

PRIX DE LA CONNEXITE

POUR LE PROBLEME DE DOMINATION

Marthe BONAMY, Nicolas BOUSQUET, Tereza KLIMOŠOVÁ,
Paul OUVRARD

15 novembre 2018

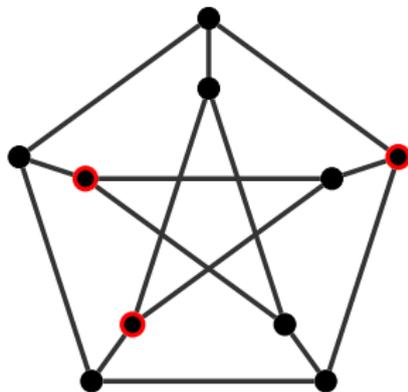
JGA 2018

LaBRI

université
de **BORDEAUX**

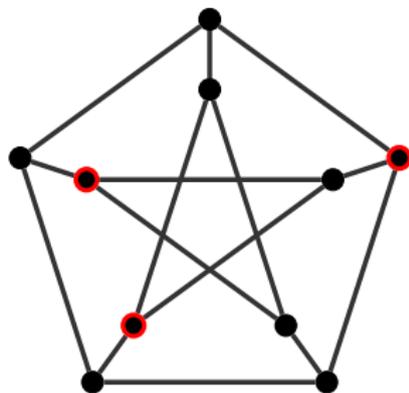
Ensemble dominant D

$D \subseteq V$ tel que tout sommet qui n'appartient pas à D a au moins un voisin dans D .



Ensemble dominant D

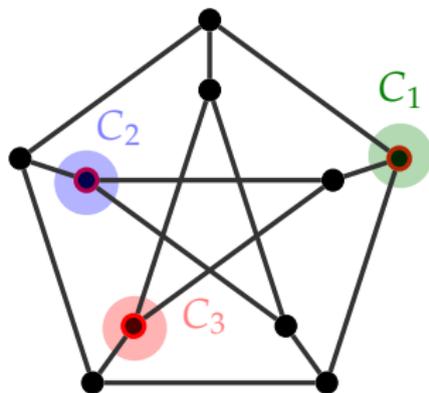
$D \subseteq V$ tel que tout sommet qui n'appartient pas à D a au moins un voisin dans D .



$\gamma(G)$: taille d'un ensemble dominant minimum de G .

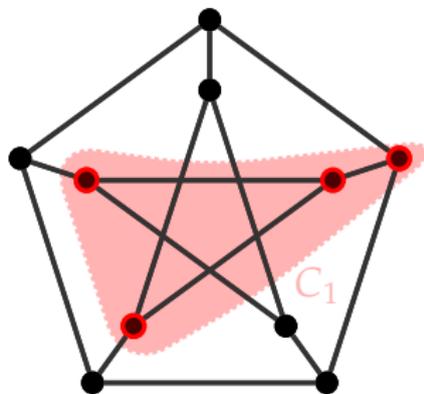
Ensemble dominant connexe D

$D \subseteq V$ est un ensemble dominant tel que $G[D]$ est connexe.



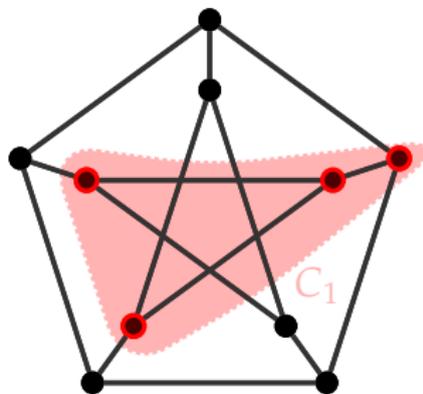
Ensemble dominant connexe D

$D \subseteq V$ est un ensemble dominant tel que $G[D]$ est connexe.



Ensemble dominant connexe D

$D \subseteq V$ est un ensemble dominant tel que $G[D]$ est connexe.



$\gamma_c(G)$: taille d'un ensemble dominant connexe minimum de G .

Quelques bornes simples :

Quelques bornes simples :

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Quelques bornes simples :

$$\gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Prix de la connexité [Cardinal, Levy '08]

Soit G un graphe. On définit $\text{PoC}(G)$ comme le ratio $\frac{\gamma_c(G)}{\gamma(G)}$.

Définitions et bornes

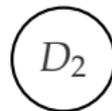
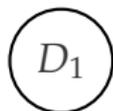
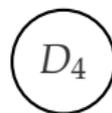
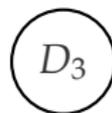
Quelques bornes simples :

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Prix de la connexité [Cardinal, Levy '08]

Soit G un graphe. On définit $\text{PoC}(G)$ comme le ratio $\frac{\gamma_c(G)}{\gamma(G)}$.

$$\Rightarrow \gamma_c(G) \leq 3\gamma(G) - 2$$



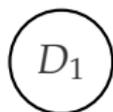
Quelques bornes simples :

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Prix de la connexité [Cardinal, Levy '08]

Soit G un graphe. On définit $\text{PoC}(G)$ comme le ratio $\frac{\gamma_c(G)}{\gamma(G)}$.

$$\Rightarrow \gamma_c(G) \leq 3\gamma(G) - 2$$



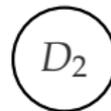
Quelques bornes simples :

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Prix de la connexité [Cardinal, Levy '08]

Soit G un graphe. On définit $\text{PoC}(G)$ comme le ratio $\frac{\gamma_c(G)}{\gamma(G)}$.

$$\Rightarrow \gamma_c(G) \leq 3\gamma(G) - 2$$



Définitions et bornes

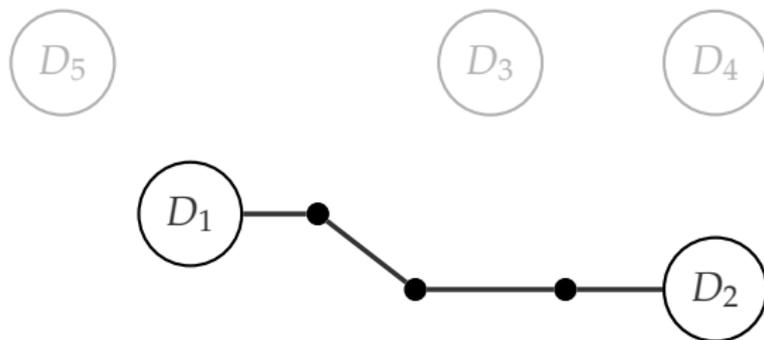
Quelques bornes simples :

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Prix de la connexité [Cardinal, Levy '08]

Soit G un graphe. On définit $\text{PoC}(G)$ comme le ratio $\frac{\gamma_c(G)}{\gamma(G)}$.

$$\Rightarrow \gamma_c(G) \leq 3\gamma(G) - 2$$



Définitions et bornes

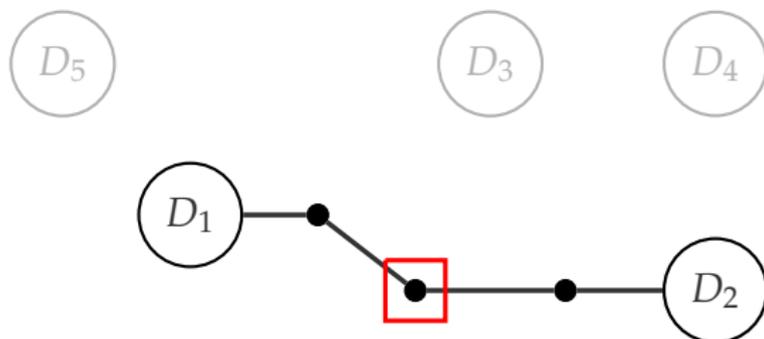
Quelques bornes simples :

