

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par David RENAULT

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Informatique

Étude des graphes planaires cofinis selon leurs groupes de symétries

Soutenue le : 7 décembre 2004

Après avis de :

MM.	Antonio MACHÌ	Professeur	
	Maurice NIVAT	Professeur	Rapporteurs
	Hamish SHORT	Professeur	

Devant la commission d'examen formée de :

MM.	Bruno COURCELLE	Professeur	Président
	Maurice NIVAT	Professeur	Rapporteur
	Antonio MACHÌ	Professeur	Rapporteur
	Hamish SHORT	Professeur	Rapporteur
	Philippe NARBEL	Maître de conférences	Examineur
	Géraud SÉNIZERGUES ...	Professeur	Examineur

Étude des graphes planaires cofinis selon leurs groupes de symétries

David RENAULT

Remerciements

S’engager à faire une thèse, c’est un peu comme partir à l’inconnu. Lorsque j’ai rencontré Philippe Narbel et Géraud Sénizergues lors de ma première année à Bordeaux, je me rends compte aujourd’hui que je n’avais aucune idée de la route sur laquelle j’allais m’engager. Néanmoins, j’ai eu la chance de pouvoir rencontrer des personnes capables de me guider sur cette route, d’accepter mes méthodes de travail, de me soutenir dans mes efforts et surtout de me remettre à ma place lorsque c’était nécessaire. Sans l’aide de ces personnes, un tel travail n’aurait pas été possible.

Mes premiers remerciements vont à mes directeurs de thèse. À Philippe Narbel, pour sa présence virtuellement constante, son soutien dans les moments difficiles, ses discussions interminables, ses relectures pleines de critiques – et l’on ne se remet pas en cause sans critiques –, son tableau ineffaçable et son analyse statistique des conventions de langage et d’écriture dans les articles scientifiques de langue étrangère. À Géraud Sénizergues pour ses réponses à – presque – toutes mes questions, sa rigueur scientifique – dont j’espère avoir pris un peu de graine –, ses idées et ses questions, le tact et la gentillesse dont il a toujours fait preuve à mon égard, et tous ces mercredis soirs dont je l’ai dépouillé sans vergogne.

Je tiens ensuite à remercier les personnes qui ont participé à l’achèvement de cette thèse, en premier lieu Bruno Courcelle, pour avoir accepté de présider mon jury de thèse, mais aussi Maurice Nivat, Antonio Machì et Hamish Short pour avoir accepté de relire mon mémoire attentivement et de poser des questions pertinentes, rendant la lecture de ce mémoire – je l’espère – un peu plus accessible. Je pense également à Thomas Chaboud, qui m’a proposé son aide pour comprendre son travail, ainsi qu’à Christophe Pittet et Étienne Ghys dont les questions et le soutien m’ont été précieux.

J’ai également une pensée pour les personnes qui m’ont donné le goût des mathématiques par leur charisme, en particulier Philippe Espéret – j’ai mis du temps à comprendre la valeur de ses enseignements –, mais aussi Marc Perret, qui m’a ouvert les yeux sur les richesses de la théorie des groupes, et enfin Claude Danthony, dont les cours d’analyse ont été une révélation dans de nombreux domaines.

Je remercie finalement les personnes qui m’ont soutenu tout au long de ces trois années, dans les bons moments ainsi que dans les passes difficiles. Au nombre de ces personnes, je compte d’abord celles qui ont été les plus proches en travaillant autour de moi, en particulier Benjamin et Bertrand pour avoir passé autant de temps que moi à écrire cette satanée thèse, Yvan pour ses efforts à m’expliquer les mots de Dyck, Julien et Fabrice pour avoir organisé les mini-exposés de travail, Jean-Baptiste pour ses intérêts pour l’informatique qui partageaient souvent les miens, et plus généralement tous ceux qui m’ont rendu la vie plus facile d’une manière ou d’une autre : Afif, Guillaume, Didier, Anthony, Yon, Nicolas, Bertrand, Emmanuelle, Sylvie, Laurent, Olivier, Damien, Sébastien . . .

Je remercie ceux qui sont plus éloignés mais qui sont restés en contact pendant ces trois années, en particulier Pierre-Fabrice, Philippe et Arnaud.

Aussi, je remercie les personnes du LaBRI qui m'ont soutenu ou facilité d'une manière ou d'une autre mon travail. Je pense en particulier à Serge Dulucq, Jean-Guy Penaud, Robert Strandh, Maylis Delest, Olivier Ly, Frédérique Carrère, Giuliana Bianchi, Anne Dicky, Philippe Biais, Françoise Brinquin, Paule Delrue . . .

Je remercie enfin mes parents, ma sœur, et Marion pour leur présence auprès de moi. C'est bon de savoir qu'il existe un monde où les graphes de Cayley ne font pas la loi.

Étude des graphes planaires cofinis selon leurs groupes de symétries

Résumé : Les graphes cofinis constituent une famille de graphes possédant un groupe de symétries non trivial, comme les graphes de Cayley ou les graphes sommet-transitifs. Lorsque ces graphes sont en plus planaires, ces symétries peuvent se traduire de manière simple grâce à des symétries du plan dans lequel les graphes sont dessinés. L'ensemble de ces symétries ou automorphismes permet alors de décrire globalement le graphe à l'aide de données géométriques locales, par des structures appelées schémas d'étiquetage.

Dans cette thèse, nous étudions les groupes de symétries et décrivons les schémas d'étiquetage des graphes planaires cofinis possédant une représentation topologique simple : les graphes planaires localement finis. Nous montrons comment ces schémas permettent de caractériser le graphe et ses plongements. Cette analyse permet d'énumérer cette famille des graphes planaires cofinis, en particulier lorsqu'ils sont de Cayley ou sommet-transitifs.

À partir de ces résultats, nous nous intéressons à la structure des groupes d'automorphismes de cette famille de graphes. Des problèmes de la théorie combinatoire des groupes usuellement indécidables se trouvent devenir décidables dans notre cadre : c'est le cas en particulier des problèmes du mot, simple et généralisé. Les problèmes de décidabilité de la logique permettent de classer ces graphes en deux grandes familles, selon leur largeur arborescente et la géométrie de leur plongement.

Enfin, la question de l'extension de cette description à une famille de graphes plus généraux est étudiée. La classification de ces graphes en terme de bouts et de points d'accumulation dans les plongements permet d'obtenir des informations sur la forme que peuvent prendre les plongements des graphes planaires cofinis non localement finis. Nous discutons alors des difficultés d'extension de la méthode "localement finie" au cas général.

Mots-clef : graphes de Cayley, graphes planaires, sommet-transitifs, cofinis, groupes d'automorphismes, schéma d'étiquetage, problèmes du mot simple et généralisé

Discipline : Informatique

Analysis of the cofinite planar graphs led by their groups of symmetries

Abstract : The cofinite graphs represent a family of graphs possessing a non-trivial group of symmetries, such as the Cayley graphs and the vertex-transitive graphs. When such graphs are planar, these symmetries correspond merely to symmetries of the plan in which the graphs are embedded. This set of symmetries – or, more precisely, automorphisms – can provide a global description of the graph from local data, by means of structures called labeling schemes.

In this thesis, we study the groups of symmetries and describe the labeling schemes of the planar cofinite graphs possessing a simple topological representation : the planar locally finite graphs. We prove how a labeling scheme allows to characterize the graph and its embeddings. This analysis allows the enumeration of this family of the planar cofinite graphs, in particular when they are vertex-transitive or Cayley graphs.

With these results, it is possible to analyze the structure of the groups of automorphisms of this family of graphs. There exist problems of the combinatorial group theory unsolvable in general that become solvable within this framework. That is the case in particular of the simple and generalized word problems. Problems of decidability of logics allow for the classification of these graphs into two families, depending on their treewidth and the geometry of their embedding.

Finally, we raise the question of the extension to the more general family of the cofinite planar graphs. The classification of these graphs in terms of number of ends and of accumulation points in their embeddings provides information on the structure of the embeddings of these more general graphs. We discuss the problems raised by the extension of the “locally finite” method to the general case.

Keywords : Cayley graphs, planar graphs, vertex-transitive, cofinite, automorphisms group, labeling scheme, simple and generalized word problem

Field : Computer Science

Table des matières

Résumé / Abstract	iii
Notations	ix
Introduction	1
1 Généralités	7
1.1 Théorie des graphes	7
1.1.1 Graphes – Généralités	7
1.1.2 Morphismes de graphes	9
1.1.3 Graphes et espaces métriques	9
1.2 Théorie des groupes	10
1.2.1 Groupes – Généralités	10
1.2.2 Morphismes de groupes	10
1.2.3 Actions de groupes	13
1.3 Géométrie des surfaces	15
1.3.1 Surfaces – Généralités	15
1.3.2 Plan tangent	16
1.3.3 Surfaces de Riemann	17
1.4 Géométries planaires	18
1.4.1 La géométrie euclidienne	19
1.4.2 La géométrie sphérique	20
1.4.3 La géométrie hyperbolique	21
1.4.4 Exemples de différences entre les géométries	22
1.5 Structures combinatoires planaires	23
1.5.1 Graphes planaires	23
1.5.2 Complexes	26
1.5.3 Pavages	27
2 Graphes localement finis	29
2.1 Propriétés des plongements localement finis	29
2.2 Graphes sommet-transitifs localement finis	31
2.3 Graphes cofinis localement finis	35
2.4 Invariants géométriques	37
2.4.1 Coloration du graphe	38
2.4.2 Cas de faces finies - Lemmes de Chaboud	39
2.4.3 Cas de faces infinies	43
2.4.4 Discussion concernant les graphes 3-connexes	45

3	Schémas d'étiquetage	47
3.1	Étiquetage des graphes de Cayley	47
3.1.1	Schéma d'étiquetage	47
3.1.2	Automate des bords	48
3.1.3	Vecteurs de types valides	49
3.2	Étiquetage des graphes sommet-transitifs	50
3.2.1	Schémas d'étiquetage	50
3.2.2	Reconstruction des faces	51
3.2.3	Automate des bords	53
3.3	Construction de plongements	55
3.4	Étiquetage des graphes cofinis	60
3.4.1	Schéma d'étiquetage	60
3.4.2	Automate des bords	60
3.4.3	Caractéristique du graphe	62
3.4.4	Existence du plongement – Cas cofini	64
4	Applications à la théorie combinatoire des groupes	67
4.1	Classification des graphes sommet-transitifs	67
4.2	Le problème du mot	71
4.3	Le problème du mot généralisé	75
4.3.1	Approche géométrique du problème	76
4.3.2	Réalisation de cette approche	81
4.3.3	Décidabilité de la méthode géométrique	85
4.4	Décidabilité des logiques	87
4.4.1	Logique du premier et du second ordre	87
4.4.2	Graphes de groupes	90
4.4.3	Sous-groupes libres	93
4.5	Groupes et Surfaces	94
4.5.1	Orbifolds et manifolds	94
4.5.2	Construction de manifolds	96
4.5.3	Applications aux graphes cofinis	97
5	Points d'accumulation	101
5.1	Planarité et nombre de bouts	101
5.1.1	Graphes à un bout	101
5.1.2	Nombre de bouts d'un graphe cofini	102
5.2	Points d'accumulation essentiels	104
5.2.1	Généralités	105
5.2.2	Nombre de singularités essentielles	106
5.3	Graphes cylindriques	108
5.4	Graphes planaires 3-connexes	110
5.5	Graphes de moindre connexité	112
	Conclusion	117

A Exemples d'énumérations	119
Liste des exemples	119
A.1 Graphes de Cayley localement finis de degré 3	120
A.2 Graphes de Cayley localement finis de degré 4	121
A.3 Graphes transitifs localement finis de degré 3	124
A.4 Graphes transitifs localement finis de degré 4	126
A.5 Exemples de graphes cofinis localement finis	132
B Implémentation des algorithmes	135
B.1 Dessin des plongements : <code>draw</code>	135
B.2 Énumération des graphes : <code>enum</code>	137
Bibliographie	139
Index	145

Notations

Ensembles de nombres

\mathbb{N}	l'ensemble des entiers naturels positifs
\mathbb{Z}	l'ensemble des entiers naturels relatifs
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	l'ensemble des nombres complexes
\mathbb{A}^*	l'ensemble \mathbb{A} privé de son zéro
\mathbb{A}_+	l'ensemble \mathbb{A} restreint aux nombres positifs
$[a; b]$	l'ensemble des nombres réels compris entre a et b
$\llbracket a; b \rrbracket$	l'ensemble des nombres entiers compris entre a et b

Théorie des groupes

G	un groupe, fini ou infini
H	un sous-groupe de G
$[G : H]$	l'index de H par rapport à G
\mathbb{K}	un corps commutatif
\mathcal{S}_n	le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments
$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$	le groupe des matrices inversibles sur l'espace vectoriel \mathbb{K}^n
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	le groupe des entiers modulo n muni de l'addition
$\mathcal{O}(E)$	le groupe des isométries de l'ensemble E
$\mathcal{O}^+(E)$	le groupe des isométries directes de l'ensemble E

Théorie des graphes

Γ	un graphe
Λ, Θ	des sous-graphes de Γ
C_n	le cycle d'ordre n
\mathbb{Z}	le cycle infini
$G_{m,n}$	la grille d'ordre m, n
\mathbb{Z}^2	la grille infinie
K_n	le graphe complet à n sommets
$K_{m,n}$	le graphe biparti complet à (m, n) sommets

Topologie

V, E	des ensembles
$V \cup E$	la réunion des ensembles V et E
$V \cap E$	l'intersection de ces deux ensembles
\bar{E}	l'adhérence de E
$\overset{\circ}{E}$	l'intérieur de E
∂E	le bord de E , égal à $\bar{E} \setminus \overset{\circ}{E}$

Géométrie et Surfaces

\mathcal{S}	une surface
$T_p \mathcal{S}$	son espace tangent en p
\mathbb{S}^2	la sphère unité de \mathbb{R}^3
\mathbb{R}^2	le plan euclidien usuel
\mathbb{H}^2	le plan hyperbolique
$\mathcal{D}[0; 1]$	le disque unité ouvert du plan euclidien

Introduction

Tyger, Tyger, burning bright
In the forests of the night,
What immortal hand or eye
Could frame thy fearful symmetry ?

The Tyger – Songs of experience

WILLIAM BLAKE

La notion de symétrie, selon H. Weyl [Wey64], est rattachée dans le langage courant à deux significations principales. Initialement, le mot symétrie, du grec $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ englobe les notions d'équilibre et de proportion, d'harmonie entre les différentes parties formant un tout. Cette signification a été modifiée dans le langage géométrique pour désigner la propriété suivante : si un objet géométrique complexe est vu comme un arrangement de parties simples, une symétrie consiste à en réarranger les parties de manière à laisser l'objet globalement invariant.

Prenons l'exemple d'une sphère dont l'image se reflète dans un miroir. Le reflet de la sphère est entièrement déterminé par la position de la sphère par rapport au miroir. La symétrie de cette configuration est la transformation échangeant la sphère et son reflet. Plaçons maintenant un deuxième miroir parallèle au premier, de manière à ce que la sphère se situe au centre des deux miroirs. L'objet possède alors – théoriquement – une infinité d'images dans les miroirs, alignées le long d'un l'axe perpendiculaire aux deux surfaces. L'ensemble de ces reflets possède alors les symétries induites par les deux miroirs. La beauté de la construction réside dans le fait que cet ensemble est infini et entièrement déterminé par deux symétries.

Ce mémoire porte sur l'étude d'objets géométriques particuliers, les graphes planaires cofinis, et de leurs groupes de symétries. Dans cette famille de graphes, comme dans l'exemple des miroirs, la structure globale du graphe dérive d'une connaissance locale du graphe et de ses symétries. L'objectif de cette thèse consiste à construire une représentation locale de ces graphes, dans le but de les représenter, de les énumérer et de les classer. La famille des graphes planaires cofinis contient deux familles étroitement liées à la théorie des groupes, les graphes sommet-transitifs planaires et les graphes de Cayley planaires, ainsi que la famille des pavages périodiques euclidiens.

