

Locally irregular decompositions in digraphs

Thomas Filasto

5 juin 2023 - 21 juillet 2023

Table des matières

1	Sujet	1
2	Résumé	2
3	État de l’art	3
4	Contribution technique	4
4.1	Décomposition de digraphes pour la troisième variante	4
4.2	Meilleure orientation pour la décomposition en digraphes localement irréguliers	6
4.3	Quatrième variante	8
4.4	Complexité	9
5	Méta-informations	9
6	Bibliographie	9
ANNEXE		0
1	Première variante	1
1.1	Exceptions	1
1.2	Nombre minimal de graphe dans la décomposition	2
1.3	Orientation des graphes non orientés	4

1 Sujet

Abstract.

The 1-2-3 Conjecture, raised by Karoński, Łuczak, and Thomason in 2004 [KLT04], asks whether for most undirected graphs we can assign labels 1,2,3 to the edges so that no two adjacent vertices have the same sums of incident labels. While the 1-2-3 Conjecture remains open in general, quite a few of its aspects have been investigated to date, see [Sea12]. In particular, Baudon et al. introduced a decompositional approach to the conjecture in [BBPW15], which is based on so-called locally irregular graphs. A locally irregular graph is a graph in which no two adjacent vertices have the same degree. Now, for a graph, one can define a locally irregular decomposition as an edge-colouring where each colour class yields a locally irregular graph. These notions indeed showed to relate to the 1-2-3 Conjecture in a few ways. For instance, locally irregular graphs are precisely those graphs that are the easiest for the conjecture, as, in such graphs, it suffices to assign label 1 to all edges. There also exist deeper connections : in particular, assigning 1 and 2 only to the edges of a regular graph is possible if and only if that graph admits a locally irregular decomposition into two locally irregular graphs. The leading conjecture here, states that most graphs should decompose into at most three locally irregular graphs. In the recent years, there have also been a few works dedicated to generalising the 1-2-3 Conjecture to digraphs. There are actually quite some possible ways of doing this, since, upon assigning labels to the arcs of a digraph, there are multiple ways to compute incident sums for the vertices. For instance, in the very first work on the topic [BGP12], the authors consider the relative sums incident to the vertices (difference of the "outgoing sum" and of the "incoming sum"). In [BBPW17,BBS15,HPW18,BL20], different series of authors considered a few other variants involving single sum parameters, and considered that two adjacent vertices are distinguished by a labelling if some of their respective incident sums (either the "outgoing sum" or the "incoming sum") are different (which yields to four distinction conditions). A surprising fact is that, although quite close to the original 1-2-3 Conjecture in spirit, the resulting variants actually showed up to be quite easier to handle, as the direct analogue of the 1-2-3 Conjecture was proved for all of these directed variants.

Objectives of the internship.

The main goal of this internship will be to investigate possible generalisations of locally irregular decompositions in digraphs, with respect to the aforementioned generalisations of the 1-2-3 Conjecture to digraphs. To our knowledge, this has only been investigated in [D1,BBPW18], with respect to the directed variant of the 1-2-3 Conjecture from [BBS15]. In brief, in those works, the authors define a locally irregular digraph as a digraph in which no two

adjacent vertices have the same outdegree. A decomposition of a digraph into locally irregular digraphs is then an arc-colouring in which every colour class yields a locally irregular digraph. The authors conjectured that, with respect to those definitions, every digraph should decompose into at most three locally irregular digraphs (which would be reminiscent of the corresponding conjecture in undirected graphs). To date, it is mostly known that all digraphs decompose into at most five locally irregular digraphs, and that deciding whether a digraph decomposes into two locally irregular digraphs is NP-complete. The internship will focus on the following goals :

- 1 We will first focus on the conjecture from [D1] (stating that digraphs decompose into at most three locally irregular digraphs), and progress towards it. An ultimate goal would be to prove that all digraphs decompose into at most four locally irregular digraphs. This could be attained by first investigating restricted classes of digraphs, such as tournaments and sparse digraphs (with bounded maximum degree, bounded degeneracy, or bounded maximum average degree). In some contexts, we could even investigate sufficient conditions for a digraph to be decomposable into at most three locally irregular digraphs.
- 2 The same questions and problems will also be considered for each of the variations of the 1-2-3 Conjecture from [BGP12,BBPW17,HPW18]. Namely, for each of these variations, we will wonder about the corresponding decomposition notions in digraphs, and investigate several aspects. In particular, we will wonder about upper bounds and complexity aspects.
- 3 A side goal could be to also wonder about the same concerns in signed graphs. Again, by a labelling of a signed graph, there are multiple ways to compute the resulting sums for the vertices, and thus to consider that any two adjacent vertices are distinguished. In turn, this could lead to several ways of defining locally irregular decompositions of signed graphs. And this would, again, lead to several questions of different natures (combinatorial, algorithmic, algebraic, etc.).

2 Résumé

Un graphe non orienté G est dit *localement irrégulier* lorsqu'il ne possède pas deux sommets adjacents de même degré. Ces graphes interviennent dans l'étude du problème suivant : étant donné un graphe non-orienté G , quel est le plus petit entier k tel qu'il existe une pondération des arêtes de G , $l : E(G) \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$, telle que pour tous sommets u et v adjacents dans G , la somme des poids des arêtes incidentes à u est différente de la somme des poids des arêtes incidentes à v ? En effet, on conjecture que pour tout graphe, cet entier est inférieur ou égal à 3, c'est la *1-2-3 Conjecture*.

En effet, étant donné un graphe non orienté G , décider si 3 convient comme valeur de k est équivalent décider s'il existe un multigraphe G' localement irrégulier obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête e de G par $l(e)$ (donc 1, 2 ou 3) arêtes.

L'un des problèmes relatifs aux graphes localement irréguliers est le suivant : étant donné un graphe non orienté, on souhaite partitionner ses arêtes de telle manière que les graphes induits par chaque ensemble de la partition soient localement irréguliers, une telle partition est appelée décomposition en graphes localement irréguliers.

Cela soulève plusieurs questions :

- Quels sont les graphes qui admettent une telle décomposition ?
- Lorsque c'est possible, le nombre minimal de graphes nécessaires pour réaliser la décomposition est-il borné (par une constante ou pour une fonction d'une quantité caractéristique du graphe) ?
- Est-il NP-difficile de décider si un graphe peut se décomposer en utilisant au plus deux graphes localement irréguliers ?

J'ai cherché à généraliser ces questions au cas des digraphes. Étant donné que les arêtes sont remplacées par des arcs, le concept de degré est remplacé par celui de degrés entrant et sortant d'un sommet.

Soit u un sommet d'un digraphe, le degré entrant de u que l'on notera $d^-(u)$ correspond au nombre d'arcs arrivant sur le sommet u et le degré sortant $d^+(u)$ correspond au nombre d'arcs partant de u . Avec ces deux concepts, il est possible d'imaginer différentes généralisations de la notion de graphe localement irréguliers notamment les quatre variantes suivantes :

Un digraphe $G = (V, E)$ est localement irrégulier lorsque pour tout arc $u \rightarrow v \in E$:

- $d^+(u) \neq d^+(v)$.
- $d^-(u) \neq d^-(v)$.
- $d^+(u) \neq d^-(v)$.
- $d^-(u) \neq d^+(v)$.

Je me suis principalement intéressé à la troisième variante qui est celle qui semble la plus naturelle puisqu'un arc entre deux sommets u et v fait augmenter les deux quantités comparées. Dans un premier temps, j'ai caractérisé les digraphes décomposables en digraphes localement irréguliers et j'ai obtenu une borne sur le nombre minimal de graphes nécessaires pour faire une telle décomposition. Je me suis ensuite penché sur le problème des "meilleures

orientations” d’un graphe non orienté pour la décomposition en digraphes localement irréguliers. Plus précisément, j’ai montré qu’il est NP-difficile de décider si un graphe non orienté possède une orientation localement irrégulière et j’ai montré des bornes sur le nombre minimal de digraphes nécessaires pour décomposer la ”meilleure orientation” d’un graphe non orienté dans le cas général et sur certaines classes de graphes telles que les arbres, les graphes complets ou encore les graphes de *maximum average degree* strictement inférieur à $\frac{5}{2}$. Enfin, je me suis intéressé à la quatrième variante du concept de graphe localement irrégulier dans laquelle un digraphe $\vec{G}$ est dit *localement irrégulier* lorsque pour tout arc $u \rightarrow v$, le nombre d’arcs arrivant sur u est différent du nombre d’arcs sortant de v .

3 État de l’art

Parmi les différentes variantes possibles pour généraliser le concept de graphes localement irrégulier, seules les deux premières ont été étudiées ([D1, D2]). Néanmoins, de nombreux résultats sur la décomposition en digraphes localement irréguliers ont été obtenus dans le cas non orienté, notamment la caractérisation des graphes décomposables en graphes non orientés localement irréguliers.

Lemme 1. ([1]) *Les graphes connexes qui ne sont pas décomposables en graphes localement irréguliers sont exactement les chaînes de longueur impaire, les cycles de longueur impaire et les éléments de la famille $\mathcal{T}$ définie comme la plus petite famille vérifiant les propriétés suivantes :*

- *Le triangle K_3 appartient à $\mathcal{T}$*
- *Pour tout graphe $G \in \mathcal{T}$ contenant un sommet de degré 2, le graphe obtenu en attachant une chaîne de longueur 2 à un sommet de degré 2 de G appartient à $\mathcal{T}$*
- *Pour tout graphe $G \in \mathcal{T}$ contenant un sommet de degré 2, le graphe obtenu en attachant un triangle K_3 à une chaîne de longueur 3 puis en attachant l’autre bout de la chaîne à un sommet de degré 2 de G appartient à $\mathcal{T}$*

Par ailleurs, des bornes sur le plus petit entier k tel que tout graphe G admet une décomposition en au plus k graphes localement irrégulier ont également été établies. La conjecture qui a d’abord été faite sur ce sujet est la suivante :

Conjecture 1. *Tout graphe décomposable en graphes localement irréguliers admet une décomposition en au plus trois graphes localement irrégulier*

Mais en 2021, un contre-exemple, décomposable au mieux en quatre graphes localement irréguliers, a été trouvé ([U3]) (c’est le seul pour le moment) :

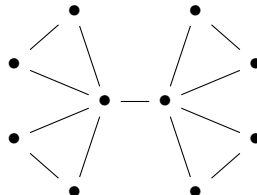


FIGURE 1 – Contre-exemple à la conjecture 1

La meilleure borne sur cet entier dans le cas général est 220 [U2], la preuve utilise le résultat suivant, qui sera très utile par la suite :

Lemme 2. ([1] Théorème 2.3) *Soit G un graphe non orienté décomposable en graphes localement irréguliers possédant un nombre impair d’arêtes, il existe un graphe irrégulier H isomorphe à $K_{1,3}$ ou $K_{1,3}$ ” (obtenu en subdivisant deux arêtes de $K_{1,3}$) tel que toutes les composantes connexes de $G \setminus H$ possèdent un nombre pair d’arêtes.*

D’autres propriétés ont été montrées sur certaines classes de graphes, notamment les graphes bipartis comme les propriétés suivantes :

Théorème 1. ([U2]) *Soit G un graphe non orienté biparti décomposable en graphes localement irréguliers, il existe une décomposition localement irrégulière de G utilisant au plus 7 graphes, voire 6 si G possède un nombre pair d’arêtes.*

Définition 1. *Un graphe balanced est un graphe non orienté biparti dont l’une des classes de la partition ne contient que des sommets de degré pair.*

Lemme 1. ([U4]) *Soit G un graphe balanced, il admet une décomposition en quatre graphes localement irréguliers.*

4 Contribution technique

4.1 Décomposition de digraphes pour la troisième variante

Je me suis tout d'abord intéressé à la généralisation suivante :

Définition 2. Soit $\vec{G}$ un digraphe. $\vec{G}$ est dit localement irrégulier lorsque pour tous sommets u et v de G tels que l'arc $u \rightarrow v$ appartient à $\vec{G}$, $d^+(u) \neq d^-(v)$ où $d^+(u)$ est le degré sortant de u (le nombre d'arcs sortant de u) et $d^-(v)$ est le degré entrant de v (le nombre d'arcs qui arrive sur v).

Par exemple, le graphe de la Figure 4.1 est localement irrégulier, mais celui de la Figure 4.1 n'est pas localement irrégulier car l'arc rouge part d'un sommet ayant pour degré entrant 2 et arrive sur un sommet ayant pour degré sortant 2.

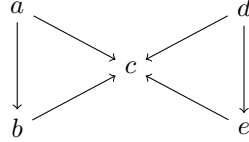


FIGURE 2 – Un digraphe localement irrégulier

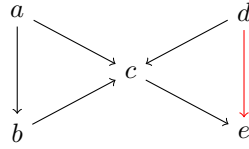


FIGURE 3 – Un digraphe qui ne l'est pas

Plus précisément, je me suis penché sur la décomposition des digraphes en digraphes localement irréguliers au sens de la Définition 2.

Définition 3. Soit $\vec{G} = (V, E)$ un digraphe. Une décomposition $G_1, \dots, G_n$ de G avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $G_i = (V, E_i)$ est une famille de sous-graphes induits de G telle que $E_1, \dots, E_n$ est une partition des arêtes de G .

Définition 4. Soient G un digraphe (respectivement un graphe) et $G_1, \dots, G_n$ une décomposition de G , cette décomposition est une décomposition en digraphes (respectivement graphes) localement irréguliers ou une décomposition localement irrégulière lorsque pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, G_i est localement irrégulier.

La première question à laquelle je me suis intéressé a été de caractériser les digraphes décomposables en digraphes localement irréguliers au sens de cette définition, pour cela je me suis ramené à l'étude de graphes non orientés en associant à un digraphe $\vec{G} = (V, E)$ un graphe non orienté biparti $B(\vec{G}) = (V', E')$ avec $V' = \{u^+, u^- | u \in V\}$ et $E' = \{\{u^+, v^-\} | u \rightarrow v \in E\}$: il y a une arête de u^+ à v^- dans le graphe biparti si et seulement si il y a un arc de u à v dans le digraphe. Ainsi, pour tout sommet u de G , le degré sortant de u est égal au degré de u^+ et le degré entrant de u est égal au degré de u^- . D'après la définition d'un digraphe localement irrégulier qu'on considère, $\vec{G}$ est localement irrégulier si et seulement si $B(\vec{G})$ est localement irrégulier. Cela m'a permis de montrer le résultat qui suit ([preuve en annexe](#)).

Propriété 1. Un digraphe est localement irrégulier si et seulement si son graphe biparti associé est localement irrégulier.

En exploitant la caractérisation des graphes décomposables en graphes irréguliers dans le cas non orienté et le caractère biparti de $B(\vec{G})$, j'ai finalement montré le théorème suivant ([preuve en annexe](#)).