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Prix de la connexité [Cardinal, Levy '08]

Soit G un graphe. On définit $\text{PoC}(G)$ comme le ratio $\frac{\gamma_c(G)}{\gamma(G)}$.

$$\Rightarrow \gamma_c(G) \leq 3\gamma(G) - 2$$



Définitions et bornes

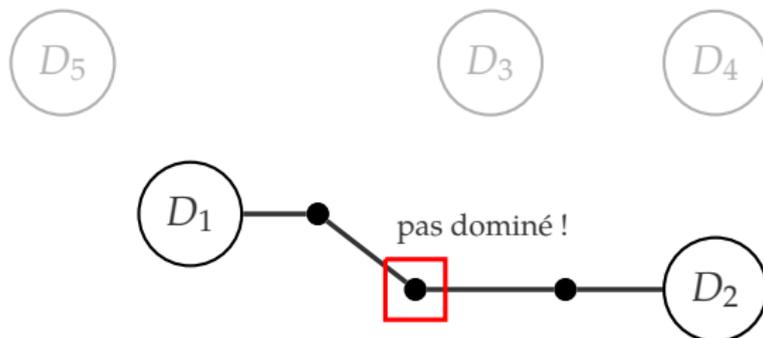
Quelques bornes simples :

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Prix de la connexité [Cardinal, Levy '08]

Soit G un graphe. On définit $\text{PoC}(G)$ comme le ratio $\frac{\gamma_c(G)}{\gamma(G)}$.

$$\Rightarrow \gamma_c(G) \leq 3\gamma(G) - 2$$



Définitions et bornes

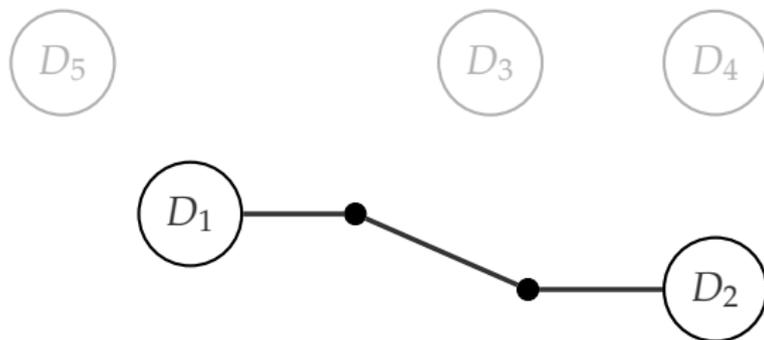
Quelques bornes simples :

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Prix de la connexité [Cardinal, Levy '08]

Soit G un graphe. On définit $\text{PoC}(G)$ comme le ratio $\frac{\gamma_c(G)}{\gamma(G)}$.

$$\Rightarrow \gamma_c(G) \leq 3\gamma(G) - 2$$



Définitions et bornes

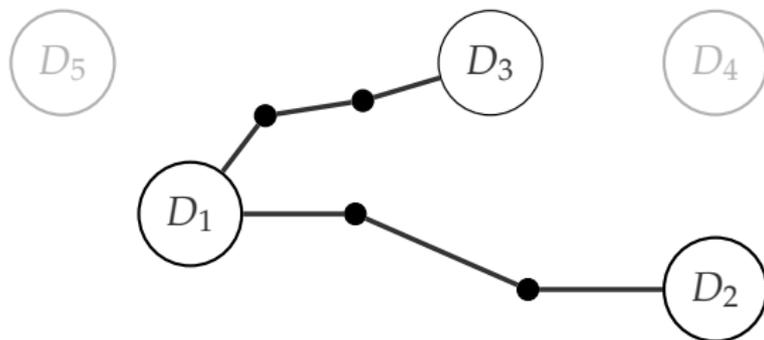
Quelques bornes simples :

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Prix de la connexité [Cardinal, Levy '08]

Soit G un graphe. On définit $\text{PoC}(G)$ comme le ratio $\frac{\gamma_c(G)}{\gamma(G)}$.

$$\Rightarrow \gamma_c(G) \leq 3\gamma(G) - 2$$



Définitions et bornes

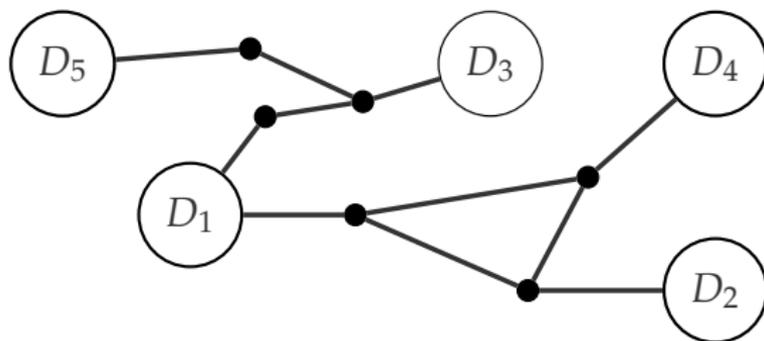
Quelques bornes simples :

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq \gamma_c(G)$$

Prix de la connexité [Cardinal, Levy '08]

Soit G un graphe. On définit $\text{PoC}(G)$ comme le ratio $\frac{\gamma_c(G)}{\gamma(G)}$.

$$\Rightarrow \gamma_c(G) \leq 3\gamma(G) - 2$$



- ☞ La borne supérieure de 3 est asymptotiquement atteinte pour les chemins et les cycles.

- ☞ La borne supérieure de 3 est asymptotiquement atteinte pour les chemins et les cycles.



- ☞ La borne supérieure de 3 est asymptotiquement atteinte pour les chemins et les cycles.



- La borne supérieure de 3 est asymptotiquement atteinte pour les chemins et les cycles.



$$\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$$

- La borne supérieure de 3 est asymptotiquement atteinte pour les chemins et les cycles.



- La borne supérieure de 3 est asymptotiquement atteinte pour les chemins et les cycles.



$$\gamma_c(P_n) = n - 2$$

Graphes PoC-Parfait

Un graphe G est **PoC-Parfait** si pour tout sous-graphe induit H de G , $\gamma_c(H) = \gamma(H)$.

Graphes PoC-Parfait

Un graphe G est **PoC-Parfait** si pour tout sous-graphe induit H de G , $\gamma_c(H) = \gamma(H)$.

Théorème [Zverovich '03]

Pour tout graphe G , G est PoC-Parfait ssi G ne contient pas de P_5 ni de C_5 comme sous-graphe induit.

Grphe PoC-Presque-Parfait

Un graphe G est **PoC-Presque-Parfait** avec seuil t si pour tout **sous-graphe induit** H de G , $\gamma_c(H) \leq t \cdot \gamma(H)$.

Graphe PoC-Presque-Parfait

Un graphe G est **PoC-Presque-Parfait** avec seuil t si pour tout sous-graphe induit H de G , $\gamma_c(H) \leq t \cdot \gamma(H)$.

