell(v_i v_n)$ dans la direction imposée, $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n)$ diminue strictement, sinon on dit que ce voisin est *éloignant*. Par *utiliser* un voisin v_i , on entend le fait de changer la valeur de l'arête $v_i v_n$ afin que $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_i) = w(v_i) + 4$.

On montre maintenant que dans toutes les configurations possibles listées plus bas, il est possible d'utiliser un certain nombre de voisins de v_n tel qu'il n'y ait pas de conflit pour le sommet v_n . On note ℓ_0 la pondération actuelle et ℓ la configuration finale après utilisation d'un certains nombre de voisins. On a donc $a = s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_n)$.

- Si $a \bmod 8 \in \{4, 5, 6, 7\}$, alors par hypothèse du point de départ de a , $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) \bmod 8 \in \{0, 1, 2, 3\}$ pour tout i tel que $v_i v_n \in E$, donc v_n n'a pas de collision avec ses voisins. Donc $\ell = \ell_0$ convient.
- Si $a \bmod 8 \in \{0, 1, 2, 3\}$ et pour tout v_i tel que $v_i v_n \in E$, $w(v_i) = a$, alors utiliser un voisin change forcément la valeur de sa somme en $a + 4$, où $a + 4 \bmod 8 \geq 4$ par hypothèse. On note k le nombre de voisins éloignant.
 - $k \geq 2$: on utilise deux voisins éloignant, $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) = a + 8$ et les voisins de v_n ont pour somme a ou $a + 4$, donc v_n n'a pas de conflit avec ses voisins.
 - $k \leq 1$: comme $d(v_n) \geq 4$, on a au moins 3 voisins approchant.
 - * Si $a \geq 4$, on en utilise un et alors $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) = a - 4$ qui n'est pris par aucun voisin.
 - * Si $a \in \{1, 3\}$, en utilisant un voisin approchant, $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) \in \{1, 3\}$ mais change sa valeur modulo 4, donc $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) \neq a$ et $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) \neq a + 4$. La somme n'est prise par

aucun voisin. Par exemple si $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_n) = 1$, alors utiliser un voisin approchant donne $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) = 3$, mais les sommes des voisins valent 1 ou 5. Sinon, $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_n) = 3$ et utiliser un voisin approchant donne $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) = 1$, alors que les sommes des voisins valent 3 ou 7.

- * Si $a = 2$, alors on utilise trois voisins approchant ce qui donne $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) = 10$, alors que les sommes des voisins valent 2 ou 6.
 - * Sinon $a = 0$, ici tous les voisins sont éloignant, donc en fait $k \geq 4$, ce cas n'est pas possible.
- Si $a \bmod 8 \in \{0, 1, 2, 3\}$ et il existe v_k tel que $v_k v_n \in E$, tel que $w(v_k) \neq a$: on note v_k un tel voisin. Si un des voisins différents est éloignant, alors on l'utilise et seuls v_k et v_n ont une somme modulo 8 dans $\{4, 5, 6, 7\}$, et elle est différente car la somme a augmenté de 4 pour ces deux sommets, donc ℓ convient. On suppose donc que tous les voisins qui ont un $w(v_i)$ différent de a sont approchant.
 - Si $a \geq 4$, alors changer $\ell(v_k v_n)$ donne $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) = a - 4$, et $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_k) = w(v_k) + 4$. Tous les autres sommets ont une somme qui modulo 8 est inférieure ou égale à 3. S'il existe un voisin v_k tel que $w(v_k) \neq a - 8$, alors ℓ avec ce changement convient. Sinon, les seules valeurs possibles des $w(v_i)$ sont a et $a - 8$.
 - * Si le sommet v_n est le seul avec valeur en a , alors $\ell = \ell_0$ convient.
 - * Si un autre voisin v_i avec $w(v_i) = a$ est approchant, alors on l'utilise car alors $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) = a - 4$ ce qui ne crée pas de conflit, car le voisin v_i a la somme $a + 4$ et les autres n'ont pas une somme avec le bon reste modulo 8.
 - * Sinon, s'il y a exactement un voisin v_i avec $w(v_i) = a$ (v_i est donc éloignant), alors on l'utilise, ainsi qu'un voisin v_k tel que $w(v_k) = a - 8$ (v_k est donc approchant). Alors $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) = a$ qui est une somme prise par aucun voisin.
 - * Sinon, au moins 2 voisins avec $w(v_i) = a$ sont éloignant. On les utilise tous les deux et alors $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) = a + 8$ et donc ℓ convient.
 - $a = 0$: tous les voisins sont éloignant, donc ce cas n'est plus possible.
 - $a \in \{1, 3\}$. On a supposé que tous les voisins v_k avec $w(v_k) \neq a$ sont approchant. On note nb ce nombre de voisins.
 - * Si $nb = 1$, on utilise ce voisin pour diminuer la somme de v_n , et $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) \in \{1, 3\}$ mais différent de a . On n'a pas de conflit, car le voisin différent a une somme d'au moins 4, et que tous les autres voisins ont pour somme a .
 - * Si $nb \bmod 2 = 1$ avec $nb \geq 3$, On utilise tous les voisins différents et finit dans $\{0, 1, 2, 3\} \bmod 8$ (le premier changement change le signe de la somme en v_n qui reste alors inférieure strictement à 4, donc avec un reste modulo 8 au plus 3, puis l'utilisation d'un nombre pair de voisins qui étaient approchant donne un nombre pair d'utilisation de voisins éloignant en raison du changement de signe, et on bouge donc encore de $8 \cdot \frac{(nb-1)}{2}$). De plus $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) \geq 4$. On n'a donc pas de conflit, car les sommes des voisins différents sont maintenant dans $\{4, 5, 6, 7\} \bmod 8$ et celles des égaux inférieure à 3.
 - * Sinon $nb \geq 2$, et $nb \bmod 2 = 0$. On veut utiliser tous les voisins différents sauf 1. De même que dans le cas précédent, on a alors $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) \in \{0, 1, 2, 3\} \bmod 8$, mais $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_n) \neq s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) \bmod 4$. Si cette somme crée un conflit avec un des voisins, c'est que c'est avec le voisin différent qui n'a pas été utilisé. Comme la somme finale de v_n ne change pas selon le choix du voisin qui n'est pas utilisé, s'il est possible de trouver un autre voisin différent qui avait $w(v_i)$ différent de la somme finale de v_n , alors ℓ convient. Dans le cas contraire, la configuration est telle que tous les voisins v_i différents ont $w(v_i) = |a - 4| + (nb - 2) \cdot 4$. En partant de ℓ_0 , si $nb > 2$, on utilise un seul voisin différent, et alors $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n) = |a - 4| < 4$ ne crée pas de conflit avec les voisins car on a changé le reste modulo 4, et que les voisins différents ont une somme

supérieure à 4. Sinon $nb = 2$, et de ℓ_0 , on utilise les deux voisins différents, ainsi qu'un voisin égal (il existe car $d(v_n) \geq 4$) ce qui donne $s_{|\sigma|}^\ell(v_n) \in \{|a-4|, |a-4|+8\}$ en fonction de si le voisin égal est approchant ou non. Mais les sommes prises par les voisins sont alors a , $a+4$ et $|a-4|+4$, ce qui ne crée aucun conflit.

- Si $a = 2$, alors s'il existe au moins 2 voisins différents, on utilise les 2 ce qui ne créera pas de conflit. En effet, ces deux voisins sont approchant, donc $s_{|\sigma|}^\ell(v_n) = 6$, somme prise par aucun des voisins égaux, ou différents non utilisés, mais également pas par les deux voisins différents utilisés, sinon ils avaient en fait comme somme initiale a .

Sinon, on a exactement un voisin v_k avec $w(v_k) \neq a$ et il est approchant. Si $w(v_k) \neq 10$, comme $d(v_n) \geq 4$, on a au moins 3 voisins avec $w(v_j) = a$. Si deux de ces voisins sont éloignant, on les utilise et obtient $s_{|\sigma|}^\ell(v_n) = 10$ qui est une somme prise par aucun voisin, sinon on a au moins deux voisins égaux approchant, et en utilisant ces deux voisins approchant et le voisin différent, on obtient $s_{|\sigma|}^\ell(v_n) = 10$ somme prise par aucun des voisins.

Si le voisin différent est tel que $w(v_k) = 10$: si on a au moins trois voisins égaux éloignant, on les utilise et alors $s_{|\sigma|}^\ell(v_n) = 14$ qui est une somme non prise par les autres voisins. Si on a au moins deux voisins égaux approchant, on les utilise ainsi que le voisin différent et alors $s_{|\sigma|}^\ell(v_n) = 10$, somme prise uniquement par v_n car on a bougé la somme de v_k . Si on n'est dans aucun de ces cas, c'est forcément que $d(v_n) \leq 4$. Comme on a supposé $d(v_n) \geq 4$, le seul cas à traiter est si on a deux voisins égaux éloignant et un voisin égal approchant, auquel cas on utilise tous les voisins et $s_{|\sigma|}^\ell(v_n) = 2$ qui est une somme uniquement prise par v_n .

On a dans ce cas une situation qui pose problème si $d(v_n) \leq 3$. En effet, si le voisin différent v_k est tel que $w(v_k) = 10$ et approchant, et que les deux voisins égaux sont éloignant, aucune combinaison d'utilisation des sommets est sans absence de conflit pour v_n .

On a donc montré que pour toutes les configurations de valeur des sommes de v_n et de ses voisins pour ℓ_0 , on arrive à modifier la valeur des arêtes pour obtenir ℓ , une pondération telle que v_n n'a pas de conflit avec ses voisins, et que les sommes des v_i reste dans $W(v_i)$. Cela assure que ℓ induise une coloration propre sur l'ensemble du graphe G . \square

Proposition 4. *Pour bon graphe signé G de degré maximal 2, $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 3$.*

Preuve. Les graphes de degré maximal 2 sont les chaînes et les cycles. On note n le nombre de sommets et on a $n \geq 3$ car ne considère pas K_2 .

- Chaîne quand $n = 3$: on a deux arêtes qu'on pondère avec 1, ce qui convient. En effet, les extrémités ont somme 1 et la somme du sommet intermédiaire vaut 2 ou 0.
- Chaîne quand $n \geq 4$: on numérote v_1, \dots, v_n les sommets dans l'ordre de la chaîne. On pose ensuite $\ell(v_{4k+1}v_{4k+2}) = \ell(v_{4k+2}v_{4k+3}) = 1$, et $\ell(v_{4k+3}v_{4k+4}) = \ell(v_{4k+4}v_{4k+5}) = 2$, pour tout k tel que l'arête existe, c'est-à-dire qu'on donne la valeur dans l'ordre les pondérations 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2... On a alors $\ell(v_{2k+1}) \in \{1, 3\}$ pour $1 \leq 2k+1 < n$ et $\ell(v_{2k}) \in \{0, 2, 4\}$ pour $1 \leq 2k < n$. Il n'y a donc pas de conflit, sauf potentiellement entre v_{n-1} et v_n . Si les deux dernières arêtes sont de même polarité, on a alors $s_{|\sigma|}(v_{n-1}) > s_{|\sigma|}(v_n)$, donc la pondération convient. Quitte à inverser la polarisation de toutes les arêtes, on peut supposer que $\sigma(v_{n-2}v_{n-1}) = 1$, et $\sigma(v_{n-1}v_n) = -1$. On a quatre cas à considérer représentés avec la somme de chaque sommet sur la Figure 1, en fonction de la taille de la chaîne.

Seul le dernier cas où $n \bmod 4 = 2$ peut poser problème. Il suffit alors de pondérer les arêtes dans l'ordre 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, \dots , ce qui comme avant ne peut être problématique que pour les deux derniers sommets, et les 3 dernières arêtes valent alors 1, 2, 2, ce qui est le cas 1 qui n'est pas problématique.

On a en fait montré que $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 2$ quand G est une bonne chaîne signée.

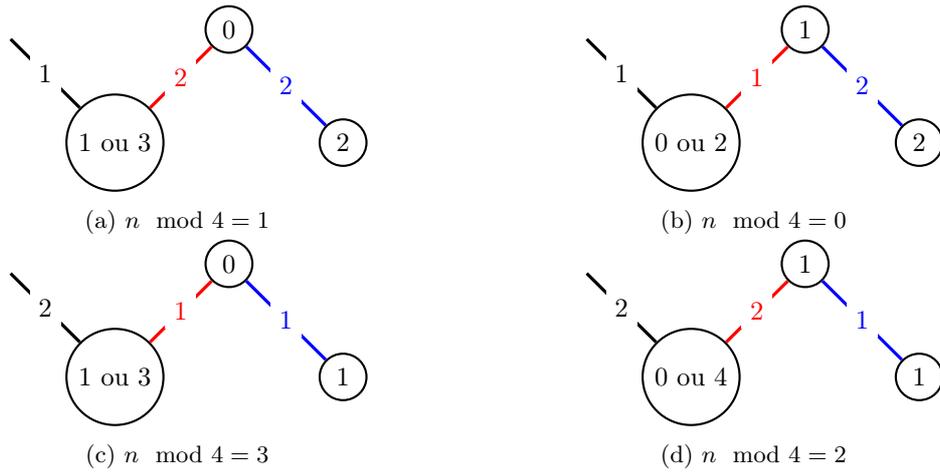
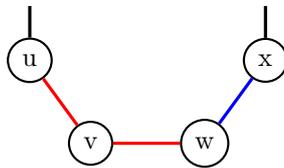


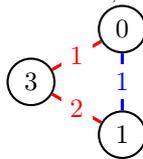
Figure 1: Pondération initiale des derniers sommets d'un chaîne en fonction de n .

- Cycle de taille paire : le cycle est alors biparti, on peut donc appliquer le cas des graphes bipartis qui assurent que le graphe est 3-pondérable (voir 6).
- $\sigma = 1$ ou $\sigma = -1$ (toutes les arêtes positives ou toutes négatives) : on applique le résultat pour les graphes 3-colorables dans le cas non signé qui nous assure une 3-pondérabilité.
- Cycle de taille impaire avec au moins une arête de chaque polarité. Comme le cycle est de taille impaire, il existe forcément deux arêtes adjacentes de même polarité, qu'on peut supposer positives, et telles qu'une est adjacente à une arête négative. À symétrie près, on est donc dans le cas suivant :

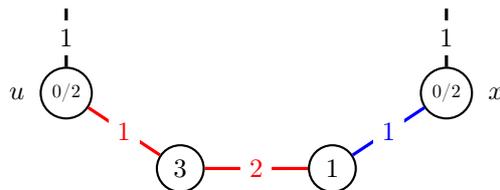


On construit une 3-pondération en fonction de n .

1. $n = 3$: Le seul cas possible est le suivant, avec une pondération propre.

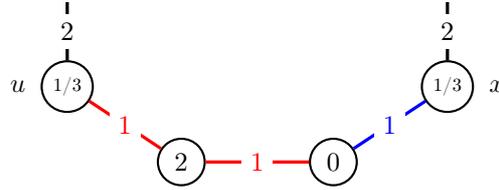


2. $n = 4k + 3$ ($k \geq 1$) : en partant de v et allant vers u on pondère les arêtes avec $1, 1, 2, 2, \dots$. Comme dans la justification proposée pour les chaînes, les sommets de u à x adjacents auront des sommes distinctes. Il s'agit donc de regarder les quatre sommets restants, qui sont pondérés comme suit :



La pondération est donc propre.

3. Si $n = 4k + 1$. En partant de w vers v , on pondère les arêtes par $1, 1, 2, 2, \dots$. De même il n'y a qu'à regarder les quatre sommets principaux, et la pondération entraîne les sommes suivantes :



Donc ℓ ainsi défini est propre. □

Remarque. On peut caractériser différemment les cycles qui ne sont pas 2-pondérables. Quand on essaie de pondérer avec 1 et 2, on remarque qu'en prenant trois arêtes e, f, g dans l'ordre du cycle telles que e et g sont de même polarité, alors il faut que $\ell(e) \neq \ell(g)$. Mais quand e et g ne sont pas de même polarité, alors il n'y a aucune contrainte sur la valeur de $\ell(e)$ par rapport à celle de $\ell(g)$.

On construit donc un graphe des contraintes $G' = (V', E')$, où $V' = E(G)$, et $e, g \in E(G)$ sont adjacents dans G' si et seulement si e et g sont de même polarité, et qu'il existe une arête f tel que e, f, g sont trois arêtes adjacentes dans le cycle. Deux sommets adjacents dans G' signifie alors que les arêtes correspondantes doivent avoir une valeur différente dans G . Il faut donc avoir une coloration propre de G' .

Être capable de 2-pondérer G revient alors à ce que le graphe G' soit biparti. Ainsi, quand $n = 4k$, le graphe des contraintes sera toujours biparti (dans le pire cas deux cycles pairs), donc toujours 2-pondérable.

Quand $n = 2k + 1$, le graphe des contraintes est en fait un cycle de taille impaire dont on aurait potentiellement enlevé des arêtes. Le graphe G est alors 2-pondérable dès qu'il existe deux arêtes e et g de polarité différente toutes deux adjacentes à une autre arête f , ce qui arrive dès qu'il existe des arêtes de deux polarités différentes, ce qui confirme le résultat détaillé au-dessus.

Quand $n = 4k + 2$, on a initialement deux cycles de taille impairs, qu'il faut briser avec des arêtes de polarités différentes si on veut que le cycle soit 2-pondérable.

Proposition 5. *Pour tout bon graphe biparti signé G de bipartition $A \cup B$ avec $|A|$ paire, on a $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 2$.*

Preuve. On va construire une pondération tel que la somme modulo 2 pour les sommets dans A soit impaire, et paire pour les sommets dans B .

On commence par assigner la valeur 2 à toutes les arêtes, donc les sommets dans B ont une somme paire. On note ℓ_0 la pondération actuelle. On choisit deux sommets u, v dans A qui n'ont pas la bonne parité (donc de somme paire), et on considère un chemin simple de u à v , sur lequel on change la valeur des arêtes pour obtenir une pondération ℓ (si $\ell_0(v_i v_{i+1}) = 2$, $\ell(v_i v_{i+1}) = 1$ et inversement).

On a alors $s_\sigma^\ell(u) = s_\sigma^{\ell_0}(u) \pm 1$. En effet, u est incident à uniquement une arête dont la valeur est altérée de 1. On en déduit que $s_\sigma^\ell(u) \bmod 2 \neq s_\sigma^{\ell_0}(u) \bmod 2$, et la valeur absolue conserve la parité, donc $s_{|\sigma|}^\ell(u)$ change également de parité, donc $s_{|\sigma|}^\ell(u)$ est impaire. Par le même raisonnement, on en déduit que $s_{|\sigma|}^\ell(v)$ est impaire. Soit u_i un sommet du chemin qui n'est pas u ou v . Alors u_i est incident à exactement deux arêtes du chemin, donc $s_\sigma^\ell(u_i) = s_\sigma^{\ell_0}(u_i) + \alpha$ où $\alpha \in \{-2, 0, 2\}$, donc $s_\sigma(u_i)$ ne change pas de parité. On a pu donc donner une parité de somme finale à deux sommets de A sans altérer les parités des sommes des autres sommets, on diminue donc exactement de deux le nombre de sommets dans A qui ont une somme paire, sans créer des sommets dans B de somme impaire.

Comme A est de taille paire, en répétant ce processus, on obtient une pondération ℓ telle que pour tout sommet dans B la somme est paire, et impaire pour tout sommet dans A . Une telle pondération induit alors un coloriage propre, car comme le graphe est biparti, deux sommets

adjacents sont forcément dans une partie différente de la bipartition, donc un a une somme paire, et l'autre une somme impaire, donc en particulier ils ont une somme différente. \square

Théorème 6. *Pour bon graphe biparti signé G , on a $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 3$.*

Preuve. On note A et B les deux parties de la bipartition. Si $|A|$ ou $|B|$ est paire, on applique la Proposition 5. On peut également supposer que $|B| \geq 3$, car le choix de A et B est arbitraire, et que G n'est pas isomorphe à K_2 . On va pondérer les arêtes telles que dans A , les sommets ont une somme congrue à $0 \pmod 3$, et à 1 ou 2 dans B .