Le choix de se restreindre aux graphes planaires est basé sur plusieurs raisons. D'une part, cette propriété géométrique confère aux symétries du graphe des ressemblances avec les symétries du plan. En particulier, cela permet de classer ces symétries sous des formes simples. D'autre part, ce choix permet d'envisager l'analyse de problèmes de décision insolubles dans le cas général, ceci en s'intéressant aux interactions entre la structure des graphes et la géométrie dans laquelle ils sont plongés. Enfin, l'étude des groupes de symétries du plan permet de s'intéresser, par passage au quotient, à la théorie des surfaces compactes et des graphes plongés dans ces surfaces.

L'approche utilisée pour l'étude des graphes planaires cofinis insiste sur la caractère constructif et, lorsque c'est possible, algorithmique de la démarche. Les propriétés des classes de graphes identifiées ainsi que de leur plongements dans le plan permettent de les représenter par des structures de données finies, structures qui permettent ensuite d'envisager des algorithmes de construction de plongements et de résolution de problèmes sur les graphes. Le chemin que l'on parcourt dans ce mémoire recoupe naturellement des domaines déjà explorés de la théorie des graphes et des groupes infinis, en particulier pour ce qui est des résultats de classification. Ce mémoire tente de mettre en valeur et d'unifier ces résultats, pour des perspectives autant théoriques qu'algorithmiques.

Historique

La famille des graphes planaires cofinis a déjà fait l'objet de nombreuses études. Dès 1896, Maschke [Mas96] énumère les graphes de Cayley planaires finis, et montre que ces graphes correspondent à des sous-groupes finis du groupe des isométries de la sphère, ou plus simplement à des polyèdres convexes uniformes. Le cas des graphes planaires sommet-transitifs finis est traité plus récemment par Fleischner et Imrich [FI79] et généralise l'étude de Maschke à l'ensemble des sous-groupes finis des isométries de la sphère.

Pour ce qui est des graphes planaires, le cas des graphes de Cayley infinis a longuement été étudié par Levinson [Lev79, Lev82, LH88], qui a caractérisé la forme que pouvaient prendre les présentations de tels groupes, et étudié leurs plongements de manière géométrique. Des caractérisations des présentations de groupes agissant discrètement sur les surfaces planaires apparaissent dans [Wil66, ZVC80, Mon87]. Droms [DSS98] caractérise sous forme de graphes de groupes les groupes possédant un graphe de Cayley planaire infini en termes de graphes de groupes. En se basant sur des propriétés géométriques, Chaboud [Cha95] décrit de manière systématique les graphes de Cayley planaires normaux, donnant une représentation de leurs plongements sous forme combinatoire et énumérant leurs présentations. Plus généralement, ces études ont permis de s'intéresser à certaines classes de graphes cofinis planaires [Bab97].

Le problème des graphes cofinis non planaires a aussi été le sujet de nombreuses recherches, surtout dans le cas fini. Les graphes sommet-transitifs finis ont été énumérés, et ce pour un nombre de sommets inférieur à 26, par McKay *et al.* [McK79, Roy97]. Le problème des graphes sommet-transitifs mais pas de Cayley a de la même façon été approfondi [MP94, MP96] à l'aide de techniques d'énumérations complexes, mais qu'il n'est pas évident de pouvoir étendre. Pour ce qui est des graphes de Cayley, Effler [Eff00] traite du cas des graphes de Cayley finis de faible degré, et s'intéresse aux problèmes de l'isomorphisme et de l'existence de chemins hamiltoniens. Le cas des graphes de Cayley infinis quant à lui se rattache plus naturellement à la théorie des groupes infinis [Eps92, CDP90] et constitue en soi un domaine beaucoup plus vaste que le cas planaire.

Le travail présenté dans ce mémoire étend les descriptions géométriques des graphes de Cayley de Chaboud, à l'ensemble des graphes planaires cofinis topologiquement localement finis. Une description systématique de cette famille de graphes à l'aide d'une structure de données finie présente divers intérêts :

- Tout d'abord, elle permet de décrire intégralement les graphes sommet-transitifs planaires localement finis, en les reliant à des groupes de transformations du plan. Au final, cela permet d'obtenir une description de ces graphes et de retrouver des résultats de classification. Les graphes planaires cofinis se trouvent ainsi liés aux groupes de surfaces, cristallographiques et fuchsien [Bea83].

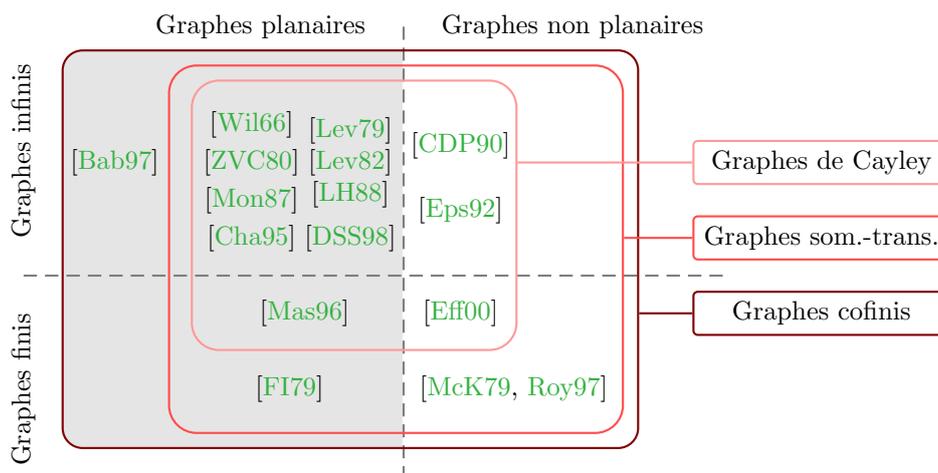


FIG. A: Récapitulatif des travaux d'énumération et de caractérisation effectués sur les graphes cofinis, selon que ces graphes soit planaires (méthodes géométriques) ou non (méthodes générales), et selon leur groupe de symétries. La zone grisée délimite les graphes planaires cofinis qui font l'objet de ce mémoire.

– Ensuite, le fait d'obtenir une représentation de ces graphes grâce à un objet combinatoire permet d'envisager des traitements algorithmiques de problèmes liés à la théorie combinatoire des groupes, comme les problèmes de Dehn, ou encore des questions de croissance [Har00]. De plus, de nombreux algorithmes concernant les réseaux [HD97] ou encore les automates cellulaires [MD98] utilisent des graphes sommet-transitifs. Grâce à cette représentation, il est envisageable de pouvoir adapter les graphes à des problèmes spécifiques.

– Enfin, l'idée de représentation d'un graphe par ses propriétés locales permet d'unifier les propriétés des graphes planaires dépendantes de la géométrie, qu'elle soit sphérique, euclidienne ou hyperbolique. Par exemple, les graphes planaires considérés permettent de représenter des pavages planaires et d'étendre la notion usuelle de pavage archimédien du plan euclidien [GS87] au plan hyperbolique. Plus généralement, il est possible de concevoir des algorithmes indépendants de la géométrie, mais aussi d'étudier les différences entre les propriétés algorithmiques du plan hyperbolique et du plan euclidien (cf. par exemple [BMS99]).

Plan du mémoire

La famille des graphes planaires cofinis étant relativement vaste, leur étude nécessite avant tout de se placer dans un cadre bien défini. Chaboud se cantonne au cas des graphes possédant un pavage normal. La première partie de ce mémoire s'attaque au cas des graphes planaires cofinis, qui sont topologiquement localement finis. Les propriétés géométriques des plongements de ces graphes simplifient considérablement la structure des graphes eux-mêmes. Le chapitre 2 met en valeur ces propriétés géométriques et démontre comment elles contraignent la connexité du graphe et à ses invariants locaux. Il caractérise les graphes cofinis qui sont aussi des pavages normaux, et décrit leur complémentaire dans la classe, constitués par des graphes 2-séparables. Les plongements et les automorphismes de ces graphes y sont caractérisés. La démarche adoptée dans les preuves est constructive : la construction des graphes et de leurs plongements y est présentée de manière explicite.

Le chapitre 3 définit, à partir de ces invariants, des objets permettant de représenter localement la structure de ces graphes et de leurs symétries, objets appelés *schémas d'étiquetage*. Ces schémas décrivent les constituants géométriques de ces graphes, en termes d'arêtes et de faces, et la façon dont ils sont agencés. Ainsi, il est possible de reconstruire la totalité du graphe en se basant sur ses symétries locales. La question de l'existence effective de plongements réalisant les graphes localement finis met en valeur le besoin de scinder le problème selon le choix de la géométrie du plan : sphérique, euclidienne ou hyperbolique. Les plongements sont alors construits dans la géométrie appropriée de manière à ce que leurs symétries soient des isométries de cette géométrie.

A partir de cette forme de représentation, il est possible de tirer de nombreuses applications (chapitre 4). Le premier type d'application est l'énumération explicite des schémas d'étiquetages des graphes de Cayley et sommet-transitifs planaires cofinis :

Théorème 4.1 (Énumération des schémas d'étiquetage)

Étant donné un nombre $d \geq 2$, il est possible d'énumérer par algorithme tous les graphes de Cayley (resp. sommet-transitifs) ayant comme degré interne d , chaque graphe étant décrit par son schéma d'étiquetage et son vecteur de type.

L'énumération de ces graphes est explicitée pour les graphes de faible degré, et des exemples apparaissent Annexe A. L'une des applications directe d'un tel résultat est, dans la mesure où il est possible de représenter les graphes par un schéma d'étiquetage, d'énumérer les groupes possédant ces graphes comme graphes de Cayley :

Corollaire 4.2 (Énumération des présentations)

Étant donné un graphe planaire localement fini sommet-transitif (donné par un schéma d'étiquetage) il est possible de déterminer s'il est de Cayley ou non. S'il est de Cayley, il est possible de déterminer l'ensemble fini des présentations de groupes ayant ce graphe pour graphe de Cayley.

D'autres questions algorithmiques prennent naturellement place à la suite de cette énumération, en particulier les problèmes de Dehn concernant les présentations de groupes. Pour les problèmes du mot, nous présentons des algorithmes basés sur la construction géométrique des graphes de Cayley concernés. Ces méthodes ne concurrencent pas forcément les algorithmes usuels, mais fournissent des méthodes purement géométriques de recherche des solutions. En particulier, la méthode suivante permet de construire des graphes

Proposition 4.10 (Méthode du plus court chemin)

Étant donné un ensemble de points localement fini \mathcal{P} d'une surface géodésique \mathcal{S} et G un groupe d'isométries agissant de manière cofinie sur \mathcal{P} , il existe un graphe Γ connexe reliant les sommets de \mathcal{P} par géodésique et stable sous l'action de G .

A l'aide d'une telle construction géométrique, nous pouvons décider du problème du mot généralisé sur les groupes possédant un graphe de Cayley planaire cofini, et décrivons la transcription de cette méthode géométrique en un algorithme effectif :

Corollaire 4.11 (Application au GWP)

Étant donné un groupe G possédant un graphe de Cayley planaire localement fini et H un sous-groupe de G défini par un nombre fini de générateurs, la méthode du plus court chemin fournit un graphe de Cayley planaire pour H .

Le chapitre 4 traite également des problèmes de décidabilité des différentes logiques dans la famille des graphes planaires cofinis. Cette décidabilité est reliée assez naturellement à la largeur arborescente du graphe. Il est ainsi possible d'appliquer des méthodes

basées sur les graphes de groupes pour construire des présentations particulières de ces groupes, afin d'obtenir quand c'est possible des sous-groupes libres d'index fini. La dernière partie de ce chapitre aborde les quotients du plan par des groupes d'isométries discrets et relie cette question aux schémas d'étiquetages. Dans ce paragraphe, nous évoquons la possibilité d'appliquer ces schémas d'étiquetages à l'étude de graphes de Cayley finis non planaires tracés sur des surfaces compactes.

Enfin, la question des graphes planaires cofinis non localement finis est évoquée au chapitre 5. L'étude de ces graphes est décomposée d'une part selon leur nombre de bouts, et d'autre part selon le nombre de points d'accumulations qui apparaissent dans leurs plongements. Nous donnons les valeurs que peuvent prendre ces deux caractéristiques, puis approfondissons trois familles de graphes planaires cofinis non localement finis : les graphes à un bout, qui sont localement finis, puis les graphes tracés sur le cylindre possédant deux bouts et deux points d'accumulation, et enfin la famille des graphes 3-connexes. Ce chapitre se termine sur une description plus générale des graphes de Cayley planaires en termes de graphes de bouts, qui donne des indices sur les possibilités d'extensions des méthodes basées sur les schémas d'étiquetages.

Chapitre 1

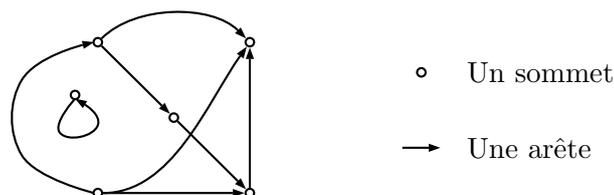
Généralités

Ce chapitre introduit les définitions et les notions essentielles à la compréhension des chapitres suivants. Le premier paragraphe donne les bases de la théorie des graphes [Die00], et le seconde paragraphe les bases de la théorie des groupes [LS77, Bea83, Rot94], ce qui permet d'aborder la notion de graphe de Cayley. Le troisième paragraphe introduit les définitions de surface et de géométrie [DC93, Bea83], ce qui permet de discuter des notions de planarité, et des choix des espaces dans lesquels nous allons travailler. A cet effet, nous décrivons les géométries planaires usuelles par leurs groupes d'isométries [Sti92], et donnons quelques définitions liées aux graphes planaires.

1.1 Théorie des graphes

1.1.1 Graphes – Généralités

Un *graphe* Γ est un couple d'ensembles (V, E) où V représente l'ensemble des *sommets* et E l'ensemble des *arêtes*, tel que $E \subset V \times V$. Toute arête $e \in E$ correspond à un couple de sommets $(v_1, v_2) \in V$ représentant ses *extrémités*. Il existe pour les graphes une représentation naturelle sous la forme suivante :



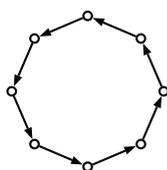
Un tel graphe Γ est dit *orienté* au sens où chaque arête possède un sens : le sommet v_1 est l'extrémité initiale tandis que le sommet v_2 est l'extrémité terminale. Il est possible de prendre pour arêtes non plus des couples mais des paires de sommets, ce qui revient à supprimer cette notion de sens. On parle alors de graphe *non orienté*. Un tel graphe peut être vu comme un graphe orienté dans lequel, pour toute arête (v_1, v_2) , il existe une arête réciproque (v_2, v_1) , et ces deux arêtes sont identifiées en une seule. Un *sous-graphe* d'un graphe $\Gamma = (V, E)$ est un graphe $\Lambda = (V', E')$ tel que $V' \subset V$, et $E' \subset E$. Etant un graphe et un sommet s de ce graphe, l'*étoile* centrée sur ce sommet correspond au sous-graphe constitué de s , des arêtes incidentes à s et de leurs extrémités.

Un sommet est dit *incident* à une arête lorsqu'il est une de ses extrémités. Le *degré sortant* d'un sommet de Γ est le nombre d'arêtes dont ce sommet est l'extrémité initiale.