Théorème : $t = 3/2$ [Camby et Schaudt '14]

Un graphe G est PoC-Presque-Parfait avec seuil $3/2$ ssi G ne contient pas de P_6 ni de C_6 comme sous-graphe induit.

Théorème : $t = 2$ [Camby et Schaudt '14]

Pour tout graphe G sans P_8 ni C_8 , $\gamma_c(G) \leq 2\gamma(G)$.

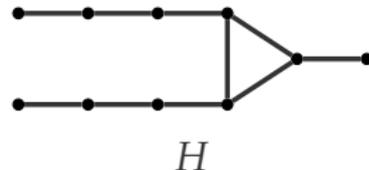
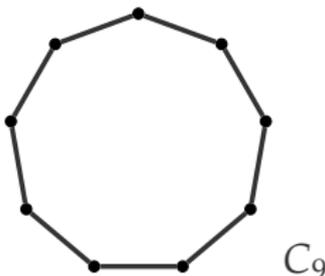
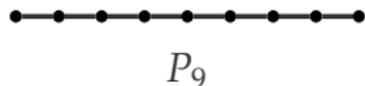
Graphes PoC-Presque-Parfaits (avec seuil 2)

Théorème : $t = 2$ [Camby et Schaudt '14]

Pour tout graphe G sans P_8 ni C_8 , $\gamma_c(G) \leq 2\gamma(G)$.

Conjecture [Camby et Schaudt '14]

Pour tout graphe G , G est PoC-Presque-Parfait avec seuil 2 ssi G est sans P_9 , C_9 et H .



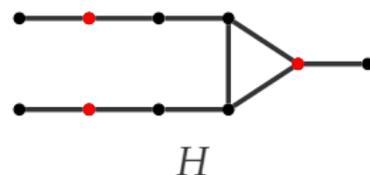
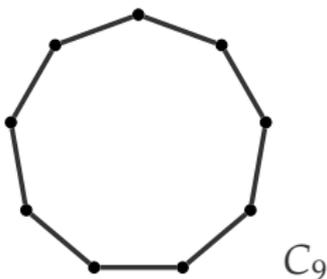
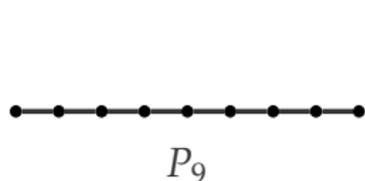
Graphes PoC-Presque-Parfaits (avec seuil 2)

Théorème : $t = 2$ [Camby et Schaudt '14]

Pour tout graphe G sans P_8 ni C_8 , $\gamma_c(G) \leq 2\gamma(G)$.

Conjecture [Camby et Schaudt '14]

Pour tout graphe G , G est PoC-Presque-Parfait avec seuil 2 ssi G est sans P_9 , C_9 et H .



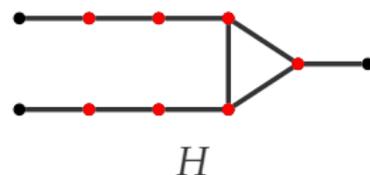
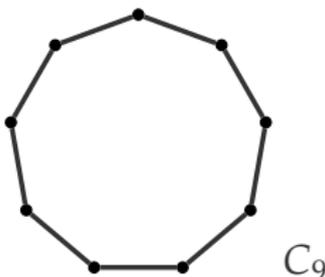
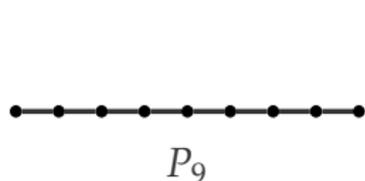
Graphes PoC-Presque-Parfaits (avec seuil 2)

Théorème : $t = 2$ [Camby et Schaudt '14]

Pour tout graphe G sans P_8 ni C_8 , $\gamma_c(G) \leq 2\gamma(G)$.

Conjecture [Camby et Schaudt '14]

Pour tout graphe G , G est PoC-Presque-Parfait avec seuil 2 ssi G est sans P_9 , C_9 et H .



Théorème [Bonamy, Bousquet, Klimošová, O. '18]

La conjecture est vraie.

Théorème [Bonamy, Bousquet, Klimošová, O. '18]

La conjecture est vraie.

G un graphe sans P_9 , C_9 ni $H \Rightarrow \gamma_c(G) \leq 2\gamma(G)$: par l'absurde.

Théorème [Bonamy, Bousquet, Klimošová, O. '18]

La conjecture est vraie.

G un graphe sans P_9 , C_9 ni $H \Rightarrow \gamma_c(G) \leq 2\gamma(G)$: par l'absurde.

☞ G : un graphe connexe sans P_9 , C_9 ni H t.q.
 $\gamma_c(G) \geq 2\gamma(G) + 1$;

Théorème [Bonamy, Bousquet, Klimošová, O. '18]

La conjecture est vraie.

G un graphe sans P_9, C_9 ni $H \Rightarrow \gamma_c(G) \leq 2\gamma(G)$: par l'absurde.

☞ G : un graphe connexe sans P_9, C_9 ni H t.q.

$$\gamma_c(G) \geq 2\gamma(G) + 1;$$

☞ D^0 : $|D^0| = \gamma(G)$ et D^0 minimise le nombre de cc;

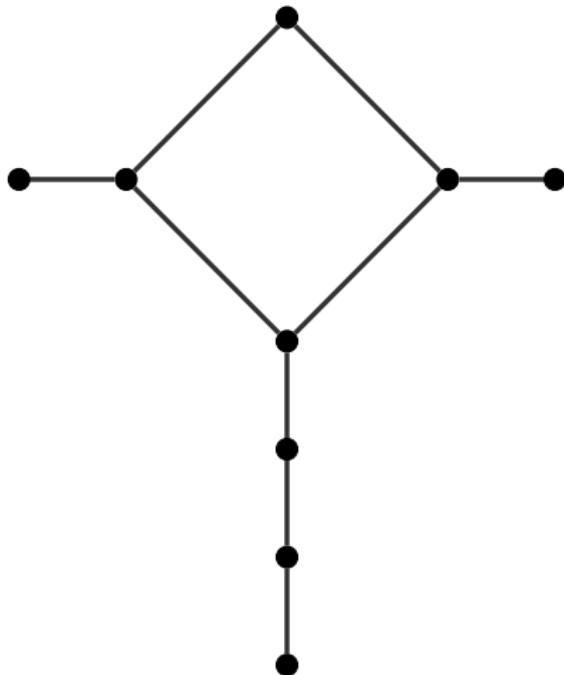
$$\Rightarrow D_1^0, \dots, D_g^0 \text{ les cc de } G[D^0]$$

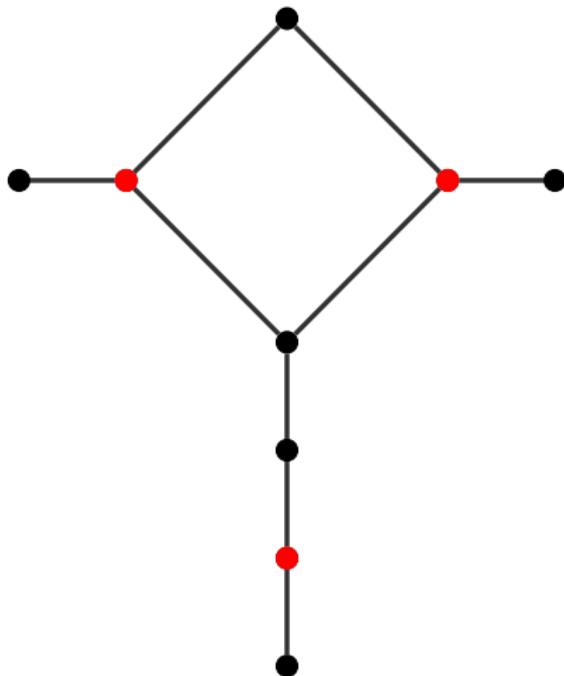
Théorème [Bonamy, Bousquet, Klimošová, O. '18]

La conjecture est vraie.