Initialement, on pose $\ell(e) = 3$ pour toute arête $e \in E$. Ainsi, pour tout sommet $u \in V$, $s_{|\sigma|}(u) \pmod 3 = 0$.

On va modifier la pondération lors d'une étape. On nomme ℓ_0 la pondération avant la modification, et ℓ après. Soient $u, v \in B$, tels que $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(u) \pmod 3 = 0$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v) \pmod 3 = 0$, donc $s_{\sigma}^{\ell_0}(u), s_{\sigma}^{\ell_0}(v) \pmod 3 = 0$. On considère un chemin de u à v noté u_0, u_1, \dots, u_k où $k \geq 1$, $u_0 = u$ et $u_k = v$. Le chemin est forcément de longueur paire car le graphe est biparti. (donc k est pair). On modifie $\ell(u_i u_{i+1})$ de la manière suivante : pour $0 \leq 2i < k$, on modifie $\ell(u_{2i} u_{2i+1})$ de telle manière que la contribution à la somme $s_{\sigma}(u_{2i})$ et $s_{\sigma}(u_{2i+1})$ augmente de 1 modulo 3. De même, pour $0 \leq 2i + 1 < k$, on modifie $\ell(u_{2i+1} u_{2i+2})$ pour que la contribution de l'arête diminue de 1 modulo 3. Ainsi, pour $u_i \neq u, v$, $s_{\sigma}^{\ell_0}(u_i) \pmod 3 = s_{\sigma}^{\ell}(u_i) \pmod 3$. Or, $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(u_i) \pmod 3 \neq 0$ si et seulement si $s_{\sigma}^{\ell}(u_i) \pmod 3 \neq 0$. On en déduit que si avant la modification la somme était multiple de 3, alors elle le reste et inversement sinon.

De plus a $s_{\sigma}^{\ell}(u) = s_{\sigma}^{\ell_0}(u) + 1 + 3j$ où $j \in \mathbb{Z}$. Ainsi $s_{\sigma}^{\ell}(u) \pmod 3 = 1$, donc $s_{|\sigma|}^{\ell}(u)$ n'est plus multiple de 3. De même, $s_{\sigma}^{\ell}(v) = s_{\sigma}^{\ell_0}(v) - 1 + 3j$ où $j \in \mathbb{Z}$, donc $s_{|\sigma|}^{\ell}(v)$ n'est plus multiple de 3.

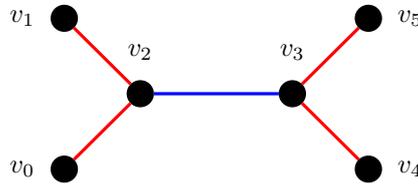
On a donc altéré la pondération de manière à ce que seul le reste des sommets u et v changent de catégorie (vers celle qu'on veut).

On répète cette étape tant qu'il existe deux sommets distincts dans B dont la somme est multiple de 3. A la fin, on obtient ℓ_1 , une pondération telle qu'il existe $u_0 \in V$ où $s_{|\sigma|}^{\ell_1}(u) \pmod 3 = 0$ pour $u \in A \cup \{u_0\}$, et $s_{|\sigma|}^{\ell_1}(u) \pmod 3 \neq 0$ pour $u \in B \setminus \{u_0\}$.

Comme on a choisi B tel que $|B| > 1$, il existe $v \in B$, tel que $s_{|\sigma|}^{\ell_1}(v) \pmod 3 \neq 0$. On considère alors un chemin de v à u_0 , où on altère les arêtes de manière à ce qu'alternativement la contribution change de $+1$ et $-1 \pmod 3$ si $s_{|\sigma|}^{\ell_1}(v) \pmod 3 = 1$, et alternativement de -1 et $+1$ sinon. De cette manière, on obtient ℓ une pondération telle que $s_{\sigma}^{\ell}(v) \pmod 3 \neq 0$, et $s_{\sigma}^{\ell}(u_0) \pmod 3 \neq 0$, et que les sommes des autres sommets n'ont pas changé de reste pour s_{σ}^{ℓ} . On en déduit qu'une telle pondération est propre. \square

Proposition 7. *Il existe un bon arbre signé G tel que $\chi_{|\Sigma|}(G) \geq 3$.*

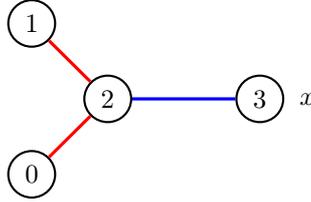
Preuve. Le graphe suivant constitue un contre-exemple :



Une preuve est donnée dans le résultat suivant, et cet arbre est le plus petit bon arbre qui n'est pas 2-pondérable. \square

Proposition 8. *Il existe une infinité d'arbres signés G tels que $\chi_{|\Sigma|}(G) \geq 3$.*

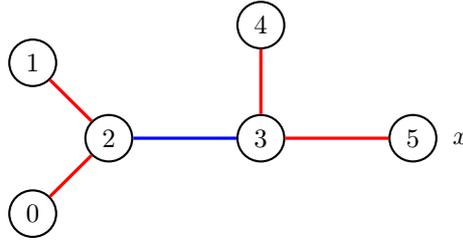
Preuve. Dans cette preuve, on essaie de 2-pondérer des arbres, donc ne va considérer que 1 et 2 comme valeur pour les arêtes. Dans tous les arbres donnés, on veut trouver une pondération telle que la coloration induite soit propre pour tous les sommets sauf le sommet étiqueté x . On considère en premier cet arbre, et une pondération ℓ qui respecte la condition énoncée :



Si on a $\ell(v_2v_3) = 1$, alors forcément $\ell(v_1v_2) = \ell(v_0v_2) = 2$, et donc $s_{|\sigma|}(v_2) = 3$. En effet, si exactement une des deux arêtes avait la valeur 1, alors $s_{|\sigma|}(v_2) = 2$, donc il y aurait conflit avec la feuille incident à l'arête de valeur 2, et si les deux arêtes valent 1, $s_{|\sigma|}(v_2) = 1$, ce qui donne également un conflit. Si $\ell(v_2v_3) = 2$, alors avec une justification analogue, on a forcément $\ell(v_1v_2) = \ell(v_0v_2) = 1$ et $s_{|\sigma|}(v_2) = 0$.

Si on miroite la partie à gauche de v_2 pour l'ajouter dans l'arbre à droite de v_2 , on obtient l'arbre de la preuve précédente. On suppose avoir une 2-pondération ℓ induisant une coloration propre sur l'arbre. Si $\ell(v_2v_3) = 1$, alors $s_{|\sigma|}(v_2) = 3$ et $s_{|\sigma|}(v_3) = 3$ par ce qui précède, et si $\ell(v_2v_3) = 2$, alors $s_{|\sigma|}(v_2) = s_{|\sigma|}(v_3) = 0$, il y a donc une contradiction pour toutes ces pondérations, cet arbre n'est pas 2-pondérable.

On considère maintenant la moitié d'arbre suivante, et une pondération sur cet arbre qui induit une coloration propre sauf en x :



On remarque que forcément $\ell(v_3v_5) \neq \ell(v_2v_3)$, sinon $s_{|\sigma|}(v_3) = s_{|\sigma|}(v_4)$.

- Si $\ell(v_3v_5) = 1$, $\ell(v_2v_3) = 2$, et la partie d'arbre précédente donne $s_{|\sigma|}(v_2) = 0$. Le seul choix possible pour v_3v_4 est $\ell(v_3v_4) = 2$, soit $s_{|\sigma|}(v_3) = 1$.
- Si $\ell(v_3v_5) = 2$, $\ell(v_2v_3) = 1$, donc $s_{|\sigma|}(v_2) = 3$. Le seul choix possible pour v_3v_4 est $\ell(v_3v_4) = 1$, donc $s_{|\sigma|}(v_3) = 2$.

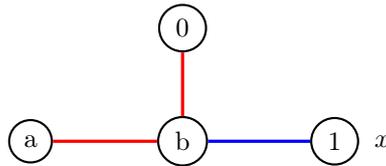
Ici la structure derrière 2 n'est pas importante, du moment qu'il n'y ait qu'un choix de pondération possible pour un arbre finissant par une arête négative, avec si l'arête négative vaut 1, alors la somme du dernier sommet vaut 3 et 0 sinon.

On considère maintenant un bout d'arbre :



tel que b est une feuille, et la suite de l'arbre en a n'est pas connue. On suppose également que pour toute pondération de l'arbre tel qu'il y ait une coloration propre sauf en b , si $\ell(ab) = 1$, on ait $s_{|\sigma|}(a) = 1$, et si $\ell(ab) = 2$, $s_{|\sigma|}(a) = 2$.

On considère alors l'extension suivante, ainsi qu'une pondération ℓ induisant une coloration propre sauf en v_1 :



Comme avant, $\ell(bv_1) \neq \ell(ab)$

- Si $\ell(bv_1) = 1$, alors $\ell(ab) = 2$, donc $s_{|\sigma|}(a) = 2$. Le seul choix possible pour $\ell(bv_0)$ est alors $\ell(bv_0) = 2$, donc $s_{|\sigma|}(b) = 3$.
- Si $\ell(bv_1) = 2$, alors $\ell(ab) = 1$, donc $s_{|\sigma|}(a) = 1$. Le seul choix possible pour $\ell(bv_0)$ est alors $\ell(bv_0) = 1$, donc $s_{|\sigma|}(b) = 0$.

En généralisant le résultat quand on étend l'arbre quand celui-ci finit par une arête négative, on a montré qu'en partant du premier arbre, en ajoutant à x une arête positive et une arête négative, et en déplaçant x au sommet incident à cette arête positive si l'arête initialement incidente à x était négative, et sinon x au sommet incident à l'arête négative, on obtient une classe infinie d'arbres tel que le choix de la pondération de l'arête incidente à x fixe la somme de l'autre sommet incident à cette arête.

Ainsi, en prenant le miroir de la partie à gauche de cette dernière arête et en la miroitant en x , on obtient que pour toute pondération potentielle qui induirait une coloration propre, les sommets incidents à cette arête centrale ont la même somme, donc il n'existe pas de 2-pondération pour ces arbres. \square

Cette classe de graphe donne des exemples de graphes où une polarisation des arêtes entraîne une augmentation stricte du nombre de valeurs nécessaires à la pondération des arêtes pour avoir un coloriage propre par rapport au cas non orienté non signé. En particulier, on perd le résultat que les arbres sont toujours 2-pondérables.

Pour les résultats sur les 3-chromatiques, il n'est pas possible d'utiliser directement les résultats de [9] en faisant des chemins en changeant la valeur des arêtes de $+1, -1$ sur un chemin de taille paire ou impaire, parce que la valeur absolue ne donne aucune assurance sur le sens dans lequel une modification est faite, donc on ne peut pas assurer un reste congru à une certaine valeur constante. On va donc utiliser un modulo plus grand, tout en arrivant à assurer que les sommets soient dans différentes classes de valeurs différentes.

Théorème 9. *Pour tout bon graphe 3-chromatique signé G , on a $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 5$.*

Preuve. On note A, B, C les trois parties de la tripartition. On va construire une pondération telle que les sommets dans A aient une somme multiple de 5, congrue à 2 ou 3 modulo 5 dans B , et congrue à 1 ou 4 modulo 5 dans C . On nomme catégorie d'une somme le fait que la somme soit multiple de 5, congrue à 2 ou 3 modulo 5, ou congrue à 1 ou 4 modulo 5.

Pour un sommet u , si $s_\sigma(u) \bmod 5 = 0$, alors $s_{|\sigma|}(u) \bmod 5 = 0$, si $s_\sigma(u) \bmod 5 \in \{1, 4\}$, alors $s_{|\sigma|}(u) \bmod 5 \in \{1, 4\}$, et si $s_\sigma(u) \bmod 5 \in \{2, 3\}$, alors $s_{|\sigma|}(u) \bmod 5 \in \{2, 3\}$. Il suffit donc d'assurer la propriété voulue pour s_σ plutôt que $s_{|\sigma|}$.

On commence par poser $\ell(e) = 5$ pour tout $e \in E$. Ainsi, $s_\sigma(u) \bmod 5 = 0$ pour tout $u \in V$. On procède par étapes, et note ℓ_0 la pondération avant une étape, et ℓ après.

Soit $u \in B$ tel que $s_\sigma^{\ell_0}(u) \bmod 5 = 0$. On considère un cycle de taille impaire u_0, \dots, u_k où $u_0 = u_k = u$. Un tel cycle existe car le graphe n'est pas biparti. On remarque que le cycle n'est pas forcément simple. Pour $1 \leq 2i \leq k-1$, on modifie la valeur $\ell(u_{2i}u_{2i+1})$ telle que $s_\sigma^\ell(u_{2i}) \bmod 5 = s_\sigma^{\ell_0}(u_{2i}) + 1 \bmod 5$ et de même en u_{2i+1} . C'est possible, en prenant $\ell(u_{2i}u_{2i+1}) = \ell_0(u_{2i}u_{2i+1}) + 1$ si $\sigma(u_{2i}u_{2i+1}) = 1$, et $\ell(u_{2i}u_{2i+1}) = \ell_0(u_{2i}u_{2i+1}) - 1$ sinon (avec la convention que la valeur 6 donne 1 et 0 donne 5). Pour $1 \leq 2(i+1) \leq k$, on modifie la valeur de $\ell(u_{2i+1}u_{2i+2})$ telle que $s_\sigma^\ell(u_{2i+1}) \bmod 5 = s_\sigma^{\ell_0}(u_{2i+1}) - 1 \bmod 5$.

On analyse alors les nouvelles sommes des sommets.

- Pour $v \in V$ qui n'est pas dans le cycle, $s_\sigma^\ell(v) = s_\sigma^{\ell_0}(v)$, donc le reste modulo 5 est le même et la somme de v n'a pas changé de catégorie.
- Pour u_i avec $1 \leq i \leq k-1$ et $u_i \neq u$, on considère une orientation du cycle dans l'ordre de la numérotation des sommets. Alors pour chaque arête entrante en u_i , l'arête suivante dans l'ordre est sortante et la modification de contribution de cette arête est inverse à celle entrante. Si on note e, f ces deux arêtes, on a donc $\sigma(e)\ell(e) + \sigma(f)\ell(f) \bmod 5 = \sigma(e)\ell_0(e) + \epsilon + \sigma(f)\ell_0(f) - \epsilon \bmod 5 = \sigma(e)\ell_0(e) + \sigma(f)\ell_0(f) \bmod 5$, avec $\epsilon \in \{-1, +1\}$. En sommant sur toutes les arêtes entrantes, et les arêtes non modifiées, on obtient donc $s_\sigma^\ell(u_i) \bmod 5 =$

$s_\sigma^{\ell_0}(u_i) \pmod 5$, donc le reste modulo 5 de la somme n'a pas varié, donc la somme n'a pas changé de catégorie.

- Finalement, $s_\sigma^\ell(u) = s_\sigma^{\ell_0}(u) + 2 + 5 \cdot \alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{Z}$). En effet, on peut considérer les mêmes arguments pour les arêtes incidentes qui ne sont pas le début ou la fin du cycle, dont la modification de la somme est multiple de 5, et les deux arêtes extrémales modifient $s_\sigma(u)$ de $+1$ modulo 5 chacune. On a donc $s_\sigma^\ell(u) \pmod 5 = 2$.

Cette modification des valeurs des arêtes permet donc de changer uniquement la catégorie de la somme d'un sommet dans B , afin qu'elle corresponde au but final, sans changer la catégorie d'aucune autre somme. Comme initialement tous les sommets de B ont une somme multiple de 5, en répétant ce processus pour chaque sommet dans B , on obtient une pondération telle que la somme pour tous les sommets de A et de C est multiple de 5, et qu'elle est congrue à 2 ou 3 modulo 5 pour les sommets dans B .

Soit $u \in C$ tel que $s_\sigma^{\ell_0}(u) \pmod 5 = 0$. On raisonne de même en considérant un cycle impair en u , mais en modifiant la contribution des arêtes du cycle alternativement de $+2$ et -2 modulo 5. La somme de sommets différents de u est modifiée d'un multiple de 5, donc la somme de ces sommets ne changent pas de catégorie, et $s_\sigma^\ell(u) = s_\sigma^{\ell_0}(u) + 4 + 5 \cdot \alpha$, donc $s_\sigma^\ell(u) \pmod 5 = 4$. En répétant le processus, on obtient la propriété voulue sur s_σ pour tous les sommets du graphe. La coloration est alors propre, parce que deux sommets adjacents sont dans deux ensembles différents, donc ont une somme de catégorie différente, qui est donc en particulier différente, sans la valeur absolue et avec la valeur absolue. \square

Théorème 10. *Pour tout bon graphe 4-chromatique signé G , on a $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 6$.*

Preuve. On note A, B, C, D les 4 parties des sommets selon la coloration de G . On veut que les sommes des sommets dans A soient multiples de 6, celles des sommets dans B congrues à 3 modulo 6, celles des sommets dans C à 1 ou 5 modulo 6, et celles des sommets dans D congrues à 2 ou 4 modulo 6.

De même que dans la preuve pour les graphes 3-chromatiques, il suffit que les sommes des sommets soient dans ces catégories pour s_σ plutôt que $s_{|\sigma|}$, et on commence avec $\ell(e) = 6$ pour tout $e \in E$. On considère donc ici les sommes pour s_σ .

Pour deux sommets u, v dans B , avec $s_\sigma(u), s_\sigma(v)$ multiple de 6, on considère un chemin de taille impair de u à v , et change alternativement les valeurs des arêtes telles que la contribution aux sommets incidents change de $+3$ et -3 modulo 6. Avec des arguments identiques au Théorème 9, la somme des sommets différents de u ou v change d'un multiple de 6, donc ces sommets conservent le même reste modulo 6, et $s_\sigma(u)$ change de $3 + 6 \cdot \alpha$, et de même en v , donc $s_\sigma(u), s_\sigma(v) \pmod 6 = 3$. On recommence ensuite ce processus jusqu'à ce qu'il reste au plus un sommet $u \in B$ avec $s_\sigma(u) \pmod 6 = 0$.

Pour deux sommets u, v dans C avec $s_\sigma(u), s_\sigma(v)$ multiple de 6, on procède de même mais en changeant les valeurs des arêtes par $+1$ et -1 modulo 6. Le seul changement de reste pour les sommes est en u et v dont les sommes sont maintenant congrues à 1 modulo 6. On recommence également jusqu'à ce qu'il reste au plus un sommet $u \in C$ avec $s_\sigma(u) \pmod 6 = 0$.

S'il est possible de choisir les parties B et C telles que $|B|$ et $|C|$ sont paires, alors en répétant ces processus, les sommets de B et C ont une somme qui a le bon reste modulo 6, sans changer le reste des sommets de A et D . Sinon, on prend $|B|$ et $|C|$ impaires, et effectue la modification pour tous les sommets de B et tous les sommets de C sauf 1.

Dans ce cas, on a $u \in B, v \in C$ tels que $s_\sigma(u)$ et $s_\sigma(v)$ est multiple de 6. On considère d'abord un cycle de taille impair en u , et modifie la valeur des arêtes de telle manière que la contribution aux sommets incidents change de $+1$ et -1 modulo 6. On obtient alors $s_\sigma(u) \pmod 6 = 2$. Puis en considérant un chemin de taille impaire de u à v et modifiant la valeur des arêtes de telle manière que la contribution aux sommets incidents change successivement de $+1$ et -1 modulo 6, on obtient $s_\sigma(u) \pmod 6 = 3$ et $s_\sigma(v) \pmod 6 = 1$, sans changer le reste modulo 6 des sommes des autres sommets, donc tous les sommets de B et C ont maintenant une somme qui correspond à celle qu'on veut leur donner.

Soit un sommet u dans D , avec $s_\sigma(u) \bmod 6 = 0$. En considérant de même un cycle de taille impaire passant par u et en changeant la valeur des arêtes de telle manière que la contribution aux sommets incidents change successivement de $+1$ et -1 modulo 6, on obtient $s_\sigma(u) \bmod 6 = 2$, sans changer le reste de la somme des autres sommets. On réitère ce processus pour tout sommet dans D .