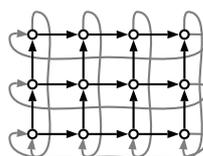
Le *degré entrant* est le nombre d'arêtes dont ce sommet est l'extrémité terminale. Lorsque le graphe n'est pas orienté, le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes auquel il est incident. Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont les mêmes. Un graphe est dit *de degré fini* lorsque les degrés de ses sommets sont uniformément bornés. Un graphe est dit *régulier* lorsque tous ses sommets ont même degré.

Un *chemin* est une suite de sommets (v_0, \dots, v_n) telle que entre deux sommets consécutifs v_i et v_{i+1} , il existe une arête d'extrémité initiale v_i et d'extrémité terminale v_{i+1} . La longueur d'un tel chemin est le nombre d'arêtes qui le composent, ici n . Si, dans le chemin, les sommets sont tous distincts, le chemin est dit *simple*. Un chemin tel que $v_1 = v_n$ est appelé un *cycle*. Un plus court chemin entre deux sommets est appelé une *géodésique*. Le graphe Γ est ainsi doté d'une distance induite par les géodésiques.

Exemple 1.1.1 (Cycles et grille) – Le graphe C_n pour $n \geq 3$, composé de n sommets $\{v_i\}$, pour $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, et de n arêtes, chacune reliant v_i à $v_{i+1 \bmod n}$, est appelé cycle de taille n . Il correspond exactement à un cycle simple de longueur n . Le graphe grille $G_{m,n}$, pour $m, n \geq 3$, est le graphe composé de $n \times m$ sommets $\{v_{i,j}\}$, $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $j \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket$, et des arêtes reliant les sommets $v_{i,j}$ et $v_{(i+1 \bmod n),j}$, et les sommets $v_{i,j}$ et $v_{i,(j+1 \bmod m)}$.



Cycle C_8



Grille $G_{4,3}$

Pour chacun de ces ensembles de graphes, il est possible de construire une version limite en faisant tendre n et m vers l'infini. Dans le cas des cycles, on obtient une ligne infinie, et dans le cas des grilles, une grille infinie. —

Un graphe est dit *connexe* lorsque entre deux sommets, il existe toujours un chemin débutant sur le premier sommet et terminant sur le second. Une *composante connexe* est une classe d'équivalence de sommets pour la relation d'équivalence "être relié par un chemin". Une *n-séparation* est un ensemble de n sommets tel que, si l'on retire ces sommets de Γ , le graphe se sépare en plusieurs composantes connexes. Un tel graphe est dit *n-séparable*. Un *point d'articulation* est une 1-séparation de Γ . Un graphe ne contenant pas de n -séparation est dit $(n+1)$ -connexe. Un graphe sans cycles est appelé une *forêt*. Un graphe connexe sans cycles est appelé un *arbre*.

Supposons G infini, et s un sommet de G . La *boule* de rayon $k > 0$ centrée sur s , notée $B(s, k)$, est l'ensemble des sommets de G à distance $\leq k$ du sommet s . Un *bout sphérique* B est une composante connexe infinie de $G \setminus B(s, k)$. Une *suite de bouts sphériques* du graphe est une suite infinie de bouts sphériques $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ décroissante pour l'inclusion. Deux suites de bouts sphériques (B_n) et (C_n) sont dites équivalentes si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists (i_1(n), i_2(n)) \in \mathbb{N}^2, & \quad C_{i_1(n)} \subset B_n \subset C_{i_2(n)} \\ \forall m \in \mathbb{N}, \quad \exists (j_1(m), j_2(m)) \in \mathbb{N}^2, & \quad B_{j_1(m)} \subset C_m \subset B_{j_2(m)} \end{aligned}$$

Les deux suites sont ainsi dites cofinales. Une classe d'équivalence de suites de bouts sphériques est appelée un *bout* du graphe. La grille infinie est un graphe à un bout, tandis que le cycle infini est un graphe à deux bouts.

1.1.2 Morphismes de graphes

Un *étiquetage* ou un *coloriage* du graphe est une application de l'ensemble $V \cup E$ dans un ensemble fini d'étiquettes ou de couleurs L . Un *morphisme* φ d'un graphe $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ vers le graphe $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ est une application de $V_1 \cup E_1$ dans $V_2 \cup E_2$ telle que :

- (i) l'image d'un sommet est un sommet, *i.e.* $\varphi(V_1) \subset V_2$, et l'image d'une arête est une arête *i.e.* $\varphi(E_1) \subset E_2$;
- (ii) les images des extrémités d'une arête $e = (v_1, v_2)$ correspondent aux extrémités de l'image de l'arête $\varphi(e) = (\varphi(v_1), \varphi(v_2))$.

Si le graphe est étiqueté, le morphisme doit aussi conserver l'étiquetage. Un endomorphisme est un morphisme de Γ dans lui-même. Un isomorphisme est un morphisme bijectif. Un automorphisme cumule les deux propriétés. La relation sur les sommets définie par $v_1 \sim v_2$ si et seulement si il existe un automorphisme envoyant v_1 sur v_2 est une relation d'équivalence. Un graphe est dit *sommet-transitif* s'il n'existe qu'une seule classe de sommets pour cette relation, c'est-à-dire que pour tout couple de sommets, il existe un automorphisme envoyant le premier sommet sur le second. Plus généralement, lorsque le nombre de classes d'équivalence est fini, le graphe est dit *cofini*.

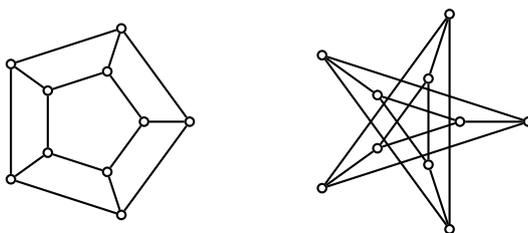


FIG. 1.1: Deux graphes isomorphes

Les isomorphismes de graphe conservent les propriétés des graphes définies sur les sommets et les arêtes, telles que l'existence de chemins, de cycles et par conséquent la connexité et le nombre de bouts.

1.1.3 Graphes et espaces métriques

Considérons un graphe $\Gamma = (V, E)$ muni de la fonction de distance définie sur les sommets de Γ . Il est possible de construire un espace métrique à partir de Γ de la manière suivante : à chaque arête $e = (u, v) \in E$, on associe un segment $l_e = [0; 1]$, où l'on identifie l'extrémité 0 avec le sommet u et l'extrémité 1 avec le sommet v . Il s'agit alors d'identifier les extrémités des segments l_e correspondant au même sommet du graphe. L'espace ainsi obtenu est doté d'une métrique naturellement induite par la métrique réelle sur le segment $[0; 1]$. Dans cet espace, la fonction de distance restreinte aux sommets du graphe coïncide avec la fonction de distance définie dans le paragraphe précédent.

Remarque 1.1 (Construire un graphe à partir d'un autre) – Dans ce mémoire, on sera souvent amené à considérer un graphe Γ , ainsi que un sous-ensemble de ce graphe construit en retirant un ensemble de sommets et d'arêtes. Ce sous-ensemble n'est pas forcément un sous-graphe, dans la mesure où certaines arêtes peuvent perdre leurs extrémités. Néanmoins, on considérera naturellement les composantes connexes de ce sous-ensemble comme les composantes connexes du graphe vu en tant qu'espace métrique, auquel on aura enlevé un ensemble de points. Ces composantes peuvent alors être vues comme des graphes, en ajoutant de nouveaux sommets aux extrémités des arêtes qui n'en ont plus. —

1.2 Théorie des groupes

1.2.1 Groupes – Généralités

Un *monoïde* M est un ensemble muni d'une loi de composition interne $(*)$ vérifiant :

- (i) la loi $(*)$ est une loi associative $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$
- (ii) il existe un élément neutre $\epsilon \in G$ $\forall g \in G, g * \epsilon = \epsilon * g = g$

Un *groupe* G est un monoïde vérifiant en plus :

- (iii) tout élément $g \in G$ admette un *inverse* $g^{-1} \in G$ $g * g^{-1} = g^{-1} * g = \epsilon$

Exemple 1.2.1 (Monoïde libre, Groupe libre) – Soit Σ un ensemble fini de lettres, appelé un *alphabet*. Un *mot* sur l'alphabet Σ est une suite finie (éventuellement vide) de lettres de Σ . L'ensemble des mots sur Σ est noté Σ^* . Cet ensemble, muni de la loi de concaténation, est un monoïde appelé le *monoïde libre*. Par exemple, lorsque $\Sigma = \{a, b\}$, Σ^* contient : ϵ (qui représente le mot vide), $a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \dots$

Si, pour chaque lettre x de Σ , on rajoute une lettre inverse $x^{-1} \in \Sigma^{-1}$, on obtient un nouvel ensemble de mots sur l'alphabet $\Sigma \cup \Sigma^{-1}$. Une *réduction* d'un mot sur cet alphabet consiste, lorsque ce mot contient deux lettres consécutives de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$, à supprimer ces deux lettres. Un mot *réduit* est un mot auquel on a appliqué toutes les réductions possibles. En fait, il y a confluence de cette opération de réduction, *i.e* le mot réduit est indépendant de l'ordre dans lequel les réductions sont faites sur le mot initial. L'ensemble des mots réduits, muni de la loi de concaténation, a une structure de groupe appelé le *groupe libre*. —

Un *sous-monoïde* d'un monoïde M est un sous-ensemble N de M , noté $N < M$, contenant le neutre et stable par composition interne. Un *sous-groupe* H d'un groupe G est un sous-monoïde de G stable par inverse. Étant donné un sous-ensemble $S \subset G$, le *sous-groupe engendré* par S , noté $\langle S \rangle$ est le plus petit sous-groupe de G – au sens de l'inclusion – contenant S . Les éléments de S sont appelés les *générateurs* de $\langle S \rangle$. Pour K un sous-ensemble de G et $g \in G$, on note $gK = \{g * k, k \in K\}$ et $Kg = \{k * g, k \in K\}$. Cette notation permet de munir les sous-ensembles de G d'une loi de multiplication externe. L'*index* du sous-groupe, noté $[G : H]$ est égal au nombre de sous-ensembles $\{gH, g \in G\}$.

Un sous-groupe H est dit *distingué* dans G , noté $H \triangleleft G$, si et seulement si $\forall g \in G, gH = Hg$. Étant donné un sous-groupe $H < G$, la relation $g \sim g'$ si et seulement si $g^{-1}g' \in H$ est une relation d'équivalence et ses classes d'équivalence sont de la forme gH . Lorsque H est distingué dans G , l'ensemble quotient $G/H = \{gH, g \in G\}$ peut être naturellement muni d'une structure de groupe appelé *groupe quotient*, en étendant la loi $*$ en une loi \otimes sur les classes d'équivalence :

$$g_1H \otimes g_2H \stackrel{\text{déf}}{=} g_1g_2H$$

Il est aisément vérifiable que cette loi est compatible avec la loi de multiplication sur les ensembles définies précédemment.

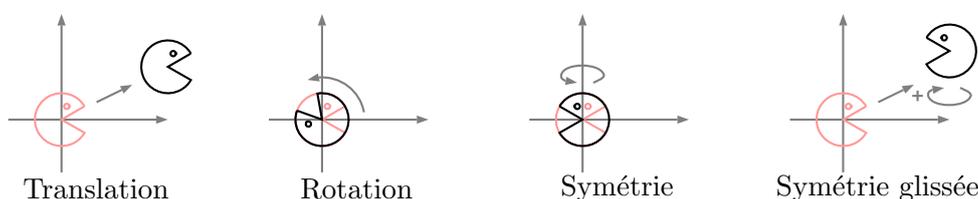
1.2.2 Morphismes de groupes

Un *morphisme de groupe* est une application $\varphi : G \longrightarrow H$ du groupe $(G, *)$ dans le groupe (H, \otimes) qui préserve les opérations internes, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in G, \quad \varphi(x * y) = \varphi(x) \otimes \varphi(y)$$

Le noyau d'un tel morphisme, noté $\text{Ker}(\varphi)$ est la préimage de l'identité de H , *i.e.* $\{g \in G, \varphi(g) = \epsilon_H\}$. C'est naturellement un sous-groupe distingué de G . On définit pareillement aux graphes des endo-, iso- et automorphismes de groupes. Les morphismes de groupe préservent les propriétés structurelles des groupes, telles que la notion de générateur ou bien de sous-groupe, distingué ou non. L'ensemble des automorphismes d'une structure donnée (par forcément un groupe) est naturellement dotée d'une structure de groupe pour la composition, appelé groupe d'automorphismes.

Exemple 1.2.2 (Groupes d'isométries) – Considérons le plan \mathbb{R}^2 muni de la distance euclidienne usuelle. Les isométries du plan sont les applications $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui préservent le produit scalaire. L'ensemble des isométries forme un groupe pour la loi de composition, noté $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$. Il est possible de classifier ces isométries en quatre grandes classes : les symétries axiales, les rotations, les translations et les symétries glissées.



Parmi les isométries, certaines conservent l'orientation, *i.e.* envoient un repère orthonormal sur un repère orthonormal. Ces isométries sont appelées isométries *directes*, et c'est le cas des translations et des rotations, par opposition aux symétries *indirectes* qui, elles, inversent le sens d'orientation comme un miroir. L'ensemble des isométries directes, noté $\mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$, constitue un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.

Plus généralement, étant donné un ensemble de points du plan \mathcal{S} , il est possible de définir le groupe des isométries laissant cet objet stable, noté $\mathcal{O}(\mathcal{S})$. Par exemple, dans le cas du cercle unité, le groupe $\mathcal{O}(C[0;1])$ est l'ensemble des rotations centrées sur l'origine et des symétries axiales d'axe passant par l'origine. —

Supposons que le groupe G soit finiment engendré par un ensemble $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, stable par inverse vu comme un alphabet. Il existe alors un morphisme naturel surjectif de S^* , le groupe libre sur l'alphabet S (dans lequel on a fait les identifications adéquates sur les inverses), qui à un mot sur les générateurs associe leur produit dans G :

$$\varphi : \begin{cases} S^* & \longrightarrow & G \\ s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_k} & \longrightarrow & s_{\alpha_1} * s_{\alpha_2} * \dots * s_{\alpha_k} \end{cases}$$

G apparaît alors comme un sous-groupe quotient de S^* . A tout élément u du noyau de φ , on peut associer une *relation* sous la forme d'une équation $u = \epsilon$ qui est vérifiée dans G . Pour caractériser G , il n'est pas nécessaire de connaître toutes les relations vraies dans G , mais seulement un sous-ensemble $R = \{r_1 = \epsilon, r_2 = \epsilon, \dots\}$ qui engendre le noyau de φ au sens suivant : le plus petit sous-groupe distingué contenant R , noté $\langle\langle R \rangle\rangle$ doit être égal à $\text{Ker}(\varphi)$ ¹. On dit alors que le groupe G est défini par une *présentation*, qui contient d'une part l'ensemble de ses générateurs et un tel ensemble de relations R . Une présentation définit le groupe G à isomorphisme près. S'il existe une présentation de G ne possédant

¹On ne peut se contenter ici du sous-groupe $\langle R \rangle$, qui n'est pas forcément un sous-groupe distingué de S^* , contrairement à $\text{Ker}(\varphi)$ qui l'est naturellement.

qu'un nombre fini de générateurs et de relations, alors G est dit *finiment présenté*, et noté sous la forme :

$$G = \left\langle \underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{générateurs}} \mid \underbrace{r_1, \dots, r_n}_{\text{relations}} \right\rangle$$

Pour des raisons de clarté, les relations de la forme $u = \epsilon$ sont représentées uniquement par leur membre gauche u .