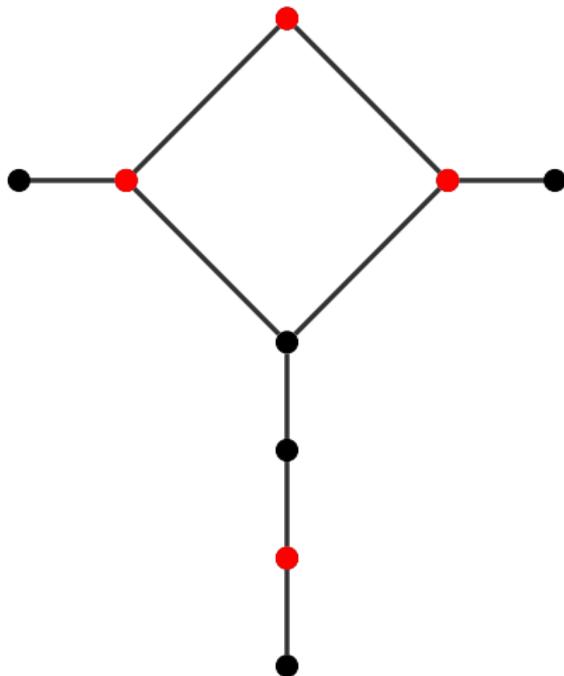
G un graphe sans P_9, C_9 ni $H \Rightarrow \gamma_c(G) \leq 2\gamma(G)$: par l'absurde.

- ☞ G : un graphe connexe sans P_9, C_9 ni H t.q.
 $\gamma_c(G) \geq 2\gamma(G) + 1$;
- ☞ D^0 : $|D^0| = \gamma(G)$ et D^0 minimise le nombre de cc;
 $\Rightarrow D_1^0, \dots, D_g^0$ les cc de $G[D^0]$
- ☞ ℓ le plus grand entier t.q. il existe un dominant D t.q.
 - $G[D]$ a $g - \ell$ cc;
 - $|D| \leq \gamma(G) + \ell$;
 - avec une notion d'hérédité.

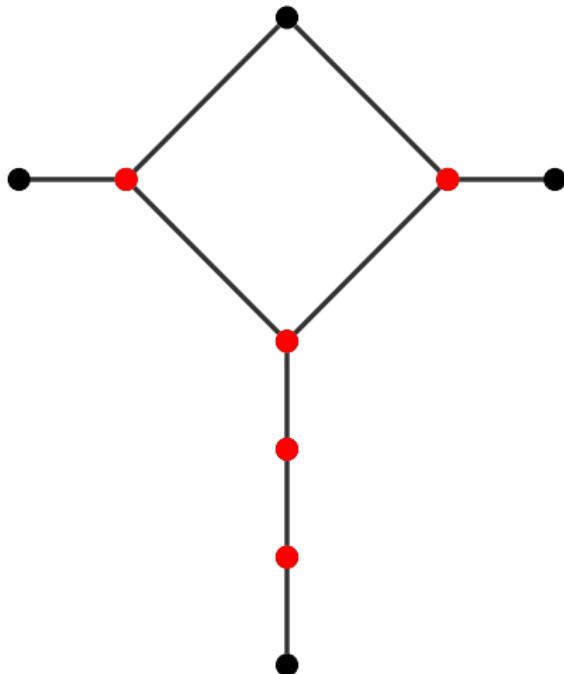




Idée de la preuve



Idée de la preuve



$D_1 \cdots D_{g-\ell}$: les cc de $G[D]$.

$D_1 \cdots D_{g-\ell}$: les cc de $G[D]$.

Observation

Pour tout i , $\text{dist}(D_i, D \setminus D_i) = 3$.

$D_1 \cdots D_{g-\ell}$: les cc de $G[D]$.

Observation

Pour tout i , $\text{dist}(D_i, D \setminus D_i) = 3$.

Ensemble semi-pertinent S

$S \subseteq V \setminus D$ t.q. $G[D \cup S]$ a $g - \ell - |S| + 1$ cc.

$D_1 \cdots D_{g-\ell}$: les cc de $G[D]$.

Observation

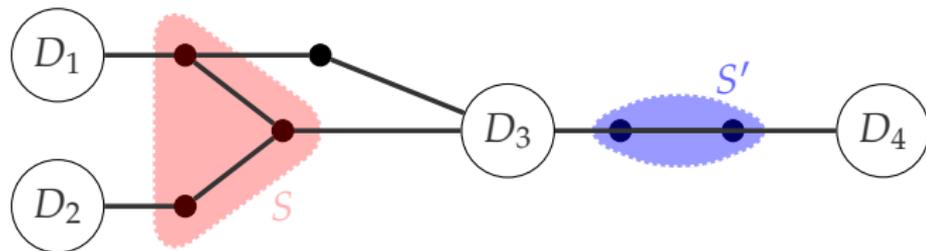
Pour tout i , $\text{dist}(D_i, D \setminus D_i) = 3$.

Ensemble semi-pertinent S

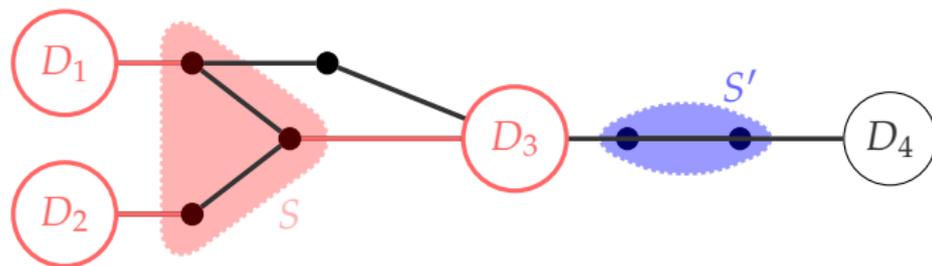
$S \subseteq V \setminus D$ t.q. $G[D \cup S]$ a $g - \ell - |S| + 1$ cc.

\Rightarrow tout ensemble semi-pertinent est connexe.