Après tous ces changements, les sommes des sommets sont dans la catégorie déterminée au début, donc la coloration induite est propre. \square

Proposition 11. *Pour toute polarisation de K_4 , $\chi_{|\Sigma|}(K_4) \leq 3$.*

Preuve. On note a, b, c, d les sommets de K_4 . Par symétrie, on peut supposer que a est incident à plus d'arêtes positives que négatives. (Si ce n'était pas le cas on inverse la polarité du graphe), et on choisit a tel que a est le sommet incident au plus d'arêtes positives.

On pose $\ell(ab) = \ell(ac) = \ell(ad) = 3$.

- On suppose que a est incident à trois arêtes positives. Si toutes les arêtes du graphe sont positives, le résultat est immédiat car connu sur les graphes non signés. Sinon, on discute en fonction de k , où k est le nombre d'arêtes négatives. On a $s_{|\sigma|}(a) = 9$.
 - Si $k = 1$, alors par choix arbitraire des noms des sommets, on peut supposer que $\sigma(bc) = -1$. On pose alors $\ell(bc) = 1$, $\ell(bd) = 2$ et $\ell(cd) = 1$, donc $s_{|\sigma|}(b) = 4$, $s_{|\sigma|}(c) = 3$ et $s_{|\sigma|}(d) = 6$.
 - Si $k = 2$, alors de même on peut supposer que $\sigma(bc) = \sigma(bd) = -1$. On pose alors $\ell(bc) = 1$, $\ell(bd) = 2$ et $\ell(cd) = 1$, donc $s_{|\sigma|}(b) = 0$, $s_{|\sigma|}(c) = 3$ et $s_{|\sigma|}(d) = 2$.
 - Si $k = 3$, alors $\sigma(bc) = \sigma(bd) = \sigma(cd) = -1$. On pose alors $\ell(bc) = 1$, $\ell(bd) = 2$ et $\ell(cd) = 3$, donc $s_{|\sigma|}(b) = 0$, $s_{|\sigma|}(c) = 1$ et $s_{|\sigma|}(d) = 2$.
- On peut maintenant, par choix des arêtes supposer que $\sigma(ab) = -1$ et $\sigma(ac) = \sigma(ad) = 1$, et que aucun sommet n'est incident à trois arêtes de même polarité. Ainsi $\sigma(bd) = 1$ ou $\sigma(bc) = 1$. Le choix entre c et d étant encore arbitraire, on peut supposer que $\sigma(bc) = 1$. Alors forcément $\sigma(cd) = -1$, sinon c est incident à trois arêtes positives. On pose alors $\ell(bc) = 3$, $\ell(cd) = 2$ et $\ell(bd) = 1$. Alors $s_{|\sigma|}(a) = 3$, $s_{|\sigma|}(c) = 4$. Si $\sigma(bd) = 1$, alors $s_{|\sigma|}(b) = 1$ et $s_{|\sigma|}(d) = 2$, et si $\sigma(bd) = -1$, alors $s_{|\sigma|}(b) = 1$ et $s_{|\sigma|}(d) = 0$.

\square

Théorème 12. *Pour tout bon graphe signé G , on a $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 9$.*

Preuve. On a vu que les bons graphes signés de degré maximal au moins égal à 4 sont 9-pondérables. D'après le théorème de Brooks [4], si G est de degré maximal 3, alors G est soit K_4 , soit biparti, soit 3-chromatique. On a montré un résultat plus fort sur les graphes bipartis et 3-chromatiques, donc ces graphes sont en particulier 9-pondérables. Enfin, K_4 est 3-pondérable quelle que soit la polarisation. \square

Proposition 13. *Si $n \geq 4$ pair, il existe une polarisation non triviale des arêtes de K_n qui n'est pas 2-pondérable.*

Preuve. Par l'absurde on essaie de pondérer avec 1 et 2 : on prend toutes les arêtes positives sauf les arêtes $\{i, n - i + 1\}$ négatives pour $i \in [1..n]$. Le graphe ainsi polarisé est symétrique.

Les valeurs prenables sont dans l'intervalle $[n - 4, 2n - 5]$ qui est de taille n . Comme le graphe est complet, $s_{|\sigma|}$ doit prendre des valeurs distinctes en chaque sommet, il faut donc utiliser toutes les valeurs possibles.

Par symétrie, on essaie de mettre $n - 4$ en 1 : il faut donner 1 pour toutes les arêtes incidentes positives et 2 pour la négative. On remarque alors que la valeur $2n - 5$ ne peut plus être prise par aucun autre sommet. \square

A.4 Graphes éparses

Définition 14. Soit un bon graphe signé G , ainsi qu'un sous-graphe H , et une pondération propre ℓ sur H . Soit e une arête, où $e \notin E(H)$. On dit qu'une valeur est interdite pour une extension ℓ_1 de ℓ sur G , si la pondération ℓ étendue sur G avec $\ell(e)$ fixé n'induit pas une coloration propre sur les sommets.

Par extension, quand il reste une seule arête e incidente à un sommet u à fixer, on dit qu'une valeur de $\ell(e)$ est interdite s'il y a un conflit entre u et ses voisins pour la somme finale.

On dit de deux sommets u et v qu'ils sont en conflit quand $s_{|\sigma|}(u) = s_{|\sigma|}(v)$, sauf précision contraire.

On dit qu'un sommet u a un conflit s'il existe un sommet adjacent v tel que u et v sont en conflit. Un sommet u est sans conflit si pour tous voisins v , u et v ne sont pas en conflit.

Définition 15. Le *mad* (maximum average degree) d'un graphe G est le degré moyen maximal parmi tous les sous-graphes de G , noté

$$\text{mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}.$$

Lemme 16. Si $a \neq b \in \mathbb{Z}$, il existe au plus un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|a + k| = |b + k|$.

Preuve. On le montre selon les signes de $a + k, b + k$.

- Quand $a + k$ et $b + k$ sont de même signe, $|a + k| - |b + k| = a - b$. Donc $|a + k| = |b + k|$ si et seulement si $a = b$, ce qui est exclu.
- $a + k$ et $b + k$ sont de signe différent. $||a + k| - |b + k|| = |a + b + 2k|$. Donc $|a + k| = |b + k|$ si et seulement si $k = \frac{-(a+b)}{2}$ et que un tel k est dans \mathbb{Z} .

□

Corollaire 17. Soit G un graphe signé, $u, v \in V$ tels que $uv \in E$. On considère $H = G \setminus \{uv\}$, et ℓ_1 une pondération sur H . Si $s_{\sigma}^{\ell_1}(u) \neq s_{\sigma}^{\ell_1}(v)$, alors il existe au plus une pondération $\ell(uv)$ de l'arête uv telle qu'en considérant ℓ la pondération ℓ_1 étendue à l'arête uv , on ait $s_{|\sigma|}^{\ell}(u) = s_{|\sigma|}^{\ell}(v)$, et dans ce cas $s_{\sigma}^{\ell_1}(u)$ et $s_{\sigma}^{\ell_1}(v)$ ont la même parité.

Remarque. Ce résultat peut se voir graphiquement. $|a + k|$ est une fonction absolue décalée, composée de deux droites, de coefficients directeurs $+1$ et -1 . Les droites de même coefficient directeur sont parallèles et ne s'intersectent donc pas, et une seule droite de coefficient directeur $+1$ peut intersecter en un unique point (non nul) une des droites de coefficient directeur -1 .

Afin de montrer qu'une pondération induit une coloration propre, on va montrer que pour deux sommets u et v adjacents, $s_{\sigma}(u) \neq s_{\sigma}(v)$ et $s_{\sigma}(u) \neq -s_{\sigma}(v)$, ce qui donnera $s_{|\sigma|}(u) \neq s_{|\sigma|}(v)$. Cette approche est motivée par le fait que, en raison de la valeur absolue dans le calcul des sommes, modifier la valeur d'une arête peut augmenter ou diminuer la somme, quelle que soit la polarisation de l'arête, sans qu'on ait un moyen de le contrôler efficacement. On pourra également, dans les discussions autour des configurations, choisir la polarité d'une unique arête, car par symétrie $|\sum_{e \in N(u)} \sigma(e)\ell(e)| = |\sum_{e \in N(u)} (-\sigma(e))\ell(e)|$.

A.4.1 Degré moyen maximal 2 implique 3-pondérabilité

Définition 18. On dit qu'un graphe G est minimal s'il est minimal pour la mesure $|V| + |E|$.

Soit G un bon graphe signé contre-exemple minimal pour la propriété de 3-pondérabilité parmi les graphes signés de $\text{mad} < 2$. On montre que G ne contient pas la configuration suivante comme sous-graphe. Par minimalité, on considère à chaque fois qu'on peut pondérer un sous-graphe, lui-même de $\text{mad} < 2$, puis on étend la pondération aux arêtes restantes.

Lors de la représentation d'une configuration, on n'indique que les arêtes obligatoires entre les sommets de la configuration, ainsi que le degré de chaque sommet. Les arêtes incidentes à des sommets hors de la configuration ne sont pas représentées, et on ne représente pas des arêtes entre deux sommets de la configuration bien qu'elles puissent exister ou non.

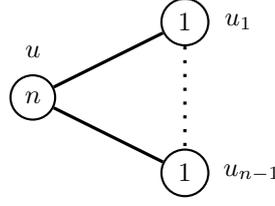


Figure 2: Configuration 1

Configuration 1. Un sommet u de degré n adjacent à au moins $n - 1$ sommets de degré 1.

La Configuration 1 de la Figure 2 se lit de la manière suivante : u est adjacent à des sommets de degré 1. Comme on a des arêtes entre u et les sommets u_1 à u_{n-1} , il y en a au moins $n - 1$ de degré 1, et u est de degré n parce qu'on a ce nombre indiqué dans le sommet. Il y a donc une arête incidente à u et à un autre sommet de degré quelconque qui ne fait donc pas partie de la configuration. On nomme ce dernier voisin v .

Preuve. On suppose d'abord que G est une étoile (un sommet u adjacent à tous les autres nommés u_i pour $1 \leq i \leq n - 1$ et aucune autre arête). On pose $k = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(au_i)$. On peut supposer que $k \geq 0$, et que les arêtes $\sigma(uu_i)$ où i sont les plus petits indices.

- $k = 0$. On pose $\ell(uu_i) = 1$ pour tout i , et alors $s_{|\sigma|}(u) = 0$, $s_{|\sigma|}(u_i) = 1$.
- $k > 1$. On pose $\ell(uu_i) = 1$ pour tout i , et alors $s_{|\sigma|}(u) > 2$, $s_{|\sigma|}(u_i) = 1$.
- $k = 1$. On a $n \geq 3$ car G n'est pas K_2 . On pose $\ell(uu_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq n - 2$ et $\ell(uu_{n-1}) = 2$. Alors $s_{|\sigma|}(u) = 0$ et $s_{|\sigma|}(u_i) \in \{1, 2\}$.

G est donc 3-pondérable.

On suppose maintenant que u est adjacent à au moins un sommet de degré 2, donc que u est adjacent à exactement $n - 1$ sommets de degré 1. On pose H le sous-graphe induit de G où on a enlevé les sommets de degré 1 voisins de u . Comme u est voisin dans H d'un sommet de degré au moins 2, et que H est connexe, ce n'est pas K_2 , donc H est 3-pondérable, par hypothèse de minimalité de G pour la propriété de 3-pondérabilité. On nomme ℓ_1 une telle pondération.

On va montrer que la pondération ℓ_1 sur H peut s'étendre en une pondération ℓ sur G telle que la coloration induite par les sommes soit propre. On discute en fonction du degré n du sommet u , pour trouver une extension sur G de ℓ_1 qui convienne.

- $n = 2$. Dans le Tableau 1, on retrouve toutes les valeurs prises par $s_{|\sigma|}^\ell(u)$ pour l'extension ℓ en fonction de la valeur de l'arête $\ell(ab)$, ainsi que de la somme partielle de $s_{|\sigma|}^{\ell_1}(u)$. Le doublement des lignes pour un même $s_{|\sigma|}^{\ell_1}(u)$ est en fonction de si $s_{|\sigma|}^{\ell_1}(u) < 0$ ou pas. Pour

Table 1: Somme de u en fonction de $\ell(uv)$ pour le cas $n = 2$

$s_{ \sigma }^{\ell_1}(u)$	$s_{ \sigma }^\ell(u)$ pour		
	$\ell(uu_1) = 1$	$\ell(uu_1) = 2$	$\ell(uu_1) = 3$
1	0	1	2
1	2	3	4
2	1	0	1
2	3	4	5
3	2	1	0
3	4	5	6

chaque ligne, c'est-à-dire chaque configuration possible, il existe toujours au moins deux valeurs de $s_{|\sigma|}^\ell(u)$ telles qu'il n'y ait pas de conflit entre u et u_1 . On raisonne ici avec la valeur absolue, et choisit donc l'extension ℓ qui ne crée pas de conflit entre u et b (et donc aussi entre u et u_1).

- $n \geq 5$. Sans la valeur absolue, on peut surapproximer que les sommets de degré 1 créent un conflit avec u pour les sommes finales de u valant $-3, -2, -1, 1, 2$ et 3 . v crée également un conflit pour deux sommes finales de u . Cependant, la taille de l'ensemble des valeurs atteignables par $s_{|\sigma|}^\ell(u)$ est au moins de taille $2 \cdot (n - 1) + 1$. Avec $n \geq 5$, cela fait au moins 9 sommes finales de $s_{|\sigma|}^\ell(u)$ possibles pour lesquelles il existe une extension de pondération ℓ . Il existe seulement 8 sommes interdites, donc il existe bien une pondération ℓ sur G qui convienne.
- $n = 3$. On peut supposer que $\sigma(uv) = 1$. On construit une extension de pondération ℓ en fonction du signe des arêtes de la configuration.

- $\sigma(uu_1) = \sigma(uu_2) = 1$, il existe une extension ℓ de ℓ_1 sur G tel que $s_{|\sigma|}^\ell(u) = s_{|\sigma|}^{\ell_1}(u) + \ell(uu_1) + \ell(uu_2) \in \{4, 5\}$. Dans ce cas, on choisit des deux l'extension qui ne crée pas de conflit avec v , ce qui est possible car on a deux possibilités de $s_{|\sigma|}^\ell(u)$ de même signe. Cette pondération ℓ ne crée pas de conflit entre le sommet u et les sommets u_1 et u_2 , car $s_{|\sigma|}^\ell(u_1), s_{|\sigma|}^\ell(u_2) \leq 3$.
- $\sigma(uu_1) = -\sigma(uu_2)$. On considère l'extension ℓ où $\ell(uu_1) = \ell(uu_2)$ est différent de la valeur de $\ell_1(uv)$, ce qui conserve la somme de u initiale (valant $\ell(uv)$) qui n'était pas en conflit avec v par hypothèse de construction de ℓ_1 , et ne crée alors pas de conflit avec u_1 et u_2 .
- $\sigma(uu_1) = \sigma(uu_2) = -1$.
 - * $\ell_1(uv) = 1$. On construit des extensions de pondération ℓ telles que $s_{|\sigma|}^\ell(u)$ puisse valoir -5 ou -4 , et la preuve est donc identique à celle du cas $\sigma(uu_1) = \sigma(uu_2)$.
 - * $\ell_1(uv) = 2$. On construit des extensions de pondération telles qu'alors $s_{|\sigma|}^\ell(u)$ vaut -4 , ou 0 avec $\ell(uu_1) = \ell(uu_2) = 1$. On choisit alors la pondération telle qu'il n'y a pas de conflit entre u et v . Si $s_{|\sigma|}^\ell(u) = -4$, comme $s_{|\sigma|}^\ell(u_1), s_{|\sigma|}^\ell(u_2) \leq 3$, alors il n'y a pas de conflit entre u et u_1 et u_2 . Sinon, on obtient $s_{|\sigma|}^\ell(u) = 0$ avec $s_{|\sigma|}^\ell(u_1) = s_{|\sigma|}^\ell(u_2) = 1$, donc de même il n'y a pas de conflit entre u et u_1 et u_2 . Il suffit donc de choisir la construction telle que $s_{|\sigma|}^\ell(u) \neq s_{|\sigma|}^\ell(v)$, car $s_{|\sigma|}^\ell(v)$ est identique quel que soit le choix de pondération des deux arêtes.
 - * $\ell_1(uv) = 3$. On construit des extensions de pondération telles qu'alors $s_{|\sigma|}^\ell(u) = 0$ avec $\ell(uu_1) = 1, \ell(uu_2) = 2$, ou $s_{|\sigma|}^\ell(u) = 1$ avec $\ell(uu_1) = \ell(uu_2) = 2$. Une de ces pondérations convient alors de manière identique au sous-cas précédent.

- $n = 4$. On peut supposer $\sigma(uv) = 1$. On raisonne en fonction de k , où k est le nombre d'arêtes entre u et les sommets de degré 1 dans G qui sont positives.

- $k \geq 2$. Il existe des extensions ℓ de ℓ_1 tel que $s_{|\sigma|}^\ell(u)$ prenne les valeurs 6 ou 7 , et il existe alors une telle extension qui convient de manière identique au cas où $n = 3$ et $\sigma(uu_1) = \sigma(uu_2) = 1$.
- $k = 1$. On construit une extension ℓ où une des arêtes négatives vaut $\ell_1(uv)$ et les deux autres une valeur quelconque égale, ce qui donne $s_{|\sigma|}^\ell(u) = 0$. Cette pondération est propre si $s_{|\sigma|}^{\ell_1}(v) \neq 0$.

On peut donc supposer que $s_{|\sigma|}^{\ell_1}(v) = 0$, et suppose que $\sigma(uu_1) = 1$ et $\sigma(uu_2) = \sigma(uu_3) = -1$. Si $\ell_1(uv) = 1$, on pose $\ell(uu_1) = 1$ et $\ell(uu_2) = \ell(uu_3) = 3$, alors $s_{|\sigma|}^\ell(u) = -4$. Si $\ell(uv) = 3$, on obtient une extension propre en posant $\ell(uu_1) = 3$ et $\ell(uu_2) = \ell(uu_3) = 1$. Finalement, quand $\ell(uv) = 2$, on pose $\ell(uu_1) = 3$, et $\ell(uu_2) = \ell(uu_3) = 2$. Cela donne une extension propre pour chaque valeur de $\ell(uv)$.

- $k = 0$. On peut trouver des extensions de pondération tel que $s_{\sigma}^{\ell}(u)$ prenne la valeur -6 ou -5 , et l'argument indiquant existe une extension tel que $s_{|\sigma|}^{\ell}(u)$ est différent de la somme de ses voisins est alors identique au cas $k \geq 2$.

□

Théorème 19. *Si G est un bon graphe signé avec $\text{mad}(G) < 2$, alors $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 3$.*

Preuve. Si G est une étoile, G contient la Configuration 1 et est donc 3-pondérable. On considère donc un bon graphe G contre-exemple minimal pour la propriété de 3-pondérabilité parmi les graphes signés pondérables de $\text{mad} < 2$, et qui ne sont pas des étoiles.

Soit $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\omega(u) = \text{deg}(u) - 2$ pour tout sommet u dans V . Par définition du mad , on a $\sum_{u \in V} \omega(u) = 2 \cdot |E| - |V| \cdot 2 < 0$.

Règle Si un sommet u avec $d(u) \geq 2$ est adjacent à v où $d(v) = 1$, alors u donne une charge à v , c'est-à-dire qu'on augmente $\omega(v)$ de 1 et diminue $\omega(u)$ de 1.

Après tous les déchargements, on obtient une nouvelle fonction de poids ω^* . La Règle indique qu'on a $\sum_{u \in V} \omega^*(u) = \sum_{u \in V} \omega(u) < 0$. On veut montrer qu'en fait cette affirmation est contradictoire, en montrant que pour tout $u \in V$, $\omega^*(u) \geq 0$.

Bornes sur ω^* Soit u un sommet.