Exemple 1.2.3 (Groupes cycliques) – Considérons le cas de groupes à un seul générateur $S = \{a, a^{-1}\}$. Les mots réduits de S^* sont de la forme a^n où $n \in \mathbb{Z}$. Si G est un groupe ayant S comme ensemble générateur, alors l'ensemble des relations de G possède un plus petit nombre $n \geq 1$ tel que $\{a^n = \epsilon\}$ soit une relation dans G . Lorsque ce nombre n existe, la relation $\{a^n = \epsilon\}$ engendre alors toutes les relations possibles dans G . Le groupe G a alors pour présentation :

$$G = \left\langle a \mid a^n \right\rangle$$

Il s'agit du groupe *cyclique* à n éléments, noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. C'est exactement le groupe des entiers modulo n muni de l'addition. Si jamais n n'existe pas, alors le groupe G est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ et il n'y a aucune relation dans la présentation de G . —

En toute généralité, si $g \in G$, le sous-groupe de G engendré par g est un groupe cyclique. Le nombre n réalisant le minimum des entiers ≥ 1 tels que $g^n = \epsilon$ est appelé l'*ordre* de g . Cet ordre peut éventuellement être infini. En reprenant l'exemple des isométries du plan, une symétrie est d'ordre 2, une rotation d'angle $2\pi/n$ est d'ordre n et les deux types de translations sont d'ordre infini.

Exemple 1.2.4 (Construction de groupes) – Considérons deux manières opposées de construire des groupes. Étant donné deux groupes $(G, *)$ et (H, \otimes) , le *produit direct* de G par H , noté $G \times H$ est le groupe constitué par $\{(g, h), g \in G, h \in H\}$, avec pour loi produit :

$$(g, h) \otimes (g', h') \stackrel{\text{déf}}{=} (g * g', h \otimes h')$$

Si l'on considère maintenant deux groupes définis par leur présentation $G = \langle A_1, R_1 \rangle$ et $H = \langle A_2, R_2 \rangle$, en s'arrangeant de manière à ce que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, alors le *produit libre* de G par H , noté $G * H$ est le groupe défini par la présentation suivante :

$$G * H \stackrel{\text{déf}}{=} \left\langle A_1 \cup A_2 \mid R_1 \cup R_2 \right\rangle$$

La première construction définit le groupe par la construction de sa loi de composition, tandis que la seconde le construit par sa présentation. —

Exemple 1.2.5 (Exemples de groupes) – A la suite des définitions précédentes, il existe plusieurs classes de groupes auxquels on peut plus particulièrement s'intéresser :

- Lorsque la loi $(*)$ est commutative, on parle alors de monoïde ou de groupe *commutatif* ou encore *abélien*. Les groupes abéliens finis sont des produits directs de groupes cycliques.
- Les groupes ne comportant aucune relation sont appelés groupes *libres*. Ils sont à la base de la théorie combinatoire des groupes.

- Pour tout n , il est possible de définir le groupe \mathcal{S}_n des permutations d'un ensemble à n éléments distincts. Le théorème de Cayley affirme que tout groupe fini G est sous-groupe d'un groupe de permutations.
- Les groupes possédant un sous-groupe d'index fini possédant une propriété \mathcal{P} sont appelés *virtuellement* \mathcal{P} . —

1.2.3 Actions de groupes

Définition (Action de groupe) :

Étant donné un groupe G et un ensemble E , une *action de groupe* de G sur E est une application $(\cdot) : G \times E \rightarrow E$ qui, à tout couple (g, e) associe un élément $g \cdot e \in E$, tel que :

- (i) l'identité agit trivialement $\forall f \in E, \epsilon \cdot f = f$
(ii) l'action est compatible avec la loi $(*)$ $\forall s, t \in G, \forall f \in E, s \cdot (t \cdot f) = (s * t) \cdot f$

Étant donné un élément $e \in E$, l'*orbite* de e est l'ensemble $\{g \cdot e, g \in G\} \subset E$ des images de e par l'action de groupe. L'ensemble des orbites forme une partition de E . Une action est dite *transitive* lorsqu'il n'existe qu'une seule orbite. Le *stabilisateur* de e est le sous-groupe de G constitué des éléments vérifiant $\{g, g \cdot e = e\}$. Une action est dite *simple* ou *propre* lorsque tous les stabilisateurs sont égaux au groupe trivial. \diamond

Définition (Graphe de Cayley) :

Soit G un groupe et S un ensemble de générateurs pour G . Le *graphe de Cayley* Γ de G associé à S est défini de la manière suivante : les sommets de Γ sont les éléments de G ; les étiquettes des arêtes sont les éléments de S . Il existe une arête partant de g_1 , étiquetée par $x \in S$ et arrivant en g_2 si et seulement si $g_1 \cdot x = g_2$ dans G . \diamond

Les graphes de Cayley décrivent l'action des générateurs sur le groupe G . La multiplication à droite par un générateur correspond au franchissement de l'arête étiquetée par ce générateur. En fait, le groupe des automorphismes d'un graphe de Cayley est isomorphe au groupe G . Cela fait d'un graphe de Cayley un graphe sommet-transitif. Un graphe de Cayley est connexe si et seulement si l'ensemble S est un ensemble de générateurs du groupe G .

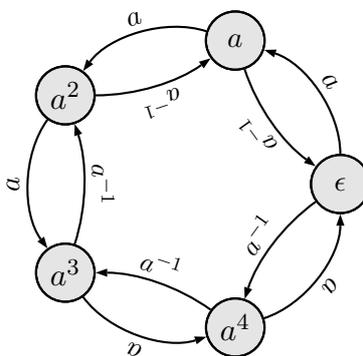


FIG. 1.2: Le graphe de Cayley de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ avec l'élément a pour générateur

Remarque 1.2 (Convention concernant les arêtes des graphes de Cayley) – Tout graphe de Cayley est orienté : lorsqu'il existe une arête entre deux sommets, il existe forcément l'arête

allant dans le sens inverse entre ces sommets. Par la suite, on identifiera toujours ces deux arêtes dans le graphe en une seule et unique arête non orientée. Suite à cette identification, les arêtes ne sont pas étiquetées par un générateur, mais par un couple de générateurs. Étant donné un sommet g , l'arête incidente à g étiquetée par le générateur a_i est bien déterminée de manière unique. Cela a pour résultat de donner une double orientation à chaque arête. —

Remarque 1.3 (A propos des graphes sommet-transitifs de faible degré) – Selon les restrictions de la remarque 1.2, un graphe de Cayley de degré 1 est forcément réduit à une simple arête et ses deux extrémités, et correspond naturellement au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Un graphe de Cayley de degré 2 est forcément un cycle C_n , pour $n \geq 3$. Une analyse rapide montre qu'ils correspondent aux groupes suivants :

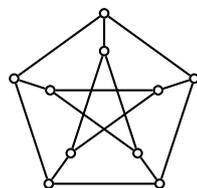
$$G_n = \langle a \mid a^n \rangle \quad \text{Groupe cyclique}$$

$$H_n = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^n \rangle \quad \text{Groupe diédral}$$

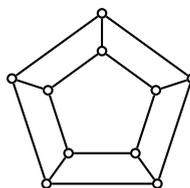
Les graphes sommet-transitifs de degré 1 et 2 correspondent exactement aux graphes de Cayley de même degré. Ainsi, les graphes sommet-transitifs qui nous intéressent le plus particulièrement sont donc ceux possédant un degré ≥ 3 . Dans la suite de ce mémoire, on considérera que les graphes étudiés, lorsqu'il sont au moins sommet-transitifs, ont un degré interne ≥ 3 . —

Le graphe C_n est le graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de son générateur d'ordre n . Lorsque $n = \infty$, le graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}, +)$, muni de son générateur 1, est la ligne infinie, appelée par abus de langage \mathbb{Z} . Le graphe $G_{m,n}$ est le graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, muni des images des générateurs des deux sous-groupes cycliques $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans le groupe produit. Lorsque $n = m = \infty$, le graphe de Cayley de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ est la grille infinie, appelée par abus de langage \mathbb{Z}^2 . Lorsque $n = 2$ et $m = \infty$, le graphe de Cayley de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est appelé l'échelle infinie.

Exemple 1.2.6 (Diédral et Petersen) – Les graphes de Cayley sont des graphes sommet-transitifs, mais tout graphe sommet-transitif n'est pas forcément un graphe de Cayley.



Le graphe de Petersen



$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Le graphe de Petersen, dessiné à gauche, est un graphe sommet-transitif, mais n'est pas isomorphe à un graphe de Cayley d'un groupe à 10 éléments. Son groupe d'automorphismes est d'ailleurs égal isomorphe au groupe des permutations d'un ensemble à 5 éléments. Il existe en réalité deux groupes à 10 éléments non isomorphes, le produit direct abélien dessiné ci-dessus et le groupe des symétries d'un pentagone, qui fait partie des groupes diédraux. —

Définition (Action faible) :

Considérons un ensemble E , et O un sous-ensemble de $E \times E$. On définit l'*action faible* de o sur E comme la relation suivante : $u \xrightarrow{o} v$ si et seulement si $(u, v) \in O$. Cette action n'est pas en général une action de groupe. Néanmoins, on peut définir le graphe de Cayley Γ de cette action faible de la manière suivante : les sommets de Γ sont les éléments de E et il existe une arête partant du sommet u et arrivant au sommet v si et seulement si $u \xrightarrow{o} v$. L'*orbite* d'un élément u sous cette action est le sous-ensemble de E défini par la composante du graphe de Cayley contenant le sommet u . \diamond

Lorsque une action faible est en même temps une action de groupe, les définitions de graphe de Cayley et d'orbite restent cohérentes avec les définitions données pour une action de groupe. Les actions faibles permettent de décrire des opérations sur des ensembles bien plus générales que les actions de groupe, en particulier des actions non déterministe, où un élément peut avoir plusieurs images par actions. Le graphe de Cayley d'une action faible peut alors se voir comme un automate.

1.3 Géométrie des surfaces

Dans ce paragraphe, quelques éléments de théorie des surfaces sont donnés afin de pouvoir introduire le théorème de Killing-Hopf 1.1 permettant de classifier les géométries planaires. Au delà des définitions concernant les surfaces de Riemann, et de ce résultat de classification, les détails concernant les surfaces de Riemann n'apparaissent qu'à titre indicatif, et l'on y fera rarement référence dans le mémoire. L'ouvrage de référence pour ce paragraphe est le [DC93].

1.3.1 Surfaces – Généralités

Définition (Surface) :

Une *surface* \mathcal{S} est un espace topologique séparé, séparable et connexe, tel que :

- (i) il existe un recouvrement de \mathcal{S} par un ensemble d'ouverts $\{U_\alpha\}$, appelés *cartes* ;
- (ii) pour tout α , il existe un ouvert $T_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ et une application $\varphi_\alpha : T_\alpha \rightarrow U_\alpha$ qui soit un homéomorphisme, appelée *paramétrisation* ou *système de coordonnées* ;
- (iii) lorsque $W = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, l'application $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ dite de changement de système de coordonnées est différentiable sur l'intersection $\varphi_\alpha^{-1}(W)$.

Par la suite, on fixe pour une surface donnée un ensemble de cartes et de paramétrisations, nommé *atlas*. On suppose que les applications de changement de coordonnées sont \mathcal{C}^∞ . \diamond

Intuitivement, une surface est un objet se comportant localement comme le plan euclidien, avec un système de cartes décrites par des coordonnées qui, grâce aux applications φ_α , peuvent être vues comme appartenant à \mathbb{R}^2 . A tout point de la surface, il est possible d'associer un ou plusieurs systèmes de coordonnées. Si deux systèmes sont en concurrence pour donner les coordonnées d'un point, alors le passage de l'un à l'autre est différentiable, voire ici \mathcal{C}^∞ . L'axiome de séparation évite que deux points possèdent les mêmes voisinages. L'axiome de séparabilité assure l'existence d'outils topologiques tels que des partitions de l'unité.

Étant donné deux surfaces \mathcal{S} et \mathcal{T} , une application $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ est dite *différentiable* en un point $p \in \mathcal{S}$ si et seulement si, étant donné un système de coordonnées $\psi : V \subset$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{T}$ en $f(p)$, il existe un système de coordonnées $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S}$ en p tel que $f \circ \varphi(U) \subset \psi(V)$ et l'application :

$$g = \begin{cases} U \longrightarrow V \\ x \longrightarrow \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x) \end{cases}$$

... soit différentiable en $\varphi^{-1}(p)$. La notion de différentiabilité sur la surface est ainsi transposée sur des ouverts de \mathbb{R}^2 . Une fois l'atlas fixé pour chaque surface, cette définition est indépendante du choix du système de coordonnées dans ces atlas.

1.3.2 Plan tangent

Une application différentiable $\alpha :]-\epsilon; \epsilon[\longrightarrow \mathcal{S}$ est une *courbe* tracée sur la surface. Supposons $\alpha(0) = p$ et notons \mathcal{D} l'ensemble des applications $\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ différentiables en p . On définit le *vecteur tangent* à α en $t = 0$ comme l'application suivante :

$$\alpha'(0) : \begin{cases} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f \longrightarrow \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \end{cases}$$

Un vecteur tangent en p est un vecteur tangent d'une courbe α telle que $\alpha(0) = p$. L'ensemble des vecteurs tangents en p est noté $T_p\mathcal{S}$. Ainsi défini, il est indépendant du système de coordonnées choisi en p .

Supposons que $\alpha(0) = p$ et plaçons nous dans un système de coordonnées en p défini par $\varphi : T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U$. Dans ce système de coordonnées, la courbe α peut s'écrire :

$$\tilde{\alpha}(t) = \varphi^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t)) \quad t \in]-\epsilon; \epsilon[$$

Soit f une application $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ qui soit différentiable en p . Considérons l'application $f \circ \alpha$, et plus particulièrement sa différentielle en $t = 0$. Par abus de langage, on peut considérer f comme définie sur U en posant $g(x_1, x_2) = f \circ \varphi(x_1, x_2)$. Ainsi :

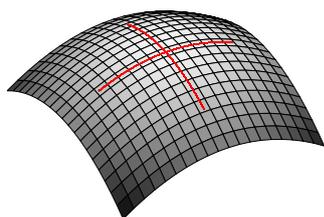
$$\left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(g \circ \tilde{\alpha})}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} g(x_1(t), x_2(t)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^2 x'_i(0) \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{t=0}$$

Le vecteur tangent, dans ce système de coordonnées, peut donc se mettre sous la forme d'une somme de deux fonctions :

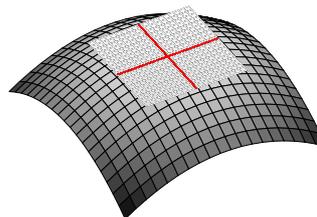
$$\alpha'(0) = x'_1(0) \frac{\partial}{\partial x_1} + x'_2(0) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Chacune des dérivées partielles peut se voir comme le vecteur tangent le long d'une des deux courbes "coordonnées" en p , les courbes qui suivent les axes des coordonnées en $\varphi^{-1}(p)$. L'ensemble des vecteurs tangents en p possède alors une structure naturelle d'espace vectoriel de dimension 2, basé sur ces deux applications. Bien que la base dépende du système de coordonnées, l'espace vectoriel est lui, indépendant de la paramétrisation. On peut montrer qu'un changement de système de coordonnées en p correspond à une transformation de $T_p\mathcal{S}$ par une application de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$.

Plus intuitivement, supposons la surface \mathcal{S} plongée dans \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire qu'il existe une application de \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 qui soit un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ local. Dans ce cas, le vecteur tangent à une courbe tracée sur la surface est exactement le vecteur tangent à la courbe en ce point, dans \mathbb{R}^3 . L'espace tangent $T_p\mathcal{S}$ est alors le plan tangent à la surface au point p . Les définitions précédentes ont l'avantage de pouvoir se passer du plongement de la surface dans \mathbb{R}^3 : les notions qu'elles définissent sont intrinsèques à la surface.



