

Algorithmes et structures de données avancés : TD 6 Corrigé

Problèmes NP complets

Exercice 6.1 Problèmes **CLIQUE**

Considérer les trois variantes du problème NP-complet **CLIQUE** :

Variante 1 Considérer le graphe $G = (V, E)$ et un $k \in \mathbf{N}$. Est-ce qu'il existe une clique de taille k dans G ?

Variante 2 Considérer le graphe $G = (V, E)$. Déterminer le plus grand k tel que le graphe G contienne une k -clique.

Variante 3 Considérer le graphe $G = (V, E)$. Déterminer une clique C dans G telle qu'aucune autre clique C' dans G contienne plus de sommets que C .

Considérer également le graphe $G_1 = (V, E)$ suivant :

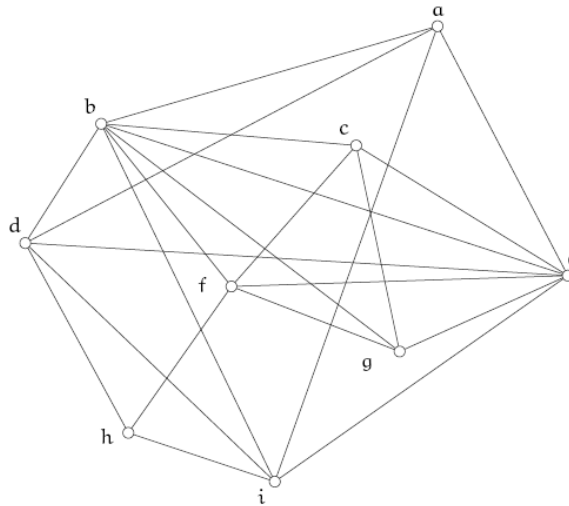


Figure 1: Le graphe $G=(V,E)$.

1. Résoudre la variante 1 du problème **CLIQUE** pour le graphe G_1 avec $k = 4$.
Il existe bien une clique de taille $k=4$ dans le graphe G_1 .
2. Résoudre la variante 2 du problème **CLIQUE** pour le graphe G_1 .
La plus grande clique dans le graphe G_1 est $k=5$.
3. Résoudre la variante 3 du problème **CLIQUE** pour le graphe G_1 .
Il y a deux possibilités : $G_{opt1} = (V_{opt1}, E_{opt1})$ avec $V_{opt1} = \{i, d, b, a, e\}$ ou bien $G_{opt2} = (V_{opt2}, E_{opt2})$ avec $V_{opt2} = \{b, c, e, f, g\}$
4. Qu'est-ce qui change des solutions précédentes si on élimine l'arête (f, g) ?
Rien ne change, les solutions précédentes sont aussi valides.

Exercice 6.2 *Problèmes de décision et problèmes d'optimisation du problème CLIQUE*

La première variante du problème **CLIQUE** s'appelle problème de décision pour les cliques, la deuxième et troisième variantes sont des problèmes d'optimisation. Dans la deuxième variante, la valeur de l'optimisation est satisfaisante, tandis que la troisième variante demande de déterminer la solution optimale. Chaque algorithme pour la variante 3 résout les variantes 2 et 1, et chaque algorithme pour la variante 2 résout la variante 1.

Théorème 1 *Si la variante 1 du problème CLIQUE peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non-déterministe, la variante 2 peut être résolu également en temps polynomial par un algorithme non-déterministe.*

Théorème 2 *Si la variante 2 du problème CLIQUE peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non-déterministe, la variante 3 peut être résolu également en temps polynomial par un algorithme non-déterministe.*

1. Prouver le Théorème 1.

Nous considérons $n = |V|$ différentes entrées pour la variante 1 du problème CLIQUE, avec le paramètre k de $1, \dots, n$. Chaque un des n problèmes peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non-déterministe. Le plus grand k pour lequel la réponse de la variante 1 est "oui", est la solution pour la variante 2 du problème CLIQUE. (Bien sûr, nous pouvons utiliser la recherche binaire (dichotomique) au lieu de la recherche linéaire).

2. Prouver le Théorème 2.

Nous calculons d'abord la taille k_{opt} de la plus grande CLIQUE de G avec la variante 2. Après, nous traitons les arêtes de E une après l'autre. Nous allons éliminer une première arête de G , et nous calculons la taille k'_{opt} du graphe G' résultant. Si $k'_{opt} = k_{opt}$, nous avons plus besoin de cet arête. Si $k'_{opt} < k_{opt}$, nous avons besoin de cet arête pour une clique de taille k_{opt} , et nous rajoutons cet arête à nouveau à G' . Après avoir traité tous les arêtes de cette manière, nous obtenons un graphe G' duquel les arêtes forment une CLIQUE de taille k .