Théorème 2. Un digraphe est décomposable en digraphes localement irréguliers si et seulement si il ne contient pas le sous-graphe induit

$$s_1 \rightarrow s_2 \leftarrow s_3 \rightarrow s_4 \leftarrow \dots \leftarrow s_{2n+1} \rightarrow s_{2n}$$

avec $n \geq 1$ et :

- $d_{\vec{G}}^+(s_1) = 1$.
- $d_{\vec{G}}^+(s_n) = 1$.
- $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, d_{\vec{G}}^+(s_{2i}) = 2$.
- $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, d_{\vec{G}}^+(s_{2i+1}) = 2$.

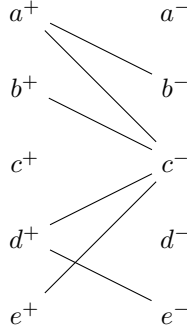


FIGURE 4 – Graphe biparti associé au graphe de la Figure 4.1.

J'ai également remarqué qu'un digraphe G est localement irrégulier si et seulement si le digraphe $\tilde{G}$ obtenu en inversant l'orientation de toutes les arêtes de G est lui aussi localement irrégulier ([preuve en annexe](#)). Ce résultat sera très utile pour simplifier les preuves puisque je pourrai supposer qu'une arête est orientée dans un certain sens.

Je me suis ensuite intéressé au nombre $\chi'_{irr,+ -}$ minimal de digraphes nécessaires pour décomposer un digraphe $\vec{G}$ admettant une décomposition localement irrégulière et j'ai montré ([preuve en annexe](#)) :

Théorème 3. $\chi'_{irr,+ -}(\vec{G})$ est égal au nombre minimal de graphes nécessaires pour décomposer $B(\vec{G})$ en graphes non orientés localement irréguliers.

On le prouve en considérant une décomposition du graphe biparti et en montrant qu'il existe une décomposition de $\vec{G}$ dans laquelle les graphes bipartis associés aux graphes de la décomposition de $\vec{G}$ sont exactement et sans redondance les graphes de la décomposition de $B(\vec{G})$. D'après la propriété précédente, cette décomposition est bien localement irrégulière et réciproquement, étant donné une décomposition localement irrégulière de $\vec{G}$, les graphes bipartis associés aux graphes de la décomposition forment bien une décomposition localement irrégulière de $B(\vec{G})$ (une preuve plus détaillée est donnée en annexe).

Il découle de ce résultat que pour étudier $\chi'_{irr}(\vec{G})$, il suffit d'étudier le nombre minimal de graphes nécessaires pour décomposer son graphe biparti en graphes localement irréguliers, $\chi'(B(\vec{G}))$. En particulier, le Théorème 1 implique que pour tout digraphe $\vec{G}$ décomposable en digraphes localement irréguliers, $\chi'_{irr,+ -}(\vec{G}) \leq 7$, voire 6 si $\vec{G}$ possède un nombre pair d'arcs (car le nombre d'arêtes de $B(\vec{G})$ est égal au nombre d'arcs de $\vec{G}$).

J'ai ensuite essayé de montrer de meilleures bornes sur une classe de graphes, les cactus orientés, qui englobent notamment les arbres orientés et les cycles orientés. Les cactus sont les graphes dans lesquels deux cycles ne partagent pas d'arêtes. Il a été montré ([4]) que pour tout cactus C décomposable en graphes localement irréguliers différent du graphe de la Figure 4.1, $\chi'_{irr}(C) \leq 3$. Cela permet de montrer ([preuve en annexe](#)) :

Théorème 4. Pour tout cactus orienté $\vec{C}$ décomposable en digraphes localement irréguliers, c'est à dire qui n'est ni un cycle de longueur impaire, ni un chemin de longueur impaire, $\chi'_{irr,+ -}(\vec{C}) \leq 3$.

Cette borne est optimale car les graphes de la Figure 4.1 se décomposent au mieux en 3 digraphes localement irréguliers.

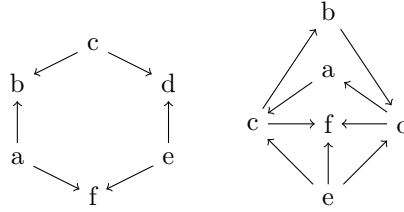


FIGURE 5 – Digraphes vérifiant $\chi'_{irr,+} = 3$

Par ailleurs, un cas particulier de ce résultat est que les arbres et les cycles décomposables en digraphes localement irréguliers admettent une décomposition utilisant au plus trois digraphes.

4.2 Meilleure orientation pour la décomposition en digraphes localement irréguliers

On peut voir sur les digraphes des Figures 4.1 et 4.1 que deux orientations d'un même digraphe peuvent avoir des propriétés différentes vis à vis de la décomposition en digraphes localement irréguliers puisque celui de la Figure 4.1 est au mieux décomposable en deux digraphes localement irréguliers. Cela m'a amené à m'intéresser, étant donné un graphe non orienté G , à la valeur minimale prise par $\chi'_{irr,+}$ sur les orientations décomposables en digraphes localement irréguliers de G , qu'on notera $\chi'_{irr,orient,+}$.

J'ai d'abord caractérisé les graphes ne pouvant pas être orientés en digraphes décomposables en digraphes localement irréguliers ([preuve en annexe](#)) :

Théorème 5. *Les graphes ne pouvant pas être orientés en digraphes décomposables en digraphes localement irréguliers sont exactement les chemins de longueur impaire et les cycles de longueur impaire*

J'ai ensuite cherché à établir une borne constante sur la valeur de $\chi'_{irr,+}$. En réutilisant la même décomposition que dans la preuve de la borne de 220 dans le cas non orienté, décrite dans la section État des arts, et en appliquant le Théorème 1, puis en choisissant une orientation permettant d'appliquer le Lemme 1, également énoncé dans la section État des arts, on parvient à obtenir une telle borne ([preuve en annexe](#)).

Théorème 6. *Soit G un graphe non orienté qui n'est ni un cycle de longueur impaire, ni un cycle de longueur impaire, on a $\chi'_{irr,orient,+}(\vec{G}) \leq 5$ voire 4 si le G possède un nombre pair d'arêtes.*

Ce théorème rappelle celui énoncé dans la première sous-section ce qui est normal car les résultats sur les graphes non orientés utilisés exploite la décomposition mentionnée précédemment et qui consiste dans le cas des graphes ayant un nombre d'arête impair à retirer un certain type de graphe pour se ramener au cas où le graphe possède un nombre pair d'arête. La preuve pourrait peut-être être améliorée étant donné qu'on utilise ce graphe retiré comme un graphe à part entière de la décomposition alors qu'il y aurait peut-être moyen de le choisir de manière à pouvoir le fusionner avec un autre graphe de la décomposition. On peut également mentionner le fait que l'orientation est simplement choisie de manière à satisfaire les hypothèses du Lemme 1 sans prendre en compte la structure du graphe.

En travaillant sur ce problème, j'ai remarqué que je ne trouvais aucun graphe G vérifiant $\chi'_{irr,orient,+}(G) \geq 3$ et j'ai donc essayé de prouver le résultat qui suit.

Conjecture 2. *Soit G un graphe non orienté possédant une orientation décomposable en digraphes localement irréguliers, $\chi'_{irr,orient,+}(G) \leq 2$.*

Je l'ai fait pour certaines classes de graphes : les arbres ainsi que pour graphes complets pour lesquels j'ai en fait montré un résultat plus fort.

Théorème 1. *Soit G un arbre qui n'est pas un chemin de longueur impaire, $\chi'_{irr,orient,+}(G) \leq 2$. ([preuve en annexe](#))*

Théorème 2. *Pour tout tournoi transitif $\vec{T}_n$, c'est à dire un graphe complet à n sommets orienté de telle sorte qu'on a un ordre topologique sur les sommets, avec $n \geq 4$, $\chi_{irr,+}(\vec{T}_n) \leq 2$. ([preuve en annexe](#))*

Comme je ne trouvais pas d'arbre G vérifiant $\chi'_{irr,orient,+}(G) = 2$, j'ai essayé pendant longtemps de montrer que pour tout arbre G possédant une orientation décomposable en digraphes localement irrégulier on a $\chi'_{irr,orient,+}(G) = 1$. Ce résultat aurait permis de montrer la conjecture pour les cactus et les graphes bipartis et aurait donné une piste pour essayer d'améliorer la borne dans le cas général. Malheureusement j'ai finalement trouvé un contre-exemple : le graphe indiqué sur la Figure 6.

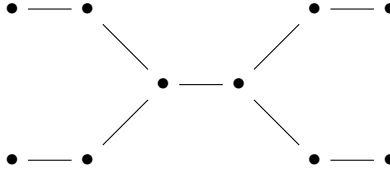


FIGURE 6 – Arbre ne possédant aucune orientation localement irrégulière

4.2.1 Déchargement

J'ai également montré le résultat suivant :

Théorème 3. *Pour tout graphe G possédant une orientation décomposable en digraphes localement irréguliers, de maximum average degree ou MAD, le maximum des degrés moyens de ses sous-graphes, strictement inférieur à $\frac{5}{2}$, on a $\chi'_{irr,orient,+} \leq 3$.*

Pour prouver ce théorème, j'ai utilisé la technique du déchargement. Elle consiste à raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe un contre-exemple à la propriété P qu'on souhaite montrer et en considérant un contre-exemple $G = (V, E)$ de taille $(|V| + |E|)$ minimale. On associe à chaque sommet u de G une charge $c(u) = \deg(u) - \frac{5}{2}$. On a alors $S(G) = \sum_{u \in V} c(u) < 0$. On souhaite aboutir à une contradiction en montrant $S(G) \geq 0$. Pour cela, on va

déplacer des charges entre les sommets tout en gardant $S(G)$ inchangé de façon à ce qu'à la fin du processus, chaque sommet porte une charge positive. Étant donné la manière dont on attribue leur charge aux sommets, les sommets ayant une charge négative au départ sont ceux de degrés 1 et 2 qui ont pour charge respectivement $-\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$. On souhaite que les sommets de degré au moins 3 puissent compenser ces charges négatives en leur donnant une partie de leur charge et tout en conservant eux-mêmes une charge positive. Pour cela, on examine les différentes configurations possible dans lesquelles apparaissent ces sommets, c'est à dire quelles peuvent être les degrés des sommets proches. Pour pouvoir compenser le déficit de charges des sommets de petit degré, il est nécessaire d'exclure certaines configurations problématiques. On peut le faire en montrant que si une telle configuration est présente dans G alors il existe un contre-exemple à la propriété de taille strictement inférieure à G , ce qui contredit la propriété. On peut ainsi obtenir un nombre réduit de configurations possibles et définir des règles de déplacement de charges qui permettent, à chaque sommet et pour toutes les configurations restantes, d'obtenir une charge positive ce qui permet de conclure.

Pour prouver le théorème, j'ai montré une propriété plus forte par déchargement : pour tout graphe non orienté G possédant une orientation décomposable en digraphes localement irréguliers, il existe une orientation $\vec{G}$ telle que $B(\vec{G})$ est une forêt dont aucune composante connexe n'est un chemin de longueur impaire. En effet, il a été montré ([3]) que pour les graphes non orientés, les arbres décomposables en graphes localement irréguliers (qui sont ceux dont aucune composante connexe n'est un chemin de longueur impaire) possède une orientation localement irrégulière utilisant au plus trois graphes.

4.2.2 Complexité

Je me suis également penché sur des questions de complexité en montrant le résultat suivant ([preuve en annexe](#)) :

Théorème 4. *Étant donné un graphe non orienté G , décider si G possède une orientation localement irrégulière est un problème NP-difficile.*

J'ai d'abord fait une preuve en réduisant ce problème depuis *Not all equal 3-SAT cubic monotone*, une variante de 3-SAT dans laquelle tous les littéraux sont positifs, toutes les clauses contiennent au moins un littéral faux et toutes les variables apparaissent dans 3 clauses exactement. Or, il s'est avéré que cette variante n'a pas été prouvée NP-complète, il a donc fallu modifier la preuve. On a finalement décidé de réduire le problème depuis *Not all equal 3-SAT monotone*, le même problème que le précédent sauf que les variables peuvent apparaître dans un nombre quelconque de clause, qui est bien NP-complet.

Pour faire la réduction, on cherche à obtenir des *gadgets*, c'est à dire des portions de graphes non orientés qui, lorsqu'ils sont rattachés à un graphe non orienté par un sommet précis, impose des contraintes sur une éventuelle orientation localement irrégulière. Ici, on souhaite interdire certaines valeurs pour le degré sortant ou entrant du sommet auquel le gadget est attaché. L'idée de la réduction est de se donner une instance φ de *Not all equal 3-SAT monotone* et de construire en temps polynomial en la taille de φ un graphe non orienté G tel que φ est satisfiable en respectant les contraintes du problème si et seulement si G possède une orientation localement irrégulière $\vec{G}$.

Pour cela, on souhaite trouver un graphe G tel qu'on peut transformer toute distribution de vérité vérifiant φ avec les contraintes du problème en une orientation localement irrégulière de G et vice-versa.

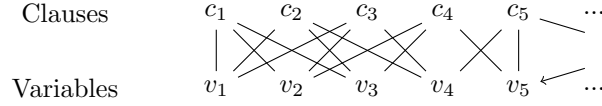


FIGURE 7 – Portion du graphe G construit à partir d'une formule de la forme $(V_1 \vee V_2 \vee V_3) \wedge (V_1 \vee V_3 \vee V_4) \wedge (V_1 \vee V_2 \vee V_4) \wedge (V_2 \vee V_3 \vee V_5) \wedge \dots$

Pour cela, on construit un graphe biparti dont l'une des parties est composée de sommets c_i associées aux clauses C_i de φ et l'autre partie est composée de sommets v_i associés aux variables V_i de φ et dans lequel on a une arête entre c_i et v_j si et seulement si V_j apparaît dans C_i . Avec des gadgets adéquats, on peut forcer toutes les arêtes du graphe biparti incidentes à un sommet v_i associé à une variable à être orientée dans le même sens vis à vis de ce sommet et un sommet c_i associé à une clause à posséder au moins un arc entrant et un arc sortant dans le graphe biparti dans une éventuelle orientation localement irrégulière du graphe obtenu en accrochant les gadgets sur le graphe biparti. On peut ainsi construire une distribution de vérité dans laquelle une variable V_i est vrai si et seulement si tous ses arcs incidents dans le graphe biparti sont sortants vis à vis de ce sommet et fausse sinon. Une telle distribution de vérité satisfait bien φ en respectant les contraintes du problème. Réciproquement, à partir d'une telle distribution de vérité, on peut orienter les arêtes du graphe biparti incidentes à un sommet v_i associé à une variable comme des arcs sortants pour v_i si et seulement si V_i est vraie. On peut alors trouver une orientation du reste des arêtes qui donne une orientation localement irrégulière du graphe obtenu en accrochant les gadgets au graphe biparti.