Idée de la preuve

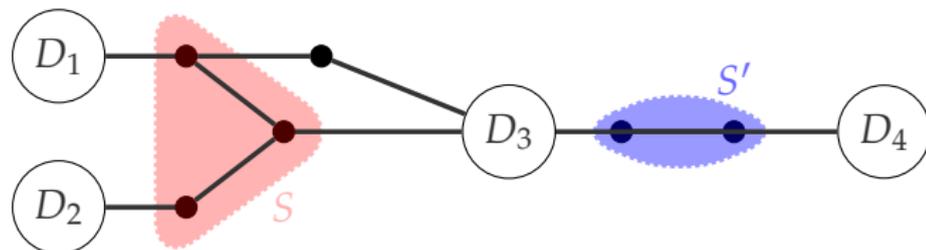


Idée de la preuve



👉 $A(S) = \{D_1, D_2, D_3\};$

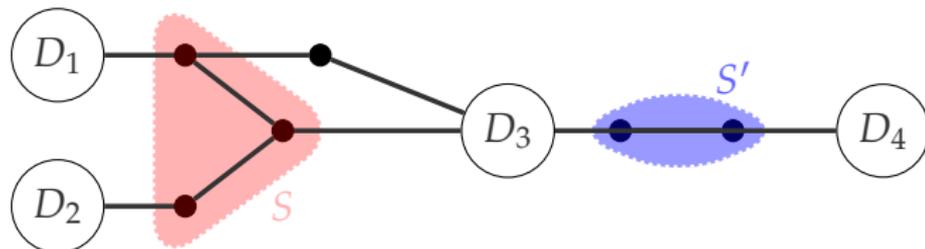
Idée de la preuve



☞ $A(S) = \{D_1, D_2, D_3\}$;

☞ il existe une bijection entre S et $A(S)$;

Idée de la preuve

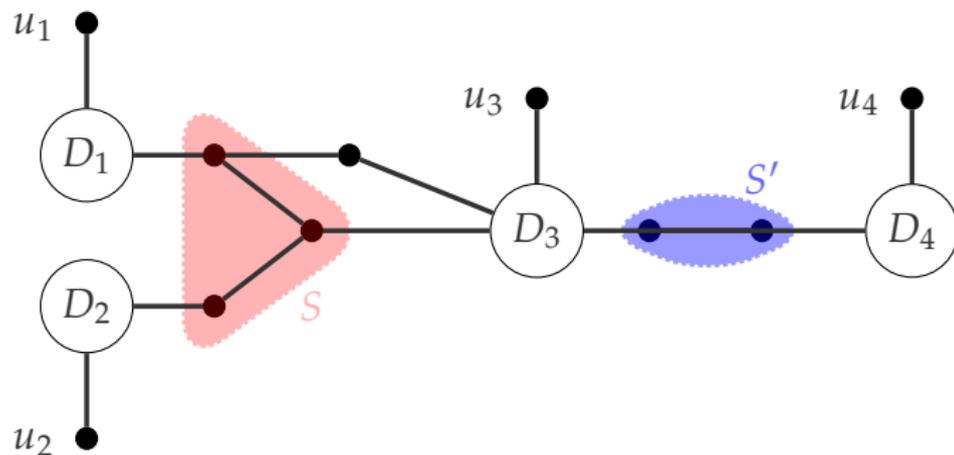


☞ $A(S) = \{D_1, D_2, D_3\}$;

☞ il existe une bijection entre S et $A(S)$;

☞ $\forall i$, il existe $u_i \in N[D_i]$ sans voisin dans S ...

Idée de la preuve

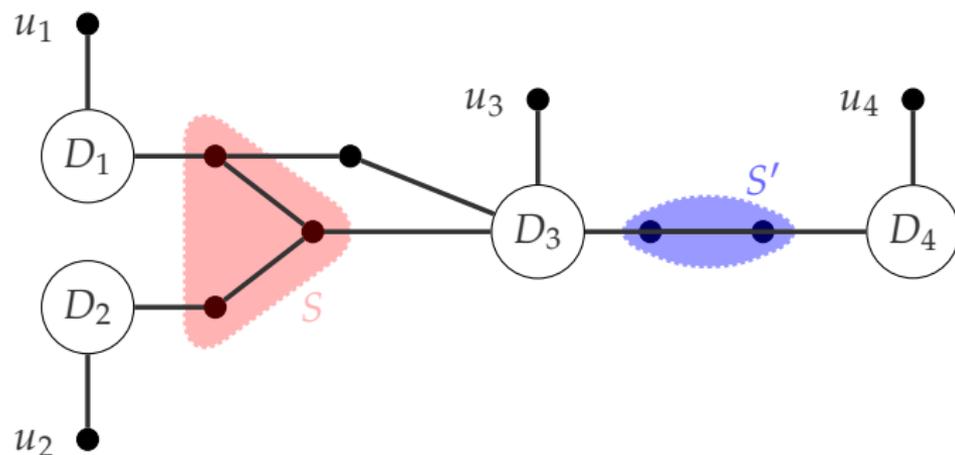


☞ $A(S) = \{D_1, D_2, D_3\}$;

☞ il existe une bijection entre S et $A(S)$;

☞ $\forall i$, il existe $u_i \in N[D_i]$ sans voisin dans S ...

Idée de la preuve



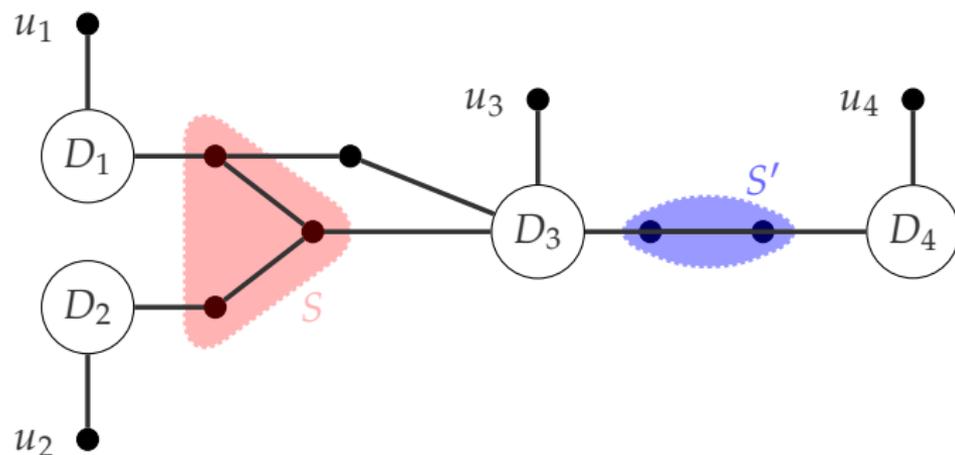
☞ $A(S) = \{D_1, D_2, D_3\}$;

☞ il existe une bijection entre S et $A(S)$;

☞ $\forall i$, il existe $u_i \in N[D_i]$ sans voisin dans S ...

$\Rightarrow \nexists$ ensemble semi-pertinent S t.q. $A(S) = \cup_i D_i$.