- $d(u) = 1$: si u est adjacent à un autre sommet de degré 1, alors G est K_2 ce qui est exclu. Donc le voisin v est de degré au moins 2, donc d'après la Règle, $\omega^*(u) = \omega(u) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.
- $d(u) = 2$: si u est adjacent à un sommet de degré 1, alors G contient la Configuration 1, ce qui est exclu, donc u ne cède ni ne reçoit de charge d'après la Règle, d'où $\omega^*(u) = \omega(u) = 2 - 2 = 0$.
- $d(u) \geq 3$: comme G ne contient pas la Configuration 1, u est au plus adjacent à $d(u) - 2$ sommets de degré 1, donc ne cède pas plus de $d(u) - 2$ charges. Ainsi $\omega^*(u) \geq d(u) - 2 - (d(u) - 2) = 0$.

On a donc montré que pour tout sommet u dans G , $\omega^*(u) \geq 0$. C'est donc une contradiction avec le fait que $\sum_{u \in V} \omega^*(u) = \sum_{u \in V} \omega(u) < 0$. □

Remarque. On obtient avec ce résultat une preuve différente du résultat pour les arbres en ne passant pas par les bipartis. Cependant, ce résultat ne concerne que les arbres.

A.4.2 Degré moyen maximal 3 implique 7-pondérabilité : configurations réductibles

On considère dans cette partie des 7-pondérations, et étudie des configurations qui sont réductibles, c'est-à-dire que ces configurations ne peuvent pas apparaître dans un graphe contre-exemple minimal pour la propriété de 7-pondérabilité.

On commence par montrer des lemmes, qui sont utiles pour montrer que certaines configurations entraînent l'existence de forts degrés de libertés dans le choix de la pondération.

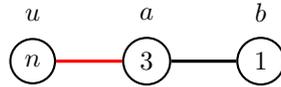


Figure 3: Configuration du Lemme 20

Lemme 20. *Dans une configuration d'un sommet u de degré n adjacent à u un sommet de degré 3 lui-même adjacent à b de degré 1, avec $\sigma(au) = 1$, en supposant avoir une pondération partielle ℓ_0 sur les arêtes de G hormis au et ab , il existe au moins 6 extensions ℓ avec des valeurs différentes de $\ell(au)$ telles que pour n'importe quelle somme finale de $s_{|\sigma|}^{\ell}(u)$, il n'y ait pas de conflit entre les sommets a, b et leurs voisins.*

Preuve. On considère ℓ_0 , une pondération arbitraire sur $H = G \setminus \{au, ab\}$. On étend alors la pondération ℓ_0 à l'arête au . On nomme cette pondération ℓ_1 . On veut que $s_{\sigma}^{\ell_1}(a) \neq 0$. C'est le cas pour n'importe quel choix de $\ell_1(au)$ hormis au plus une valeur. On peut donc pondérer $\ell_1(au)$ de 6 manières différentes qui respectent cette condition.

On va étendre ℓ_1 en une pondération ℓ sur l'entièreté du graphe. La valeur finale de $s_{\sigma}^{\ell}(u)$ est déjà fixée, ainsi que celle du dernier voisin de a . Il faut donc choisir la valeur de $\ell(ab)$ telle que a ne soit pas en conflit avec u , son autre voisin dans H et b . Le conflit avec ces deux premiers sommets peut interdire au plus 4 valeurs. On est de plus dans le cas d'application du Corollaire 17, donc au plus une valeur est interdite pour éviter le conflit entre a et b . Il reste donc au moins 2 valeurs différentes possibles pour le choix de $\ell(ab)$. D'où le résultat. \square

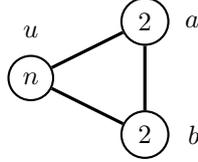


Figure 4: Configuration du Lemme 21

Lemme 21. *Dans une configuration où a, b sont deux sommets adjacents de degré 2 tous deux adjacents à un sommet u de degré n , en supposant avoir une pondération ℓ_0 quelconque sur $H = G \setminus \{a, b\}$, il existe des extensions ℓ tel qu'il y ait 11 sommes $s = \ell(au) \cdot \sigma(au) + \ell(ub) \cdot \sigma(ub)$ différentes tel que pour n'importe quelle valeur finale de $s_{\sigma}^{\ell}(u)$, on puisse choisir $\ell(ab)$ pour qu'il n'y ait pas de conflit entre les sommets a, b et u .*

Preuve. On veut étendre la pondération au graphe G tout entier. On montre qu'il suffit que $\ell(au) \neq \ell(ub)$ pour qu'on ait un choix satisfaisant pour $\ell(ab)$. Pour respecter cette condition, les seules sommes s ainsi non atteignables sont 2, 14 si $\sigma(au) = \sigma(ub)$, et 0 sinon, ce qui donne bien au moins 11 valeurs possibles pour s .

Supposons maintenant que $s_{|\sigma|}^{\ell}(u)$ est fixé, donc qu'on a choisi $\ell(au)$ différent de $\ell(ub)$. On note ℓ_1 cette pondération sur $G \setminus \{ab\}$. On a donc initialement $s_{\sigma}^{\ell_1}(a) \neq s_{\sigma}^{\ell_1}(b)$. Par le Corollaire 17, au plus une valeur de $\ell(ab)$ est interdite. De plus, pour qu'il n'y ait pas de conflit entre a, b et u , il y a au total d'au plus 4 valeurs interdites supplémentaires. Ainsi, il existe au moins 2 valeurs possibles pour étendre la pondération à l'ensemble du graphe telles qu'il n'y ait pas de conflit pour les sommets a et b . \square

Définition 22. On dit qu'un sommet u est adjacent à un triangle s'il est adjacent à deux sommets de degré 2 qui sont eux-mêmes adjacents l'un à l'autre.

On dit qu'un sommet u de degré 3 est faible s'il est adjacent à un sommet de degré 1. Dans le cas contraire, u est dit fort.

On dit qu'un sommet u de degré 1 est faible s'il est adjacent à un sommet de degré 3 ou moins, et fort s'il est adjacent à un sommet de degré 4 ou plus.

Si un sommet u de degré 3 faible est adjacent à v de degré 1 faible, on dit que u est associé à v et que v est associé à u .

Les deux Lemmes 20 et 21 indiquent que dès qu'on a un triangle ou un sommet de degré 3 faible adjacent à un sommet, on peut pour une pondération fixée sur les arêtes hors de ces configurations trouver plusieurs sommes possibles pour le sommet de grand degré, sans pour autant créer des conflits pour les sommets internes à ces structures.

On suppose avoir G un bon graphe signé contre-exemple minimal pour la propriété de 7-pondérabilité. On montre qu'alors G ne peut pas contenir les configurations suivantes comme sous-graphe. On considère par minimalité à chaque fois qu'on peut pondérer un sous-graphe, puis veut étendre la pondération aux arêtes restantes. Quand à un moment on parle de la somme d'un sommet, c'est la somme partielle pour la pondération partielle définie sur le plus grand nombre d'arêtes.

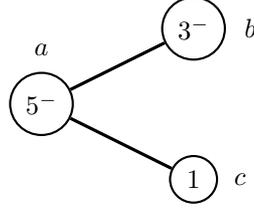


Figure 5: Configuration 2

Configuration 2. Un sommet a de degré au plus 5 adjacent à un sommet b de degré au plus 3 et à un sommet c de degré 1.

Preuve. On pose $H = G \setminus \{ab, ac\}$. H ne possède pas de composante connexe qui soit K_2 . En effet, comme initialement G est connexe, une telle composante doit contenir a ou b . Comme le degré dans H de a diminue de 2, il faut qu'alors, dans G , a soit de degré 3 et adjacent à deux sommets de degré 1, ce qui est la Configuration 1 pour $n = 3$, donc exclu. De même, si la composante connexe contient b , alors dans G , b est de degré 2 et adjacent à un sommet de degré 1, donc G contient la Configuration 1 pour $n = 2$. On peut donc, par hypothèse de minimalité de G comme contre-exemple pour la propriété de 7-pondérabilité, disposer de ℓ_0 , une 7-pondération propre de H .

On va étendre ℓ_0 en ℓ_1 en pondérant l'arête ab . Les voisins de b dans H interdisent au plus 4 valeurs pour $\ell_1(ab)$, et une cinquième valeur est interdite afin que $s_\sigma^{\ell_1}(a) \neq 0$. Il reste donc au moins 2 valeurs possibles pour $\ell_1(ab)$, on peut donc trouver une extension ℓ_1 propre. Comme $\{s_\sigma^{\ell_0}(a) + \sigma(ab)i, i \in \{1, \dots, 7\}\}$ est un intervalle de taille 7, il ne peut pas contenir 4 et -4 , donc on peut en particulier choisir l'extension ℓ_1 telle que également $|s_\sigma^{\ell_1}(a)| \neq 4$. L'extension de pondération ℓ en pondérant l'arête ac doit alors assurer qu'il n'y ait pas de conflit entre a et b , entre a et ses voisins dans H , et entre a et c . On sait par hypothèse sur ℓ_1 qu'au plus une valeur de $\ell(ac)$ est interdite par le Corollaire 17 pour ce dernier cas. S'il existe six choix distincts de ℓ tels que $s_\sigma \ell(a)$ soit de signe constant, et résulte en six sommes distinctes, alors une de ces pondérations convient, car le conflit entre a et c interdit au plus une somme finale, et quand on considère que le signe de la somme finale en a est constant, b et les voisins de a dans H interdisent chacun au plus une somme finale, soit un total d'au plus quatre sommes finales pour ces voisins, donc au plus cinq sommes finales au total. Cependant, quand $s_\sigma^{\ell_1}(a)$ est impair, on sait par le Corollaire 17 qu'il n'y a pas de conflit entre a et c quelle que soit la valeur de $\ell(ac)$. Dans ce cas on a seulement besoin de cinq sommes finales distinctes de même signe. On montre en fonction de $s_\sigma^{\ell_1}(a)$ c'est toujours possible.

Si $s_\sigma^{\ell_1}(a) \cdot \sigma(ac) \geq 0$, alors tous les choix de $\ell(ac)$ donnent des valeurs $s_\sigma \ell(a)$ de signe identique et de somme distincte, ce qui donne sept sommes finales distinctes de même signe. Il faut donc considérer le cas contraire. On traite le cas où $\sigma(ac) = -1$, et $s_\sigma^{\ell_1}(a) > 0$, le cas où $\sigma(ac) = 1$ et $s_\sigma^{\ell_1}(a) < 0$ est identique en changeant la polarité de toutes les arêtes.

- Si $s_\sigma^{\ell_1}(a) \geq 6$, les valeurs prises par $s_\sigma(a)$ contiennent $s_\sigma^{\ell_1}(a) - 1, \dots, s_\sigma^{\ell_1}(a) - 6$ qui sont des sommes positives distinctes.
- Si $s_\sigma^{\ell_1}(a) = 5$, $s_\sigma(a)$ peut prendre les valeurs 4, 3, 2, 1, 0, ce qui en fait 5 différentes, et suffit car 5 est impair.
- Si $s_\sigma^{\ell_1}(a) = 3$, $s_\sigma(a)$ peut prendre les valeurs 0, -1 , -2 , -3 , -4 .
- Si $s_\sigma^{\ell_1}(a) = 2$, $s_\sigma(a)$ peut prendre les valeurs 0, -1 , -2 , -3 , -4 , -5 .
- Si $s_\sigma^{\ell_1}(a) = 1$, $s_\sigma(a)$ peut prendre les valeurs 0, -1 , -2 , -3 , -4 , -5 .

Il n'y a que dans le cas où $s_\sigma^{\ell_1}(a) = 4$ où il n'est pas possible d'assurer assez de valeurs différentes de même signe pour $s_\sigma(a)$. Comme on a choisi $|s_\sigma^{\ell_1}(a)| \neq 4$, on peut choisir une extension telle

que a ne soit en conflit avec aucun de ses voisins, et donc une telle extension induit une coloration propre sur G tout entier. □

Configuration 3. Soit u un sommet de degré n , adjacent à α triangles dont on nomme les sommets t_i et t'_i pour $1 \leq i \leq \alpha$, β sommets de degré 3 faibles qu'on nomme pour $1 \leq j \leq \beta$ k_j et le sommet de degré 1 associé k'_j , et à exactement un sommet a qui est soit de degré 1, soit de degré 2 mais ne formant pas un triangle adjacent à u . On veut de plus que $\alpha + \beta \geq 1$ et $n \leq 2 + 2\alpha + \beta + 1$, c'est-à-dire qu'au plus deux sommets adjacents à u ne sont pas dans ces catégories. Une telle configuration est réductible.

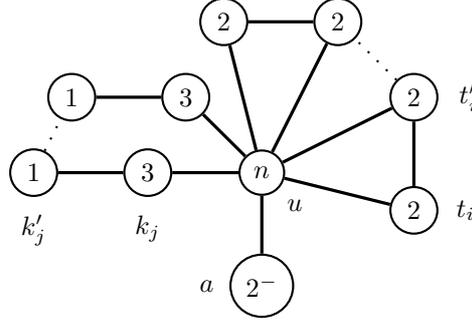


Figure 6: Configuration 3

Preuve. On pose H le sous-graphe composé de G auquel on enlève les sommets t_i, t'_i pour $1 \leq i \leq \alpha$, l'arête au , ainsi que les arêtes uk_j et $k_jk'_j$ pour $1 \leq j \leq \beta$. On montre d'abord qu'aucune des composantes connexes de H ne peut être K_2 . En effet, a ne peut pas être adjacent à un sommet de degré 1, car G ne peut pas contenir la Configuration 1. Par hypothèse, la composante connexe dans H contenant u est soit un sommet isolé, soit bien plus que K_2 , car les sommets adjacents à u dans H sont au moins de degré 3 dans H . Enfin, les composantes contenant k_j ne sont pas K_2 . En effet, si le sommet adjacent à k_j dans H n'est pas un sommet de la configuration, alors G contient la Configuration 1 pour $n = 3$. Sinon, k_j est adjacent à a ou à un autre $k_{j'}$. C'est impossible car sinon G contiendrait la Configuration 2. On dispose donc de ℓ_0 , pondération propre des arêtes de H .

En utilisant par la suite les Lemmes 20 et 21, on étend ℓ_0 en ℓ_1 en pondérant les arêtes ut_i, ut'_i, uk_j , en posant $\ell_1(ut_i) = 1, \ell_1(ut'_i) = 2$, et $\ell_1(uk_j)$ tel que $s_{\sigma}^{\ell_1}(k_j) \neq 0$, pour $1 \leq i \leq \alpha$ et $1 \leq j \leq \beta - 1$ si $\beta \geq 1$, et pour $1 \leq i \leq \alpha - 1$ et aucun k_j sinon.

- S'il reste un k_j pour lequel on n'a pas choisi la valeur de l'arête uk_j , alors on peut étendre ℓ_1 en ℓ_2 sur uk_j , tel que $s_{\sigma}^{\ell_2}(u)$ et $s_{\sigma}^{\ell_2}(a)$ sont de parités différentes, et que $s_{\sigma}^{\ell_2}(k_j) \neq 0$. En effet, la contrainte de la somme partielle de k_j interdit une valeur, et la contrainte de parité interdit au plus 4 valeurs (les pondérations sont dans $\{1, \dots, 7\}$), donc il existe un tel choix.
- Sinon, il y a un triangle dont les arêtes n'ont pas encore de valeur, on peut poser $\ell_2(ut_i) = 1$, et $\ell_2(ut'_i) = 2$ ou $\ell_2(ut'_i) = 3$, de sorte que $s_{\sigma}^{\ell_2}(u)$ soit de parité différente de $s_{\sigma}^{\ell_2}(a)$. En effet le premier choix modifie la somme en u de $-3, -1, 1$ ou 3 donc change la parité de la somme en u et l'autre choix de $-4, -2, 2$ ou 4 donc ne change pas la parité.

Par le Corollaire 17, en étendant ℓ_2 en ℓ_3 en pondérant l'arête au , il n'existe pas de conflit possible entre $s_{|\sigma|}^{\ell_3}(a)$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_3}(u)$. Le conflit avec le voisin de a dans H (s'il existe), interdit au plus deux valeurs, ainsi qu'au plus quatre de plus pour les voisins de u dans H . Il reste donc encore une au moins valeur possible pour $\ell_3(au)$ telle que a et u n'aient pas de conflit entre eux ou avec des voisins dans H .

ℓ_3 donne une pondération à chaque arête incidente à u , donc pour toute extension ℓ de ℓ_3 à l'entièreté de G , $s_{\sigma}^{\ell}(u) = s_{\sigma}^{\ell_3}(u)$. Par les Lemmes 20 et 21, on peut choisir $\ell(t_it'_i)$ et $\ell(k_jk'_j)$ afin

qu'il n'y ait pas de conflit entre les sommets t_i, t'_i, k_j, k'_j et leurs voisins, et ℓ ainsi construit induit une coloration propre sur les sommets. □

Théorème 23 (Combinatorial Nullstellensatz [1]). *Soit F un corps arbitraire, et soit $f = f(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme dans $F[x_1, \dots, x_n]$. On suppose que le degré $\deg(f)$ de f est $\sum_{i=1}^n t_i$, où chaque t_i est un entier positif, et on suppose que le coefficient de $\prod_{i=1}^n x_i^{t_i}$ dans f est non nul. Alors, si S_1, \dots, S_n sont des sous-ensembles de F avec $|S_i| > t_i$, il existe $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots, s_n \in S_n$ tels que*

$$f(s_1, \dots, s_n) \neq 0$$

Configuration 4. *Soit u un sommet de degré n , adjacent à α triangles dont on nomme les sommets t_i et t'_i pour $1 \leq i \leq \alpha$, β sommets de degré 3 faibles qu'on nomme pour $1 \leq j \leq \beta$ k_j et le sommet de degré 1 associé k'_j , et à γ sommets nommés u_i qui sont soit de degré 1, soit de degré 2 ne formant pas un triangle adjacent à u . On demande à ce que $\gamma \geq 2$, et $n \leq 2 + 2\alpha + \beta + \gamma$, c'est-à-dire qu'au plus deux sommets adjacents à u ne sont pas dans ces catégories. Une telle configuration est réductible.*

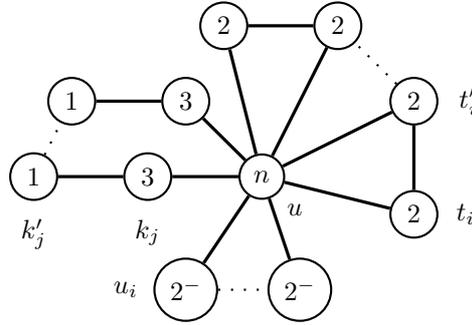


Figure 7: Configuration 4

Preuve. L'idée principale de la preuve est d'appliquer le Théorème 23, en construisant un polynôme qui s'annule dès qu'une contrainte n'est pas respectée. Ainsi, s'il existe une évaluation non nulle du polynôme, on aura montré l'existence d'une pondération propre.

On pose H le sous-graphe de G composé de G auquel on enlève les sommets t_i, t'_i , et les arêtes $uk_j, k_j k'_j$, et uu_i . De même que dans la Configuration 3 on peut supposer disposer d'une pondération ℓ_0 sur le même sous-graphe H y induisant une coloration propre.

On étend ℓ_0 en ℓ_1 en pondérant les arêtes ut_i, ut'_i et uk_j pour $1 \leq i \leq \alpha$, $1 \leq j \leq \beta$, avec $\ell_1(ut_i) = 1$, $\ell_1(ut'_i) = 1$, et $\ell_1(uk_j)$ tel que $s_{\sigma}^{\ell_1}(k_j) \neq 0$. On montre alors qu'il existe un moyen de pondérer les arêtes des sommets de degré 1 ou 2 restants incidentes à u tel qu'il n'y ait pas de conflit entre le sommet u et les voisins de u dans H , ni entre ces sommets de degré 1 ou 2 et u , ni entre les sommets de degré 1 ou 2 et leur potentiel voisin dans H .