4.3 Quatrième variante

J'ai également un peu travaillé sur la quatrième variante, dans laquelle la définition d'un graphe localement irrégulier est la suivante :

Définition 1. Soit $\vec{G}$ un digraphe. $\vec{G}$ est dit localement irrégulier lorsque pour tous sommets u et v de G tels que l'arc $u \rightarrow v$ appartient à $\vec{G}$, $d^-(u) \neq d^+(v)$.

Par exemple, le graphe de la Figure 8 est localement irrégulier mais pas celui de la Figure 9 car l'arête rouge va d'un sommet de degré entrant 1 vers un sommet de degré sortant 1.

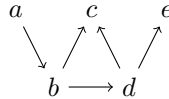


FIGURE 8 – Un digraphe localement irrégulier

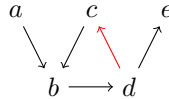


FIGURE 9 – Un digraphe localement irrégulier

Pour cette variante, il y a bien plus de graphes qui ne possèdent pas d'orientation décomposable en digraphes localement irréguliers que pour la précédente. C'est notamment le cas du graphe $K''_{1,3}$ représenté sur la Figure ?? qui joue un rôle important dans la preuve sur la borne de $\chi'_{irr,orient,+}$. C'est pourquoi cette preuve ne peut pas être réutilisée pour cette variante.

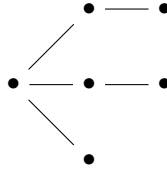


FIGURE 10 – Le graphe $K''_{1,3}$

Je n'ai pas réussi à caractériser les graphes non orienté possédant une orientation décomposable en digraphes localement irréguliers pour cette variante. Étant donné un digraphe $\vec{G}$, j'ai trouvé une transformation en un digraphe $\vec{H}$ tel que $\vec{G}$ est localement irrégulier si et seulement si $\vec{H}$ est localement irrégulier.

4.4 Complexité

Théorème 5. *Pour cette variante, étant donné un digraphe $\vec{G}$, décider si $\vec{G}$ est décomposable en deux digraphes localement irréguliers est NP-difficile. (preuve en annexe)*

Pour le montrer on a d'abord, comme pour la première réduction, réduit le problème depuis *Not all equal 3-SAT monotone cubic* dont on ne sait pas s'il est NP-difficile. Ici, on a choisi de le réduire depuis *1 in 3 3-SAT monotone cubic*, le même problème que *Not all equal 3-SAT monotone cubic* sauf que chaque clause doit contenir exactement un littéral vrai et deux littéraux faux. Pour ce problème on a utilisé un gadget qui, lorsqu'il fait partie d'un graphe possédant une orientation décomposable en deux graphes localement irréguliers, fournit un nombre quelconque d'arêtes appartenant au même graphe de la décomposition ainsi qu'un nombre quelconque d'arêtes appartenant à l'autre graphe de la décomposition. Grâce à cela, on réutilise une preuve basée sur le même graphe biparti que lors de la première réduction en orientant toutes les arêtes des sommets associés à des clauses vers les sommets associés à des variables. Alors, étant donné une instance φ de *1 in 3 3-SAT monotone cubique*, on peut obtenir une bijection entre les orientations décomposables en deux digraphes localement irréguliers du graphe biparti auquel on a attaché les gadgets et les distributions de vérité qui satisfont φ en respectant les contraintes du problème.

5 Méta-informations

Répartition approximative du temps :

- Lecture d'articles : 10%
- Recherche de preuves : 50%
- Rédaction des preuves et du rapport : 40%

J'ai fait la preuve de la caractérisation des digraphes décomposables en digraphes localement irréguliers, du fait que $\chi'_{irr,+}(\vec{G}) = \chi'_{irr}(B(\vec{G}))$ et celle de la réduction en un peu plus d'une semaine et j'ai mis un peu moins d'une semaine pour les rédiger. Pour la recherche d'une borne sur $\chi'_{irr,orient,+}$, j'ai travaillé pendant à peu près 4 jours sur le cas général, 1 jour sur les graphes complets et 2 jours sur les arbres puis j'ai passé 1 semaine à essayer d'améliorer la borne pour les arbres avant de trouver un contre-exemple. J'ai travaillé sur la seconde variante pendant un peu plus d'une semaine en parallèle de la rédaction des preuves précédentes et j'ai rédigé la preuve de la seconde réduction en 3 jours environ.

J'ai assisté à 4 groupes de travail *Graphes et optimisation* sur les sujets suivants : les problèmes ouverts en théorie des graphes, les graphes universels isométriques, les plongements aléatoires et la *central bag method*, ainsi qu'à 12 groupes de travail pour stagiaires dont un où j'ai présenté mon sujet de stage. J'ai également assisté à l'assemblée générale du laboratoire d'accueil et à une soutenance de thèse.

6 Bibliographie

- [U1] J. Bensmail, M. Merker, C. Thomassen, *Decomposing graphs into a constant number of locally irregular subgraphs*, European Journal of Combinatorics, 2016
- [U2] B. Lužar, J. Przybyło, R. Soták, *New bounds for locally irregular chromatic index of bipartite and subcubic graphs*, arXiv, 2016
- [U3] J. Sedlar, R. Škrekovski, *Remarks on the Local Irregularity Conjecture*, Mathematics, 2021
- [U4] B. Lužar, M. Petruševski, R. Škrekovski, *On vertex parity edge-colorings*

- [D1] J. Bensmail, G. Renault, *Decomposing Oriented Graphs into Six Locally Irregular Oriented Graphs*, Graphs and Combinatorics, 2016
- [D2] O. Baudon, J. Bensmail, J. Przybyło, M. Woźniak, *On locally irregular decompositions and the 1-2 Conjecture in digraphs*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2018
- [S1] O. Baudon, J. Bensmail, É. Sopena, *An oriented version of the 1-2-3 Conjecture*, Discussiones Mathematicæ Graph Theory 35, 2015
- [S2] E. Barme, J. Bensmail, J. Przybyło, M. Woźniak, *On a directed variation of the 1-2-3 and 1-2 Conjectures*, Discrete Applied Mathematics, 2017
- [S3] J. Bensmail, K. Lyngsie, *1-2-3 Conjecture in Digraphs : More Results and Directions*, Preprint, 2020
- [1] O. Baudon, J. Bensmail, J. Przybyło, M. Woźniak, *On decomposing regular graphs into locally irregular subgraphs*, European Journal of Combinatorics 49, 45
- [2] J. Sedlar, R. Škrekovski, *Local Irregularity Conjecture vs. cacti*, arXiv, 2022
- [3] O. Baudon, J. Bensmail, É. Sopena, *On the complexity of determining the irregular chromatic index of a graph*, 2014
- [4] B. Lužar, M. Maceková, S. Rindošová, R. Soták, K. Šroková, K. Štorgel, *Locally irregular edge-coloring of subcubic graphs*, Discrete Applied Mathematics, 2023
- [BGP12] M. Borowiecki, J. Grytczuk, M. Pilśniak, *Coloring chip configurations on graphs and digraphs*, Information Processing Letters, 2012
- [HPW18] M. Horňák, J. Przybyło, M. Woźniak, *A note on a directed version of the 1-2-3 Conjecture*, Discrete Applied Mathematics, 2018
- [KLT04] M. Karoński, T. Łuczak, A. Thomason, *Edge weights and vertex colours*, Journal of Combinatorial Theory, 2004
- [Sea12] B. Seamone, *The 1-2-3 Conjecture and related problems : a survey*, Preprint, 2012

ANNEXE

1 Première variante

On s'intéresse ici à la variante suivante :

Un digraphe $G = (V, E)$ est localement irrégulier lorsque pour tout arc $u \rightarrow v \in E$, $d^+(u) \neq d^-(v)$.

1.1 Exceptions

Tout d'abord nous allons chercher à caractériser les digraphes qui ne peuvent pas être décomposés en graphes localement irréguliers..

Soit $G = (V, E)$ un digraphe, posons $B(G) = (V', E')$ un graphe non orienté avec :

- $V' = V^+ \cup V^-$ où $V^+ = \{u^+ | u \in V\}$ et $V^- = \{u^- | u \in V\}$
- $E' = \{u^+ - v^- | u \rightarrow v \in E\}$

Par construction, $B(G)$ est un graphe biparti et on a pour tout sommet u de G : $d_G^+(u) = \deg_{B(G)}(u^+)$ et $d_G^-(u) = \deg_{B(G)}(u^-)$.

Lemme 3. G est localement irrégulier si et seulement si $B(G)$ est localement irrégulier (au sens des graphes non orientés).

Démonstration. $\Rightarrow$: Supposons que G est localement irrégulier. Soit e une arête de $B(G)$, par construction de $B(G)$ elle est de la forme $u^+ - v^-$ et on a $u \rightarrow v \in E$. Donc, comme G est supposé localement irrégulier, on a $d_G^+(u) \neq d_G^-(v)$ donc comme $d_G^+(u) = \deg_{B(G)}(u^+)$ et $d_G^-(v) = \deg_{B(G)}(v^-)$, on a $\deg_{B(G)}(u^+) \neq \deg_{B(G)}(v^-)$.

Donc $B(G)$ est localement irrégulier.

$\Leftarrow$: Supposons que $B(G)$ est localement irrégulier. Soit $u \rightarrow v$ un arc de G , par construction de $B(G)$, $u^+ - v^- \in E'$ et $B(G)$ est localement irrégulier donc $\deg_{B(G)}(u^+) \neq \deg_{B(G)}(v^-)$ et comme $d_G^+(u) = \deg_{B(G)}(u^+)$ et $d_G^-(v) = \deg_{B(G)}(v^-)$, on a $d_G^+(u) \neq d_G^-(v)$.

Donc G est localement irrégulier. □

Lemme 4. Si G est décomposable en graphes localement irréguliers avec pour décomposition $G_1, \dots, G_n$ alors $B(G)$ est décomposable en graphe irréguliers avec pour décomposition $B(G_1), \dots, B(G_n)$.

Démonstration. Soient u et v deux sommets de G .

$$\begin{aligned} u^+ - v^- \in B(G) &\Leftrightarrow u \rightarrow v \in G \\ &\Leftrightarrow \exists! i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u \rightarrow v \in G_i \\ &\Leftrightarrow \exists! i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u^+ - v^- \in B(G_i) \end{aligned}$$

Donc $B(G)$ se décompose en $B(G_1), \dots, B(G_n)$.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, comme G_i est localement irrégulier, d'après le Lemme 3, $B(G_i)$ est aussi localement irrégulier. Donc, $B(G_1), \dots, B(G_n)$ est une décomposition de $B(G)$ en graphes localement irréguliers. □

Lemme 5. Si G n'est pas décomposable en graphes localement irréguliers alors une des composantes connexes de $B(G)$ est un chemin de longueur impaire.

Démonstration. Notons qu'un graphe est décomposable en graphes localement irréguliers si et seulement si toutes ses composantes connexes sont décomposables en graphes localement irréguliers. D'après le Lemme 3, si G n'est pas décomposable en graphes localement irréguliers alors $B(G)$ ne l'est pas non plus et donc, d'après la remarque précédente, toutes les composantes connexes de $B(G)$ ne sont pas décomposables en graphes localement irréguliers.

Soit C une telle composante connexe, C est un graphe non orienté connexe qui n'est pas décomposable en graphes localement irréguliers. Donc d'après [1], C est soit un cycle de longueur impaire, soit un chemin de longueur impaire, soit un élément d'une famille $\mathcal{T}$ de graphe dont tous les éléments contiennent un triangle K_3 .

Or, C est une composante connexe de $B(G)$ qui est biparti et est donc elle-même un graphe biparti. Par conséquent, C n'est pas un cycle de longueur impaire et il ne contient pas de triangle K_3 donc il n'appartient pas à la famille $\mathcal{T}$. Donc, C est un chemin de longueur impaire. □

Théorème 6.) G n'est pas décomposable en graphes localement irréguliers si et seulement si il contient le motif suivant :

$$s_1 \rightarrow s_2 \leftarrow s_3 \rightarrow s_4 \leftarrow \dots \leftarrow s_{2n+1} \rightarrow s_{2n}$$

avec $n \geq 1$ et :

- $d^+(s_1) = 1$
- $d^+(s_n) = 1$
- $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, d^+(s_{2i}) = 2$
- $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, d^+(s_{2i+1}) = 2$

Démonstration. $\Rightarrow$: Si G n'est pas décomposable en graphes localement irréguliers alors d'après le Lemme 5, $B(G)$ possède une composante connexe qui est un chemin de longueur impaire.

Soit C une telle composante connexe, comme $B(G)$ est un graphe biparti, l'une des extrémités appartient à V^+ et l'autre à V^- . C est donc de la forme

$$s_1^+ - s_2^- - \dots - s_{2n+1}^+ - s_{2n}^-$$

avec $\forall i \in \llbracket 1, 2n-2 \rrbracket, s_i \neq s_{i+2}$ et $n \geq 1$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $s_{2i-1}^+ - s_{2i}^-$ dans $B(G)$ et donc $s \rightarrow_{2i-1} s_{2i}$ dans G et $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $s_{2i+1}^+ - s_{2i}^-$ dans $B(G)$ et donc $s \rightarrow_{2i+1} s_{2i}$ dans G .

Donc on a bien dans G un motif de la forme :

$$s_1 \rightarrow s_2 \leftarrow s_3 \rightarrow s_4 \leftarrow \dots \leftarrow s_{2n+1} \rightarrow s_{2n}$$

Comme s_1^+ est une extrémité du chemin, il y a exactement une arête incidente à s_1^+ dans C et donc dans $B(G)$. Par construction de $B(G)$, il y a donc exactement un arc sortant de s_1 dans G donc $d_G^+(s_1) = 1$. De même, on a $d_G^-(s_{2n}) = 1$.

$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $s_{2i}^- - s_{2i+1}^+ - s_{2i+2}^-$ dans $B(G)$ donc $\deg_{B(G)}(s_{2i+1}^+) \geq 2$. De plus, la composante connexe de s_{2i+1}^+ est un chemin donc le degré de s_{2i+1}^+ dans cette composante connexe est inférieur ou égale à 2. Or, tous les sommets voisins de s_{2i+1}^+ dans G appartiennent à la même composante connexe que lui donc s_{2i+1}^+ a exactement deux voisins dans $B(G)$ soit $\deg_{B(G)}(s_{2i+1}^+) = 2$ et donc $d_G^+(s_{2i+1}) = 2$. De même, on a $d_G^-(s_{2i}) = 2$.

$\Leftarrow$: Réciproquement si on a un tel chemin dans G alors :

Si $n = 1$ alors on a $s \rightarrow_1 s_2$ avec $d^+(s_1) = d^-(s_2) = 1$.