Courbes coordonnées



Plan tangent et sa base

Les surfaces ainsi définies sont un cas particulier des textitvariétés différentiables, qui peuvent être définies dans des espaces de dimension n plus grande que 2, en portant les définitions précédentes dans \mathbb{R}^n . Prenons immédiatement un exemple : à chaque point p de la surface, on peut associer un espace vectoriel de dimension 2, noté $T_p\mathcal{S}$. En fait, l'espace $T\mathcal{S} = \{(p, v), p \in \mathcal{S}, v \in T_p\mathcal{S}\}$, appelé le *fibré tangent*, peut être lui aussi muni d'une structure de variété différentiable de dimension 4, comme produit local des structures de dimension 2. Dans le fibré tangent, il est possible de définir des notions de différentiabilité touchant en même temps la surface et son espace tangent.

Un *champ de vecteurs* X défini sur la surface \mathcal{S} est une application différentiable de $\mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{S}$, associant à tout point p de la surface un élément $(p, X(p)) \in T\mathcal{S}$ de son fibré tangent. Le champ de vecteurs X peut se voir naturellement comme une application associant à chaque point de la surface un vecteur de son plan tangent.

1.3.3 Surfaces de Riemann

Définition (Surface de Riemann) :

Une surface de Riemann \mathcal{S} est une surface munie en tout point p d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ qui soit différentiable, au sens où, pour toute paire de champs de vecteurs X et Y différentiables sur \mathcal{S} , l'application $p \rightarrow \langle X(p), Y(p) \rangle_p$ est une application différentiable sur \mathcal{S} . \diamond

La donnée d'un produit scalaire en tout point permet de définir la longueur des courbes tracées sur \mathcal{S} , comme dans le plan euclidien. Il suffit pour cela d'intégrer la longueur au sens de $\langle \cdot \rangle_p$ du vecteur dérivé à la courbe au point p , cela sur toute la longueur de la courbe. De même, le produit scalaire permet de calculer les angles entre deux courbes tracées sur la surface. Une *géodésique* entre deux points p et q est une courbe réalisant un plus court chemin entre ces deux points. L'existence de géodésiques est assurée par le théorème de Hopf-Rinow [DC93] pour les surfaces complètes. Une *droite* est une courbe maximale telle que tous ses segments finis soient des géodésiques.

Définition (Isométrie) :

Une *isométrie* est un difféomorphisme $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ qui préserve le produit scalaire. En tout point p , si l'on note df_p la différentielle de f au point $f(p)$, alors :

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad \forall p \in \mathcal{S}, \forall (u, v) \in T_p\mathcal{S}$$

D'après la définition précédente, les isométries préservent les longueurs des courbes, en particulier des géodésiques, ainsi que les angles entre les courbes. L'ensemble des isométries constitue un groupe, noté $\mathcal{O}(\mathcal{S})$, le groupe des isométries de \mathcal{S} . \diamond

Exemple 1.3.1 (Disque de Poincaré et modèle du demi-plan) – Les deux surfaces suivantes sont des modèles du plan hyperbolique. Le *disque de Poincaré* correspond à la boule unité du plan euclidien $B_{\mathbb{R}^2}(0; 1)$, muni des propriétés suivantes. Au point $p = (x, y)$, prenons :

- les ouverts $U_p = \{q \text{ tels que } d_{\mathbb{R}^2}(p, q) < 1 - d_{\mathbb{R}^2}(p, 0)\}$;
- les systèmes de coordonnées défini comme : $\varphi_p(q) = p + q$;
- le produit scalaire défini de la manière suivante : $\left\langle u, v \right\rangle_p = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{(1 - d_{\mathbb{R}^2}(p, 0))^2}$.

Ces définitions font du disque de Poincaré une surface de Riemann, dans laquelle les distances augmentent au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'origine. Le bord de la boule unité, appelé *horizon* se situe à une distance infinie de l'origine. Dans ce modèle, les droites correspondent aux arcs de cercles perpendiculaires à l'horizon.

Autre modèle, le *modèle du demi-plan* correspond au demi-plan complexe constitué de l'ensemble des points du plan euclidien (vu ici comme le plan complexe) de partie imaginaire strictement positive, muni au point $p = (x, y)$ de :

- les ouverts $U_p = \{q \text{ tels que } d_{\mathbb{R}^2}(p, q) < y\}$;
- les systèmes de coordonnées défini comme : $\varphi_p(q) = p + q$;
- le produit scalaire défini de la manière suivante : $\left\langle u, v \right\rangle_p = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{y}$.

Ce modèle est lui aussi une surface de Riemann, dans lequel les distances augmentent lorsque l'on se rapproche de l'horizon, qui se trouve ici être l'axe des abscisses. Dans ce modèle, les droites sont ici aussi les arcs de cercles perpendiculaires à l'horizon. En fait, il est possible de passer du premier au second modèle par la transformation $z \rightarrow \frac{z+i}{iz+1}$, qui préserve la métrique riemannienne, et en particulier les angles entre les droites. —

La surface est dite *homogène* lorsque le groupe des isométries, vu comme agissant sur \mathcal{S} , ne possède qu'une seule et unique orbite. La surface est dite *isotrope* en p lorsque le groupe des isométries, vu comme agissant sur les bases orthonormales de l'espace tangent en p , ne possède là encore qu'une seule orbite. Ces deux dernières propriétés traduisent le fait que la surface ne possède pas de point particulier du point de vue des isométries.

La surface est dite *simplement connexe* lorsque, étant donné une courbe fermée tracée sur la surface, il est toujours possible de la déformer de manière continue en un seul point. Cette propriété empêche l'existence de "trous" dans la surface. Le *tore* ou *doughnut* est un exemple de surface non simplement connexe. Les surfaces simplement connexes suffisamment régulières sont caractérisées à isométries près par le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Killing-Hopf)

Toute surface de Riemann simplement connexe, complète, homogène et isotrope, est, à une isométrie près, le plan euclidien \mathbb{R}^2 , la sphère unité \mathbb{S}^2 ou le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 .

Un *revêtement* de \mathcal{T} dans \mathcal{S} est une application $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ surjective, et qui soit localement un homéomorphisme. Par théorème, toute surface admet un revêtement, appelé *universel*, par une surface simplement connexe. Lorsque le revêtement universel préserve les propriétés d'homogénéité et d'isotropie de la surface, le théorème précédent prend alors toute sa mesure.

1.4 Géométries planaires

Le théorème de Killing-Hopf insiste sur l'importance de trois types de surfaces simplement connexes. Les groupes d'isométries de ces surfaces sont particulièrement importants, car toute surface compacte est un quotient de l'une de ces trois surfaces par un sous-groupe d'isométries discret [Sti92, Bea83]. Pour désigner chacune de ces surfaces, nous parlerons en terme de *géométrie* : la géométrie sphérique \mathbb{S}^2 , la géométrie euclidienne

\mathbb{R}^2 et la géométrie hyperbolique \mathbb{H}^2 . Dans les paragraphes qui suivent, chacune de ces géométries est présentée, ainsi que certaines familles d'isométries simples.

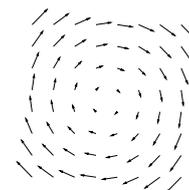
1.4.1 La géométrie euclidienne

La géométrie euclidienne \mathbb{R}^2 est la géométrie usuellement adoptée sur le plan, paramétré par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. La métrique est la métrique du plan euclidien définie par le produit scalaire sur les vecteurs de \mathbb{R}^2 . Cette géométrie est appelée euclidienne car elle vérifie les postulats énoncés par Euclide dans ses *Éléments*. Ces postulats, au nombre de 5, affirment entre autres l'existence des géodésiques que sont les lignes droites, ainsi que des cercles. Une conséquence de ce 5^{ème} postulat, appelé postulat des parallèles, affirme qu'en tout point, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée. Ce postulat est en fait indépendant des quatre autres, et en modifiant ses hypothèses, il est possible de décrire d'autres géométries, dites non-euclidiennes. C'est à Hilbert [Hil80] que l'on doit l'axiomatisation logique rigoureuse de la notion de géométrie.

Les isométries du plan euclidien peuvent se classifier en trois grandes familles :

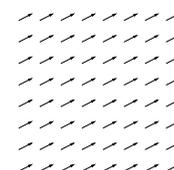
Rotations : La rotation centrée en (x_0, y_0) d'angle α est définie par la transformation matricielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$



Translations : La translation de vecteur (x_0, y_0) est définie par :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x + x_0 \\ y + y_0 \end{bmatrix}$$



Symétries : La symétrie s par rapport à la droite de vecteur unitaire \vec{AB} se définit de manière vectorielle par l'équation :

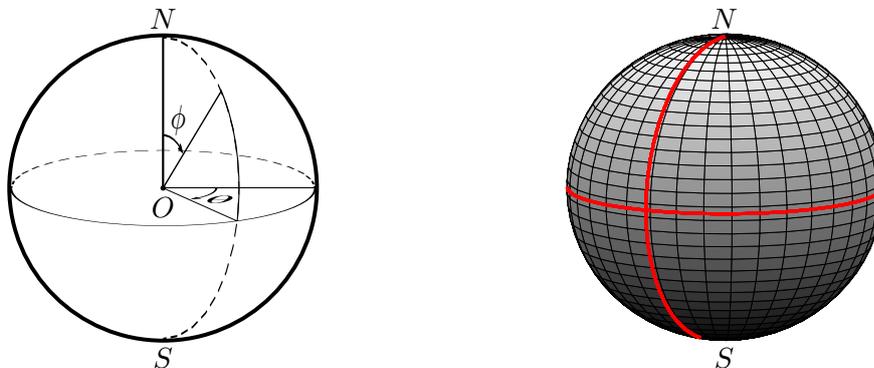
$$As(\vec{M}) = 2(\vec{AM} \cdot \vec{AB})\vec{AB} - \vec{AM}$$

Les géodésiques sont les segments de droites usuelles. En conséquence de l'axiome des parallèles, la somme des angles internes d'un triangle vaut 2π (29^{ème} proposition d'Euclide). Le groupe des isométries $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par les symétries. De plus, toute isométrie est le produit d'au plus trois symétries euclidiennes. Le sous-groupe des isométries directes est engendré par les rotations et les translations.

Il existe des éléments sans points fixes, les translations, qui constituent un sous-groupe distingué abélien. Cela possède une grande incidence sur la structure de ses sous-groupes d'isométries discrets, qui lorsqu'ils sont infinis, possèdent nécessairement un sous-groupe d'index fini qui soient un groupe de translations (cf. au théorème de Bieberbach [Wol84]). Cela permet d'énumérer tous les groupes d'isométries discrets, appelés groupes de pavages archimédiens ou groupes cristallographiques du plan. Ces groupes sont représentés par 46 graphes de Cayley planaires non isomorphes [Cha95], et correspondent à 11 pavages du plan par polygones réguliers (cf. page 27 et [GS87] p. 63).

1.4.2 La géométrie sphérique

La sphère \mathbb{S}^2 est définie comme la sphère unité de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , que l'on paramètre par les angles (θ, ϕ) , pour $\theta \in [0; 2\pi]$ et $\phi \in [0; \pi]$, comme indiqué sur la figure ci-après. La métrique sur la surface est la même que la métrique euclidienne dans \mathbb{R}^3 , restreinte à la sphère.



Dans cette géométrie, les géodésiques sont les segments d'arcs de grand cercle, c'est-à-dire de cercle dont le centre coïncide avec le centre de la sphère. Il est notable qu'entre deux points donnés, il puisse exister plus d'une géodésique, par exemple lorsque les points sont antipodaux. Les angles entre deux droites sont les mêmes que les angles euclidiens, et correspondent à l'angle fait par les plans contenant les grands cercles contenant les deux droites.

Comme la métrique dérive de la métrique euclidienne dans \mathbb{R}^3 , il est naturel que les isométries de \mathbb{R}^3 qui laissent stables la sphère soient aussi des isométries de \mathbb{S}^2 . Ainsi, ces isométries se découpent en trois grandes familles :

- Rotations : La rotation d'angle α centrée sur le sommet P correspond à la restriction de la rotation euclidienne d'axe (OP) et d'angle α dans \mathbb{R}^3 .
- Translations : La translation envoyant le sommet P sur le sommet $Q = (\theta_0, \phi_0)$ est obtenue par la restriction de la rotation euclidienne d'axe (OR) et d'angle ϕ_0 , où le sommet R est tel que $\vec{OR} = \vec{OP} \wedge \vec{OQ}$, où \wedge représente le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 .
- Symétries : La symétrie selon le grand cercle \mathcal{C} , correspond à la restriction de la symétrie euclidienne par rapport au plan \mathcal{P} contenant le cercle \mathcal{C} .

Les rotations et les translations sont deux façons différentes de voir la même isométrie. Le groupe des isométries sphériques, $\mathcal{O}(\mathbb{S}^2)$, est engendré par les symétries. Il est en fait possible de prouver que, comme dans le cas euclidien, toute isométrie est produit d'au plus trois symétries selon un grand cercle. Le sous-groupe des isométries directes, $\mathcal{O}^+(\mathbb{S}^2)$ est le sous-groupe engendré – et constitué – par les rotations. Les seules isométries ne possédant pas de point fixe sont exactement celles composées de trois rotations.

La sphère est une surface compacte. Cela implique en particulier que les lignes droites qui sont aussi les grands cercles sont de longueur finie. De plus, les groupes d'isométrie discrets de la sphère sont forcément des groupes finis. Ces groupes sont connus et ont été énumérés par Maschke [Mas96] en 1896. Ils peuvent se mettre sous la forme de 24 graphes de Cayley planaires, plus trois familles infinies dénombrables simples. Chacun de ces graphes de Cayley planaires peut se mettre sous la forme d'un polyèdre convexe [Mäd00], c'est-à-dire d'un pavage de la sphère par polygones réguliers (cf. paragraphe 1.5).

1.4.3 La géométrie hyperbolique

Le plan hyperbolique est le résultat de recherches d'une surface ne vérifiant pas le postulat des parallèles, c'est-à-dire possédant des droites infiniment longues mais autorisant en un point donnée plusieurs parallèles à une droite donnée. Au début du XIX^{ème} siècle, Bolyai et Lobachevsky montrèrent séparément l'existence d'une telle surface, appelée plan hyperbolique [Sti01]. Comme conséquence du théorème de Killing-Hopf, toutes ces surfaces sont isométriques entre elles.

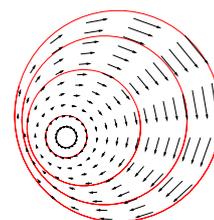
Suite à un résultat de Hilbert de 1901 [Hil01], il est impossible de plonger entièrement le plan hyperbolique dans un espace euclidien de dimension 3, de manière C^∞ et de façon à ce que la métrique soit induite par la métrique euclidienne, comme c'était le cas pour la sphère. Le modèle de la *pseudosphère* permet de plonger une partie du plan hyperbolique dans \mathbb{R}^3 , mais pas dans sa totalité. Si l'on désire représenter le plan hyperbolique sur une feuille de papier – dont la métrique est euclidienne –, il est donc nécessaire d'utiliser une métrique différente. Le modèle que nous utiliserons pour représenter le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 est celui du disque de Poincaré (cf. exemple 1.3.1 page 17), qui correspond à la boule unité de \mathbb{R}^2 pour la norme euclidienne, munie d'une métrique particulière.

De la même façon que dans les autres géométries, il est possible de décrire certaines familles d'isométries hyperboliques dans ce modèle particulier :

Rotations : Les rotations sont les isométries directes possédant un unique point fixe à l'intérieur du disque. La rotation centrée en 0 d'angle α est donnée par :

$$z \longrightarrow e^{i\alpha} z$$

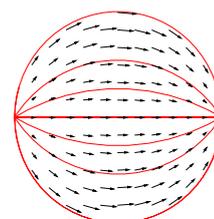
Les autres rotations s'obtiennent par conjugaison par une translation.