On pose X_i la variable qui correspondra à $\ell(uu_i)$. De plus, on nomme v_i le voisin de u_i dans H , (v_i est un sommet arbitraire imaginaire s'il n'existe pas) et on note a_i le label de l'arête entre le sommet u_i et v_i (si l'arête n'existe pas on prend $a_i = 0$), et $c_i = s_{|\sigma|}^{\ell_1}(v_i)$ la somme partielle en v_i , avec $c_i = 0$ si le voisin n'existe pas. Pour les deux potentiels voisins de grand degré adjacents à u dans H , on pose c_a, c_b leurs sommes, et a_a et a_b respectivement la pondération de l'arête entre eux et u . (on prend 0 pour la somme et la valeur de l'arête si le voisin n'existe pas). On note $d = \sum_{i=1}^{\alpha} (\sigma(ut_i)\ell_1(ut_i) + \sigma(ut'_i)\ell_1(ut'_i)) + \sum_{i=1}^{\beta} \sigma(uk_i)\ell_1(uk_i)$. On détaille les contraintes sous formes de polynômes de degré 1 :

- Contraintes entre u_i et v_i : $X_i + a_i - c_i$ et $X_i + a_i + c_i$.
- Contraintes entre u et u_i : $(a_a + a_b + d + X_1 + \dots + X_{\gamma}) - (X_i + a_i)$ et $(a_a + a_b + d + X_1 + \dots + X_{\gamma}) + (X_i + a_i)$

- Contraintes entre u et u_a : $a_a + a_b + d + X_1 + X_2 + \dots + X_\gamma - c_a$ et $a_a + a_b + d + X_1 + X_2 + \dots + X_\gamma + c_a$.
- Contraintes entre u et u_b : $a_a + a_b + d + X_1 + X_2 + \dots + X_\gamma - c_b$ et $a_a + a_b + d + X_1 + X_2 + \dots + X_\gamma + c_b$.

On pose alors P le polynôme des contraintes qui est le produit de toutes les contraintes présentées. Si on trouve x_1, \dots, x_γ , tel que $|x_i| \in \{1, \dots, 7\}$ et x_i positif si et seulement si uu_i est positif, et que $P(x_1, \dots, x_\gamma)$ est non nul, alors chaque contrainte est non nulle, et on en déduit que $s_\sigma^{\ell_2}(u) \neq s_\sigma^{\ell_2}(u_i)$ et que $s_\sigma^{\ell_2}(u) \neq -s_\sigma^{\ell_2}(u_i)$, donc que $s_{|\sigma|}^{\ell_2}(u) \neq s_{|\sigma|}^{\ell_2}(u_i)$ pour tout i ainsi que pour u_a et u_b , et qu'il n'y a pas de conflit entre u_i et v_i pour tout i , où ℓ_2 est la pondération ℓ_1 étendue aux arêtes uu_i pour tout i .

Pour appliquer le Théorème 23, on veut considérer un monôme de degré maximal bien choisi. On a un total de $4 + 4\gamma$ contraintes, et dans ces contraintes, les coefficients devant les variables sont strictement positifs, et chaque contrainte est de degré 1. On en déduit que le polynôme P est de degré exactement $4 + 4\gamma$. Lorsqu'on développe le produit, pour obtenir un terme de degré $4 + 4\gamma$, il faut dans chaque terme du produit choisir un élément qui est une variable, donc les valeurs constantes ne sont pas importantes dans l'étude du monôme de degré maximal, ce qui justifie le fait de fixer arbitrairement les k_i et les t_i .

Il s'agit donc de montrer qu'il existe un monôme $\prod_{i=1}^\gamma X_i^{t_i}$ où $\sum t_i = 4 + 4\gamma$, et $t_i \leq 6$. Il suffit, comme les coefficients de chaque variable sont positives, de montrer qu'il existe un tel choix de prendre une variable dans chaque contrainte tel qu'on obtienne un monôme où $t_i \leq 6$ pour tout i . Les contraintes entre les u_i et v_i donnent un degré 2 en chaque variable, pour la première contrainte entre u et u_i , on peut choisir X_{i+1} (avec $X_{\gamma+1} = X_1$), et pour la deuxième choisir X_i . On a ainsi choisi dans 4γ contraintes de manière à avoir choisi chaque variable 4 fois. On a alors 4 contraintes restantes dans lesquelles apparaissent toutes les variables, on peut donc rétablir équitablement comme on veut, comme on a au moins 2 variables, par exemple, on choisit deux fois X_1 et deux fois X_2 . On obtient alors un coefficient non nul strictement positif pour $t_1 = t_2 = 6$ et $t_3 = \dots = t_\gamma = 4$. Comme les coefficients sont tous positifs, le coefficient ne peut pas s'annuler dans la forme développée. On obtient donc les choix suivants :

$$\begin{aligned}
& (\underline{X_i} + a_i - c_i) \cdot (\underline{X_i} + a_i + c_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq \gamma \\
& (a_a + a_b + d - a_i + X_1 + \dots + X_{i-1} + \underline{X_{i+1}} + X_{i+2} + \dots + X_\gamma) \text{ pour } 1 \leq i \leq \gamma \\
& (a_a + a_b + d + a_i + X_1 + \dots + X_{i-1} + \underline{2X_i} + X_{i+2} + \dots + X_\gamma) \text{ pour } 1 \leq i \leq \gamma \\
& a_a + a_b + d + \underline{X_1} + X_2 + \dots + X_\gamma - c_a \\
& a_a + a_b + d + \underline{X_1} + X_2 + \dots + X_\gamma + c_a \\
& a_a + a_b + d + X_1 + \underline{X_2} + X_3 + \dots + X_\gamma - c_b \\
& a_a + a_b + d + X_1 + \underline{X_2} + X_3 + \dots + X_\gamma + c_b
\end{aligned}$$

Ainsi, par le Théorème 23, avec $S_i = \{1, \dots, 7\}$ si $\sigma(uu_i) = 1$, et $S_i = \{-7, \dots, -1\}$ sinon, on dispose de $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, \dots, x_\gamma \in S_\gamma$ tel que $P(x_1, x_2, \dots, x_\gamma) \neq 0$, donc pour ces valeurs de pondérations sur les arêtes adjacentes à u , u n'est pas en conflit avec les u_i ni avec u_a ni u_b , et u_i n'est pas en conflit avec son autre voisin. On étend donc ℓ_1 en ℓ_2 aux arêtes uu_i avec $\ell_2(uu_i) = x_i$.

On a ainsi un choix des valeurs pour toutes les arêtes incidentes à u , on peut donc étendre ℓ_2 en ℓ à G tout entier, d'après les Lemmes 20 et 21, de manière à ce qu'il n'y ait pas de conflit pour les sommets t_i, t'_i, k_j et k'_j . On a donc une pondération sur l'ensemble des arêtes, et par construction, il n'y a aucun conflit pour les sommets internes à H , ni pour les t_i, t'_i, k_j et k'_j , ni pour le sommet u ou les u_i , donc pour aucun sommet. ℓ induit donc une coloration propre et convient. \square

Remarque. Dans la preuve du Lemme 4, dans le cas où u est un sommet de degré 4 avec deux sommets de degré 2, pour consommer les 4 contraintes fixes, cela force à considérer $X_1^6 X_2^6$, ce qui indique qu'on ne peut pas adapter cette preuve pour des pondérations sur des ensembles plus petits.

Configuration 5. Soit u un sommet de degré n , adjacent à α triangles dont on nomme les sommets t_i et t'_i pour $1 \leq i \leq \alpha$, β sommets de degré 3 faibles qu'on nomme pour $1 \leq j \leq \beta$ k_j et le sommet de degré 1 associé k'_j , et à aucun sommet qui sont soit de degré 1, soit de degré 2 ne formant pas un triangle adjacent à u . On demande à ce que $\alpha + \beta \geq 1$ et $n \leq 2 + 2\alpha + \beta$, c'est-à-dire qu'au plus deux sommets adjacents à u ne sont pas dans ces catégories. Une telle configuration est réductible.

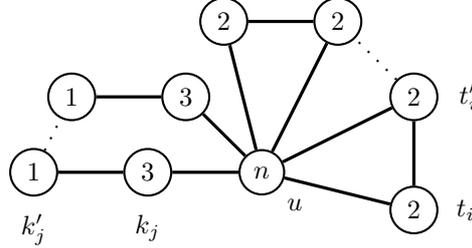


Figure 8: Configuration 5

Preuve. De même que dans la preuve de la Configuration 3, on peut considérer avoir une 7-pondération ℓ_0 propre sur le même sous-graphe H où H est G auquel on enlève les sommets t_i et t'_i , ainsi que les arêtes uk_j et $k_jk'_j$, qui induit une coloration propre dans H .

On peut supposer que $\beta > 0$, le cas où $\beta = 0$ et $\alpha > 0$ se traite de manière analogue. On étend ℓ_0 en ℓ_1 sur les arêtes ut_i , ut'_i pour $1 \leq i \leq \alpha$ et uk_j pour $1 \leq j < \beta$, avec $\ell_1(ut_i) = 1$, $\ell_1(ut'_i) = 2$, et $\ell_1(uk_j)$ tel que $s_{\sigma}^{\ell_1}(u) \neq 0$. Le Lemme 20 indique qu'on a six choix possibles pour étendre ℓ_1 en ℓ_2 en pondérant l'arête uk_j tels que $s_{\sigma}^{\ell_2}(u) \neq 0$. On veut qu'alors pour ℓ_2 , u ne soit pas en conflit avec ses voisins dans H , qui interdisent donc au plus quatre valeurs pour la valeur de $\ell_2(uk_j)$. On obtient donc ℓ_2 une pondération où la valeur de toutes les arêtes incidentes à u est fixé, donc $s_{\sigma}^{\ell_2}(u)$ est fixé, et en plus u n'est pas en conflit avec ses voisins dans H .

On étend maintenant ℓ_2 en ℓ à G tout entier en appliquant les Lemmes 20 et 21 qui permettent de choisir $\ell(t_i t'_i)$ de manière à ce qu'il n'y ait pas de conflit pour les t_i et t'_i , et de choisir $\ell(k_j k'_j)$ pour qu'il n'y ait pas de conflit pour les k_j et k'_j . On obtient donc une pondération sur G , et par ce qui précède, il n'y a pas de conflit, donc la pondération convient. \square

Configuration 6. Un sommet a de degré 2 adjacent à un sommet b de degré 2. b est adjacent à un sommet c de degré au plus 3.

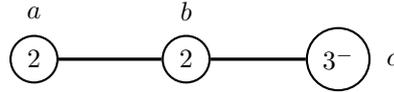


Figure 9: Configuration 6

Preuve. On pose $H = G \setminus \{b\}$. a ne peut pas être adjacent à un sommet de degré 1, sinon G contient la Configuration 1, donc dans H , la composante connexe contenant a n'est pas isomorphe à K_2 . Il en est de même pour c . On dispose donc de ℓ_0 , une 7-pondération propre de H . On va étendre cette pondération à G tout entier.

c possède au plus 2 voisins dans H , qui interdisent au plus quatre valeurs dans le choix de la pondération de $\ell(bc)$. Ainsi, il reste au moins trois choix de la pondération de cette arête, on peut donc étendre ℓ_0 en ℓ_1 en pondérant l'arête bc telle que c ne soit pas en conflit avec ses voisins dans H , et que $s_{\sigma}^{\ell_1}(b) \neq s_{\sigma}^{\ell_1}(a)$ (c'est possible parce que $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) = s_{\sigma}^{\ell_1}(a)$).

On étend alors ℓ_1 en ℓ sur l'entièreté du graphe en pondérant l'arête ab . En effet, d'après le Corollaire 17, au plus une valeur de $\ell(ab)$ crée un conflit entre a et b , au plus deux valeurs créent un conflit entre a et son voisin dans H et au plus deux valeurs créent un conflit entre b et c soit un total d'au plus cinq valeurs interdites pour le choix de la pondération de $\ell(ab)$. Il reste donc en particulier au moins deux choix, et on obtient donc ℓ qui est une pondération propre. \square

Configuration 7. Un sommet b de degré 2 adjacent à deux sommets a et c de degré 3.

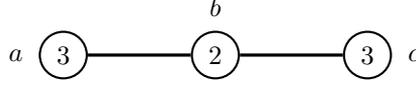


Figure 10: Configuration 7

Preuve. On pose $H = G \setminus \{b\}$. Dans H , a et c sont de degré 2, donc on ne peut pas avoir de composante connexe de H qui soit K_2 . Par minimalité de G comme contre-exemple pour la 7-pondérabilité, on dispose de ℓ_0 , une 7-pondération propre de H . On va étendre la pondération en fonction des polarisations des arêtes ac et bc .

- $\sigma(ab) = \sigma(bc)$: comme dans la Configuration 6, il existe au moins trois choix de pondération pour l'arête ab , tels qu'il n'y ait pas de conflit entre a et ses voisins dans H . On prend ℓ_1 une telle extension de la pondération, choisie telle que $s_{\sigma}^{\ell_1}(b) \neq s_{\sigma}^{\ell_1}(c)$. Comme ici $s_{\sigma}^{\ell_1}(c) = s_{\sigma}^{\ell_0}(c)$, il y a au moins 2 extensions ℓ_1 de pondération qui conviennent pour cette condition.

Comme $\sigma(ab) = \sigma(bc)$, $s_{\sigma}^{\ell_1}(b)$ est de signe constant, donc $s_{|\sigma|}(a)$ n'interdit qu'au plus une valeur pour le choix de $\ell(bc)$. De plus, les voisins de c dans H interdisent jusqu'à quatre choix de pondération pour l'arête $\ell(bc)$, et un choix supplémentaire peut être interdit par le Corollaire 17 afin qu'il n'y ait pas de conflit entre b et c . Il y a donc au plus six valeurs interdites pour $\ell(bc)$. Il existe donc une extension de la pondération à l'entièreté du graphe sans avoir aucun conflit entre les sommets a, b et c . Le fait que a et b soient adjacents ou non ne change rien à l'extension, car on choisit d'abord $\ell(ab)$, ce qui fixe alors $s_{|\sigma|}(a)$, donc quand on regarde les valeurs interdites pour $\ell(bc)$ pour éviter un conflit entre c et a , il n'y a toujours que deux valeurs interdites.

- $\sigma(ab) = 1, \sigma(bc) = -1, ac \notin E$: on nomme a_1, a_2 les voisins dans H de a , et c_1, c_2 les voisins de c dans H . On suppose d'abord que, comme dans le cas précédent, on a une extension ℓ_1 de ℓ_0 en pondérant l'arête ab où $\ell_1(ab)$ est choisi tel que a ne soit pas en conflit avec a_1 ou a_2 , et que $s_{\sigma}^{\ell_1}(b) \neq s_{\sigma}^{\ell_1}(c)$. On étudie le nombre de valeurs interdites pour $\ell(bc)$ pour une extension ℓ de ℓ_1 au graphe tout entier. Pour qu'il n'y ait pas de conflit entre a et b , au plus deux valeurs sont interdites, et entre c et $c_{1,2}$ au plus quatre. De plus, le Corollaire 17 indique qu'au plus une valeur est interdite pour empêcher le conflit entre b et c . Cela fait un total de sept valeurs différentes interdites dans le pire des cas, ce qui ne permet pas d'assurer une valeur pour $\ell(bc)$ de cette manière.

Cependant, on a $|\{s_{\sigma}^{\ell_0}(c) + i, i \in \{-7, \dots, -1\}\}| = 7$. On montre que, pour que c_1 et c_2 interdisent un total de quatre valeurs pour le choix de $\ell(bc)$, on a $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_1), s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_2) \in \{1, 2, 3\}$.

En effet, supposons que $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_1) = k$ où $k \geq 1$. Afin que le conflit entre c_1 et c interdise deux choix pour la pondération de l'arête bc , il faut qu'il existe $i, j \in \{-7, \dots, -1\}$ tel que $s_{\sigma}^{\ell_0}(c) + i = k$ et $s_{\sigma}^{\ell_0}(c) + j = -k$. Donc $i - j = 2k$, où $|i - j| \leq 6$, donc $k \leq 3$. De plus, on a alors $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_1) \neq s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_2)$. Ainsi, si les voisins de c n'interdisent pas 4 choix de pondération pour $\ell(bc)$, alors il reste au moins une pondération $\ell(bc)$ valide. On peut donc supposer être dans cette configuration où c_1 et c_2 interdisent exactement 4 valeurs dans le choix de $\ell(bc)$. Comme on aurait pu intervertir le rôle de a et c pour les extensions, il faut qu'on ait cette même configuration pour les voisins dans H de a .

On montre que dans une telle configuration, $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) < 0$, et $s_{\sigma}^{\ell_0}(c) > 0$. En effet, si $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) \geq 0$, alors pour $1 \leq i \leq k$, $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) + i > 0$, donc comme la somme finale est forcément positive (car $\sigma(ab) = 1$, $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_1)$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_2)$ n'interdisent chacun qu'au plus 1 valeur. De même, si $s_{\sigma}^{\ell_0}(c) \leq 0$, on a pour $1 \leq i \leq 7$ $s_{\sigma}^{\ell_0}(c) - i < 0$, donc c_1 et c_2 interdisent également au plus deux choix de pondération pour l'arête bc . On suppose donc $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) < 0$ et $s_{\sigma}^{\ell_0}(c) > 0$. On discute en fonction des sommes des voisins de a dans H .

Table 2: Construction de ℓ quand $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_1), s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_2) \in \{1, 3\}$, $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) = -4, s_{\sigma}^{\ell_0}(c) = 4$

configuration		pondération		sommes		
$s_{ \sigma }^{\ell_0}(c_1)$	$s_{ \sigma }^{\ell_0}(c_2)$	$\ell(ab)$	$\ell(ab)$	$s_{ \sigma }(a)$	$s_{ \sigma }(b)$	$s_{ \sigma }(c)$
1	3	2	2	2	0	2
1	2	2	1	2	1	3

Afin de s'assurer d'avoir une pondération ℓ sur G qui induise une coloration propre, il suffit de trouver une extension de ℓ_0 aux arêtes ab et bc telle qu'il n'y ait pas de conflit pour les sommets a, b et c avec leurs voisins, car il n'y a pas de conflit interne à H par hypothèse.

- Supposons $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_1), s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_2) \in \{2, 3\}$. La condition que $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_1)$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_2)$ interdisent deux choix de pondération de $\ell(ab)$ implique qu'il existe $i, j \in \{1, \dots, 7\}$, tel que $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) + i = 3$ et $s_{\sigma}^{\ell_0} + j = -3$, donc $i - j = 6$, d'où $i = 7$ et $j = 1$. Ainsi, $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) = -4$. Les valeurs d'arêtes autorisées pour $\ell(ab)$ sont alors 3, 4, 5, afin qu'il n'y ait pas de conflit entre a et a_1 et a_2 . Choisir $\ell(ab) = 4$ donne $s_{|\sigma|}(a) = 0$. On note ℓ_1 l'extension de ℓ_0 à l'arête ab où $\ell_1(ab) = 4$. Si on a $s_{\sigma}^{\ell_1}(b) \neq s_{\sigma}^{\ell_1}(c)$, alors pour le choix de $\ell(bc)$, le conflit entre a et b interdit au plus une valeur, ainsi que quatre pour le conflit entre c et c_1, c_2 , et finalement au plus une valeur d'après le Corollaire 17. Il reste donc au moins une valeur possible pour $\ell(bc)$ et permet d'obtenir une pondération sur les arêtes de G qui induise une coloration propre. Dans le cas contraire, cela signifie que $s_{\sigma}^{\ell_0}(c) = 4$. On peut supposer sans perte de généralité que $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_1) < s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_2)$. On résume alors dans le Tableau 11, en fonction des sommes $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_1)$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_2)$ quelle extension de pondération est choisie, et quelles sommes $s_{|\sigma|}(a), s_{|\sigma|}(b), s_{|\sigma|}(c)$ sont obtenues, et on remarque que la coloration induite est propre.

Figure 11: Construction de ℓ quand $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_1), s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_2) \in \{2, 3\}$, $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) = -4, s_{\sigma}^{\ell_0}(c) = 4$

configuration		pondération		sommes		
$s_{ \sigma }^{\ell_0}(c_1)$	$s_{ \sigma }^{\ell_0}(c_2)$	$\ell(ab)$	$\ell(ab)$	$s_{ \sigma }(a)$	$s_{ \sigma }(b)$	$s_{ \sigma }(c)$
2	3	3	3	1	0	1
1	2	3	1	1	2	3
1	3	3	6	1	3	2

On peut donc maintenant supposer que $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_1)$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_2)$ ne prennent pas les deux sommes 2 et 3. La preuve est symétrique pour c_1 et c_2 .