Idée de la preuve



☞ $A(S) = \{D_1, D_2, D_3\}$;

☞ il existe une bijection entre S et $A(S)$;

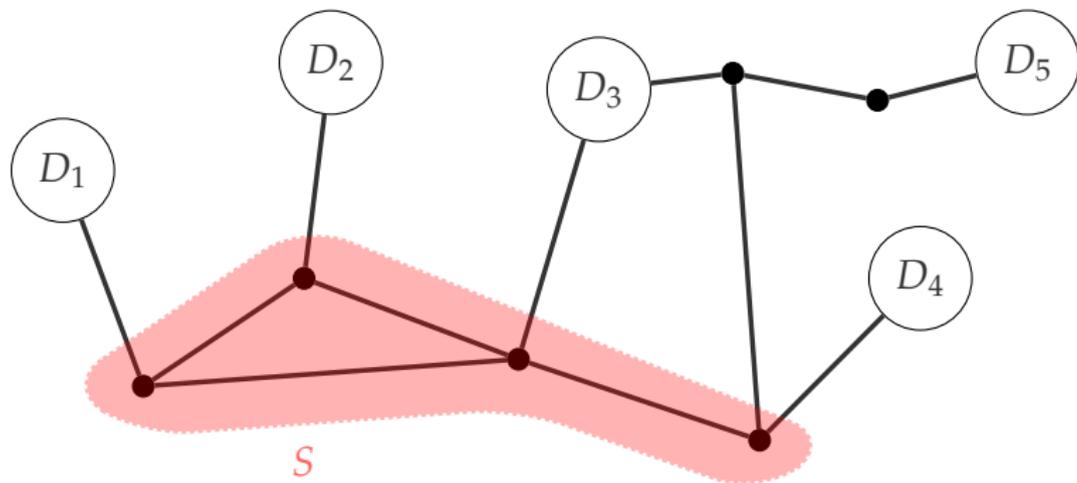
☞ $\forall i$, il existe $u_i \in N[D_i]$ sans voisin dans S ...

$\Rightarrow \nexists$ ensemble semi-pertinent S t.q. $A(S) = \cup_i D_i$.

(sinon $D \cup S$ est un dominant connexe de taille $\leq 2\gamma$).

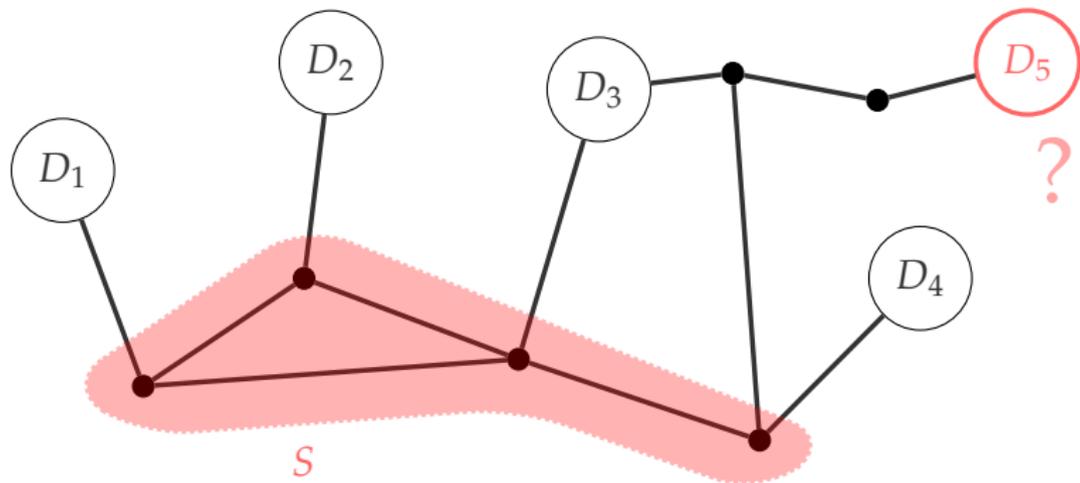
Idée de la preuve

S est **maximal** : $\nexists S'$ t.q. $|S'| \leq |S| + 1$ et $A(S) \not\subseteq A(S')$.



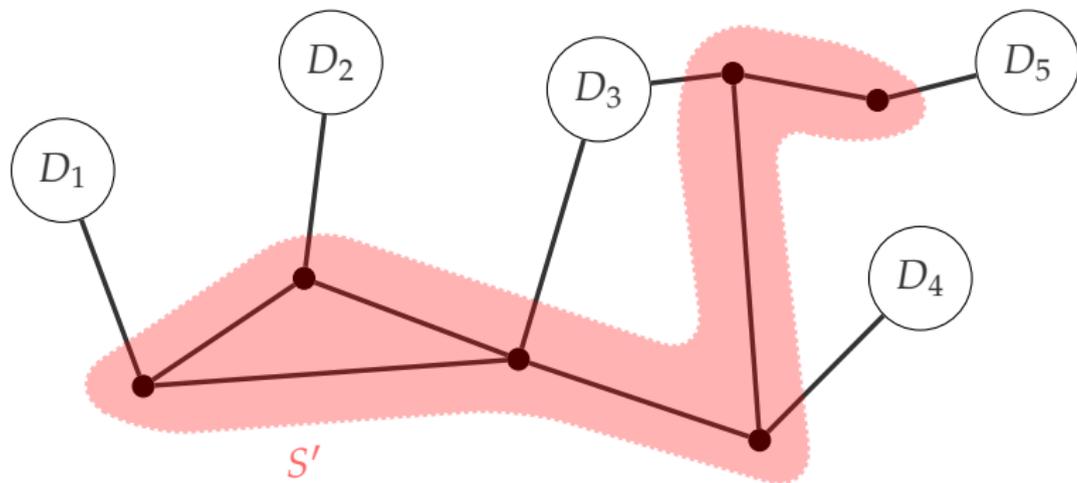
Idée de la preuve

S est **maximal** : $\nexists S'$ t.q. $|S'| \leq |S| + 1$ et $A(S) \subsetneq A(S')$.



Idée de la preuve

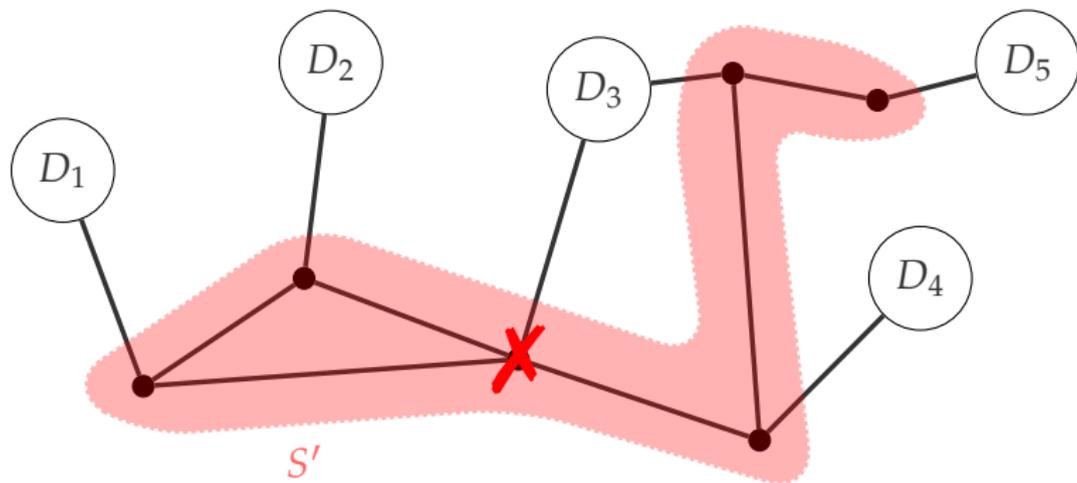
S est **maximal** : $\nexists S'$ t.q. $|S'| \leq |S| + 1$ et $A(S) \not\subseteq A(S')$.



$$|S'| = |S| + 2 !$$

Idée de la preuve

S est **maximal** : $\nexists S'$ t.q. $|S'| \leq |S| + 1$ et $A(S) \subsetneq A(S')$.



S' n'est pas connexe !