Translations : Les translations sont les isométries directes possédant deux points fixes distincts sur l'horizon. Une translation envoyant l'origine sur le point p est donnée par :

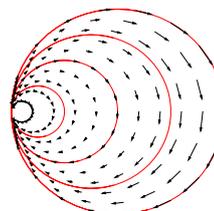
$$z \longrightarrow \frac{z + p}{1 + \bar{p}z}$$

Contrairement au cas euclidien, deux translations distinctes ne commutent pas forcément.



Rotations limites : Il s'agit des isométries directes possédant un point fixe double sur l'horizon. Elles correspondent en fait à des rotations autour de ce point fixe, situé à l'infini. Il est plus aisé de les comprendre sur le demi-plan complexe, où elles correspondent aux applications :

$$z \longrightarrow z + \alpha$$



Symétries : Ce sont des isométries possédant une infinité de points fixes, qui correspondent naturellement aux applications de la forme :

$$z \longrightarrow e^{i\alpha} \bar{z}$$

Elles sont induites par les symétries euclidiennes d'axe passant par l'origine dans le modèle du disque, et par les symétries euclidiennes d'axe vertical dans le modèle du demi-plan.

En fait, il est possible de donner une forme canonique des isométries du disque de Poincaré, sous la forme suivante :

(i) les isométries *directes* sont de la forme : $z \longrightarrow \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$
 où $a, b \in \mathbb{C}$, tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$;

(ii) les isométries *indirectes* sont de la forme : $z \longrightarrow \frac{a\bar{z} + b}{\bar{b}\bar{z} + \bar{a}}$
 où $a, b \in \mathbb{C}$, tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$;

Les droites dans les deux modèles sont les arcs de cercles² euclidiens perpendiculaires à l'horizon. Les angles entre deux droites sont les mêmes que les angles euclidiens. Comme dans le cas sphérique et euclidien, toute isométrie hyperbolique peut se mettre sous la forme du produit d'au plus trois symétries. En fait, les isométries directes sont exactement les rotations, les rotations limites et les translations. Les isométries indirectes correspondent au produit d'une isométrie directe par une symétrie.

1.4.4 Exemples de différences entre les géométries

Les isométries des trois géométries peuvent se décrire de manière similaire, presque indépendamment de la géométrie. Néanmoins, chaque géométrie possède ses spécificités propres qui permettent de les différencier. Le fait que la sphère \mathbb{S}^2 soit compacte, contrairement aux deux autres géométries, constitue une première différence importante du point de vue topologique. Le tableau 1.1 met en valeur quelques unes de ces différences, en particulier en ce qui concerne la structure géométrique des boules.

Géométrie	Sphérique	Euclidienne	Hyperbolique
Compacité	✓	Non	Non
Somme des angles internes d'un triangle	$> 2\pi$	2π	$< 2\pi$
Circonférence d'un cercle de rayon r	$2\pi \sin(r)$	$2\pi r$	$2\pi \sinh(r)$
Surface d'un cercle de rayon r	$4\pi \sin^2(r/2)$	πr^2	$4\pi \sinh^2(r/2)$

TAB. 1.1: Comparaisons entre certaines propriétés géométriques des trois géométries.

Ainsi, la taille des boules permet de différencier la géométrie dans laquelle on est placé. En fonction du rayon de la boule, cette taille peut soit être bornée, quadratique ou exponentielle. On retrouve ainsi ce type de trichotomie dans le corollaire 4.6.

² Lorsque l'on se place dans le cadre des transformations du plan de la forme $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$, appelées transformations de Möbius, la notion d'arc de cercle englobe à la fois les arcs de cercle et les segments de droite euclidiens. Toute transformation de Möbius envoie un arc de cercle sur un arc de cercle.

1.5 Structures combinatoires planaires

Lorsque l'on désire construire un objet combinatoire qui possède une structure dont les propriétés sont liées à un plongement dans une surface planeaire, il existe plusieurs manières de faire. Ce paragraphe décrit plusieurs types d'objets combinatoires et leurs plongements planaires.

1.5.1 Graphes planaires

Définition (Plongement) :

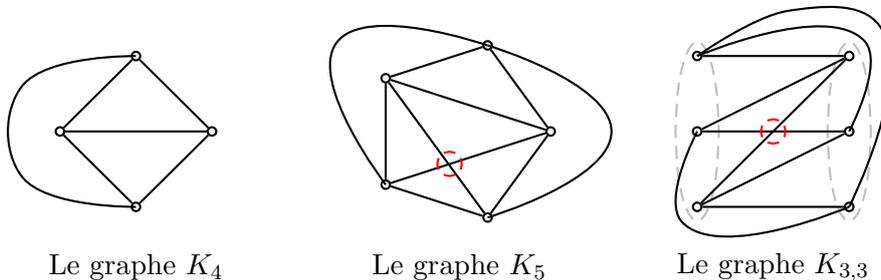
Étant donné un graphe $\Gamma = (V, E)$, un *plongement* de ce graphe Γ dans une surface \mathcal{S} est une application ρ qui :

- (i) à tout sommet $v \in V$ associe un point $p = \rho(v) \in \mathcal{S}$;
- (ii) à toute arête $e = (v_1, v_2) \in E$ associe une courbe $\rho_e : [0; 1] \rightarrow \mathcal{S}$ injective \mathcal{C}^1 , tracée sur la surface, telle que $\rho_e(0) = \rho(v_1)$ et $\rho_e(1) = \rho(v_2)$. \diamond

Un plongement est dit *simple* si et seulement si l'application ρ est une application injective, c'est-à-dire deux sommets différents ont une image différente, et deux arêtes distinctes s'envoient sur des courbes sans intersection commune : les images de ces courbes dans la surface ont une intersection vide. Cela revient à tracer le graphe sur la surface sans que les arêtes ne s'intersectent. Usuellement, on choisit les plongements de manière à ce que les sommets soient distincts. Par la suite, étant donné un plongement planaire d'un graphe Γ , on ne distinguera plus les sommets et arêtes du graphe de leurs contreparties sur la surface.

Un graphe est dit *planaire* s'il possède un plongement simple dans une des trois géométries du plan. Le théorème de Kuratowski [Die00] caractérise les graphes qui ne sont pas planaires.

Exemple 1.5.1 (Graphe complet, graphe biparti) – Le graphe non orienté K_n possédant n sommets et tel que, entre deux sommets donnés, il existe toujours une arête, est appelé le graphe *complet*. Le graphe $K_{m,n}$ possédant un ensemble V_1 de m sommets et un ensemble V_2 de n sommets, tel que entre tout couple de sommets de $V_1 \times V_2$, il existe toujours une arête, est appelé graphe *biparti complet*.



Les graphes K_3 et K_4 sont des graphes planaires, tandis que K_n , pour $n \geq 5$ n'est pas planaire. De la même façon, le graphe biparti $K_{3,3}$ n'est pas un graphe planaire. Les deux graphes K_5 et $K_{3,3}$ permettent de caractériser les graphes non planaires dans le théorème de Kuratowski. La non-planarité est une propriété forte : quel que soit le plongement du graphe dans le plan, il existera au moins un croisement d'arêtes. —

Un plongement d'un graphe planaire est dit *topologiquement localement fini* ou plus simplement *localement fini* lorsque l'ensemble des images des sommets sur la surface ne possède pas de points d'accumulation. Un graphe possédant un tel plongement sera appelé *localement fini*. Les graphes localement finis tracés sur la sphère sont exactement les graphes planaires finis.

Remarque 1.4 (Sur la notion de "localement fini") – Selon le domaine considéré, cette propriété peut prendre différents sens. En topologie, un sous-ensemble E d'un espace topologique est dit localement fini si et seulement si l'intersection de E avec tout compact de l'espace ne contient qu'un nombre fini d'éléments. En théorie des graphes, un graphe est dit localement fini lorsque le degré de ses sommets est uniformément borné.

Comme les graphes dont nous nous préoccupons sont cofinis et donc naturellement localement cofinis au sens de la théorie des graphes, nous parlons dans ce mémoire de graphes *planaires localement finis*, pour insister sur le fait que cette propriété est une propriété du plongement et non pas du graphe. —

Étant donné un plongement planaire d'un graphe Γ localement fini, une *face* \mathcal{F} est une composante connexe par arcs du complémentaire du graphe dans le plan. Le *bord* d'une face correspond à son bord topologique, noté $\partial\mathcal{F}$. Une face est dite incidente à une arête ou à un sommet lorsque ce sommet ou cette arête appartient au bord de la face $\partial\mathcal{F}$. Une telle face est dite *finie* lorsque elle est incidente à un nombre fini de sommets et d'arêtes. Dans le cas contraire, elle est *infinie*. Par la suite, nous verrons que, quitte à choisir de manière adéquate le plongement, les faces finies sont les faces bornées dans le plan, tandis que les faces infinies sont les faces non bornées.

Définition (Vecteur de type) :

Lorsqu'une face est finie, sa *taille* est le nombre de sommets auxquels elle est adjacente, cette taille étant infinie pour une face infinie. Considérant les faces incidentes à un sommet donné, il est possible de les ordonner de manière cyclique selon leur ordre d'apparition. Le *vecteur de type* associé à un sommet est un vecteur donnant la liste des tailles, éventuellement infinies, des faces incidentes à un sommet, rangées par ordre cyclique. Ce vecteur est défini à permutation cyclique et inversion près. Dans la figure 1.3, le vecteur de type des sommets du graphe (a) peut aussi bien être défini comme $[3; 3; 4; 3; 4]$, mais aussi $[3; 4; 3; 3; 4]$ ou encore $[4; 3; 3; 4; 3]$. \diamond

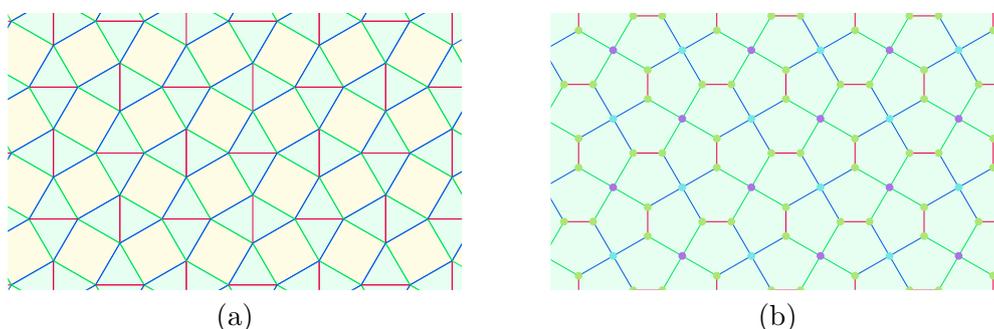


FIG. 1.3: Les deux figures ci-dessus représentent chacune des graphes cofinis planaires. Tous les sommets du graphe (a) possèdent le vecteur de type $[3; 3; 4; 3; 4]$. Le graphe (b) quant à lui possède des sommets $[5; 5; 5]$ et des sommets $[5; 5; 5; 5]$.

Remarque 1.5 (A propos des propriétés locales des graphes planaires) – Lorsque l'on considère une propriété géométrique locale dans un graphe planaire, comme c'est le cas pour le vecteur de type, on se retrouve confronté à un problème de définition selon la façon dont on a plongé le graphe. Pour résoudre ce problème, de telles propriétés sont définies à rotation et symétrie du graphe près. Pour un vecteur de la forme $[k_1, \dots, k_d]$, on définit les deux relations d'équivalence suivantes :

$$\begin{aligned} [k_1, \dots, k_d] \sim_r [l_1, \dots, l_d] &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket, k_i = l_{i+1 \bmod d} \\ [k_1, \dots, k_d] \sim_i [l_1, \dots, l_d] &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket, k_i = l_{d-i+1} \end{aligned}$$

Un vecteur $[k_1, \dots, k_d]$ est dit vérifier une propriété à *rotation près* si et seulement si il existe un vecteur dans sa classe d'équivalence selon \sim_r qui vérifie la propriété. De tels vecteurs sont appelés des *vecteurs cycliques*. De la même manière, un vecteur est dit vérifier une propriété à *inversion près* si et seulement si il existe un vecteur dans sa classe d'équivalence selon \sim_r et \sim_i qui vérifie la propriété. —

Pour un graphe Γ tracé sur une surface, il est possible de construire un nouveau graphe Λ de la manière suivante : les sommets de Λ sont les faces de Γ et deux sommets sont reliés par une arête dans Λ si et seulement si les deux faces de Γ correspondantes possèdent une arête commune. Le graphe Λ est appelé le *graphe dual* de Γ . Cette opération est auto-inverse. A partir d'un plongement localement fini de Γ tel que toutes les faces de Γ soient finies, il est possible d'obtenir un plongement localement fini de Λ . Dans la figure ci-dessus, les deux graphes sont duaux. Dans le même ordre d'idée, on peut construire un graphe Θ dans lequel les sommets sont les sommets, arêtes et faces de Γ . Une arête ou un sommet est relié à une face \mathcal{F} lorsqu'il ou elle appartient à son bord $\partial\mathcal{F}$. Une arête et un sommet sont reliés entre eux si le second est extrémité du premier. Le graphe Θ est appelé le *graphe barycentrique* de Γ . De la même manière que pour le dual, si Γ est localement fini, alors Θ est lui aussi localement fini. De plus, si Γ est cofini, alors les graphes Λ et Θ sont eux aussi cofinis.

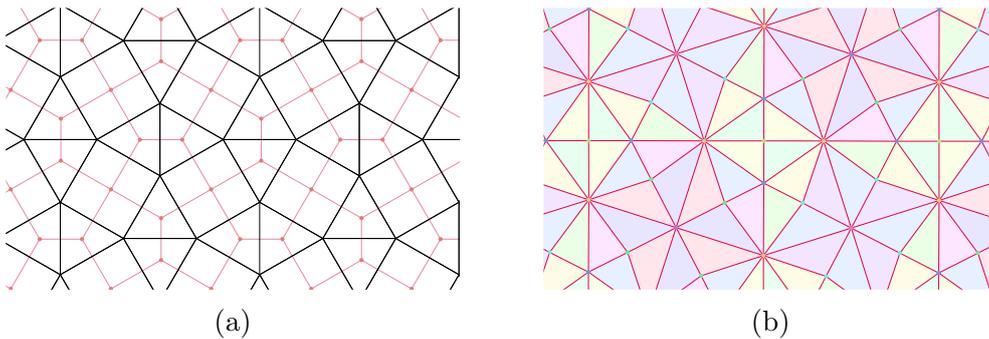


FIG. 1.4: La figure (a) représente le graphe planaire sommet-transitif tracé dans le plan euclidien de la figure 1.3 (a), ainsi que son graphe dual. La figure (b) représente son graphe barycentrique.

Pour un graphe Γ fini tracé sur une surface, la *caractéristique d'Euler*, notée $\chi(\Gamma)$ est égale à la somme $n - e + f$, où n est le nombre de sommets du graphe, e son nombre d'arêtes et f le nombre de faces dans le plongement. Lorsque le graphe est plongé dans une géométrie du plan, alors sa caractéristique d'Euler est égale à 2. Ce résultat est appelé plus simplement *formule d'Euler*. Plus généralement, lorsque dans le plongement du graphe dans la surface, toutes les faces sont homéomorphes à des disques, alors le

caractéristique d'Euler du graphe ne dépend que de la surface. Cela permet de définir la caractéristique d'Euler d'une surface \mathcal{S} , notée $\chi(\mathcal{S})$. De plus, le *genre* g de la surface \mathcal{S} est défini comme :

$$\chi(\mathcal{S}) = 2 - 2g$$

Le genre d'une surface est un nombre entier positif ou nul. Il correspond au nombre maximal de chemins que l'on peut tracer sur la surface sans la découper en deux morceaux distincts. Le genre du plan euclidien est nul, et le genre du tore est égal à 1.