Sinon, $n \geq 2$ et on a donc : $s_1 \rightarrow s_2 \leftarrow s_3 \rightarrow \dots$ avec $d^+(s_2) = d^-(s_3) = 2$. □

1.2 Nombre minimal de graphe dans la décomposition

Soit $G = (V, E)$ un digraphe décomposable en graphes localement irréguliers. On s'intéresse maintenant au nombre minimal de graphes localement irréguliers pour décomposer G . On notera dans la suite ce nombre $\chi'_{irr,+}(G)$.

La quantité équivalente pour un graphe G' non orienté sera notée $\chi'_{irr}(G')$.

Théorème 7. Soit $G = (V, E)$ un digraphe décomposable en graphes localement irréguliers, $\chi'_{irr,+}(G) = \chi'_{irr}(B(G))$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\chi'_{irr,+}(G) \leq \chi'_{irr}(B(G))$.

Comme G est décomposable en graphes localement irréguliers, $B(G)$ l'est également d'après le Lemme 3. Soit $B_1, \dots, B_n$ une décomposition de $B(G)$ utilisant un nombre minimal de graphes. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, B_i est un sous-graphe de $B(G)$ qui est biparti donc B_i est lui-même un graphe biparti.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $E_i = \{u \rightarrow v \mid u^+ - v^- \in E(B_i)\}$ et G_i le graphe orienté induit par E_i . $G_1, \dots, G_n$ est une décomposition de G . En effet, soit $u \rightarrow v \in E$, par construction de $B(G)$, $u^+ - v^- \in E(B(G))$ et comme $B_1, \dots, B_n$ est une décomposition de $B(G)$, $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $u^+ - v^- \in E(B_i)$. Donc par construction de $G_1, \dots, G_n$, $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $u \rightarrow v \in E_i = E(G_i)$.

Par ailleurs, on remarque que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i = B(G_i)$. Comme B_i est localement irrégulier par hypothèse, on a d'après le Lemme 3 que G_i est localement irrégulier.

Ainsi, $G_1, \dots, G_n$ est bien une décomposition en graphes localement irréguliers de G .

Montrons maintenant que $\chi'_{irr}(B(G)) \leq \chi'_{irr,+}(G)$.

Soit $G_1, \dots, G_n$ une décomposition de G en graphes localement irréguliers, d'après le Lemme 4, $B(G_1), \dots, B(G_n)$ est une décomposition de $B(G)$ en graphes localement irréguliers. De plus, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d'après le Lemme 3, on a que $B(G_i)$ est localement irrégulier. Donc $B(G_1), \dots, B(G_n)$ est une décomposition de $B(G)$ en graphes localement irréguliers. □

Soit B un graphe non orienté biparti décomposable en graphe localement irréguliers, d'après [2], on a : $\chi'_{irr}(B) \leq 7$ et même $\chi'_{irr}(B) \leq 6$ si B a un nombre pair d'arêtes. En remarquant que pour un graphe G décomposable en graphes localement irréguliers, $B(G)$ est un graphe non orienté biparti décomposable en graphe localement irréguliers qui possède autant d'arêtes que G possède d'arcs, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Soit G un digraphe décomposable en graphes localement irréguliers, on a $\chi'_{irr,+}(G) \leq 7$ et même $\chi'_{irr,+}(G) \leq 6$ si G possède un nombre pair d'arcs.*

1.2.1 Cas particulier : cactus

Définition 2. *Un cactus est un graphe non orienté dans lequel deux cycles distincts ne partagent aucune arête.*

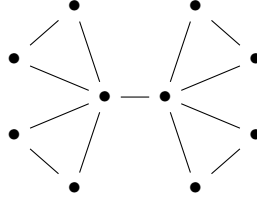
Lemme 6. *Soient G un cactus et $\vec{G}$ une orientation de G , $B(\vec{G})$ est un cactus.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un cactus G possédant une orientation $\vec{G}$ telle que $\vec{G}$ n'est pas un cactus. Alors, il existe deux cycles $s_0^+ - s_1^- - s_2^+ - \dots - s_{2n-1}^- - s_{2n}^+ = s_0^+$ et $q_0^+ - q_1^- - q_2^+ - \dots - q_{2p-1}^- - q_{2p}^+ = q_0^+$ tels que $s_0^+ = q_0^+$ et $q_0^+ = q_1^-$.

Alors, on a $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $s_{2i}^+ \rightarrow s_{2i+1}^-$ et $s_{2i+1}^- \rightarrow s_{2i+2}^+$ dans $\vec{G}$ et $\forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $s_{2j}^+ \rightarrow s_{2j+1}^-$ et $s_{2j+1}^- \rightarrow s_{2j+2}^+$ dans $\vec{G}$. Par conséquent, on a $s_0 - s_1 - \dots - s_{2n-1} - s_0$ et $q_0 - q_1 - \dots - q_{2p-1} - q_0$ dans G et $s_0 = q_0$ et $s_1 = q_1$ ce qui contredit le fait que G soit un cactus. $\square$

Corollaire 2. *Soient G un cactus décomposable en graphes localement irréguliers et $\vec{G}$ une orientation de G , on a $\chi'_{irr,+}(\vec{G}) \leq 3$.*

Démonstration. Soient G un cactus et $\vec{G}$ une orientation de G , d'après le Lemme 6, $B(\vec{G})$ est aussi un cactus. Or d'après [2], tout cactus décomposable en graphes localement irréguliers (au sens des graphes non-orientés) différent du cactus B :



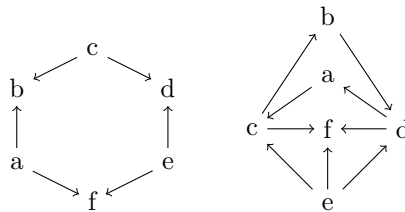
est décomposable en 3 graphes localement irréguliers.

$B(\vec{G})$ est biparti donc il est différent de B . De plus, comme G est décomposable en graphes localement irréguliers, d'après le Lemme 3, $B(\vec{G})$ aussi. Par conséquent, $\chi'_{irr,+}(B(\vec{G})) \leq 3$ et donc, d'après le Lemme 7, $\chi'_{irr,+}(B(\vec{G})) \leq 3$. $\square$

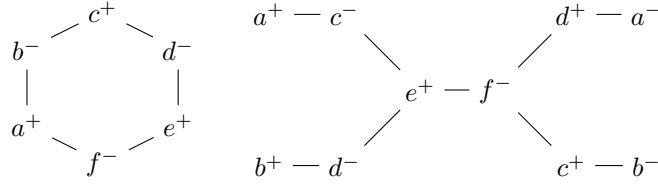
Comme les arbres et les cycles sont des cactus, on a le résultat suivant :

Corollaire 3. *Soient A un arbre et $\vec{A}$ une orientation de A , $\chi'_{irr,+}(\vec{A}) \leq 3$. Soient C un cycle et $\vec{C}$ une orientation de C , $\chi'_{irr,+}(\vec{C}) \leq 3$.*

De plus, ces bornes sont optimales car les graphes suivants se décomposent au mieux en trois digraphes localement irréguliers :



En effet, les graphes bipartis qui leur sont associés sont respectivement :



Et ces graphes non orientés sont décomposables au mieux en 3 graphes non orientés localement irréguliers.

1.3 Orientation des graphes non orientés

Dans cette section nous allons nous intéresser aux propriétés des différentes orientations des graphes non orientés vis à vis de la décomposition en graphes localement irréguliers.

Propriété 1. Soit $G = (V, E)$ un digraphe localement irrégulier alors le graphe $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ avec $\tilde{E} = \{v \rightarrow u \mid u \rightarrow v \in E\}$ est aussi localement irrégulier.

Démonstration. Soit u un sommet de G , les ensembles $\{u \rightarrow v \in E \mid v \in V\}$ et $\{v \rightarrow u \in \tilde{E} \mid v \in V\}$ sont en bijection ainsi que $\{v \rightarrow u \in E \mid v \in V\}$ et $\{u \rightarrow v \in \tilde{E} \mid v \in V\}$. Par conséquent, $d_G^+(u) = d_{\tilde{G}}^-(u)$ et $d_{\tilde{G}}^-(u) = d_G^+(u)$.

Ainsi, soit $u \rightarrow v \in \tilde{E}$, $d_G^+(u) = d_{\tilde{G}}^-(u)$ et $d_{\tilde{G}}^-(u) = d_G^+(u)$. Or, par construction de $\tilde{G}$, $v \rightarrow u \in E$ et G est localement irrégulier donc $d_G^+(v) \neq d_G^-(u)$. Donc $d_{\tilde{G}}^+(u) \neq d_{\tilde{G}}^-(v)$. $\square$

Par conséquent, lorsqu'on essaye d'orienter un graphe non orienté pour le rendre localement irrégulier, on peut choisir l'orientation d'un arc car les autres possibilités d'orientation reviennent à inverser le sens de tous les arcs des graphes orientés obtenus.

Propriété 2. Soit G un graphe non-orienté acyclique et u un sommet de G tel que pour tout voisin v de u on a $\deg(u) > \deg(v)$ alors s'il existe une orientation localement irrégulière de G , il en existe une où tous les arcs incidents à u sont entrants (respectivement sortants).

Démonstration. Comme G est acyclique, toutes les arêtes de G sont des ponts. Soient $e_1, \dots, e_n$ les arêtes de G incidentes à u et G' une orientation localement irrégulière de G . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons G'_i le graphe obtenu en ajoutant e_i à la composante connexe de $G' \setminus \{e_i\}$ qui ne contient pas u . Définissons également G''_i qui est égal à G'_i si e_i est orientée vers u dans G'_i et $\tilde{G}'_i$ sinon et H l'union (disjointe) des G''_i . Par construction, dans H tous les arcs incidents à u sont entrants pour u . Montrons que H est localement irrégulier.

Soit v un sommet de H distinct de u , $d^-(u) = \deg(u) > \deg(v) \geq d^+(v)$ et u n'a pas d'arcs sortants. Soient v et w deux sommets de H distincts de u tels qu'on ait $u \rightarrow v$ dans H , alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v \rightarrow w$ n'est pas l'orientation d'une des arêtes $e_1, \dots, e_n$ donc si on retire l'une de ces arêtes, v et w restent connectées dans G . Par conséquent, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que v et w appartiennent tous deux à G''_i . Or, $G''(i)$ est localement irrégulier et donc $d_H^+(v) = d_{G_i}^+(v) \neq d_{G_i}^-(w) = d_H(w)$. $\square$

1.3.1 Exceptions

Tout d'abord, nous allons chercher à caractériser les graphes qui peuvent être orientés de manière à être décomposables en graphes localement irréguliers (au sens des graphes orientés).

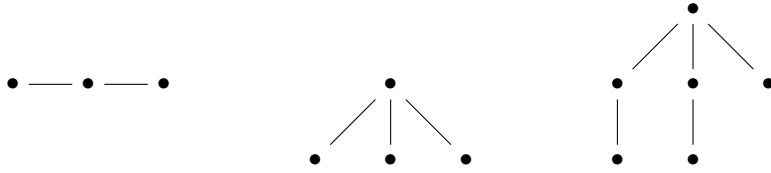
Lemme 7. ([1] Théorème 2.3) Soit G un graphe non orienté décomposable en graphes localement irréguliers possédant un nombre impair d'arêtes, il existe un graphe irrégulier H isomorphe à $K_{1,3}$ ou $K_{1,3}$ (obtenu en subdivisant deux arêtes de $K_{1,3}$) tel que toutes les composantes connexes de $G \setminus H$ possèdent un nombre pair d'arêtes.



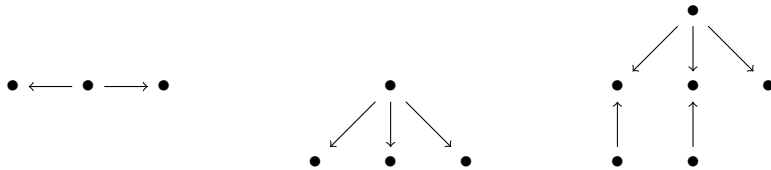
Lemme 8. (d'après [1] Lemme 2.2) Soit G un graphe non orienté décomposable en graphes localement irréguliers possédant un nombre pair d'arêtes, G est décomposable en $\frac{|E(G)|}{2}$ chemins de longueur 2.

Lemme 9. Soit G un graphe non orienté décomposable en graphes localement irréguliers (au sens des graphes non orientés), il existe une orientation G' de G décomposable en graphes localement irréguliers au sens des graphes orientés.

Démonstration. Soit $G_1, \dots, G_n$ la décomposition de G en graphes localement irréguliers, comme $G_1, \dots, G_n$ est une partition des arêtes de G , orienter G revient à orienter $G_1, \dots, G_n$. Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut orienter G_i en un digraphe G'_i localement irrégulier au sens des graphes orientés. D'après les Lemmes ?? et 8, il existe une décomposition de G en des graphes qui sont tous de l'une des formes suivantes :



Or, il est possible de les orienter en graphes localement irréguliers de la manière suivante :



□

Lemme 10. *Les chaînes de longueur impaire ne sont pas orientables en digraphe décomposable en graphes localement irréguliers.*

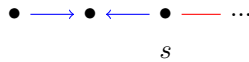
Démonstration. Montrons le par récurrence sur la taille de la chaîne.

Initialisation : Si la chaîne est de longueur 1, ses orientations sont toutes à symétrie près de la forme $\bullet \longrightarrow \bullet$ qui n'est pas localement irrégulier.