- Supposons $s_{\sigma}^{\ell_0}(a_1), s_{\sigma}^{\ell_0}(a_2) \in \{1, 3\}$. Pour les mêmes raisons que dans le cas précédent, on peut supposer $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) = -4$. Les valeurs autorisées pour $\ell(ab)$ sont 2, 4 et 6 pour éviter un conflit entre a et a_1, a_2 . Si $s_{\sigma}^{\ell_0}(c) \neq 4$, on obtient la même extension que dans le cas précédent. Sinon, $s_{\sigma}^{\ell_0}(c) = 4$, et on résume également l'extension en fonction de $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_1)$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_2)$ dans le Tableau 2.
- Par symétrie entre a et c , on peut donc maintenant supposer que dans H les voisins de a ou de c ne prennent pas la somme 3. On peut donc supposer que $s_{\sigma}^{\ell_0}(a_1) = 1, s_{\sigma}^{\ell_0}(a_2) = 2, s_{\sigma}^{\ell_0}(c_1) = 1$ et $s_{\sigma}^{\ell_0}(c_2) = 2$. Pour que $s_{\sigma}(a)$ puisse atteindre les valeurs -2 et 2 , il existe $i, j \in \{1, \dots, 7\}$ tels que $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) + i = -2$ et $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) + j = 2$, donc $j - i = 4, i \in \{1, 2, 3\}$, d'où $s_{\sigma}^{\ell_0}(a) \in \{-3, -4, -5\}$.

Comme dans les cas précédents, pour chaque valeur possible de $s_{\sigma}^{\ell_0}(a)$, si $|s_{\sigma}^{\ell_0}(a)| \neq |s_{\sigma}^{\ell_0}(c)|$, choisir $\ell_1(ab) = |s_{\sigma}^{\ell_0}(a)|$ donne $s_{|\sigma|}(a) = 0$, (qui n'est donc pas en conflit avec a_1 ou a_2), et $s_{\sigma}^{\ell_1}(b) \neq s_{\sigma}^{\ell_1}(c)$. Comme dans les configurations précédentes, il existe une extension de ℓ_1 en pondérant l'arête bc telle que la coloration induite soit propre sur

G. On suppose donc que $s_\sigma^{\ell_0}(c) = -s_\sigma^{\ell_0}(a)$. En fonction de $s_\sigma^{\ell_0}(a)$, on construit une pondération qui convient, comme montré dans le Tableau 3.

Table 3: Construction de ℓ quand $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_1) = 1, s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_2) = 2, s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_1) = 1, s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c_2) = 2$

configuration	pondération		sommes		
	$s_\sigma^{\ell_0}(a)$	$\ell(ab)$	$\ell(ac)$	$s_{ \sigma }(a)$	$s_{ \sigma }(b)$
-3	6	6	3	0	3
-4	1	1	3	0	3
-5	1	1	4	0	4

- Supposons $\sigma(ab) = 1, \sigma(bc) = -1, \sigma(ac) = 1$: dans ce cas, a et c n'ont qu'un unique voisin dans H qui ne soit pas a ou c qu'on nomme respectivement a_1 et c_1 . On regarde d'abord la contribution $s = \sigma(ab) \cdot \ell(ab) + \sigma(bc) \cdot \ell(ac)$ à $s_\sigma(a)$. Il y a 13 sommes possibles pour s qui forment un intervalle, dont deux sommes sont interdites à cause du conflit entre a et a_1 . Parmi les sommes restantes, il en existe forcément une paire, et une impaire. Pour que s soit paire, il faut que $\ell(ab)$ et $\ell(ac)$ soient de même parité, indépendamment de la polarité de ces arêtes, sinon ils doivent avoir une parité différente. En notant ℓ_1 l'extension de ℓ_0 aux arêtes ab et ac , on peut donc trouver une telle extension ℓ_1 telle que $s_\sigma^{\ell_1}(b)$ et $s_\sigma^{\ell_1}(c)$ aient une parité différente et que $s_{|\sigma|}^{\ell_1}(a) = |s_\sigma^{\ell_0}(a) + s| \neq s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a_1)$. Alors par le Corollaire 17, les choix de $\ell(bc)$, n'induisent pas de conflit entre b et c . c_1 interdit au plus deux valeurs pour le choix de $\ell(bc)$, et a interdit au plus quatre autres valeurs (la somme finale de a est maintenant fixée pour ℓ_1), il existe donc encore au moins une extension ℓ telle qu'il n'y ait pas de conflit pour les sommets a, b et c , donc qui convienne.

□

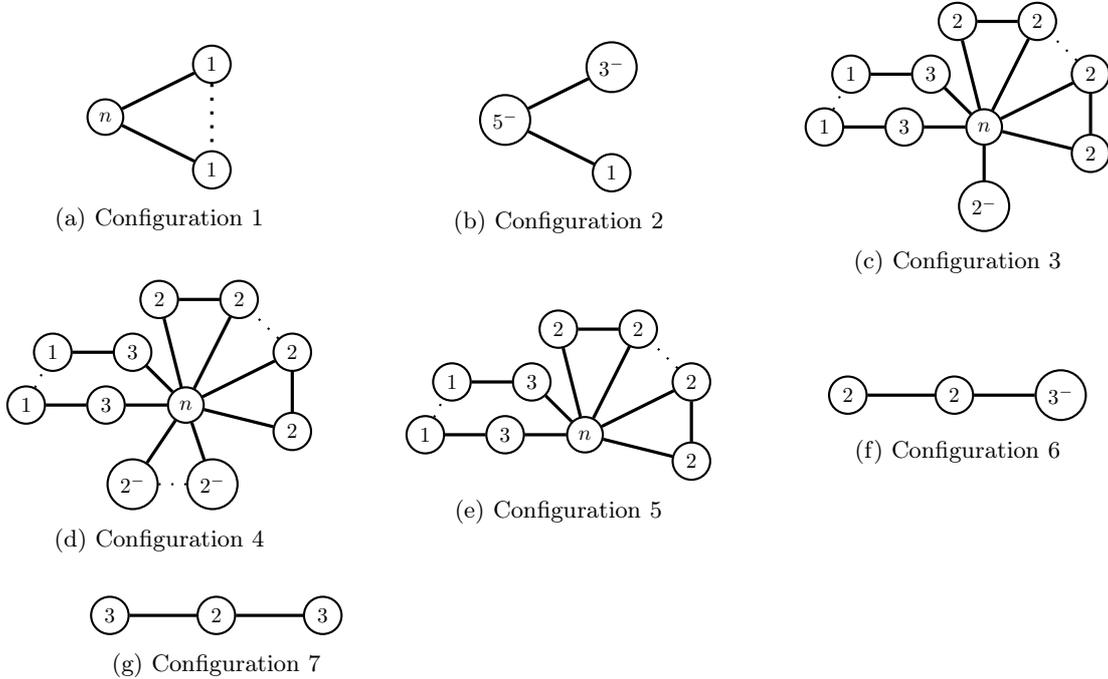


Figure 12: Configurations réductibles

A partir de ces diverses configurations réductibles, on en déduit les lemmes suivants.

Lemme 24. *Soit G un bon graphe signé tel que $\text{mad}(G) < 3$, minimal pour la propriété de 7-pondérabilité. Alors tout sommet de degré 2 est adjacent à un sommet de degré au moins 4.*

Preuve. Soit u un sommet de degré 2. Comme G ne contient pas la Configuration 1, u n'est pas adjacent à un sommet de degré 1. Si u est adjacent à un sommet de degré 2, alors le deuxième voisin de u ne peut pas être de degré au plus 3, sinon G contiendrait la Configuration 6. Si u n'est adjacent qu'à des sommets de degré 3, alors G contient la Configuration 7, ce qui est également exclu. Ainsi u est toujours adjacent à un sommet de degré au moins 4. \square

Lemme 25. *Soit G un bon graphe signé tel que $\text{mad}(G) < 3$, minimal pour la propriété de 7-pondérabilité. Alors tout sommet u de degré 1 est soit adjacent à un sommet de degré au moins 4, soit adjacent à un sommet v de degré 3, où v est adjacent à un sommet de degré au moins 4.*

Preuve. On note v le sommet adjacent de u . Supposons que $d(v) \leq 3$. On ne peut pas avoir $d(v) = 1$, sinon G serait K_2 , ni $d(v) = 2$, sinon G contiendrait la Configuration 1. Ainsi $d(v) = 3$. Alors comme G ne contient pas la Configuration 2, v ne peut pas être adjacent à un sommet de degré au plus 3, donc v est bien adjacent à un sommet de degré au moins 4. \square

Lemme 26. *Soit G un bon graphe signé tel que $\text{mad}(G) < 3$, minimal pour la propriété de 7-pondérabilité. Alors tout sommet u de degré au moins 4 est toujours adjacent à au moins 3 sommets de degré au moins 4 ou de degré 3 fort.*

Preuve. Supposons qu'il existe u tel que u ne soit adjacent qu'à au plus 2 sommets de degré au moins 4 ou de degré 3 fort. Les seuls autres voisins possibles de u sont de degré 1, de degré 2 ne formant pas un triangle adjacent à u , des sommets de degré 2 formant des triangles adjacent à u ou des sommets de degré 3 faibles. Comme u est de degré au moins 4, G contient soit la Configuration 3, soit la Configuration 4 soit la Configuration 4, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité. \square

A.4.3 Degré moyen maximal 3 implique 7-pondérabilité : déchargement

Théorème 27. *Si G un bon graphe signé tel que $\text{mad}(G) < 3$, alors $\chi_{|\Sigma|}(G) \leq 7$.*

La preuve du résultat est une preuve par déchargement. On suppose avoir un contre-exemple minimal G pour la propriété de 7-pondérabilité avec $\text{mad}(G) < 3$. On va affecter à chaque sommet un poids $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$, avec $\omega(v) = d(v) - 3$ pour tout sommet v . Par définition de mad , $\sum_{u \in V} \omega(u) < 0$. On va alors décharger, c'est à dire déplacer les charges entre les différents sommets, tel que les sommets de grand degré donnent de la charge à des sommets de petit degré, tout en conservant la même charge totale, de manière à avoir un poids positif sur une partie significative du graphe, ce qui va conduire à une contradiction.

Théorème 28 (fantômes et déchargement [3]). *Soit G un graphe, $V_1 \cup V_2$ une partition de V . Chaque sommet u dans G a un poids initial $\omega(u) = d(u) - m$. S'il est possible de décharger dans G de sorte à obtenir une fonction de poids ω^* tel que*

- Pour tout u dans V_1 , $\omega^*(u) \geq 0$
- Pour tout u dans V_2 , $\omega^*(u) \geq d(u) - m + d_{V_1}(u)$

Alors $\text{mad}(G) \geq m$

Preuve du Résultat 16. On suppose avoir G un bon graphe signé contre-exemple minimal pour la propriété de 7-pondérabilité parmi les bons graphes signés de $\text{mad}(G) \leq 3$. Pour un sommet u , on pose $\omega(u) = d(u) - 3$. On pose V_1 l'ensemble des sommets de degré au moins 2, et V_2 l'ensemble des sommets de degré exactement égal à 1, donc $V_1 \cup V_2$ forme une partition de V . Pour appliquer le théorème 28, on veut que :

- Pour u dans V_1 , $\omega^*(u) \geq 0$
- Pour u dans V_2 (donc $d(u) = 1$), comme G ne contient pas la Configuration 1, u est adjacent à un sommet de degré au moins 3, donc $d_{V_1}(u) = 1$, on veut donc $\omega^*(u) \geq 1 - 3 + 1 = -1$. ($\omega^*(u) \geq \omega(u) + 1$).

Règles de déchargement

1. Un sommet de degré au moins 4 donne 1 charge à chacun de ses voisins de degré 2 ou moins.
2. Un sommet de degré au moins 4 adjacent à un sommet de degré 3 faible donne une charge aux sommets de degré 1 faible qui lui sont associés.

Bornes sur ω^* Soit u un sommet.

1. $d(u) = 1$: initialement $\omega(u) = -2$, et on veut $\omega^*(u) \geq -1$. u doit donc récupérer au moins 1 charge. D'après le Lemme 25, u est soit faible, soit adjacent à un sommet de degré au moins 4. Ainsi, si u est faible, u reçoit une charge de a par la Règle 2, sinon u reçoit une charge de son voisin par la Règle 1, donc u reçoit bien une charge par la Règle 2 ou la Règle 1, et n'envoie jamais. On a donc bien $\omega^*(u) \geq -1$.
2. $d(u) = 2$: initialement $\omega(u) = -1$, et on veut $\omega^*(u) \geq 0$, donc u doit récupérer au moins 1 charge. D'après le Lemme 24, u est toujours adjacent à un sommet de degré au moins 4. Ainsi par la Règle 1, u reçoit une charge de ce voisin, et u ne cède pas de charge, donc au final $\omega^*(u) \geq 2 - 3 + 1 = 0$.
3. $d(u) = 3$: les règles de déchargement indiquent que u ne donne ni ne reçoit de charge, donc $\omega^*(u) = \omega(u) = 3 - 3 = 0$
4. $d(u) \geq 4$: Quand u est adjacent à un sommet v de degré 3 faible, v n'est adjacent qu'à un seul sommet de degré 1, sinon G contient la Configuration 1. Ainsi pour chaque voisin de u de degré 3 faible, u ne cède qu'une charge par la Règle 2. Par la Règle 1, u donne une charge à chaque sommet adjacent de degré 2 ou moins. D'après le Lemme 26, u est adjacent d'au moins trois sommets de degré au moins 4 ou 3 forts, pour lesquels u ne donne aucune charge ou à un de leurs voisins. Ainsi u cède au plus $d(u) - 3$ charges, d'où $\omega^*(u) \geq d(u) - 3 - (d(u) - 3) = 0$.

On peut donc appliquer le Théorème 28 qui affirme que $\text{mad}(G) \geq 3$. On a une contradiction car avait supposé le contraire. \square

B Relaxation du problème : Choix de polarisation

La question est : est-il possible de trouver une polarisation des arêtes tel que le graphe soit 1-2 pondérable ?

Le résultat est vrai pour les arbres (car 1-2 pondérables avec toutes les arêtes positives).

Proposition 29. *Pour $n = 4k$ ($k \geq 1$), on a $\chi_{|\Sigma|}^+(K_n) \leq 2$.*

Preuve. Je n'indique que les arêtes qui ne sont pas positives ou ne prenant pas la valeur 1. On pose pour $0 \leq j < i \leq k$ $\ell(v_i v_{2k-j}) = 2$ et l'arête $v_i v_{2k-j}$ positive.

De plus, $\ell(v_{k+i} v_{k+j}) = 2$ positive pour $1 \leq i < j \leq k$, et $\ell(v_{k+i} v_{3k+i}) = 2$ positive pour $1 \leq i \leq k$.

Finalement on prend pour $1 \leq i \leq j \leq k$ les arêtes $v_{2k+i} v_{3k+j}$ négatives avec $\ell(v_{2k+i} v_{3k+j}) = 1$. Toutes les autres arêtes sont positives de pondération 1.

Cette polarisation et cette pondération conviennent. En effet :

- les sommets $1 \leq i \leq k$ sont incidents à i arêtes de poids 2, donc $s_{|\sigma|}(v_i) = n - 1 + i$.
- Pour $1 \leq i \leq k$, le sommet v_{i+k} est incident à $k + i$ arêtes positives de poids 2 ($k - 1$ avec les autres sommets v_j où $k + 1 \leq j \leq 2k$, 1 avec v_{3k+i} , et i avec les v_j où $k - i + 1 \leq j \leq k$) donc $s_{|\sigma|}(v_{i+k}) = n - 1 + i + k$
- Pour $1 \leq i \leq k$, le sommet v_{i+2k} est incident à $k - i + 1$ arêtes négatives de valeur 1, donc $s_{|\sigma|}(v_{i+2k}) = n - 1 - 2 \cdot (k - i + 1) (\geq 0)$

- Pour $1 \leq i \leq k$, le sommet v_{i+3k} est incident à i arêtes négatives de valeur 1 et une arête positive de valeur 2. On a donc $s_{|\sigma|}(v_{i+3k}) = n - 1 - 2i + 1$

Toutes ces valeurs sont distinctes, on a une coloration propre. En particulier, les sommes des sommets v_i pour $1 \leq i \leq 2k$ prennent les valeurs n à $n + 2k - 1$. \square

Proposition 30. *Pour $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$), on a $\chi_{|\Sigma|}^+(K_n) \leq 2$.*

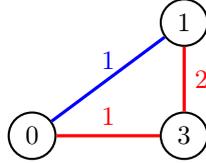
Preuve. On reprend la construction précédente pour les $4k$ premiers sommets. Il suffit alors d'ajouter le sommet v_{4k+1} avec toutes ses arêtes incidentes positives valant 1. On note ℓ_0 la pondération dans K_{4k} et ℓ dans K_n tout entier. On a $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) \geq 4k$ pour $1 \leq i \leq 4k$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) \leq 4k - 2$ pour $2k + 1 \leq i \leq 4k$. Ainsi, on a $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_i) \geq n$ pour $1 \leq i \leq 4k$, $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_i) \leq n - 2$ pour $2k + 1 \leq i \leq 4k$ et $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_{4k+1}) = n - 1$. Donc v_n n'est pas en conflit avec ses voisins, et les autres sommets n'en ont pas entre eux car toutes les sommes étaient positives et augmentées de 1 donc toujours toutes distinctes. \square

Proposition 31. *Pour $n = 4k + 2$ ($k \geq 1$), on a $\chi_{|\Sigma|}^+(K_n) \leq 2$.*

Preuve. On applique la même construction que pour $n = 4k + 1$ et prend les arêtes incidentes à v_{4k+2} toutes positives et valant 2. On note ℓ_0 la pondération sur K_{4k+1} et ℓ la pondération sur K_n tout entier. On a $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) \neq s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_j)$ pour $1 \leq i, j \leq 4k + 1$, ainsi que $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) \geq 0$, donc $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_i) = 2 + s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) \neq 2 + s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_j) = s_{|\sigma|}^{\ell}(v_j)$. Or on a également $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) \leq 4k + 2k < 8k$, donc $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_i) < 8k + 2 = 2(4k + 1) = 2(n - 1) = s_{|\sigma|}^{\ell}(v_n)$, donc la pondération est bien propre. \square

Proposition 32. *Pour $n = 4k + 3$ ($k \geq 1$), on a $\chi_{|\Sigma|}^+(K_n) \leq 2$.*

Preuve. Pour $n = 3$:



Pour $k \geq 1$: On reprend la construction pour $n = 4k + 2$, en notant ℓ_0 la pondération sur K_{4k+2} et ℓ la pondération construite sur K_n . On a $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) \geq n$ pour $1 \leq i \leq 2k$ ou $i \in \{4k + 1, 4k + 2\}$, et $3 \leq s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) < n$ pour $2k + 1 \leq i \leq 4k$. On pose $A = \{1, \dots, 2k\} \cup \{4k + 2\}$ et $B = \{2k + 1, \dots, 4k\} \cup \{4k + 1\}$. On prend alors $\ell(v_i v_n) = 1$ et $\sigma(v_i v_n) = 1$ si $i \in A$, et $\sigma(v_i v_n) = -1$, $\ell(v_i v_n) = 1$ si $i \in B$. On a donc $\ell(v_{4k+3}) = 0$. Toutes les autres sommes valent au moins 2, donc il n'y a pas de conflit entre v_n et les autres sommets. De plus si $v_i, v_j \in A$ avec $i \neq j$, alors $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) \neq s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_j)$, donc $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_i) = s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) + 1 \neq s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_j) + 1 = s_{|\sigma|}^{\ell}(v_j)$. Il en est de même si $v_i, v_j \in B$. Si $v_i \in B$ et $v_j \in A$, alors $s_{|\sigma|}^{\ell}(v_j) \geq n + 1 > n - 1 \geq s_{|\sigma|}^{\ell_0}(v_i) - 1 = s_{|\sigma|}^{\ell}(v_i)$, donc il n'y a pas de conflit entre les autres sommets, donc la pondération est propre. \square

Proposition 33. *Pour $n \geq 3$, on a $\chi_{|\Sigma|}^+(K_n) \geq 2$.*

Preuve. Supposons par l'absurde que $\chi_{|\Sigma|}^+(K_n) = 1$. Pour un sommet u , $s_{|\sigma|}(u) = ||N^+(u)| - |N^-(u)||$. La valeur de la somme est donc uniquement déterminée par le nombre d'arêtes incidentes positives et négatives, sachant que $|N^+(u)| + |N^-(u)| = n - 1$ pour tout sommet $u \in V$. Ainsi, si deux sommets u, v sont tels que $|N^+(u)| = |N^+(v)|$, alors $s_{|\sigma|}(u) = s_{|\sigma|}(v)$, mais u et v sont adjacents parce que le graphe est complet. On en déduit que $f : u \in V \rightarrow [0, n - 1]$ est une fonction injective. C'est impossible par le Lemme des poignées de main. Donc $\chi_{|\Sigma|}^+(K_n) \geq 2$. \square

Théorème 34. *Pour $n \geq 3$, on a $\chi_{|\Sigma|}^+(K_n) = 2$.*

Définition 35 (Odd multi-cactus (définition de [11])). Un graphe étant un odd multi-cactus est défini de la manière suivante : on considère une collection de cycles de longueur 2 modulo 4, où chaque cycle a ses arêtes alternativement colorées rouge et vert. On forme ensuite un graphe connexe simple en collant les cycles ensemble, un par un, de manière arborescente selon des arêtes vertes.