Une approche plus fine des plongements dans les surfaces amène, dans le cas des graphes finis, à l'étude des cartes et des hypercartes [CM92], mais sort de notre propos.

1.5.2 Complexes

Définition (Simplexe, Complexe) :

Soit V un ensemble dénombrable de sommets. Un *simplexe* est un sous-ensemble fini non vide de V . Si $s = \{v_0, \dots, v_q\}$ est un simplexe avec $q+1$ sommets, alors s a pour *dimension* q . Un *complexe* ou complexe simplicial abstrait \mathcal{C} , est une famille de simplexes telle que :

- (i) les sommets sont dans \mathcal{C} , *i.e.* $\forall v \in V$, alors $\{v\} \in \mathcal{C}$;
- (ii) si $s \in \mathcal{C}$, alors tout sous-ensemble non-vide de s appartient aussi à \mathcal{C} .

Si n est la plus grande dimension d'un complexe \mathcal{C} , on parle de n -complexe. Un 0-complexe est un ensemble de points. Un 1-complexe est un graphe. \diamond

Les complexes constituent une manière d'étendre la définition de graphe à des dimensions supérieures. Un sous-ensemble des sommets appartenant à un simplexe constitue une *face*. Les faces de dimension 0 sont des sommets, et celles de dimension 1 sont des arêtes. Un simplexe de dimension $n+1$ peut se voir plongé dans \mathbb{R}^n comme l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants. Ainsi, tout sous-ensemble de $k+1$ points pour $k \leq n$ correspond bien à un simplexe de dimension k . En dimension 1, ce simplexe correspond à un segment, à un triangle en dimension 2 et à un tétraèdre en dimension 3 (pour plus de détails, cf. [Rot94]).

Soit Δ le convexe formé par un triangle équilatéral du plan euclidien dont les arêtes sont de longueur 1. Un *plongement* d'un complexe \mathcal{C} dans une surface \mathcal{S} correspond à la donnée d'une application ρ définie sur les simplexes de \mathcal{C} telle que :

- (i) à tout sommet v , on associe un point $p = \rho(v) \in \mathcal{S}$;
- (ii) à toute arête $e = (v_1, v_2)$, on associe une courbe $\rho_e : [0; 1] \rightarrow \mathcal{S}$ injective \mathcal{C}^1 , tracée sur la surface, telle que $\rho_e(0) = \rho(v_1)$ et $\rho_e(1) = \rho(v_2)$.
- (iii) à toute face $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ on associe un difféomorphisme $\rho_{\mathcal{F}} : \Delta \rightarrow \mathcal{S}$ tel que $\rho_{\mathcal{F}}$ restreinte aux trois côtés de Δ soit égale à ρ_{e_1} , ρ_{e_2} , et ρ_{e_3} où $e_i = \{v_i, v_{i \bmod 3+1}\}$.

De plus, on demande à ce que le plongement soit *simple* au sens où l'application ρ est injective, au même sens que pour le plongement des graphes : l'intersection de l'image de deux simplexes est égale à l'image de l'intersection des simplexes. Un complexe est dit *planaire* lorsqu'il admet un plongement dans une des trois géométries planaires. Par abus de langage, le plongement du complexe dans une surface est lui aussi appelé *complexe*, ou encore *complexe simplicial concret*.

Pour plus de généralité, il est intéressant d'étendre la définition de complexe en autorisant des faces de dimension donnée un peu plus variées. Un *complexe polygonal* est un complexe pour lequel on modifie la propriété (ii) de la manière suivante :

(ii') la famille d'ensembles de \mathcal{C} est stable par intersection.

Les éléments du complexes eux-mêmes sont simplement appelés des *faces*. Un complexe polygonal peut se voir comme plongé dans \mathbb{R}^n , où ses sommets sont des points de \mathbb{R}^n et ses éléments sont des enveloppes convexes d'ensembles de sommets. La dimension d'une face est égale à la dimension de l'enveloppe convexe à laquelle elle correspond. Le plongement est dit *simple* lorsque dans cette représentation, l'intersection topologique de deux faces est égale à une des faces du complexe. Le plongement est dit *planaire* lorsqu'il est simple et plongé dans \mathbb{R}^2 . Le 1-complexe d'un complexe polygonal planaire est un graphe planaire.

1.5.3 Pavages

Définition (Pavage) :

Soit \mathcal{S} une surface. Un *pavage* de \mathcal{S} est une famille dénombrable d'ensembles fermés de \mathcal{S} , notés $\{T_1, \dots, T_n, \dots\}$, appelés *pièces* et vérifiant :

- (i) l'ensemble des pièces recouvre la surface, *i.e.* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \mathcal{S}$;
- (ii) deux pièces distinctes ont des intérieurs disjoints, *i.e.* $T_i^\circ \cap T_j^\circ = \emptyset$ lorsque $i \neq j$. \diamond

Cette définition est extrêmement générale et ne convient pas à l'étude faite dans ce mémoire. Une manière de restreindre cette définition consiste à spécifier plus précisément l'ensemble des pièces autorisées. Usuellement, on se donne un ensemble fini d'ensembles fermés de \mathcal{S} , notés $\{U_1, \dots, U_p\}$, et contraint les pièces du pavages d'être les images d'un des ensembles U_i par une isométrie de \mathcal{S} . Un pavage pour lequel il n'existe qu'une seule pièce à isométrie près est dit *isoédral*, et plus généralement *p-isoédral* pour p pièces.

Un pavage est dit *propre* lorsque toutes ses tuiles sont des disques topologiques, ce qui revient à dire que le bord d'une tuile est une courbe simple et fermée. Dans ce cas, les ensembles selon lesquels les tuiles s'intersectent sont soit des points du plan, appelés *sommets*, soit des ensembles homéomorphes à des segments appelés *arêtes*, soit des réunions quelconques de sommets et d'arêtes. L'ensemble des arêtes et des sommets d'un pavage forme un graphe planaire.

Un pavage est dit *régulier* lorsque son groupe des symétries, agit transitivement sur les sommets du pavage. Un pavage du plan régulier dans lequel toutes les pièces sont des polygones réguliers est dit *archimédien*. Dans le plan euclidien, il n'existe à isométrie près que 11 pavages archimédiens distincts [GS87]. Un pavage est dit *normal* lorsque toutes ses faces sont uniformément bornées.

Chapitre 2

Graphes localement finis

Les graphes planaires infinis localement finis possèdent en général des plongements complexes. Néanmoins, il est possible de modifier ces plongements de manière à posséder une décomposition du plan en termes de sommets, arêtes et faces. À partir de cette décomposition, on définit des propriétés géométriques du plongement et du graphe, qui restent invariantes sous l'action du groupe des automorphismes. La connaissance de ces invariants permet alors d'envisager une description du graphe par ses propriétés locales.

2.1 Propriétés des plongements localement finis

Considérons un graphe Γ connexe, de degré fini, possédant un plongement localement fini. L'ensemble des sommets du graphe constitue un ensemble localement fini de la géométrie dans laquelle le graphe est plongé. Néanmoins, le plongement lui-même peut posséder des points d'accumulation dûs aux plongements des arêtes. Le plongement d'une seule arête, en tant que image par un difféomorphisme \mathcal{C}^1 de l'intervalle $[0; 1]$, est un fermé du plan et ce faisant ses points d'accumulation sont des points de l'arête [Sag94]. Les autres points d'accumulation du plongement proviennent donc de l'accumulation des plongements d'une infinité d'arêtes.

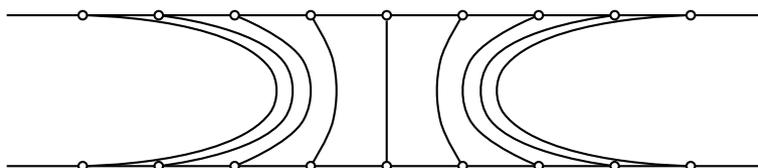


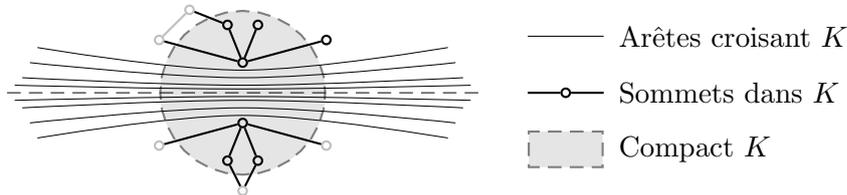
FIG. 2.1: Un exemple de plongement localement fini d'un graphe, en l'occurrence l'échelle infinie, dans lequel existent des points d'accumulation des arêtes qui n'appartiennent pas au graphe.

Le lemme suivant affirme qu'il est possible, quitte à modifier le plongement de Γ d'éviter ce type de points d'accumulation. Ces modifications du plongement préservent le plongement du graphe, au sens où l'on ne fait que déplacer des arêtes par homotopie à l'intérieur de la géométrie, sans faire intervenir de croisements pendant le procédé. Un plongement de Γ dans lequel tout compact s'intersecte avec un nombre fini d'arêtes de Γ est ainsi dit *arête localement fini*.

Lemme 2.1 (Arête localement fini)

Soit K un compact connexe du plan. Il est possible de modifier le plongement de Γ de manière à ce que le nombre d'arêtes de Γ qui s'intersectent avec K soit fini. De plus, la modification du plongement ne modifie pas le plongement des arêtes ayant une extrémité dans K .

Preuve : Soit K un compact connexe du plan, qui s'intersecte avec un nombre infini d'arêtes de Γ . Comme cet ensemble est compact, il contient un nombre fini de sommets de Γ , et comme le graphe est de degré fini, seul un nombre fini d'arêtes de Γ s'intersectent avec le compact K et possèdent une de leurs extrémités effectivement dans K . Dans la preuve qui suit, on supposera que Γ est plongé sur la sphère, et que son plongement possède au plus un point d'accumulation des sommets sur la sphère, correspondant au point à l'infini. Un tel plongement existe toujours pour un graphe localement fini, dans la mesure où la sphère est une compactification du plan.



Considérons les composantes connexes du graphe situées entièrement dans K (on ne considère que les sommets et les arêtes entièrement à l'intérieur du compact, cf. remarque 1.2 p. 13). Si jamais il existe plusieurs de ces composantes, on les relie par un chemin fini tracé dans le graphe, pour se ramener au cas d'une seule composante. Notons alors Ψ cette unique composante. Considérons le complémentaire *topologique* de Ψ dans la sphère (par opposition à son complémentaire dans le graphe). Ce complémentaire contient au plus une composante connexe \mathcal{H} contenant une infinité de sommets, sinon cela contredirait l'aspect localement fini. Les autres composantes sont "encerclées" par des cycles de Γ . Dans la sphère, cette composante \mathcal{H} est simplement connexe – en tant que complémentaire connexe d'une composante connexe – donc elle est homéomorphe au disque unité ouvert $\mathcal{D}[0; 1]$. Enfin, la restriction du graphe Θ à \mathcal{H} n'est connectée à Ψ que par un nombre fini d'arêtes.

Modifions le plongement en repoussant les arêtes hors du compact, tout en conservant l'aspect localement fini du graphe. Pour cela, considérons un homéomorphisme h qui envoie la composante \mathcal{H} sur le disque unité $\mathcal{D}([0; 1])$. Composons l'homéomorphisme h par une homothétie contractante h_c centrée sur l'origine, puis par l'homéomorphisme inverse h^{-1} . Cette opération permet de replonger la composante \mathcal{H} de manière à intercaler entre \mathcal{H} et Ψ un espace homéomorphe à un anneau. Il ne reste plus alors qu'à rajouter les arêtes (en nombre fini) existant entre Ψ et Θ à l'intérieur de cet anneau supplémentaire. A homéomorphisme près, cette opération repousse toutes les arêtes qui ne sont pas dans Ψ à une distance suffisante des arêtes et des sommets de Ψ . \square

A la suite de ce résultat, à partir d'un plongement localement fini de Γ , il est toujours possible de construire un plongement du graphe qui soit arête localement fini. Pour cela, il suffit de considérer un compact connexe K_0 contenant un sommet s_0 de Γ , et le plongement initial Γ_0 de Γ , et de procéder à la récurrence suivante. Étant donné un compact connexe K_n et un plongement Γ_n , le lemme 2.1 permet d'obtenir un plongement Γ_{n+1} tel que seul un nombre fini d'arêtes du plongement s'intersectent avec K_n . On continue la récurrence

à partir de ce plongement et d'un compact K_{n+1} qui contienne K_n et tous les points du plan à distance $\leq d$ de K_n , où d est choisi suffisamment grand pour que K_{n+1} contienne tous les sommets de Γ à distance dans le graphe $\leq n + 1$ du sommet s_0 . Le plongement limite est bien défini, car :

- (i) dans le lemme, on ne modifie pas le plongement du graphe pour les arêtes ayant une extrémité appartenant au compact K_n ;
- (ii) la famille de compacts K_n est une famille croissante pour l'inclusion telle que tout point du plan tombe ultimement dans un des K_n ;
- (iii) le compact K_n contient tous les sommets à distance $\leq n$ du sommet s_0 .

Il est alors possible de *compactifier* ce plongement en rajoutant à Γ (lorsque le graphe est infini) le point à l'infini. Le plongement du graphe devient alors un ensemble fermé du plan. Les faces du plongement sont alors des ouverts connexes du plan, et leurs bords topologiques sont constitués d'arêtes et de sommets de Γ . Le plan tout entier se partitionne ainsi naturellement en au plus quatre sous-parties : les sommets, les arêtes, les faces de Γ et le point à l'infini lorsque le graphe est infini.

Remarque 2.1 (Choix du plongement localement fini) – Par la suite, lorsque l'on se donne un graphe planaire localement fini, cela signifie que l'on se donne en même temps un plongement de ce graphe dans une des trois géométries. De plus, ce plongement est considéré comme étant arête localement fini au sens donné par le lemme 2.1. Par abus de langage, on considérera *le* plongement du graphe comme étant ce plongement particulier, et on parlera des faces du graphe en faisant référence aux faces du plongement. —

2.2 Graphes sommet-transitifs localement finis

Dans ce paragraphe, le graphe Γ sera supposé sommet-transitif et localement fini, de degré ≥ 3 (cf. remarque 1.3 page 14). On choisit un plongement arête localement fini de Γ . Comme le graphe est de degré fini, et que les arêtes sont des courbes simples \mathcal{C}^1 , il est possible, étant donné un sommet $s \in \Gamma$, d'ordonner de manière cyclique les arêtes incidentes au sommet s , par exemple dans le sens trigonométrique positif. De la même manière, il est possible d'ordonner les faces incidentes à ce sommet. Dans un graphe sommet-transitif, la façon dont sont arrangées ces faces n'est pas quelconque :

Lemme 2.2 (Non-intersection des faces)

Une face \mathcal{F} ne peut pas apparaître deux fois autour d'un sommet s .