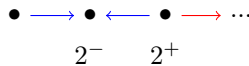
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que la chaîne de longueur $2k + 1$ ne soit pas orientable en un digraphe décomposable en graphe localement irrégulier. Supposons que la chaîne de longueur $2k + 3$ le soit et considérons une orientation décomposable en graphes localement irréguliers. Si la chaîne orientée est décomposable en au moins deux digraphes localement irréguliers alors comme son nombre d'arêtes est impair, l'un des digraphes a un nombre d'arêtes impair strictement inférieur à $2k + 3$ et comme c'est un sous-graphe d'une chaîne orientée, c'est lui-même une chaîne orientée et donc, par hypothèse de récurrence, il n'est pas localement irrégulier. Par conséquent, si la chaîne orientée est décomposable en graphes localement irrégulier alors elle est elle-même un graphe localement irrégulier. La chaîne est de la forme suivante :



Si les deux arêtes bleues sont orientées dans le même sens, alors le sommet au bout de la chaîne et son voisin auront respectivement pour degré entrant et pour degré sortant (ou inversement) 1, ce qui est impossible si l'orientation est localement irrégulière. Par conséquent, les deux arêtes sont orientées dans des sens opposés. D'après le Lemme 1, on peut, sans perte de généralité, considérer qu'ils sont orientés comme suit :



Par hypothèse de récurrence, la chaîne rouge considérée séparément n'est pas un digraphe localement irrégulier. Comme la chaîne bleue ne modifie que le degré sortant du sommet s , l'arête rouge incidente à s sort nécessairement de s . On a donc :



Ce qui contredit le fait que la chaîne orientée puisse être un graphe localement irrégulier et donc décomposable en digraphes localement irréguliers. □

Lemme 11. *Les cycles de longueur impaire ne sont pas orientables en digraphe décomposable en digraphes localement irréguliers.*

Démonstration. Soit C un cycle de longueur impaire, supposons que C admette une orientation C' décomposable en graphes localement irréguliers. Si C' était décomposable en au moins deux graphes localement irréguliers alors ce seraient des chaînes. Or, comme C' possède un nombre impair d'arêtes, l'une des chaînes serait de longueur impaire ce qui est impossible d'après le Lemme 9. Par conséquent, si C' est décomposable en graphes localement irréguliers alors C' est lui-même localement irrégulier, supposons que ce soit le cas. Comme tous les sommets de C sont de degré 2, si un sommet de C' est de degré sortant (respectivement entrant) 1 alors il est de degré entrant (respectivement sortant) 1. Par conséquent, ses voisins ne sont pas de degré entrant ou sortant 1 et donc sont de degré entrant et sortant 2 et 0 (sans tenir compte de l'ordre). Si un sommet de C' est de degré sortant (respectivement entrant) 2 alors ses voisins sont de degré entrant (respectivement sortant) au moins 1 et différent de 2 donc 1. Par la remarque précédente, ils sont de degrés entrant et sortant 1. On en déduit qu'un sommet séparé d'un sommet de degrés entrant et sortant 1 par deux arcs est aussi de degrés entrant et sortant 1. De même un sommet séparé par deux arcs d'un sommet de degrés entrant et sortant 2 et 0 est aussi de degrés entrant et sortant 2 et 0. Notons le cycle comme suit :

$$s_1 \text{ --- } s_2 \text{ --- } \dots \text{ --- } s_{2n+1} \text{ --- } s_1$$

Avec $d^+(s_1) = d^-(s_1) = 1$ on a $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, d^+(s_{1+2k}) = 1$ donc $d^+(s_{2n+1}) = 1$ et comme s_{2n+1} est un voisin de s_1 , $d^+(s_{n+1}) \in \{0, 2\}$, ce qui est contradictoire. $\square$

On rappelle le lemme suivant qui est déjà connu :

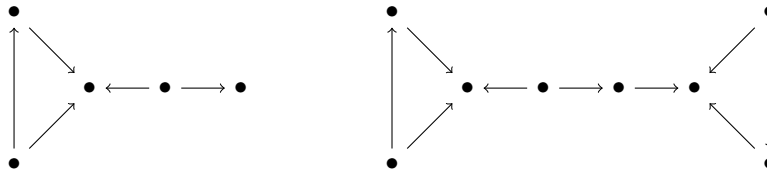
Lemme 12. ([1]) *Les graphes connexes qui ne sont pas décomposables en graphes localement irréguliers sont exactement les chaînes de longueur impaire, les cycles de longueur impaire et les éléments de la famille $\mathcal{T}$ définie comme la plus petite famille vérifiant les propriétés suivantes :*

- *Le triangle K_3 appartient à $\mathcal{T}$*
- *Pour tout graphe $G \in \mathcal{T}$ contenant un sommet de degré 2, le graphe obtenu en attachant une chaîne de longueur 2 à un sommet de degré 2 de G appartient à $\mathcal{T}$*
- *Pour tout graphe $G \in \mathcal{T}$ contenant un sommet de degré 2, le graphe obtenu en attachant un triangle K_3 à une chaîne de longueur 3 puis en attachant l'autre bout de la chaîne à un sommet de degré 2 de G appartient à $\mathcal{T}$*

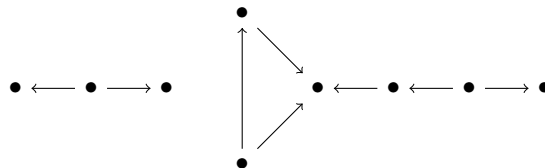
Théorème 8. *Les graphes connexes qui ne sont pas orientables en digraphes décomposables en graphes localement irréguliers sont exactement les chaînes de longueur impaire et les cycles de longueur impaire.*

Démonstration. D'après le Lemme 9, tous les graphes décomposables en graphes localement irréguliers au sens des graphes non orientés sont orientables en des digraphes décomposables en graphes localement irréguliers au sens des digraphes. D'après le Lemme 12 il s'agit de tous les graphes qui ne sont ni des chaînes de longueur impaire, ni des cycles de longueur impaire ni des éléments de $\mathcal{T}$. Par ailleurs, d'après les Lemmes 10 et 11, les chaînes de longueur impaire et les cycles de longueur impaire ne sont pas orientables en digraphe décomposables en graphes localement irréguliers. Il reste donc à montrer que les éléments de $\mathcal{T}$ mis à part le triangle K_3 sont orientables en digraphes décomposables en graphes localement irréguliers. Montrons-le par induction sur la structure des éléments de $\mathcal{T}$.

Considérons un élément de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un triangle, s'il est construit à l'aide des règles 2 ou 3 en utilisant un triangle, on vérifie qu'on peut bien l'orienter en un digraphe localement irrégulier.



Si il est construit à l'aide des étapes 2 et 3 en utilisant un élément de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un triangle, par hypothèse d'induction, ce dernier est orientable en un digraphe décomposable en graphes localement irrégulier. Il suffit donc de vérifier que les motifs qu'on rajoute sont orientables en digraphe localement irrégulier et c'est bien le cas comme on le montre ci-dessous.



□

1.3.2 Meilleure orientation pour la décomposition en digraphes localement irréguliers

On va maintenant se poser la question suivante : étant donné un graphe non-orienté G , quel est l'entier k minimal tel qu'il existe une orientation de G décomposable en k digraphes localement irréguliers ?

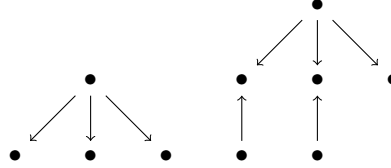
Commençons par énoncer quelques résultats déjà connus.

Un graphe *balanced* est un graphe non orienté biparti dont l'une des classes de la partition ne contient que des sommets de degré pair. Rappelons le résultat suivant déjà connu :

Lemme 13. ([2]) Soit G un graphe balanced, on a $\chi'_{irr}(G) \leq 4$.

Théorème 9. Soit G un graphe non orienté décomposable en graphes localement irréguliers, il existe une orientation G' de G telle que $\chi'_{irr,+}(G') \leq 5$ et si G possède un nombre pair d'arêtes, on a même $\chi'_{irr,+}(G') \leq 4$.

Démonstration. Si G possède un nombre pair d'arêtes, d'après le lemme 13, G est décomposable en chemins de longueur 2. Orientons les de la manière suivante : $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$. Alors, tous les sommets sont de degré sortant pair et par conséquent, dans $B(G)$, tous les sommets de V^+ sont de degré pair, c'est à dire $B(G)$ est *balanced*. Donc, d'après le lemme 13, on a $\chi'_{irr}(B(G)) \leq 4$. Or, d'après le théorème 7, $\chi'_{irr}(B(G)) = \chi'_{irr,+}(G)$ d'où $\chi'_{irr,+}(G) \leq 4$. Si G possède un nombre impair d'arêtes, on peut retirer un graphe H irrégulier isomorphe à $K_{1,3}$ ou $K_{1,3}$ ". Or, les graphes de cette forme peuvent être orientés en graphes localement irréguliers comme suit :



En prenant H dans la décomposition, il reste donc à décomposer $G \setminus H$ qui possède un nombre impair d'arcs et nécessite donc au plus 4 graphes d'après la première partie de la preuve. On en déduit qu'il en faut au plus 5 pour décomposer G et donc $\chi'_{irr,+}(G) \leq 5$. □

1.3.3 Complexité algorithmique

On va s'intéresser au problème suivant : étant donné un graphe non orienté G , est-il possible d'orienter G de telle sorte que le graphe obtenu soit localement irrégulier (au sens des graphes orienté) ?

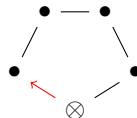
Pour effectuer une réduction, nous allons chercher des motifs de graphes non orientés qui, s'ils sont accrochés à un sommet et qu'il existe une orientation qui rend le graphe localement irrégulier, imposent des contraintes sur l'orientation des arcs incidents à ce sommet.

Lemme 14. Soit G un graphe non orienté et $\otimes$ un sommet du graphe, considérons le graphe G' dans lequel on a ajouté un pentagone C_5 à $\otimes$. Si on peut orienter G' pour le rendre localement irrégulier alors les arcs du pentagone adjacents à $\otimes$ sont orientés dans des sens opposés vis à vis de $\otimes$ et on a $d_{G'}^+(\otimes) = d_G^+(\otimes) + 1$ et $d_{G'}^-(\otimes) = d_G^-(\otimes) + 1$.

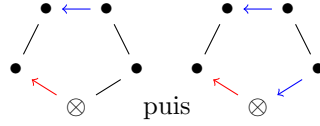
Démonstration. Remarquons d'abord que si on peut orienter un graphe contenant le motif $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$ en un digraphe localement irrégulier alors, les arêtes de gauche et de droite sont orientées dans des sens opposés. En effet, d'après le lemme 1, on peut choisir l'orientation d'une des arêtes sans perte de généralité : $\bullet \xrightarrow{\text{rouge}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$. Supposons que l'arête de droite soit orientée dans le même sens que celle de gauche, on a alors un des deux cas

suivants : $\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{1^+} & \bullet & \xrightarrow{1^-} & \bullet \\ & & & & \bullet \xrightarrow{2^-} \bullet \xleftarrow{2^+} \bullet \end{array}$

D'après la propriété 1, on peut choisir l'orientation d'un arête sans perdre de généralité, disons que l'on choisisse l'orientation de l'arc rouge.



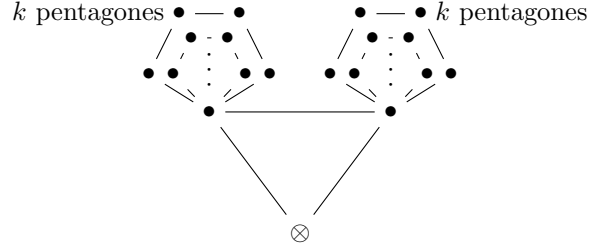
D'après la remarque précédente cela impose :



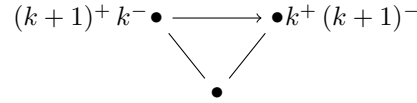
Ce qui donne bien le résultat attendu. □

Lemme 15. Soient G un graphe non orienté et $\otimes$ un sommet du graphe, considérons le graphe G' dans lequel on a ajouté le motif ci-dessous (avec k pentagones à chaque sommet de la partie supérieure). à $\otimes$. Si on peut orienter G' pour le rendre localement irrégulier alors les arcs du à $\otimes$ sont orientés tous les deux vers $\otimes$ ou dans le sens inverse et on a :

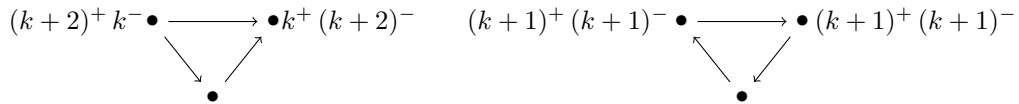
- Si les deux arcs sont orientés vers $\otimes$ alors $d_{G'}^+(\otimes) \neq k+1, k+2$
- Si les deux arcs sont orientés dans l'autre sens alors $d_{G'}^+(\otimes) \neq k, k+1$



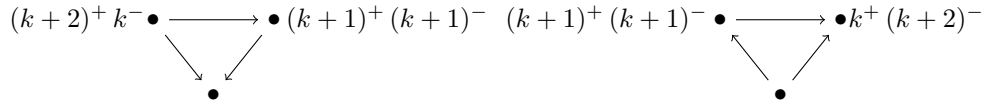
Démonstration. D'après le lemme 14, les k pentagones rajoutent k aux degrés entrant et sortant des deux sommets du haut du triangle. De plus, d'après le lemme 1, on peut choisir l'orientation d'une arête. On se ramène donc à l'étude du motif suivant :



Si les deux arêtes restantes ne sont pas orientées dans le même sens vis à vis du sommet du bas, on a un conflit entre les deux sommets du haut :

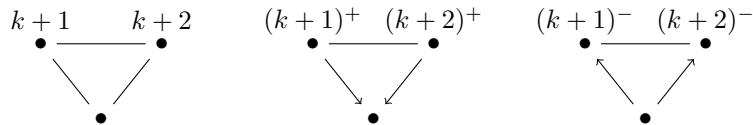


Par conséquent, les seules orientations localement irrégulières sont :

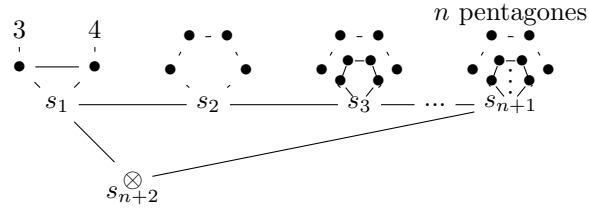


□

Dans la suite, on notera ces motifs de la manière suivante :

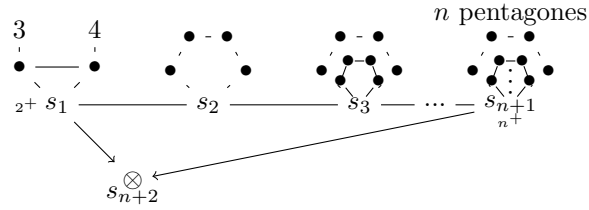
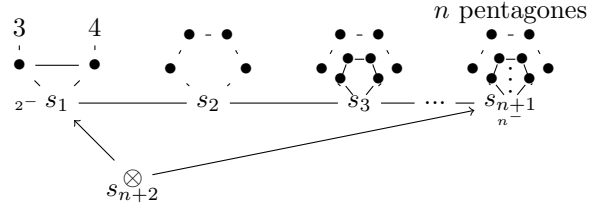


Lemme 16. Considérons le motif ci-dessous :

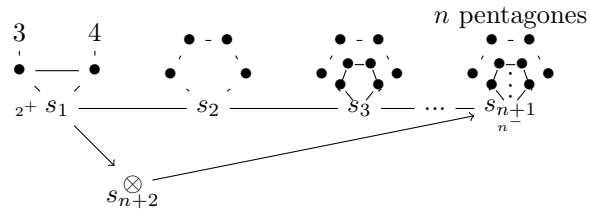
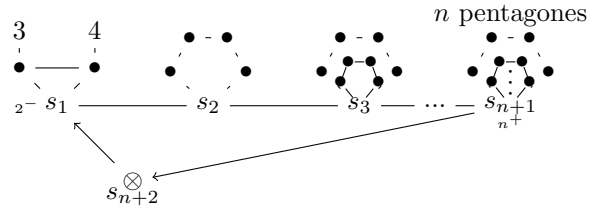