S est **maximal** : $\nexists S'$ t.q. $|S'| \leq |S| + 1$ et $A(S) \not\subseteq A(S')$.

Lemme

Pour tout **ensemble semi-pertinent maximal** S , il existe un ensemble semi-pertinent S' t.q. $A(S) \cup A(S') = \cup_i D_i$ et $|A(S) \cap A(S')| = 1$

S est **maximal** : $\nexists S'$ t.q. $|S'| \leq |S| + 1$ et $A(S) \not\subseteq A(S')$.

Lemme

Pour tout **ensemble semi-pertinent maximal** S , il existe un ensemble semi-pertinent S' t.q. $A(S) \cup A(S') = \cup_i D_i$ et $|A(S) \cap A(S')| = 1$

☞ $\gamma_c(G) = 2\gamma(G) + 1$; et

☞ $|D_i^0| = 1, 1 \leq i \leq g$.

Rappel :

☞ $\gamma_c(G) = 2\gamma(G) + 1$; et

☞ $|D_i^0| = 1, 1 \leq i \leq g$.

Rappel :

☞ $\gamma_c(G) = 2\gamma(G) + 1$; et

☞ $|D_i^0| = 1, 1 \leq i \leq g$.

Lemme

$D_1 = \{w_1\}$ et donc $|D_1| = 1$.

Rappel :

☞ $\gamma_c(G) = 2\gamma(G) + 1$; et

☞ $|D_i^0| = 1, 1 \leq i \leq g$.

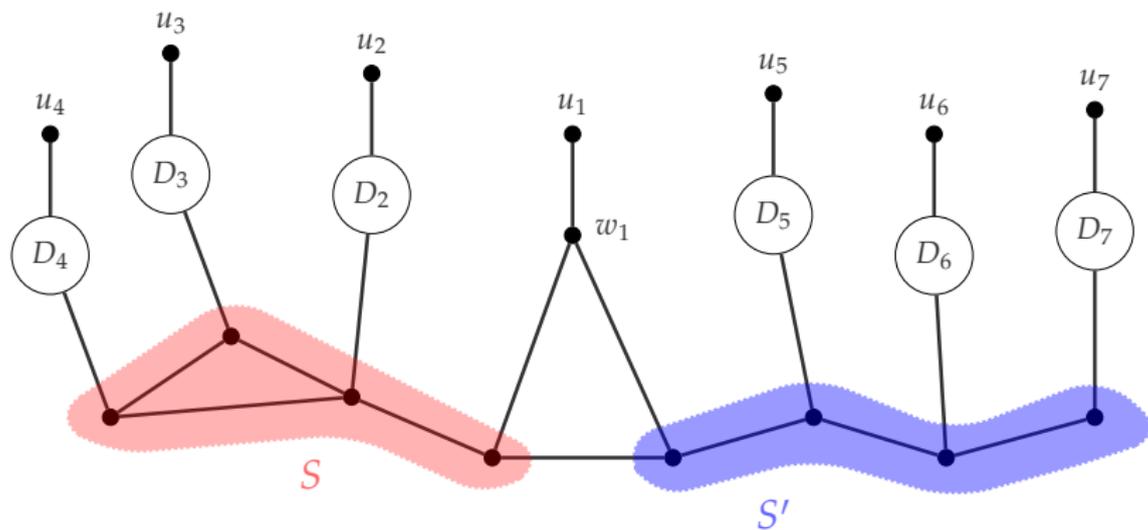
Lemme

$D_1 = \{w_1\}$ et donc $|D_1| = 1$.

☞ Si $D^* = D \cup S \cup S' \setminus \{w_1\}$ est un dominant connexe tel que $|D^*| = 2\gamma(G)$. ☺

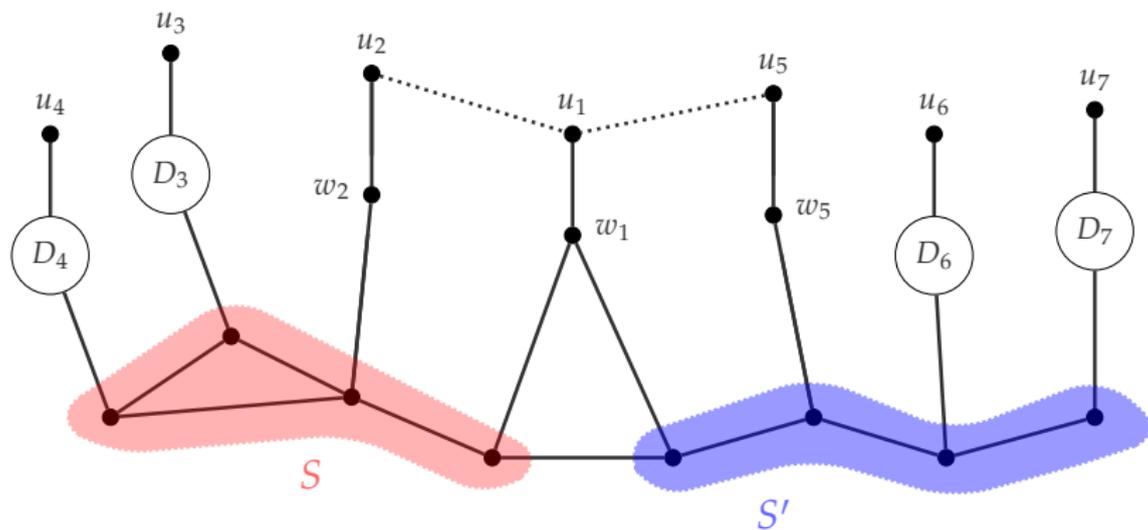
Idée de la preuve

- ☞ Sinon, w_1 a un voisin privé dans D^*
 $\Rightarrow G$ contient un P_9 , C_9 ou H . ☺