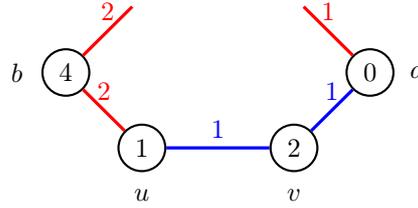
La dernière phrase est à comprendre au sens où on commence par un cycle simple de longueur 2 modulo 4, puis étant donné un graphe construit, on peut coller un cycle de longueur 2 modulo 4 sur une arête verte de la structure, pour former un autre odd multi-cactus.

Théorème 36. *Pour un bon graphe biparti G , on a $\chi_{|\Sigma|}^+(G) \leq 2$.*

Preuve. Si G est 2-pondérable avec toutes les arêtes positives, alors $\sigma = 1$ convient. Dans le cas contraire, d'après [14], G non signé est un "odd multi cactus". On considère le dernier cycle ajouté à la structure, et deux sommets u, v adjacents dans ce cycle qui ne sont pas adjacents aux autres cycles. C'est possible parce que le cycle est de taille au moins 6.

Comme G n'est pas 2-pondérable, les deux parties de la bipartition sont forcément de taille impaire par contraposée de la Proposition 5. Comme u et v sont adjacents, ils sont chacun dans une partie différente de la bipartition, on pose alors $H = G \setminus \{u, v\}$. Il existe une manière de partitionner H en deux stables de tailles paire. D'après la Proposition 5, avec $\sigma = 1$, il existe ℓ_0 une 2-pondération propre sur H , où les sommets dans une partie ont une somme paire, et impaire dans l'autre.

On nomme a l'autre voisin de v et b l'autre voisin de u . Comme a et b sont à distance impaire l'un de l'autre, a et b ne peuvent pas être dans la même partie de la bipartition, donc $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a)$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(b)$ n'ont pas la même parité. Comme a et b sont des feuilles dans H , on peut supposer, à symétrie près, que $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(a) = 1$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(b) = 2$. On polarise et donne des valeurs comme suit :

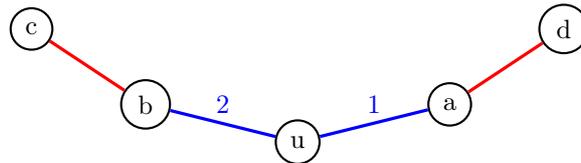


Il n'y a pas de conflits entre les sommets u, v, a et b . Le voisin dans H de a a une somme au moins égale à 1 (car incident uniquement à des arêtes positives), donc a n'a pas de conflit avec ses voisins. De plus, $s_{|\sigma|}(b)$ n'a pas changé de parité, donc par construction de ℓ_0 , b n'est pas en conflit avec son voisin dans H . Comme ℓ_0 est supposée propre sur H , on en déduit que ℓ ainsi étendue donne une pondération propre, pour la polarisation décrite. \square

Proposition 37. *Pour un bon cycle G , on a $\chi_{|\Sigma|}^+(G) \leq 2$.*

Preuve. Le résultat est déjà connu pour $n = 3$ (c'est K_3). On peut supposer que $n \geq 4$. Soit u un sommet quelconque de G . On pose $H = G \setminus \{u\}$. Alors H est un chemin, donc en prenant $\sigma = 1$, on dispose de ℓ_0 une 2-pondération propre de H . On considère alors les différents cas des valeurs des arêtes des bouts du chemins. On nomme a et b les voisins de u , et c le voisin dans H de b , d le voisin dans H de a . On peut potentiellement avoir $c = d$. Comme dans H les arêtes sont prises toutes positives, $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(c) \geq 2$ et $s_{|\sigma|}^{\ell_0}(d) \geq 2$.

On étend σ sur G tout entier en prenant $\sigma(bu) = \sigma(ua) = -1$, et étend ℓ_0 à G en posant $\ell(bu) = 2$ et $\ell(ua) = 1$.



On a alors $s_{|\sigma|}(b), s_{|\sigma|}(a) \leq 1$, et $s_{|\sigma|}(u) = 3$, donc on n'a aucun conflit pour u, b et a et aucun conflit entre les sommets de H , donc la pondération ℓ pour la polarisation σ convient. \square

Remarque. On peut essayer de chercher si certains cycles sont 1-polarisables. Comme dans le cas où on veut savoir si un cycle est 2-pondérable, on peut voir le problème comme des contraintes entre des arêtes. On considère une 1-pondération. Pour trois arêtes e, f, g adjacentes, si $\sigma(e) = \sigma(g)$, alors la pondération n'est pas propre, et si $\sigma(e) \neq \sigma(g)$, alors il n'y a pas de conflit entre le sommet incident à e et f et celui incident à f et g . Donc forcément $\sigma(e) \neq \sigma(g)$. On crée donc un graphe des contraintes où les sommets sont les arêtes du graphe d'origine, avec une arête dans le graphe des contraintes entre deux arêtes e et g dans le graphe initial si et seulement si il existe f une arête du graphe initial tel que e, f, g sont adjacents dans cet ordre.

Le graphe d'origine est alors 1-polarisable si et seulement si le graphe des contraintes est biparti. On en déduit que seuls les cycles de taille $n = 4k$ sont 1-polarisables. On a donc $\chi_{|\Sigma|}^+(C_{4k}) = 1$. On montre par l'occasion l'existence de cycles G tels que $\chi_{|\Sigma|}^+(G) = 2$, et certains sont également bipartis.

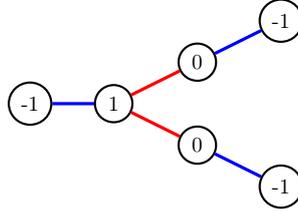
C Relaxation du problème : Absence de valeur absolue

C.1 Recherche de k -pondérations optimales

On étudie une simplification du problème en demandant seulement à ce que s_σ forme une coloration propre des sommets. Tout résultat de la version avec valeur absolue sont transposables dans la version sans valeur absolue. Il existe cependant une différence entre les deux versions.

Proposition 38. *Il existe un bon graphe signé G tel que $\chi_\Sigma(G) = 1$ et $\chi_{|\Sigma|}(G) \geq 2$.*

Preuve. La valeur représentée sur chaque sommet est s_σ . Comme on veut 1-pondérer, on n'a aucun choix à faire.



\square

Proposition 39. *Il existe un bon graphe signé G tel que $\chi_\Sigma(G) = 2$ et $\chi_{|\Sigma|}(G) \geq 3$.*

Les gadget suivants est dans le cas de graphes non signés.

Gadget 1 (Gadget D_k , [2]). *Il existe un gadget D_k , qui a k arêtes sortantes et la propriété suivante : pour toute 2-pondération valide de D_k , les arêtes sortantes sont pondérées avec 1, et leur sommet incident dans D_k a la somme 3.*

Gadget 2 (Gadget I_k , [6]). *Il existe un gadget I_k , avec un sommet de sortie x , tel que pour toute 2-pondération valide de I_k , le sommet de sortie ne peut pas avoir la somme k . Le gadget contribue à 3 pour la somme de x .*

Preuve. On considère un gadget D_{10} polarisé positivement, et un gadget D'_{10} polarisé négativement. De plus, on prend un gadget I_8 pondéré positivement. On prend alors deux sommets u et v , tels que u est incident à 4 arêtes dans D_{10} , et est le sommet de sortie de I_8 , et est adjacent à v , et que v est incident à 8 arêtes de D'_{10} . Les résultats pour les gadgets D_{10} , D'_{10} et I_8 sont valides car au sein du gadget la polarisation est unique donc le comportement est identique au cas non polarisé.

On en déduit que pour toute 2-pondération propre de ce graphe ainsi formé, $s_\sigma(u) \in \{7, 8\}$, et que $s_\sigma(v) \in \{-7, -6\}$. Mais à cause du gadget I_8 , on ne peut pas avoir $\ell(uv) = 2$ pour une

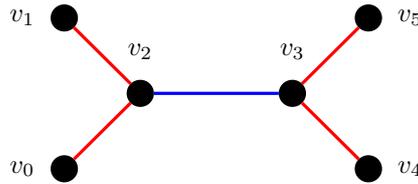
2-pondération propre, sinon $s_\sigma(u) = 8$, ce qui est interdit. On en déduit que $\ell(uv) = 1$, et donc $s_\sigma(u) = 7$ et $s_\sigma(v) = -7$. Une telle pondération convient donc pour s_σ .

Cependant, considérons par l'absurde ℓ une 2-pondération propre pour $s_{|\sigma|}$. Alors ℓ est également une pondération propre pour s_σ , donc $s_\sigma(u) = 7$ et $s_\sigma(v) = -7$, d'où $s_{|\sigma|}(u) = s_{|\sigma|}(v)$, ce qui est exclu. Il n'existe pas de 2-pondération qui induise une coloration propre pour $s_{|\sigma|}$ dans ce graphe. \square

Le problème de la coloration propre en considérant la valeur absolue est donc plus dur que celui sans la valeur absolue.

Proposition 40. *Il existe un bon arbre signé tel que $\chi_\Sigma(G) = 3$.*

Preuve. Le graphe suivant constitue un contre-exemple :



En effet, le fait qu'on considère une 2-pondération propre pour $s_{|\sigma|}$ ou s_σ n'est pas important, car la somme est positive pour tous les sommets lors d'une 2-pondération, et on a vu dans la Proposition 8 qu'il n'existe pas de 2-pondération propre pour cet arbre. \square

On a la 3-pondérabilité pour les graphes bipartis par exemple.

Théorème 41. *Pour tout bon graphe 3-chromatique G , on a $\chi_\Sigma(G) \leq 3$.*

La preuve s'adapte directement du cas non signé, car l'absence de valeur absolue permet de raisonner avec des modulo.

Preuve. On nomme A, B, C les trois parties de la tripartition, de telle manière que $|B| + |C|$ est paire, ce qui est toujours possible. On va construire ℓ tel que pour tous sommets dans A , leur somme est multiple de 3, congrue à 1 modulo 3 dans B et congrue à 2 modulo 3 dans C . On commence par poser $\ell(e) = 3$ pour toute arête de G , et alors $s_\sigma(u) \pmod 3 = 0$.

Supposons avoir $u \in B, v \in B \cup C$, avec $s_\sigma(u), s_\sigma(v) \pmod 3 = 0$. On considère un chemin de u à v , en changeant la valeur des arêtes successivement de telle manière que la contribution aux sommes des sommets incidents change de $+1$ modulo 3 et -1 modulo 3. Comme G n'est pas biparti, il existe un chemin de taille paire ou impaire de u à v , et ainsi en choisissant la parité du chemin, on modifie de telle manière que les sommets différents de u et v ont une somme qui ne change pas de reste modulo 3, et que le reste modulo 3 de $s_\sigma(u)$ et $s_\sigma(v)$ corresponde au reste final voulu. Si $u \in C$, on fait de même en commençant par modifier la contribution de -1 modulo 3.

De cette manière, on réduit de deux à chaque itération le nombre de sommets de B et C qui n'avaient pas une somme ayant un bon reste modulo 3, et obtient à la fin une 3-pondération propre. \square

Théorème 42. *Pour tout bon graphe signé G , on a $\chi_\Sigma(G) \leq 5$.*

Preuve. On peut réutiliser l'algorithme de Kalkowski [8] avec 5 valeurs différentes. En effet, la justification de la construction de $W(v_i)$ est la même, parce qu'il n'est que intéressant de savoir que les arêtes incidentes à des sommets déjà traités peuvent prendre deux valeurs différentes écartées de 2, qu'elles augmentent ou diminuent la somme du sommet en cours de traitement n'a pas d'importance. On a donc exactement le même argument combinatoire pour trouver une bonne définition de $W(v_i)$. (Les $w(v_i)$ peuvent être pris dans \mathbb{Z} .)

De même, pour trouver une pondération qui convienne pour le dernier sommet, il n'y a rien à adapter. On considère a la valeur de $s_\sigma(v_n)$ quand les arêtes ont toutes leur contribution la plus faible, qui correspond également au cas où pour v_i voisin de v_n , $s_\sigma(v_i) = w(v_i)$. Bouger la valeur

d'une arête afin que $s_\sigma(v_i) = w(v_i) + 2$ conduit également à augmenter de deux $s_\sigma(v_n)$, car on ne considère pas la valeur absolue. On étudie les différentes situations.

- $a \bmod 4 \in \{2, 3\}$. La pondération est alors propre.
- Si $s_\sigma(v_i) = a$ pour tout voisin v_i de v_n , alors en utilisant le fait que $d(v_n) \geq 2$, utiliser deux voisins donne une pondération valide.
- Il existe un voisin différent. Utiliser le voisin différent donne alors une pondération propre.

□

C.2 Choix de la polarisation

On essaie ici d'avoir des résultats intéressants ne nécessitant pas l'utilisation de l'utilisation de la solution à la 1, 2, 3-conjecture dans [10] dans le cas non signé.

Proposition 43. *Pour tout bon graphe signé G , on a $\chi_\Sigma^+(G) \leq 4$. En particulier, il existe une polarisation, telle que G admet une pondération propre de telle manière que les arêtes négatives sont pondérées avec exactement 1 et les arêtes positives dans $\{1, 2, 3, 4\}$*

Preuve. Le fait de pouvoir choisir la polarité revient à dire qu'on peut pondérer les arêtes avec les valeurs $-1, 1, 2, 3, 4$.

On va pouvoir appliquer l'algorithme de Kalkowski [8]. On initialise les arêtes à la valeur 1. On construit de la même manière les $W(v_i)$, à la seule différence que si on veut altérer la valeur de $\ell(v_k v_j)$, on peut lui donner la valeur 2 ou la valeur 4, ce qui correspond à une augmentation de 1 ou 3. Les sommes obtenues en bougeant les valeurs des arêtes autorisées forme alors les valeurs d'entiers $[a, a + 2d + 1] \cup a + 2d + 3$. Comme dans le cas non signé, on veut que le choix de $\ell(v_k v_j)$ permette par la suite de changer la valeur de l'arête tout en restant dans $W(v_k)$, ce qui oblige à choisir une somme obtainable pour les deux possibilités de $\ell(v_k v_j)$ si on doit altérer la valeur. On remarque qu'alors seule la somme $a + 1$ et $a + 2d + 3$ entraîne un tel empêchement, ce qui laisse encore $2d + 1$ sommes possibles, dont $2d$ sont interdites afin de garantir que $W(v_k)$ est disjoint des $W(v_i)$ des voisins déjà traités.

Pour le dernier sommet on a exactement la même preuve que pour la 5-pondérabilité, parce que le comportement est exactement le même. □

Proposition 44. *Pour tout bon graphe G , il existe ℓ , une pondération propre pour s_σ telle que $\ell(e) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ pour tout $e \in E$.*

Preuve. On peut exactement appliquer l'algorithme de Kalkowski [8]. On commence avec toutes les arêtes valant 0. La justification qu'il y a assez de sommes possibles pour construire $W(v_k)$ est la même, en autorisant $w(v_k)$ à prendre des valeurs dans \mathbb{Z} . La preuve est également identique pour le dernier sommet. □

Théorème 45. *Savoir si un graphe signé est 1-polarisable pour s_σ est NP-complet.*

On commence par présenter divers gadgets dans l'optique d'une preuve par réduction depuis un problème connu comme étant NP-complet. Pour chaque gadget, on va considérer que les sommets étiquetés par x, y et z sont des sommets de sortie, qui seront adjacents à d'autres parties du graphe et n'ont donc pas besoin de respecter d'avoir une somme distincte de celles de leurs voisins. Cependant, les sommets des gadgets qui ne sont pas ces sommets, considérés comme des sommets internes auront les mêmes voisins dans le graphe final donc doivent avoir une somme distincte quand ils sont adjacents.

Définition 46. Pour un gadget, on dit qu'un sommet est de sortie, si dans le graphe final il sera adjacent à d'autres sommets dans le graphe final. Les autres sommets du gadget sont nommés sommet interne.

On dit dans un gadget qu'une arête est sortante, si elle est incidente à un sommet interne et à un sommet de sortie.

On dit qu'une signature σ des arêtes d'un gadget est valide si la somme qu'elle induit sur les sommets en considérant une 1-pondération donne une coloration propre sur les sommets internes du gadget.

Fait. Si σ est une polarisation induisant une 1-pondération propre, alors pour tout sommet $u \in V$, $s_\sigma(u)$ a la même parité que $d(u)$.

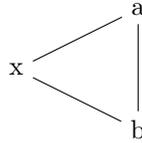


Figure 13: gadget triangle

Gadget 3 (Gadget triangle). *Un sommet de sortie x adjacent à deux sommets internes a et b eux-mêmes adjacents entre eux.*

Pour toute polarisation valide σ , $s_\sigma(a) = 0$ ou $s_\sigma(b) = 0$ et la somme de l'autre sommet interne vaut ± 2 . De plus le gadget est neutre en contribution pour x .

Preuve. Pour une signature σ quelconque, si $\sigma(ax) = \sigma(bx)$, alors $s_\sigma(a) = \sigma(ab) + \sigma(ax) = \sigma(ab) + \sigma(bx) = s_\sigma(b)$, donc pour toute signature valide du gadget, on a $\sigma(ax) \neq \sigma(bx)$. En particulier, le triangle est neutre en contribution pour x . De plus, quelle que soit $\sigma(ab)$, a ou b est incident à une arête de chaque polarité, et la somme de ce sommet vaut donc 0. La somme de l'autre sommet interne vaut $+2$ ou -2 en fonction de la polarité de ab . \square

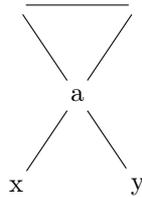


Figure 14: gadget ligne

Gadget 4 (Gadget ligne). *Les sommets x et y sont des sommets de sortie.*

Pour toute polarisation σ valide, $\sigma(ax) = \sigma(ay)$, et le gadget ligne contribue à $\sigma(ax)$ pour x et y .