Si un graphe contenant ce motif est orientable en digraphe localement irrégulier alors l'orientation du motif est de l'une des formes suivantes :

Si n est pair :



Si n est impair :



Démonstration. Dans chacun des cas, il y a une unique orientation possible pour laquelle l'arête entre s_{n+2} et s_1 est orientée de s_{n+2} vers s_1 . Par ailleurs, si cette orientation est possible, l'autre l'est aussi en inversant tous les arcs d'après la propriété 1. Réciproquement, si l'autre orientation est possible, la première l'est également, encore une fois en inversant tous les arcs. On peut donc supposer que l'arête entre s_{n+2} et s_1 est orientée de s_{n+2} vers s_1 . Sous ces hypothèses, montrons par récurrence bornée sur $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ la propriété H_j suivante :

- Si j est pair, on a $d^-(j) = j+1$ et $s_j \leftarrow s_{j+1}$
- Si j est impair, on a $d^+(j) = j+1$ et $s_j \rightarrow s_{j+1}$

Initialisation : $j = 1$ qui est impair. D'après la remarque précédente, il y a un arc entrant de s_{n+2} vers s_1 . Par

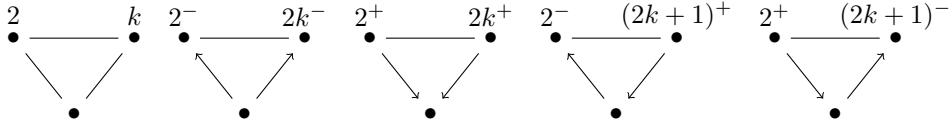
ailleurs, d'après le lemme 15, les arêtes bleues de  sont orientées dans le même sens vis à vis de s_1 . Si elles

étaient orientées comme des arcs entrant, comme le degré de s_1 est 4, le degré entrant de s_1 serait 3 ou 4 ce qui est impossible, toujours d'après le lemme 15. Elles sont donc orientées comme des arcs sortants. Si l'arête entre s_1 et s_2 était orientée de s_1 vers s_2 , le degré sortant de s_1 serait 3, ce qui est impossible d'après le lemme 15. L'arête est donc bien orientée de s_2 vers s_1 et donc le degré entrant de s_1 est bien $2 = j + 1$.

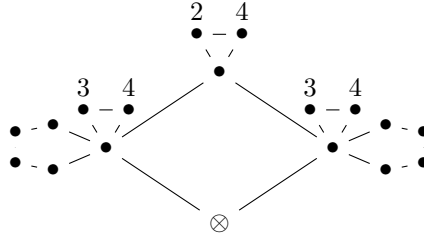
Hérédité : Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que H_j soit vrai. Si j est pair (respectivement impair), par hypothèse de récurrence, on a $s_j \rightarrow s_{j+1}$ (respectivement $s_j \leftarrow s_{j+1}$) et $d^+(s_j) = j + 1$ (respectivement $d^-(s_j) = j + 1$). s_{j+1} a au moins $j + 1$ arcs entrants (respectivement sortants) : celui venant de s_j et les j venant des pentagones (d'après le lemme 14). Par conséquent la seule arête restante qui est celle entre s_{j+1} et s_{j+2} est nécessairement orientée de s_{j+2} à s_{j+1} (respectivement de s_{j+1} à s_{j+2}) car sinon on aurait $d^-(s_{j+1})$ (respectivement $d^+(s_{j+1})$). Donc, $d^-(s_{j+2}) = j + 2$ (respectivement $d^+(s_{j+2}) = j + 2$) et on a bien $s_{j+1} \leftarrow s_{j+2}$ (respectivement $s_{j+1} \rightarrow s_{j+2}$).

En considérant H_1 et H_n , on obtient bien les formes attendues. □

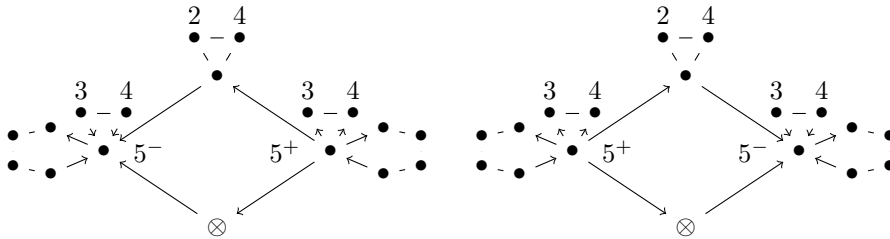
Dans la suite, on notera ces motifs de la manière suivante :



Lemme 17. *Considérons le motif suivant :*

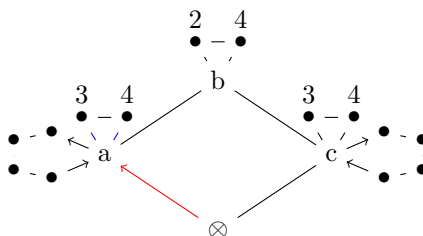


Si un graphe contenant ce motif est orientable en digraphe localement irrégulier alors l'orientation du motif est de l'une des formes suivantes :

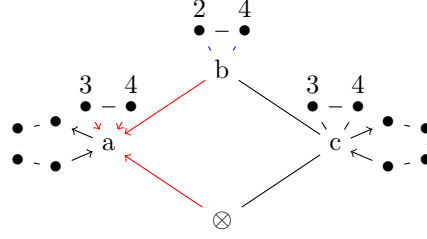


Démonstration. Notons d'abord que d'après le lemme 14, on a bien une arête entrante et une arête sortante dans le pentagone pour chaque sommet auquel un pentagone est attaché. Chacune des possibilités d'orientation s'obtient à partir de l'autre en inversant le sens des arcs. D'après le lemme 1, il suffit donc de choisir l'orientation d'un arc et de montrer que la forme qui contient cet arc est alors la seule possible.

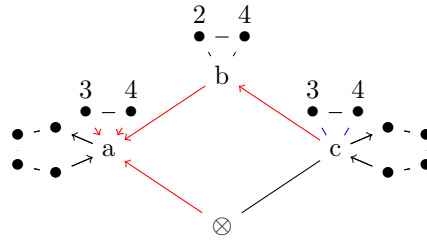
Choisissons l'orientation de l'arc rouge :



D'après le lemme 15, les deux arêtes bleues sont orientées dans le même sens vis-à-vis du sommet a . Si elles étaient sortantes, le degré sortant de a serait 3 ou 4 ce qui est impossible, toujours d'après le lemme 15. Elles sont donc entrantes et comme le degré entrant de a ne peut pas être 4, l'arête entre a et b est orientée de b vers a .



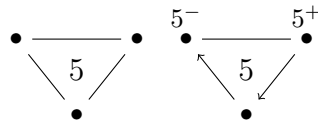
D'après le lemme 16, les deux arêtes bleues sont orientées dans le même sens vis à vis de b . Si elles sont sortantes, comme le degré sortant de b ne peut pas être égal à 4, l'arête entre b et c est nécessairement entrante pour b . Si elles sont entrantes, comme le degré entrant de b ne peut pas être 2, l'arête entre b et c est nécessairement entrante pour b . Donc dans tous les cas, l'arête entre b et c est orientée de c vers b .



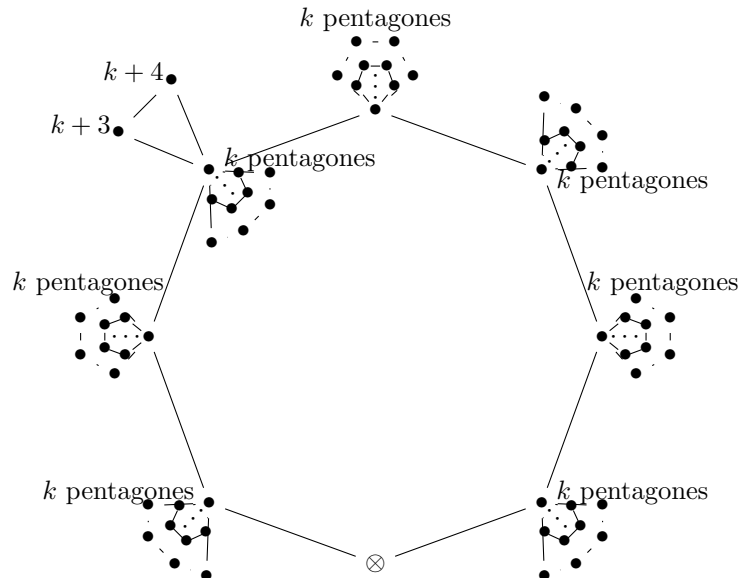
Les deux arêtes bleues sont orientées dans le même sens vis à vis de c d'après le lemme 15. Si elles étaient entrantes, le degré entrant de c serait 3 ou 4 ce qui est impossible d'après le même lemme donc elles sont sortantes. Et comme le degré sortant de c ne peut alors pas être 4, l'arête entre c et x est orientée de c vers x .

On a donc montré que le graphe est nécessairement de la forme attendue. $\square$

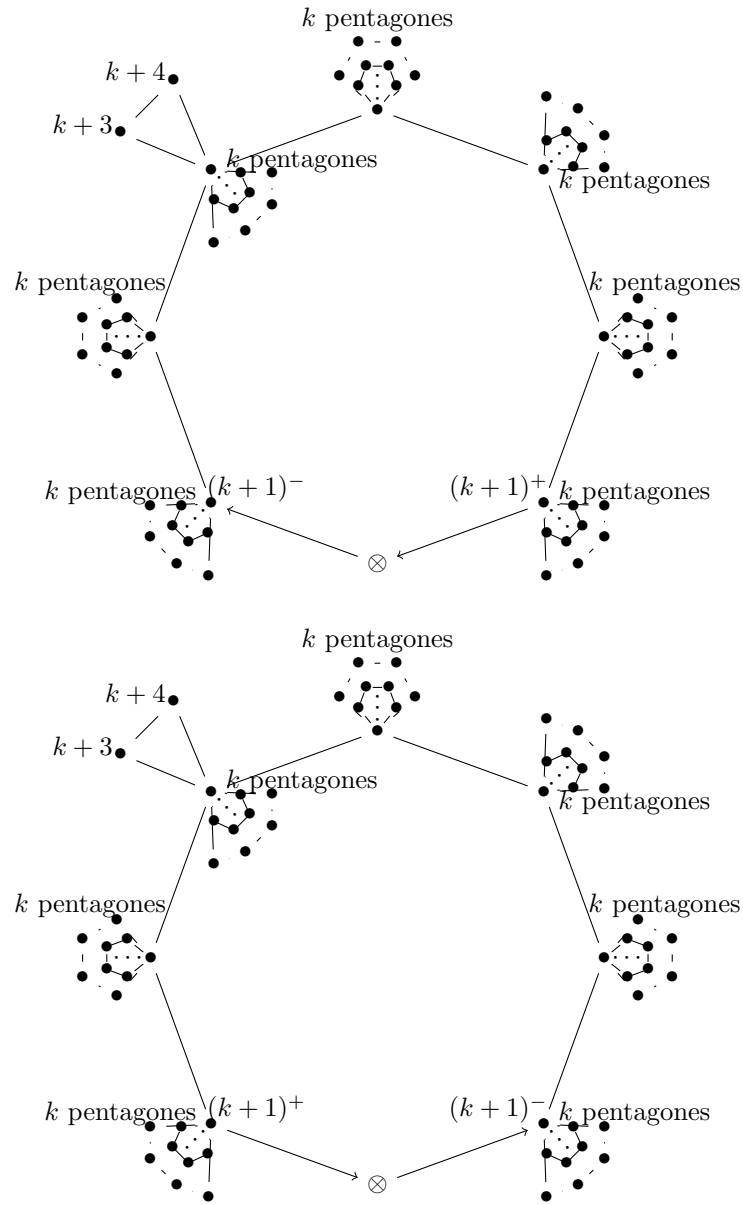
Dans la suite, on notera ce motif :



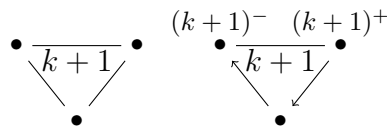
Lemme 18. *Considérons le motif suivant :*



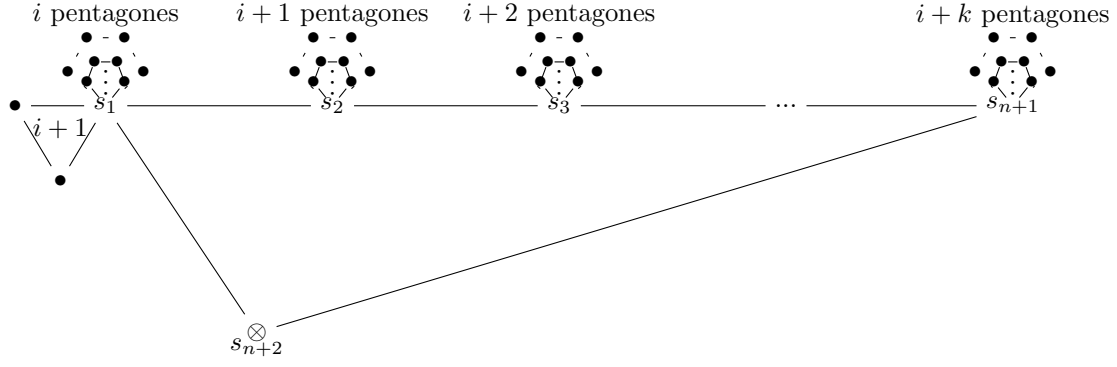
Si un graphe contenant ce motif est orientable en digraphe localement irrégulier alors l'orientation du motif est de l'une des formes suivantes :