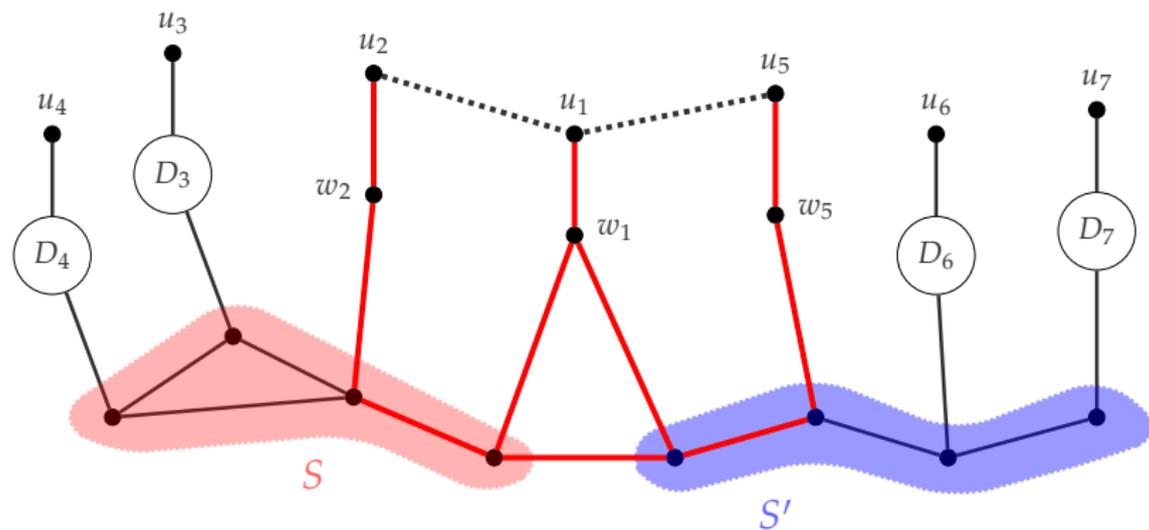
Idée de la preuve

- ☞ Sinon, w_1 a un voisin privé dans D^*
⇒ G contient un P_9 , C_9 ou H . ☺



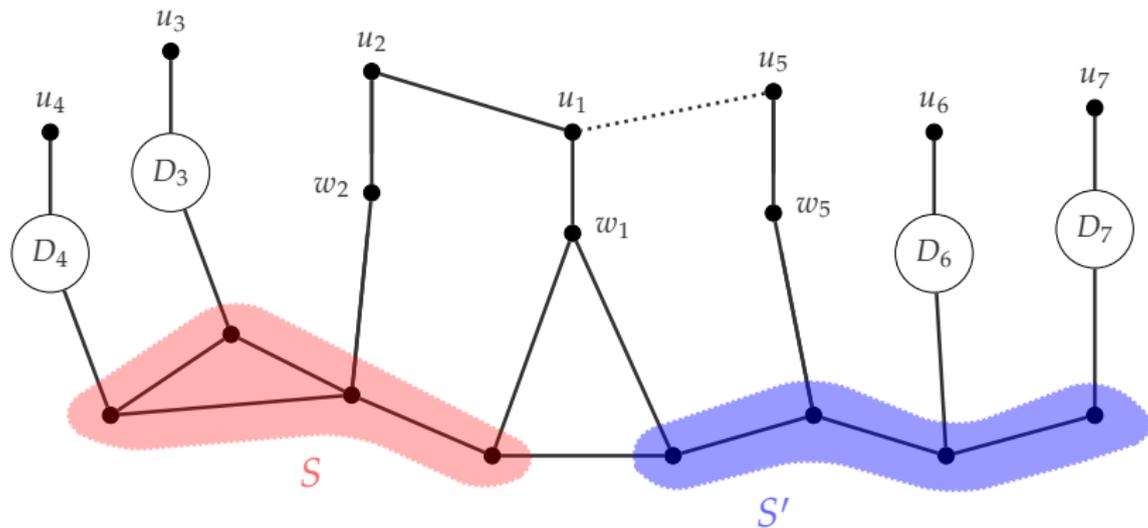
Idée de la preuve

- ☞ Sinon, w_1 a un voisin privé dans D^*
⇒ G contient un P_9 , C_9 ou H . ☺



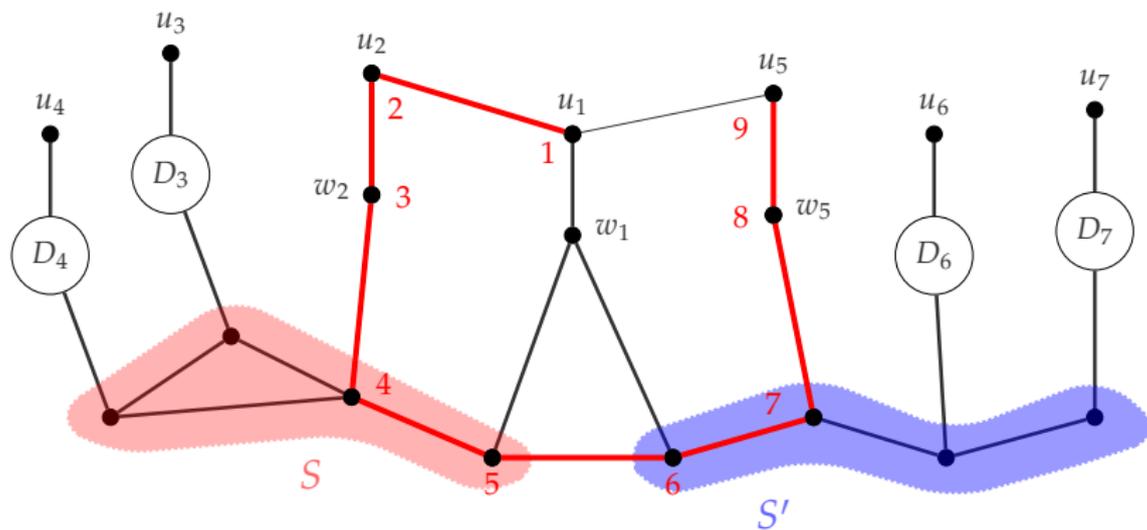
Idée de la preuve

- ☞ Sinon, w_1 a un voisin privé dans D^*
 $\Rightarrow G$ contient un P_9 , C_9 ou H . ☺



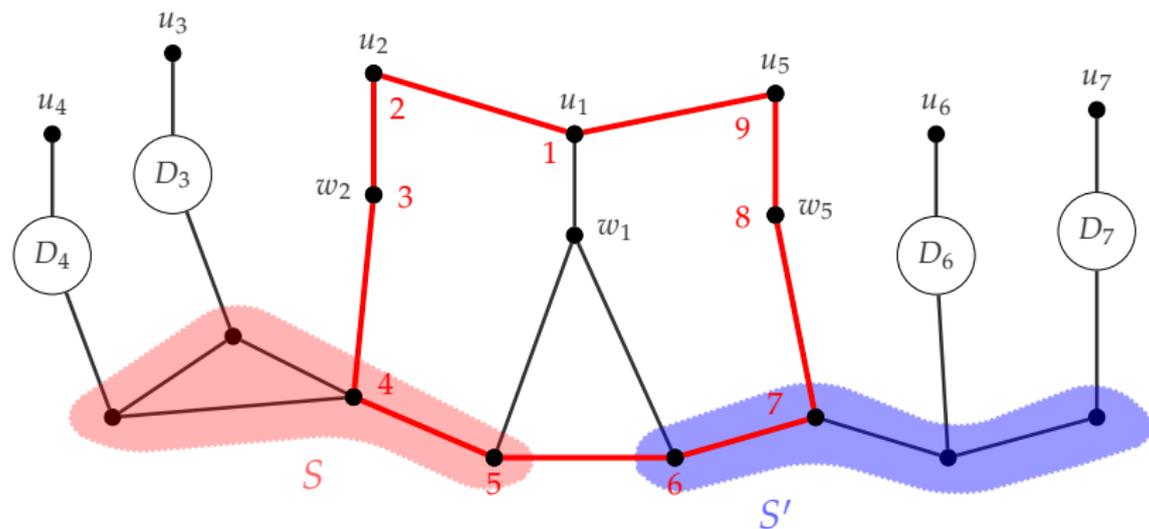
Idée de la preuve

- ☞ Sinon, w_1 a un voisin privé dans D^*
⇒ G contient un P_9 , C_9 ou H . ☺



Idée de la preuve

- ☞ Sinon, w_1 a un voisin privé dans D^*
 $\Rightarrow G$ contient un P_9 , C_9 ou H . ☺



Merci de votre attention!

Un extra...

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\gamma(P_n)$	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5
$\gamma_c(P_n)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
PoC	1	$\frac{3}{2}$	2	< 2	2	$\frac{7}{3}$	2	$< \frac{7}{3}$	2.5	2.2	2.4	2.6