Preuve. Soit σ une polarisation valide du gadget ligne. Grâce au gadget triangle dont a est le sommet de sortie, 0 est une somme interdite pour $s_\sigma(a)$. Supposons par l'absurde que $\sigma(ax) \neq \sigma(ay)$. Comme le gadget triangle est neutre pour $s_\sigma(a)$, on a $s_\sigma(a) = \sigma(ax) + \sigma(ay) + 0 = 0$, ce qui est exclu. Donc $\sigma(ax) = \sigma(ay)$. \square

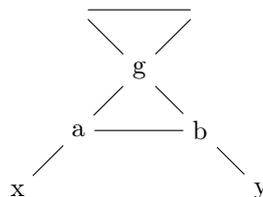


Figure 15: Gadget Sablier

Gadget 5 (Gadget Sablier). *Les sommets de sortie sont x et y .*

Pour toute polarisation σ valide, $\sigma(ax) \neq \sigma(by)$, et $s_\sigma(a), s_\sigma(b)$ sont impaires.

Preuve. Soit σ une polarisation valide du gadget sablier. On reconnaît un gadget ligne centré en g , donc $\sigma(ga) = \sigma(gb)$. Supposons par l'absurde que $\sigma(ax) = \sigma(by)$, alors $s_\sigma(a) = \sigma(ag) + \sigma(ax) + \sigma(ab) = \sigma(gb) + \sigma(by) + \sigma(ab) = s_\sigma(b)$, ce qui est exclu. D'où $\sigma(ax) \neq \sigma(by)$. De plus, comme $d(a)$ et $d(b)$ sont impairs, $s_\sigma(a)$ et $s_\sigma(b)$ sont impaires. \square

Remarque. Supposons qu'on ait a, b, c, d des sommets, tels qu'on veuille que $\sigma(ab) \neq \sigma(cd)$, et que b et c seront des feuilles dans le graphe final. En ajoutant une arête bc , par des justifications analogues, on montre également que $\sigma(ab) \neq \sigma(cd)$. Cependant, dans ce cas, on aura forcément $s_\sigma(b) = \sigma(ab) \cdot 2$, ou $s_\sigma(c) = \sigma(cd) \cdot 2$, ce qui serait un problème pour le gadget T présenté après. Cependant, le gadget Sablier assure que $\sigma(ax) \neq \sigma(ay)$, et on peut remarquer que $s_\sigma(a)$ et $s_\sigma(b)$ sont impairs, ce qui sera utile pour la suite.

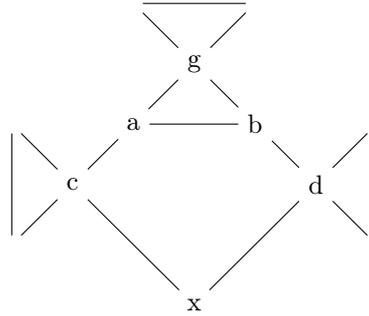


Figure 16: Gadget T

Gadget 6 (Gadget T). *L'unique sommet de sortie est x .*

Pour toute polarisation σ valide du gadget T, $\{s_\sigma(c), s_\sigma(d)\} = \{-2, +2\}$ et la contribution du gadget T à $s_\sigma(x)$ est nulle.

Preuve. Soit σ une polarisation valide du gadget T. Le gadget Sablier assure que $\sigma(ac) \neq \sigma(bd)$. Grâce aux gadgets Ligne centrés en c et d , on obtient que $\sigma(ac) = \sigma(cx)$ et $\sigma(bd) = \sigma(dx)$. Donc $\sigma(cx) \neq \sigma(dx)$, donc la contribution à $s_\sigma(x)$ du gadget T est bien nulle. On a de plus $s_\sigma(c) = 2 \cdot \sigma(ac) = -2 \cdot \sigma(bd) = -s_\sigma(d)$. D'où $\{s_\sigma(c), s_\sigma(d)\} = \{-2, +2\}$. \square

Remarque. Si on trouve une polarisation valide, alors prendre la polarisation inverse sera également valide. Comme on veut cependant utiliser les gadgets pour empêcher des sommes en certains sommets pour forcer un certain nombre d'arêtes incidentes d'une polarité donnée, on est obligé de trouver des gadgets qui bloquent une valeur et son opposé, ou de construire des gadgets qui ont un lien direct entre la somme interdite et la polarité du graphe choisie.

Les gadgets présentés jusque-là sont bien 1-polarisables. Voici une polarisation possible pour chacun :

Gadget 7 (Gadget V). *Les sommets de sortie sont x, y, z .*

Pour toute polarisation σ valide du gadget V, on a $\sigma(va) = \sigma(vx) = \sigma(vy) = \sigma(vz)$, et il existe une polarisation valide pour chaque choix de polarisation. De plus, $s_\sigma(v) = 4 \cdot \sigma(vx)$.

Preuve. Soit σ une polarisation valide du gadget V. Grâce aux gadgets T et triangle, on sait que $s_\sigma(v) \notin \{-2, 0, 2\}$ et que leur contribution est nulle, donc que $s_\sigma(v) = \sigma(va) + \sigma(vx) + \sigma(vy) + \sigma(vz)$. On remarque qu'alors forcément $s_\sigma(v)$ est pair et que $|s_\sigma(v)| \leq 4$, donc $|s_\sigma(v)| = 4$. On en déduit que $\sigma(va) = \sigma(vx) = \sigma(vy) = \sigma(vz)$, et que $s_\sigma(v) = 4 \cdot \sigma(vx)$.

Il existe une telle polarisation, où par exemple ici les 4 arêtes incidentes sont positives, mais en inversant la polarité de toutes les arêtes on obtient également une polarisation valide avec les arêtes incidentes à x, y et z négatives. \square

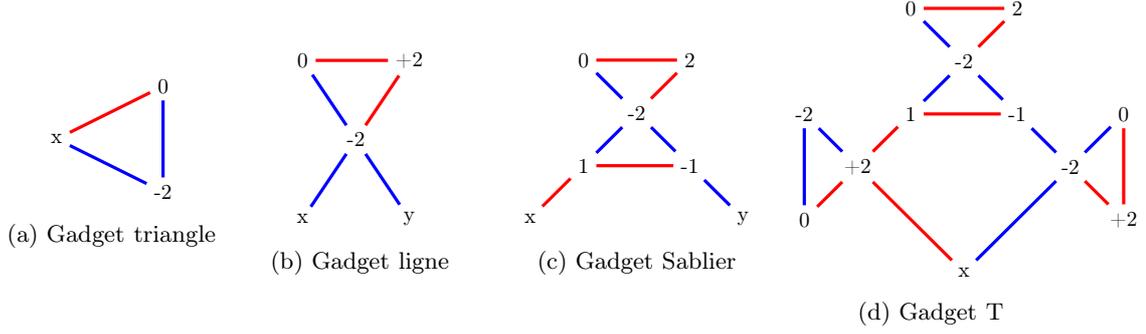


Figure 17: Polarisation des gadgets

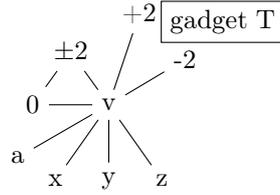


Figure 18: Gadget V

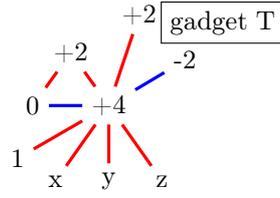


Figure 19: Polarisation valide du gadget V

Gadget 8 (Gadget S_k). Les sommets de sortie sont x_i, y_i pour $1 \leq i \leq k$. Pour toute polarisation σ valide du gadget S_k , on a $\sigma(a_i x_i) = \sigma(a_i y_i) = \sigma(a_1 x_1)$ pour tout $1 \leq i \leq k$. De plus, il existe une polarisation valide pour les deux choix, $s_\sigma(a_i) = \sigma(a_1 x_1) \cdot 4$, et le gadget contribue $\sigma(a_1 x_1)$ pour $s_\sigma(x_i)$ et $s_\sigma(y_i)$ pour $1 \leq i \leq k$.

Preuve. Soit σ une polarisation valide du gadget.

Pour $1 \leq i \leq k-1$, on a $\sigma(a_i t_i) = \sigma(w_i a_{i+1})$. En effet, $\sigma(a_i t_i) \neq \sigma(u_i v_i)$, sinon $s_\sigma(t_i) = s_\sigma(v_i)$. De même, on a $\sigma(w_i a_{i+1}) \neq \sigma(u_i v_i)$, donc $\sigma(a_i t_i) = \sigma(w_i a_{i+1})$.

D'après le gadget V, on sait qu'alors $\sigma(a_1 t_1) = \sigma(a a_1) = \sigma(x_1 a_1) = \sigma(y_1 a_1)$. puis en reconnaissant le gadget V en a_2 , $\sigma(a_2 x_2) = \sigma(a_2 y_2) = \sigma(w_1 a_2)$. Or $\sigma(w_1 a_2) = \sigma(a_1 t_1) = \sigma(a_1 x_1)$, donc le résultat est vrai pour $1 \leq i \leq 2$. Par récurrence on obtient que toutes les arêtes incidentes aux sommets sortant sont de même polarité.

Il existe une telle polarisation valide. En effet, comme le gadget V admet une polarisation valide, on peut polariser de manière valide toutes les arêtes sauf les arêtes $t_i u_i$, $u_i v_i$ et $v_i w_i$ pour $1 \leq i \leq k$, de sorte à respecter la condition décrite précédemment. On a donc $s_\sigma(a_i) = 4 \cdot \sigma(a_1 x_1)$, et les sommets internes aux gadgets V ont des sommes distinctes. On pose $\sigma(t_i u_i) = 1$, $\sigma(v_i w_i) = -1$ et $\sigma(u_i v_i) = -\sigma(a_1 x_1)$ pour $1 \leq i \leq k$. Pour $1 \leq i \leq k$, on a donc $s_\sigma(t_i) = 1 + \sigma(a_1 x_1)$, $s_\sigma(u_i) = 1 - \sigma(a_1 x_1)$, $s_\sigma(v_i) = -1 - \sigma(a_1 x_1)$ et $s_\sigma(w_i) = -1 + \sigma(a_1 x_1)$, donc $s_\sigma(t_i) \neq s_\sigma(u_i)$, $s_\sigma(u_i) \neq s_\sigma(v_i)$ et $s_\sigma(v_i) \neq s_\sigma(w_i)$. De plus, $|s_\sigma(t_i)|, |s_\sigma(w_i)| \leq 2$, donc $s_\sigma(a_i) \neq s_\sigma(t_i)$ et $s_\sigma(a_{i+1}) \neq s_\sigma(w_i)$ (quand $i < k$). La pondération est donc propre, avec le choix de $\sigma(a_1 x_1)$ qui est libre. \square

En combinant deux gadgets S_k nommés A et B tels que dans A, a est l'extrémité d'une arête

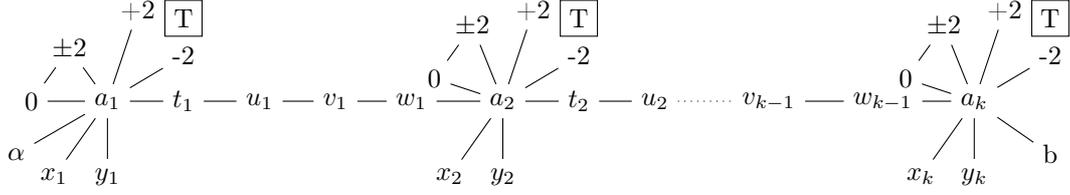


Figure 20: Gadget S_k

d'un gadget Sablier, et que dans B , b est l'extrémité de l'autre arête du même gadget Sablier, on obtient que l'arête a_1a dans A a une polarité différente de a_kb dans B , pour toute polarisation valide de cet ensemble. On peut ainsi construire un grand gadget qui donne $2k$ arêtes sortantes de chaque polarisation.

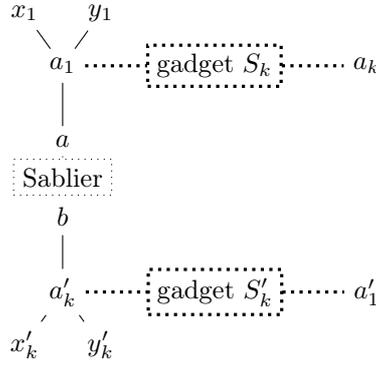


Figure 21: Gadget U_k

Gadget 9 (Gadget U_k). *Pour toute polarisation σ valide du gadget U_k , il existe $2k$ arêtes sortantes positives, et $2k$ arêtes sortantes négatives, et toute arête e sortante est incidente à un sommet de somme $\sigma(e) \cdot 4$. On note E_1 l'ensemble des arêtes sortantes d'une polarité, et E_2 les arêtes sortantes de l'autre polarité.*

Preuve. D'après le gadget Sablier, $\sigma(a_1a) \neq \sigma(a'_kb)$. D'après les résultats sur le gadget S_k , les $2k$ arêtes sortantes de S_k ont même polarité que a_1a , et les $2k$ arêtes sortantes de S'_k même polarité que ba'_k . On obtient donc E_1 l'ensemble des arêtes sortantes de S_k et E_2 l'ensemble des arêtes sortantes de S'_k , où $|E_1| = |E_2| = 2k$, et les arêtes dans E_1 sont toutes de polarité différente à celles de E_2 . De plus les arêtes sortantes positives sont incidentes à un sommet de somme 4, et les négatives à un sommet de somme -4 . \square

Remarque. Avec le gadget U_k , en prenant une arête de chaque polarité incidente à un même sommet u , on obtient un gadget qui interdit la somme 4 et -4 pour $s_\sigma(u)$. On peut alors utiliser un gadget V dérivé où le sommet v est également incident à un tel gadget, avec 6 arêtes sortantes. On interdit de cette manière les sommes $-4, -2, 0, 2, 4$, et les seules qui restent sont telles que les six arêtes sortantes sont de même polarité.

En utilisant alors un gadget U_k où les parties de chaque gadget ne sont pas des gadgets V mais ceux présentés juste au-dessus, on obtient $2k$ arêtes positives et $2k$ arêtes négatives incidentes à un sommet de somme six en valeur absolue. De la même manière que précédemment, on construit alors un gadget interdisant les sommes $+6$ et -6 . En répétant ce processus, on peut alors construire un gadget $2k$ et $-2k$ interdisant pour tout $k \geq 0$.

Gadget 10 (Gadget C). *Les sommets de sortie sont x, y, z . On considère le gadget C où a_1c, a_2c sont deux arêtes de l'ensemble E_1 d'un gadget U_k , et $a'_1c \in E_2$, et a_1, a_2, a'_1 sont distincts.*

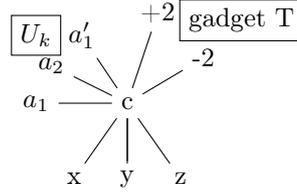


Figure 22: Gadget C

Pour toute polarisation σ valide du gadget C, exactement une des arêtes cx, cy, cz a la même polarité que a_1c , et les deux autres ont la polarité de $a_1'c$. De plus $s_\sigma(c) = 0$.

Preuve. On se donne une polarisation σ valide du gadget C. On étudie les différentes configurations de polarisation des arêtes sortantes possibles.

- $\sigma(cx) = \sigma(cy) = \sigma(cz) = \sigma(a_1c)$: on a $s_\sigma(c) = 4$ ou $s_\sigma(c) = -4$, mais d'après le gadget U_k , $s_\sigma(a_1) = -s_\sigma(a_1')$, et $|s_\sigma(a_1)| = 4$. Les sommes $+4$ et -4 sont donc interdites en c , cette situation est exclue.
- $\sigma(cx) = \sigma(cy) = \sigma(cz) = \sigma(a_1'c)$: alors $|s_\sigma(c)| = 2$, ce qui est exclu par le gadget T.
- Deux arêtes sortantes ont la même polarité que a_1c . On a aussi $|s_\sigma(c)| = 2$, ce qui est exclu.
- Deux arêtes sortantes ont la même polarité que $a_1'c$. On a alors $s_\sigma(c) = 0$, ce qui est une somme autorisée.

Comme tous les gadgets présentés jusqu'à maintenant admettent des polarisations valides, on en déduit que le gadget C également. De plus, comme le choix de x, y et z est arbitraire, on obtient de n'importe quelle arête qu'il existe une polarisation valide telle que sa polarisation soit la même que a_1c . \square

POSITIVE CUBIC 1 IN 3 3-SAT

Instance. Un ensemble V de variables, une collection C de clauses sur V telle que chaque clause $c \in C$ contient exactement 3 variables distinctes, chaque variable apparaissant dans exactement 3 clauses, avec aucune négation.

Question. Est-ce qu'il existe une distribution de vérité aux variables de V telle que chaque clause dans C a exactement une variable vraie ?

Ce problème est NP-complet [12].

Preuve du Résultat 45. Le problème est dans NP, en prenant comme témoin une polarisation. Ce témoin est de taille polynomiale en l'entrée, et la vérification que la polarisation induit une coloration propre se fait en temps linéaire.

On prouve le résultat de NP-complétude en montrant qu'il est NP-difficile, en faisant une réduction du problème POSITIVE CUBIC 1 IN 3 3-SAT vers le problème de la 1-polarisabilité. Plus précisément, pour une instance F du problème de satisfiabilité, on montre qu'il existe un graphe $G(F)$ tel que $G(F)$ est 1-polarisable si et seulement s'il existe une distribution de vérité pour l'instance F répondant à la question.

Le graphe $G(F)$. Soit F une instance du problème POSITIVE CUBIC 1 IN 3 3-SAT, on nomme C_1, \dots, C_k les clauses, et V_1, \dots, V_l les variables. On construit $G(F)$ avec un sommet pour chaque clause et chaque variable. Les sommets représentant les clauses sont numérotés c_1, \dots, c_k , et les sommets représentant des variables v_1, \dots, v_l . Pour $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$, il y a une arête entre c_i et v_j si et seulement si la variable V_j apparaît dans la clause C_i . On sait qu'alors les arêtes entre ces sommets forment un graphe simple, et que chaque v_i et chaque c_j est adjacent à exactement 3 autres sommets. Pour chaque sommet v_i , on ajoute un gadget V centré en v_i , où les sommets de sortie sont les c_j tel que V_i est dans la clause C_j . On prend également un gadget U_{2k} , et pour les sommets c_i , on ajoute un gadget C centré en c_i tel que les sommets de sortie sont les v_j où les

V_j sont les variables de la clause C_i , et que les deux arêtes a_1c_i , a_2c_i sont dans E_1 dans U_{2k} , et que $a'_1c_i \in E_2$. Le graphe ainsi construit est de taille polynomial en la taille de l'instance, on veut donc montrer que $G(F)$ est 1-polarisable si et seulement s'il existe une distribution de vérité valide pour F . On raisonne par double implication.

Si le graphe est 1-polarisable, on veut trouver une telle distribution de vérité. On considère donc σ une polarisation qui induit une 1-pondération propre. On utilise pour cela les résultats sur les gadgets V et C. Pour v_i un sommet représentant une variable, on sait à cause du gadget V que les trois arêtes vers des sommets représentant des clauses sont de même polarité. On pose donc que V_i est vrai si et seulement si les trois arêtes incidentes aux sommets de sortie de v_i ont la même polarité que les arêtes de E_1 dans U_k . Une telle distribution convient. En effet, pour tout c_j un sommet de clause, on sait qu'il y a exactement une arête sortante qui est de la même polarité que les arêtes de E_1 , et les deux autres de la polarité de E_2 , donc exactement une des 3 variables de C_j est vraie.

Si l'instance est satisfiable, selon les conditions énoncées, on considère une distribution de vérité telle que l'évaluation de la formule soit vraie. Pour chaque variable V_i , si V_i est vraie, on pose les arêtes de sortie de v_i positives, et négatives sinon. Il faut donc encore polariser les arêtes internes aux gadgets. Pour un sommet v_i , on a montré précédemment que le gadget V est polarisable si les arêtes de sortie sont positives ou négatives. De plus, pour un sommet c_j , par construction, exactement une arête de sortie est positive et les deux autres sont négatives, et on polarise alors U_k tel que les arêtes dans E_1 sont positives, et négatives dans E_2 . On peut alors polariser le reste des gadgets C. De plus, il n'y a pas de conflit entre un sommet de variable et un sommet de clause, car pour le somme de variable, on a $|s_\sigma(v_i)| = 4$ et pour l'autre $s_\sigma(c_j) = 0$. Cette polarisation induit donc une coloration propre, donc le graphe est bien 1-polarisable. □