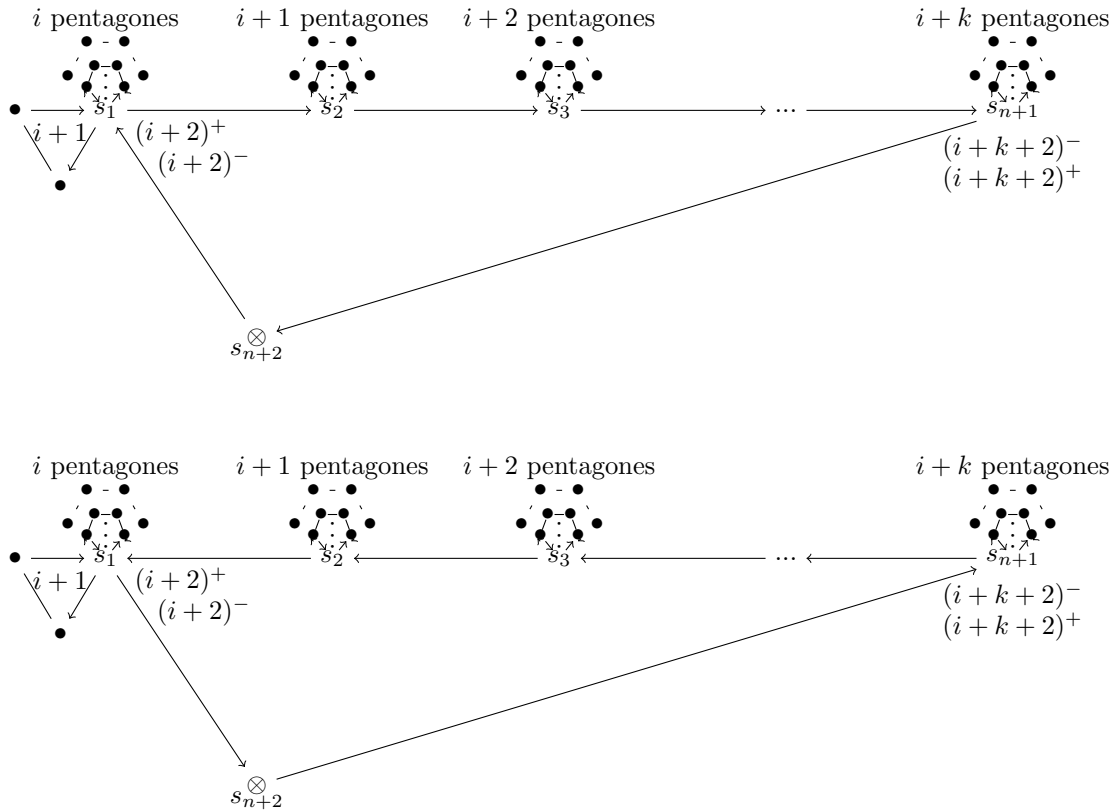
Dans la suite, on notera ce motif :



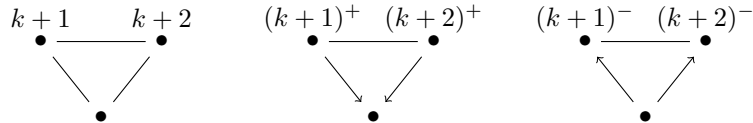
Lemme 19. Considérons le motif suivant :



Si un graphe contenant ce motif est orientable en digraphe localement irrégulier alors l'orientation du motif est de l'une des formes suivantes :



Dans la suite, on notera ces motifs de la manière suivante :



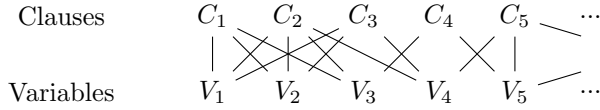
Théorème 10. Décider si un graphe non orienté peut être orienté en un digraphe localement irrégulier est NP-difficile.

Démonstration. On va réduire ce problème depuis Not all equal 3-SAT monotone qui est NP-difficile.

Considérons une instance de Not all equal 3-SAT monotone et notons $v_1, \dots, v_n$ ses variables et $l_1^1 \vee l_1^2 \vee l_1^3, \dots, l_d^1 \vee l_d^2 \vee l_d^3$ ses clauses. Le problème Not all equal 3-SAT monotone consiste à décider étant donné une formule logique sous forme normale conjonctive dont toutes les clauses contiennent trois littéraux et dont tous les littéraux sont positifs s'il existe une distribution de vérité la rendant vraie telle que chaque clause contienne au moins un littéral faux. Construisons le graphe $G = (V, E)$ comme suit :

- $V = \{V_1, \dots, V_n\} \cup \{C_1, C_2, \dots, C_d\}$
- $E = \{V_i - C_k | \exists j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, l_j^k = v_i\}$

Ce qui donne un graphe biparti dont tous les sommets C_i sont de degré 3.



$$(v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee v_3 \vee v_4) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee v_4) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge \dots$$

Supposons qu'il existe une orientation de G pour laquelle :

- Pour tout sommet V_i , tous les arcs incidents à V_i sont soit tous entrants soit tous sortants par rapport à V_i
- Tout sommet C_i possède au moins un arc entrant et un arc sortant

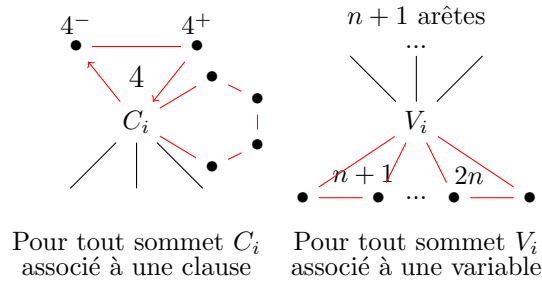
À partir d'une telle orientation, on peut définir une distribution de vérité comme suit : pour toute variable v_i , v_i est vraie si tous les arcs incidents à V_i sont des arcs sortants de V_i (ce qui est équivalent à V_i possède au moins un arc sortant) et v_i est fausse sinon.

Montrons que cette distribution de vérité satisfait la formule et que chaque clause contient au moins un littéral faux. Soit c_i une de ses clauses, par hypothèse, C_i possède un arc entrant $V_j \rightarrow C_i$. Donc, v_j est vraie et v_j est un littéral de c_i donc c_i est vraie. De plus, C_i possède un arc sortant $C_i \rightarrow V_k$ donc v_k est fausse et v_k est bien un littéral de c_i . Par conséquent, chaque clause de C_i est vraie et contient au moins un littéral faux.

Réciproquement, si il existe une distribution de vérité telle que chaque clause est vraie et contient au moins un littéral faux, on peut orienter chaque arête $V_i - C_j$ (par construction toutes les arêtes de G sont de cette forme) en $V_i \rightarrow C_j$ si v_i est vraie et $v_i \leftarrow c_j$ si v_i est fausse. De cette manière, pour tout sommet v_i , l'orientation des arêtes incidentes à v_i ne dépend que de la valeur de vérité de v_i dans la distribution de vérité et est donc la même pour toutes ces arêtes. Par ailleurs, pour chaque clause c_i , il existe des littéraux v_j et v_k tels que v_j est vraie et v_k est fausse. Comme v_j et v_k apparaissent dans c_i , il y a une arête entre C_i et V_j qui est orientée de V_j vers C_i car V_j est vraie et une arête entre C_i et V_k qui est orientée de C_i vers V_k car V_k est fausse. Donc C_i possède bien un arc entrant et un arc sortant.

On vient donc de montrer que résoudre Not all equal 3-SAT monotone pour l'instance qu'on s'est donnée est équivalent à trouver une orientation de G qui satisfait les deux conditions énoncées plus haut. On va maintenant montrer que trouver une orientation de G qui satisfait ces conditions est équivalent à décider si le graphe H suivant est orientable en un digraphe localement irrégulier.

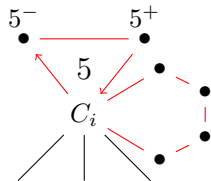
On construit H à partir de G en accrochant à chaque sommet de G un motif comme ci-dessous :



Supposons que H soit orientable en un digraphe localement irrégulier H' , on va montrer que le digraphe G' obtenu en retirant de H' les arcs des motifs ajoutés à G satisfait les conditions énoncées plus haut :

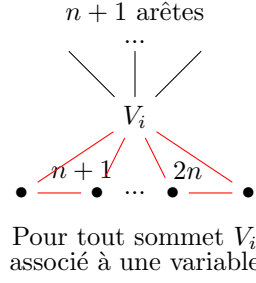
- Pour tout sommet V_i , tous les arcs incidents à V_i sont soit tous entrants soit tous sortants par rapport à V_i
- Tout sommet C_i possède au moins un arc entrant et un arc sortant

Commençons par la condition sur les sommets associés à des clauses, soit C_i un tel sommet, on a une orientation localement irrégulière de :



Donc d'après le lemme 17 les degrés entrant et sortant de C_i ne sont pas 5 et donc, comme le motif du lemme 17 et le pentagone apporte chacun exactement une arête entrante et une arête sortante, les trois arêtes présentes dans G ne sont pas toutes orientées dans le même sens vis à vis de C_i , donc G' vérifie bien la deuxième condition.

Soit V_i un sommet associé à une variable, on a une orientation localement irrégulière de :

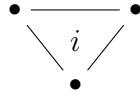


Alors, parmi les $2n$ arêtes rouges, n sont entrantes pour V_i et n sont sortantes pour V_i . D'après le lemme 18, $d^+(V_i) \notin \llbracket n + 1, 2n + 1 \rrbracket$ et $d^-(V_i) \notin \llbracket n + 1, 2n + 1 \rrbracket$. Or, $d^+(V_i) \in \llbracket n, 2n + 1 \rrbracket$ donc $d^+(V_i) \in \{n, 2n + 1\}$. Donc les arêtes qui ne sont pas colorées sont toutes orientées dans le même sens vis à vis de V_i .

Réciproquement, si G admet une orientation G' qui vérifie les deux conditions, montrons qu'on peut ajouter les motifs orientés aux sommets de G de manière à obtenir encore un graphe localement irrégulier.

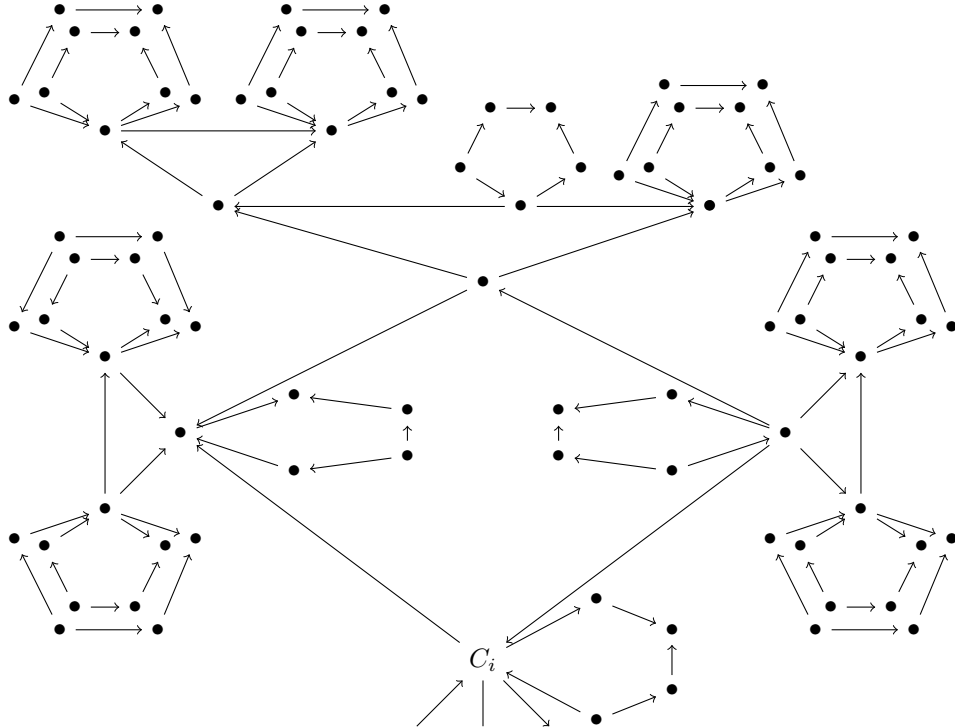
Pour tout sommet C_i associé à une clause, C_i possède 7 arcs adjacents et d'après les lemmes 14 et 17 et la seconde condition, il y en a au moins trois sortants et au moins trois entrants. Donc les degrés entrant et sortant de C_i sont au plus 4.

Pour tout sommet V_i associé à une variable, toutes les arêtes présentes dans G sont orientées dans le même sens vis à vis de V_i . Orientons les arêtes des motifs incidentes à V_i dans le même sens. Alors, le degré entrant (si les arêtes sont entrantes) ou sortant (si les arêtes sont sortantes) de V_i est $2n + 1$. Donc il est différent du degré sortant ou entrant des sommets voisins associés à des clauses. On peut donc choisir des orientations localement irrégulières



de chacun des motifs

Soit C_i un sommet associé à une clause, comme G' vérifie la seconde condition toutes les arêtes présentes dans G sont orientées dans le même sens vis à vis de C_i . On peut donc choisir l'orientation suivante (qui est bien localement irrégulière) ou l'orientation obtenue en inversant tous les arcs (qui est aussi localement irrégulière d'après la propriété 1).



□

1.3.4 Arbres

Lemme 20. *Soit E une étoile dont certaines arêtes ont été subdivisées un nombre quelconque de fois et qui n'est pas une chaîne de longueur impaire, il existe une orientation localement irrégulière de E .*

Démonstration. Soit c le centre de l'étoile. Si le $\deg(c) \leq 2$, c'est une chaîne et comme E n'est pas une chaîne de longueur impaire, c'est une chaîne de longueur 2 ou 4. Celles-ci sont bien orientables en digraphe localement irrégulier :



Sinon, orientons toutes les arêtes comme des arêtes sortantes pour c . Alors, $d^+(c) = \deg(c) \geq 3$ et $d^-(c)$. Chaque arête incidente au centre de l'étoile est rattachée à un unique chemin. Considérons un tel chemin de longueur n : $s_1 - s_2 - \dots - s_n$.

Si n est pair, orientons les arêtes de la manière suivante : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

— Si $i \equiv 1 [4]$, $s_i \rightarrow s_{i+1}$

— Si $i \equiv 2 [4]$, $s_i \leftarrow s_{i+1}$

— Si $i \equiv 3 [4]$, $s_i \leftarrow s_{i+1}$

— Si $i \equiv 0 [4]$, $s_i \rightarrow s_{i+1}$

On a alors $\{d^+(s_n), d^-(s_n)\} = \{0, 1\}$ et : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

— Si $i \equiv 1 [4]$, $d^+(s_i) = 1$ et $d^-(s_i) = 1$

— Si $i \equiv 2 [4]$, $d^+(s_i) = 0$ et $d^-(s_i) = 2$

— Si $i \equiv 3 [4]$, $d^+(s_i) = 1$ et $d^-(s_i) = 1$

— Si $i \equiv 0 [4]$, $d^+(s_i) = 2$ et $d^-(s_i) = 0$

En particulier, $d^+(s_{n-1}) \neq 1$ et $d^-(s_{n-1}) \neq 1$.

Sinon, si n est impair, orientons les arêtes de la manière suivante : $s_1 \leftarrow s_2$ et $\forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$,

— Si $i \equiv 1 [4]$, $s_i \leftarrow s_{i+1}$

— Si $i \equiv 2 [4]$, $s_i \leftarrow s_{i+1}$

— Si $i \equiv 3 [4]$, $s_i \rightarrow s_{i+1}$

— Si $i \equiv 0 [4]$, $s_i \rightarrow s_{i+1}$

On a alors $\{d^+(s_n), d^-(s_n)\} = \{0, 1\}$ et : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

— Si $i \equiv 1 [4]$, $d^+(s_i) = 0$ et $d^-(s_i) = 2$

— Si $i \equiv 2 [4]$, $d^+(s_i) = 1$ et $d^-(s_i) = 1$

— Si $i \equiv 3 [4]$, $d^+(s_i) = 2$ et $d^-(s_i) = 0$

— Si $i \equiv 0 [4]$, $d^+(s_i) = 1$ et $d^-(s_i) = 1$

En particulier, $d^+(s_{n-1}) \neq 2$ et $d^-(s_{n-1}) \neq 2$.

Donc il existe bien une orientation localement irrégulière. □

Théorème 11. *Soit G un arbre, si G n'est pas une chaîne de longueur impaire alors il existe une orientation G' de G décomposable en (au plus) deux graphes orientables en digraphes localement irréguliers tels que l'un des deux contient tous les arcs incidents à la racine et la composante connexe de la racine dans celui-ci est une étoile dont les arêtes ont été subdivisées un certain nombre de fois.*

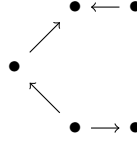
Démonstration. Prouvons le résultat par induction sur la structure de G .

Initialisation : Si G est une chaîne qui n'est pas de longueur impaire alors c'est une chaîne de longueur paire, notons-la $s_1 - \dots - s_{2n}$. Soit s_k la racine de G . Choisissons pour orientation de G la suivante et considérons la décomposition indiquée en couleurs :



Si s_k est une extrémité de la chaîne ou si k est pair alors cette décomposition convient. Sinon, s_k se trouve entre deux chaînes de longueurs 2 appartenant chacune à l'un des deux graphes, en retirant ces quatre arcs on obtient deux chaînes déconnectées de longueur impaire. On peut échanger les couleurs de l'une d'elle de manière à ce que les deux arcs qui partageaient un sommet incident avec les arcs qui ont été retirés soient de la même couleur. En coloriant les quatre arcs de la couleur restante, on obtient bien une décomposition en deux graphes localement irrégulier dont l'un contient tous les arcs incidents à s_k et qui est bien de la forme attendue. En effet, la composante

connexe de la racine dans celui-ci est :



Hérédité : Si la racine de G est de degré 1 :

Soit son fils est la racine d'une chaîne de longueur impaire, dans ce cas G est une chaîne de longueur paire et donc vérifie la propriété d'après l'initialisation.

Soit son fils est la racine d'un arbre décomposable en deux graphes orientables en digraphes localement irréguliers vérifiant les propriétés énoncées précédemment. En particulier, la composante connexe de la racine dans l'un, notons le H , de ces deux graphes est une étoile dont on a subdivisé les arêtes un certain nombre de fois. En ajoutant l'arête entre la racine de G et son fils dans H , la seule composante connexe modifiée dans les deux graphes est celle du fils dans H qui reste une étoile dont on a subdivisé les arêtes un certain nombre de fois et qui est donc toujours orientable en digraphe localement irrégulier d'après le lemme 20.

Si la racine de G est de degré 2 :

Soit les deux sous-arbres de G sont des chaînes de longueur impaire. Alors en retirant à G une étoile à deux branches subdivisées ayant pour centre la racine de G , il reste deux chaînes de longueurs paires déconnectées qu'on peut colorier de manière à ce que les arêtes partageant un sommet incident avec les arêtes de l'étoile soient de la même couleur. En coloriant l'étoile avec l'autre couleur, on obtient une décomposition qui vérifie bien la propriété. Soit les deux sous-arbres de la racine de G ne sont pas des chaînes de longueur impaire. Alors on peut décomposer chacun de ces sous-arbres en deux graphes localement irréguliers dont l'un contient les arêtes incidentes à la racine. En choisissant la même couleur pour les arêtes incidentes aux racines des sous-arbres et en choisissant l'autre pour les deux arêtes reliant les sous-arbres à la racine de G , on obtient une décomposition qui vérifie la propriété.

Soit l'un des sous-arbres de la racine de G est un chemin de longueur impaire et l'autre est un graphe décomposable en deux graphes orientables en digraphes localement irréguliers dont l'un des deux, notons-le H , contient toutes les arêtes incidentes à la racine r de H . On souhaite trouver un sous-graphe G_1 de G contenant les deux arêtes incidentes à la racine R de G ainsi qu'une arête supplémentaire de la chaîne de longueur impaire afin d'obtenir une chaîne de longueur paire qui peut s'orienter en digraphe localement irrégulier. Pour que G_1 soit orientable en digraphe localement irrégulier, on cherche à lui ajouter des arêtes provenant de H de telle manière $H \setminus G_1$ soit orientable en digraphes localement irréguliers.

Si r n'est pas le centre de H , alors :

- Soit r est voisin du centre c de H et c possède exactement deux sous-arbres (qui sont nécessairement des chemins) et ce sont un chemin de longueur paire et un chemin de longueur impaire. Dans ce cas, on peut prendre le chemin de longueur impaire et les deux autres arêtes incidentes à r . La composante connexe de r dans H est alors remplacée par deux chemins de longueur paire déconnectés et donc H est toujours orientable en digraphe localement irrégulier. De plus, la composante connexe de R dans G_1 est bien de la forme attendue (c'est $K_{1,3}$ où une arête a été subdivisée 2 fois).
- Soit en retirant l'arête entre r et son fils de H , la composante connexe de c dans H reste une étoile dont les arêtes ont été plusieurs fois subdivisées. En prenant cette arête, H est donc toujours orientable en un digraphe localement irrégulier et G_1 est bien de la forme attendue.

Sinon, en prenant toute la composante connexe de r dans H , H perd toute une composante connexe et est donc toujours orientable en digraphe localement irrégulier et G_1 est composé de la composante connexe de r dans H dans laquelle on a attaché une chaîne à c donc G_1 est une étoile dont on a subdivisé plusieurs fois les arêtes et donc est orientable en un digraphe localement irrégulier d'après le lemme 20.

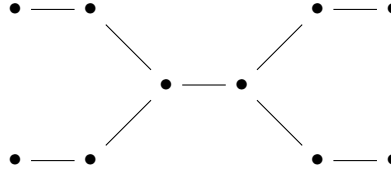
Si la racine de G est de degré au moins 3 :

Notons R la racine de G . Le sous-arbres de R sont soit des chaînes de longueur impaire soit des arbres vérifiant la propriété. On peut décomposer l'union des graphes vérifiant la propriété en deux graphes orientables en digraphe localement irrégulier dont l'un des deux G_1 contient toutes les arêtes incidentes à l'une des racines de ces arbres. Notons l'autre graphe G_2 . On va ajouter des arêtes à G_1 et G_2 de manière à obtenir une décomposition vérifiant la propriété.

On ajoute à G_2 toutes les arêtes incidentes à R et pour chaque sous-arbre de R qui est un chemin de longueur impaire, on ajoute également l'autre arête incidente au voisin de R dans le chemin. Il reste donc des chemins de

longueur paire qu'on peut décomposer en deux graphes orientables en digraphe localement irrégulier G'_1 et G'_2 de telle manière que les arêtes incidentes aux sommets à distance 2 de R soient dans G'_1 . En ajoutant les arêtes de G'_1 à G_1 et celles de G'_2 à G_2 , la composante connexe de R dans G'_2 est une étoile dont on a subdivisé plusieurs fois les arêtes et est donc orientable en digraphe localement irrégulier. Les autres composantes connexes étaient présentes dans G_1 ou G_2 au départ ou dans G'_1 ou G'_2 et sont donc aussi orientables en digraphe localement irrégulier. $\square$

On peut remarquer que cette borne est optimale, en effet l'arbre suivant peut être orienté en un digraphe décomposable en deux digraphes localement irréguliers mais ne peut pas être orienté en un digraphe localement irrégulier.



Lemme 21. *Soit G une chenille qui n'est pas un chemin de longueur impaire, G possède une orientation localement irrégulière dans laquelle pour tout sommet u dans le chemin central de G , toutes les arêtes incidentes à u sauf au plus une qui appartient alors au chemin central de G sont orientées dans le même sens vis à vis de u et si G possède une étoile à au moins deux arêtes à une extrémité de son chemin central alors toutes les arêtes de l'étoile sont orientées dans le même sens vis à vis de son centre.*

Démonstration. La famille $\mathcal{C}$ des graphes chenilles peut se définir inductivement de la manière suivante :

- Les chemins appartiennent à $\mathcal{C}$
- Les étoiles à une arête plusieurs fois subdivisée appartiennent à $\mathcal{C}$
- Étant donné un graphe de $\mathcal{C}$ qui possède une étoile à au moins deux arêtes à son extrémité et une étoile à une arête plusieurs fois subdivisée, le graphe obtenu en attachant l'extrémité de l'arête subdivisée au centre de l'étoile appartient à $\mathcal{C}$

Montrons la propriété par induction sur la structure de G .

Initialisation : Si G est un chemin qui n'est pas de longueur impaire alors c'est un chemin de longueur paire qui possède bien une orientation localement irrégulière en alternant les motifs $s_1 \rightarrow s_2 \leftarrow s_3$ et $s_1 \leftarrow s_2 \rightarrow s_3$. De plus, G possède des étoiles à deux arêtes dont les arêtes sont bien orientées dans le même sens vis à vis des centres des étoiles.

Si G est une étoile dont une arête a été subdivisée plusieurs fois qui n'est pas un chemin, c'est en particulier une étoile subdivisée donc d'après le lemme 20, G possède une orientation localement irrégulière. Or, le centre de l'étoile est de degré au moins trois car G n'est pas un chemin et ses voisins sont de degré au plus 2. Donc, d'après la propriété 2, G possède une orientation dans laquelle toutes les arêtes de l'étoile sont orientées dans le même sens vis à vis du centre de l'étoile. Le reste du graphe est un chemin donc tous ses sommets sont de degré 2 donc la propriété est vraie.

Hérédité : Si G est obtenu en accrochant l'extrémité e de l'arête subdivisée d'une étoile à une arête subdivisée E à un graphe au centre d'une étoile à au moins deux arêtes située à une extrémité d'un graphe H de $\mathcal{C}$, par hypothèse d'induction, H possède une orientation localement irrégulière dans laquelle toutes les arêtes de l'étoile située à son extrémité sont orientées dans le même sens vis à vis du centre c de cette étoile, quitte à inverser l'orientation de toutes les arêtes, on peut supposer qu'elles sont sortantes, et pour tout autre sommet sur le chemin central, toutes les arêtes incidentes à ce sommet sauf au plus une qui est alors située sur le chemin central sont orientées dans le même sens vis à vis de ce sommet.

D'après l'initialisation, E possède une orientation localement irrégulière dans laquelle toutes les arêtes de l'étoile située à son extrémité sont orientées dans le même sens vis à vis du centre c' de cette étoile. Quitte à inverser l'orientation, on peut supposer que l'arête de E incidente à c dans G est entrante pour c . Chaque arête de G est présente soit dans H soit dans E on peut donc orienter chaque comme dans l'orientation localement irrégulière de H et E . Considérons alors un arc $u \rightarrow v$ de G , si u et v sont tous les deux dans E ou tous les deux dans H , comme leurs arêtes incidentes sont orientées de la même manière que dans H et E et que les orientations de H et E sont localement irrégulières, on a bien $d_G^+(u) \neq d_G^-(v)$. Si u et v ne sont pas tous les deux dans H ou tous les deux dans E alors l'un des deux est c . Comme il n'y a pas d'arc de c vers un sommet de E , $v = c$ et $d_G^+(u) = d_E^+(u) \neq d_G^-(c) = 1 = d_G^-(c)$. De plus pour tout sommet de G différent de c , les arêtes incidentes à ce sommet sont les mêmes que dans H ou E et donc vérifient bien la propriété. Donc, G est bien localement irrégulier et vérifie bien l'hypothèse d'induction.

En prenant pour chemin central la concaténation de toutes les arêtes subdivisées ajoutées, pour chaque étoile l'unique arc qui n'est éventuellement pas orienté dans le même sens que les autres fait partie du chemin central. $\square$

Lemme 22. *Soit A un arbre, A peut se décomposer en chenilles de telle manière que pour chaque sommet u de l'arbre il existe une chenille telle qu'au plus une arête incidente à u dans A n'appartient pas à cette chenille et alors cette arête n'appartient pas au chemin central de la chenille dans laquelle elle apparaît et deux chenilles sont reliées dans l'arbre par une arête d'une des chenilles ne provenant pas de son chemin central dont l'extrémité est attachée à une extrémité d'un chemin central de l'autre chenille.*

Démonstration. Soit A un arbre enraciné, montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété H_n : Si A est hauteur n alors A peut se décomposer en chenilles de telle manière que pour chaque sommet u de l'arbre il existe une chenille telle qu'au plus une arête incidente à u dans A n'appartient pas à cette chenille et alors cette arête n'appartient pas à un chemin central de la chenille dans laquelle elle apparaît, toutes les arêtes incidentes à la racine de A appartiennent à la même chenille et tous les sommets incidents à une arête n'appartenant au chemin central de C' sont des extrémités d'un chemin central d'une autre chenille.

Initialisation : Si A est de hauteur 1, c'est une chenille donc la propriété est vraie.

Hérédité : Sinon, soient $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang n et A un arbre de hauteur $n + 1$. Considérons un chemin C de la racine de A à l'une de ses feuilles et la chenille C' obtenue à partir de toutes les arêtes incidentes à un sommet de C . En retirant C' à A , on retire en particulier toutes les arêtes incidentes à la racine. Notons F le graphe ainsi obtenu, toutes les composantes connexes de F sont des arbres de hauteur au plus n . Par hypothèse de récurrence, ils se décomposent tous en chenilles et vérifient les propriétés sur les arêtes incidentes à leur sommet. Donc A se décompose bien en chenilles. Montrons que A vérifie les propriétés relatives aux arêtes incidentes à ses sommets. Soit u un sommet de A :

- Si u appartient au chemin central de C' , toutes ses arêtes incidentes appartiennent à la même chenille, c'est en particulier le cas pour la racine.
- Si u appartient à C' mais pas au chemin central, u est aussi la racine d'une des composantes connexes de F (éventuellement vide) donc par hypothèse de récurrence, toutes les arêtes incidentes à u dans F appartiennent à la même chenille et donc dans A toutes les arêtes incidentes à u sauf une appartiennent à une même chenille.
- Sinon, les arêtes incidentes à u dans A sont exactement les arêtes incidentes à u dans F et par hypothèse de récurrence, elles vérifient bien la propriété.

De plus, comme pour tout sommet u incident à une arête de C' ne provenant pas de son chemin central, u est la racine d'un arbre, toutes les arêtes incidentes à u sauf au plus une sont pendantes et donc u est une extrémité d'un chemin central de C' . $\square$