Preuve : Supposons par l'absurde que dans le plongement, il existe un sommet s et une face \mathcal{F} incidente à s , qui apparaisse au moins deux fois dans le vecteur cyclique des faces incidentes à s . Il existe donc une boule B centrée sur s telle que $B \cap \mathcal{F}$ possède plus d'une composante connexe. La face \mathcal{F} étant un ouvert connexe du plan, donc connexe par arcs, il existe un chemin α sous la forme d'une courbe \mathcal{C}^1 , tracé à l'intérieur de \mathcal{F} , dont les deux extrémités sont le sommet s et reliant deux de ces composantes connexes. En termes concrets, la situation est la suivante :



Le chemin α découpe le plan en deux composantes connexes, l'une d'entre elles au moins contenant un nombre fini de sommets, puisque le graphe est localement fini. Appelons Ψ le sous-graphe fini contenu dans cette composante, auquel on rajoute le sommet s . Supposons par l'absurde que Ψ ne soit pas réduit au sommet s , et remarquons que dans ce cas, s est un point d'articulation pour Γ . Considérons φ un automorphisme de Γ envoyant s sur un sommet de Ψ différent de s . Le sommet $\varphi(s)$ est alors lui aussi un point d'articulation pour Ψ , qui sépare Ψ en au moins deux composantes connexes. L'une d'entre elles est forcément un sous-graphe de Ψ , sinon Ψ contiendrait un nombre infini de sommets. Cette composante correspond alors à $\varphi(\Psi)$. Mais comme s est envoyé à l'intérieur de Ψ , les sommets voisins de s et n'appartenant pas à Ψ sont aussi envoyés dans Ψ . Mais cela signifie que le nombre de sommets de Ψ est strictement plus grand que le nombre de sommets de $\varphi(\Psi)$, ce qui est absurde. \square

Ce lemme prouve en particulier que les points d'articulation de Γ , si jamais ils existent, séparent forcément des composantes infinies. Naturellement, ce lemme devient faux lorsque l'on retire l'hypothèse de sommet-transitivité. Comme conséquence de ce lemme, étant donné un sommet s de Γ et une face \mathcal{F} incidente à s , il existe exactement deux arêtes incidentes à s qui soient en même temps incidentes à \mathcal{F} . De plus, comme les arêtes sont des images \mathcal{C}^1 de $[0; 1]$ et que le plongement est arête localement fini, pour tout segment $[a; b] \subset]0; 1[$ de l'arête e , il existe un voisinage de ce segment ne rencontrant aucune autre arête ni sommet de Γ . Ainsi, si un point de e est dans le bord d'une face \mathcal{F} , alors l'arête entière avec ses extrémités appartient au bord de \mathcal{F} . De ces remarques, il est possible de déduire la structure du bord des faces dans le plongement :

Lemme 2.3 (Structure du bord des faces)

Soit \mathcal{F} une face de Γ . Le bord topologique de \mathcal{F} est soit un cycle fini de Γ , soit un chemin bi-infini de Γ dont les extrémités partent vers l'infini.

En définitive, ce lemme confirme l'intuition naturelle selon laquelle les bords des faces sont des chemins du graphe. La seule difficulté réside dans le choix fait pour définir ce qu'est réellement une face, qui au final permet d'aboutir au résultat naturel. Notons que du fait du caractère localement fini, le bord des faces de taille finie est borné dans le plan, tandis que pour les faces infinies, les deux côtés du chemin bi-infini convergent forcément vers l'infini. En particulier, les faces infinies ne sont pas bornées dans le plan.

Remarque 2.2 (Faces finies non bornées) – Les faces finies ne sont pas elle-mêmes nécessairement bornées dans le plan : il est possible de plonger un graphe planaire fini dans le plan euclidien, et dans ce cas il existe une face infinie dont le bord est forcément fini. Néanmoins, il est possible de considérer le plongement du même graphe, mais dans la sphère (qui correspond à un compactifié du plan). Ce plongement élimine l'anomalie précédente, au sens où toutes les faces deviennent bornées.

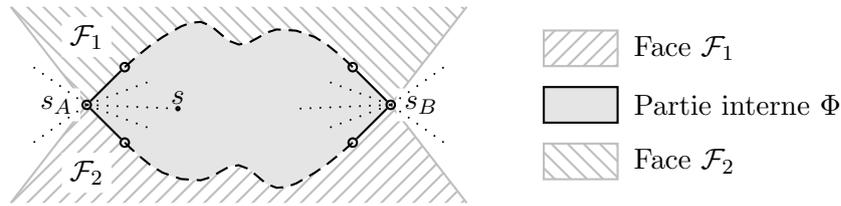
Comme les graphes considérés dans ce mémoire sont plans, il ne peut exister au plus qu'une face finie non bornée : en effet, l'unique point à l'infini est alors forcément à l'intérieur de la face et non sur son bord. En ce cas, il est toujours possible de considérer un plongement du graphe dans lequel les faces finies sont bornées, en appliquant la transformation précédente du plongement. —

Le lemme suivant est une version forte d'une propriété nécessaire à Chaboud [Cha95] pour ses pavages normaux. Ce lemme précise encore la structure des faces dans le graphe Γ :

Lemme 2.4 (Règle d'intersection des faces)

L'intersection de deux faces distinctes de Γ , quand elle est non vide, est soit réduite à un sommet, soit à une arête avec ses extrémités.

Preuve : Considérons \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux faces distinctes de Γ , et supposons que $\partial\mathcal{F}_1 \cap \partial\mathcal{F}_2$ contienne deux sommets distincts s_A et s_B de Γ . Suite au lemme 2.3, il est possible de joindre s_A et s_B par deux chemins tracés respectivement dans $\partial\mathcal{F}_1$ et $\partial\mathcal{F}_2$. Si ces deux chemins sont les mêmes, alors ils sont réduits à une simple arête, car le degré du graphe est le même en tout sommet et ≥ 3 . Sinon, la réunion de ces deux chemins constitue un chemin simple fermé, qui découpe le plan en deux parties, dont l'une d'entre elles, \mathcal{H} est bornée. Par la suite, on suppose que \mathcal{H} ne contient pas les faces \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 . Concrètement, la situation se présente de la manière suivante :



Soit Φ le sous-graphe fini de Γ inclus dans la partie \mathcal{H} . Φ est un graphe fini connexe. Nous allons procéder par induction sur le nombre de sommets de Φ . Si Φ ne contient que les deux sommets s_A et s_B , alors le résultat est vrai. Considérons maintenant un sommet $s \in \Phi$ différent de s_A et s_B . Soit φ l'automorphisme envoyant s_A sur s .

Considérons $\varphi(\Phi)$. Il est impossible que $\Phi \subsetneq \varphi(\Phi)$, car Φ et $\varphi(\Phi)$ possèdent le même nombre fini de sommets. De la même manière, $\varphi(\Phi) \subsetneq \Phi$. Supposons par l'absurde que $\varphi(\Phi) = \Phi$. Comme il existe un voisin de s_A qui n'est pas dans Φ (sinon $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$), ce voisin est envoyé par φ sur un voisin de s , qui appartient forcément à Φ . Comme $\varphi|_{\Phi}$ est une bijection, c'est impossible. Ainsi, $\varphi(\Phi)$ s'intersecte à la fois avec Φ et avec $\Gamma \setminus \Phi$.

Considérons les sommets de $\Phi \setminus \varphi(\Phi)$, et supposons par l'absurde que ni s_A ni s_B n'en fassent partie. Considérons les sous-graphes connexes de $\Phi \setminus \varphi(\Phi)$ associés, *i.e.* les sous graphes connexes constitués uniquement de sommets et d'arêtes entièrement dans $\Phi \setminus \varphi(\Phi)$. Leur image inverse Ψ n'est pas dans Φ , néanmoins elle n'est connectée qu'à des sommets de Φ du fait de l'hypothèse. Donc ce sous-graphe Ψ n'est connecté au reste de Γ que par les sommets s_A et s_B . Si l'on applique l'hypothèse d'induction et le lemme 2.2, ce sous-graphe est restreint à une arête de Γ . Donc $\Phi \setminus \varphi(\Phi)$ ne contient aucun sommet de Γ , uniquement des arêtes reliant s_A à s_B , ce qui est absurde car on a montré que cet ensemble était non vide.

Donc, supposons sans perte de généralité que $s_B \in \varphi(\Phi)$ et $s_A \notin \varphi(\Phi)$. Alors nécessairement, s_B est un point d'articulation pour $\varphi(\Phi)$. Cela implique que $\varphi^{-1}(s_B)$ est un point d'articulation pour Φ . Soit $\varphi^{-1}(s_B) = s_B$ et on procède par induction sur une composante de taille strictement plus petite, soit $\varphi^{-1}(s_B) \neq s_B$ et les composantes connexes séparées par ce point d'articulation sont par hypothèse réduites à une arête de Γ . Cela signifie alors que le point d'articulation est de degré 2, ce qui est absurde. \square

Corollaire 2.5 (Préservation des faces)

Les automorphismes de Γ envoient les faces finies de Γ sur des faces finies de Γ .

Preuve : Considérons le bord d'une face finie \mathcal{F} . Soit φ un automorphisme envoyant le bord de \mathcal{F} sur un cycle de Γ de la même longueur. Ce cycle définit une courbe de Jordan

dans le plan. Soit Φ le sous-graphe fini de Γ contenu dans une des composantes connexes finies séparées par ce cycle. Examinons $\Theta = \varphi^{-1}(\Phi)$. Les composantes connexes de ce sous-graphe ne sont connectées à Γ que par des sommets du bord de \mathcal{F} , qui sont au moins au nombre de 2 grâce au lemme 2.2. Considérons le graphe $\Gamma \setminus \Theta$ obtenu en retirant de Γ le sous-graphe Θ excepté les sommets de $\partial\mathcal{F}$. Les composantes connexes de Θ reposent dans des faces de $\Gamma \setminus \Theta$. Pour chacune de ces composantes, on retrouve le cas du lemme 2.4, ce qui implique que les composantes sont vides. Alors Θ ne contient aucun sommet. \square

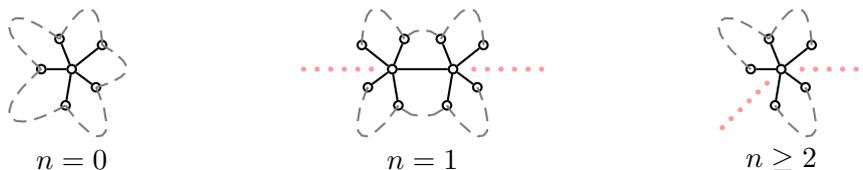
Le lemme précédent est un lemme extrêmement fort vis-à-vis de l'action des automorphismes de Γ . Ils préservent non seulement la structure du graphe, mais en même temps une partie de la structure du 2-complexe associé, celle correspondant aux faces finies. Cette propriété est appelée *propriété de préservation des faces*. Elle ne peut pas s'étendre au cas des faces infinies dans le cas sommet-transitif en général, comme nous le verrons au chapitre 3. Une conséquence directe du lemme est le fait que l'ensemble des classes de faces finies apparaissant autour d'un sommet est indépendant du sommet. Cela permet d'obtenir des résultats quant à la k -connexité de Γ , c'est-à-dire le nombre de sommets qu'il faut enlever au graphe pour le séparer en au moins deux composantes connexes contenant chacune au moins un sommet. Cette connexité est directement liée au nombre de faces infinies qui apparaissent autour de chaque sommet :

Lemme 2.6 (Connexité et nombre de faces infinies)

Supposons le graphe Γ sommet-transitif et infini. Soit n le nombre de faces infinies apparaissant autour d'un sommet de Γ . Alors, selon la valeur de n :

- $n \geq 2$ si et seulement si Γ est 1-séparable ;
- $n = 1$ si et seulement si Γ est 2-connexe et 2-séparable ;
- $n = 0$ si et seulement si Γ est 3-connexe.

Preuve : Dans les figures suivantes, les arêtes pointillées grises correspondent aux bords des faces finies incidentes à un sommet donné de Γ , et les droites pointillées désignent les séparations dues aux faces infinies. Ces séparations peuvent être prolongées jusqu'à l'infini à l'intérieur de la face infinie qui est non bornée.



Si le graphe est 1-séparable, cela signifie qu'enlever un sommet sépare le graphe, ce qui nécessite au moins deux faces infinies par sommet. Réciproquement, s'il existe au moins deux faces infinies par sommet, alors on le fait d'ôter un sommet sépare les composantes entre deux faces infinies. Si $n = 1$, alors toute arête reliant deux faces infinies distinctes a pour extrémités un ensemble de deux sommets séparant le graphe. Une telle arête existe nécessairement car le degré du graphe est supérieur ou égal à 3.

Réciproquement, supposons le graphe 2-séparable. Considérons $\{s, t\}$ une 2-séparation de Γ . Une conséquence du lemme 2.4 consiste à affirmer que les composantes de Γ séparées par $\{s, t\}$ sont soit réduites à une arête, soit infinies. Considérons une 2-séparation séparant deux composantes infinies, et retirons l'une de ces composantes du plongement. Le graphe obtenu est un graphe planaire localement fini, et la composante est tracée dans une face infinie de ce plongement. Le fait de rajouter la composante manquante à l'intérieur de cette face la découpe en plusieurs sous-faces, dont l'une au moins reste infinie. S'il existe au moins une face infinie dans le plongement, c'est que $n = 1$. \square

Remarque 2.3 – Lorsque le graphe est sommet-transitif et fini, de degré interne $d \geq 3$, alors la preuve précédente montre que le graphe est forcément 3-connexe. —

2.3 Graphes cofinis localement finis

Dans ce paragraphe, le graphe Γ sera supposé planaire localement fini, et cofini, ce qui signifie que l'action du groupe d'automorphismes de Γ sur les sommets du graphe ne possède qu'un nombre fini d'orbites. Dans la plupart des cas, le plongement de Γ ne vérifie pas la propriété de préservation des faces. Néanmoins, il est possible de construire un autre graphe à partir de Γ qui la vérifie :

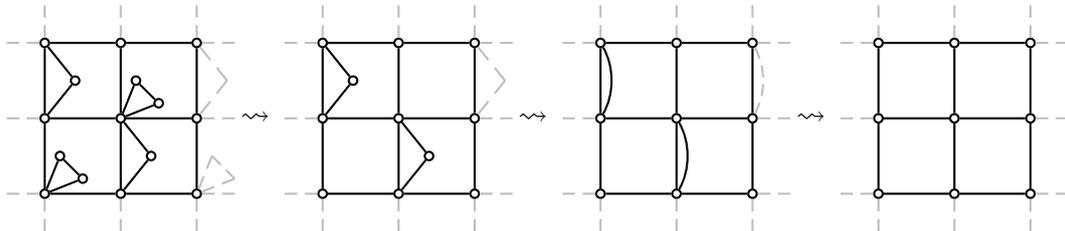
Lemme 2.7 (Préservation des faces)

Soit Γ un graphe planaire localement fini cofini. Alors il est possible de construire un graphe Γ' à partir de Γ en enlevant des classes de sommets et d'arêtes de Γ , de manière à ce que les automorphismes de Γ' envoient les bords des faces finies sur des bords de faces.

Preuve : La preuve de ce lemme se passe en deux étapes. Premièrement, on suppose que le graphe est 1-séparable, et que les 1-séparations séparent une composante connexe finie, appelée ici composante 1-connexe. On construit un nouveau graphe ne contenant pas ces composantes. Deuxièmement, on suppose le graphe 2-séparable et que les 2-séparations séparent une composante connexe finie, appelée ici composante 2-connexe, et on construit un nouveau graphe sans ces composantes. La propriété importante est la suivante : à chaque fois que l'on retire un sommet ou une arête du graphe, c'est toute son orbite par le groupe d'automorphismes que l'on enlève.

Supposons que Γ soit 1-séparable, et qu'il existe une composante 1-connexe finie Φ séparée par un sommet s . Il est possible de choisir Φ de manière à ce qu'elle ne contienne pas elle-même de 1-séparation. Dans ce cas, l'orbite de Φ par le groupe d'automorphismes de Γ est sans intersection, *i.e.* $\Phi \cap \varphi(\Phi)$ est soit vide, soit égale au sommet s , cela pour tout automorphisme φ de Γ . Dans ce cas, il est possible de retirer l'orbite de Φ de Γ , c'est-à-dire les orbites des sommets de Φ différents de s et les orbites des arêtes de Φ .

Cette opération diminue strictement le nombre de classes de sommets par action du groupe d'automorphismes. Il est donc possible de la réitérer un nombre fini de fois de manière à éliminer toutes les composantes 1-connexes finies du graphe. Le nombre d'opérations est borné par le nombre d'orbites de sommets. De plus, cette opération préserve les orbites des sommets et des arêtes restant dans le graphe.



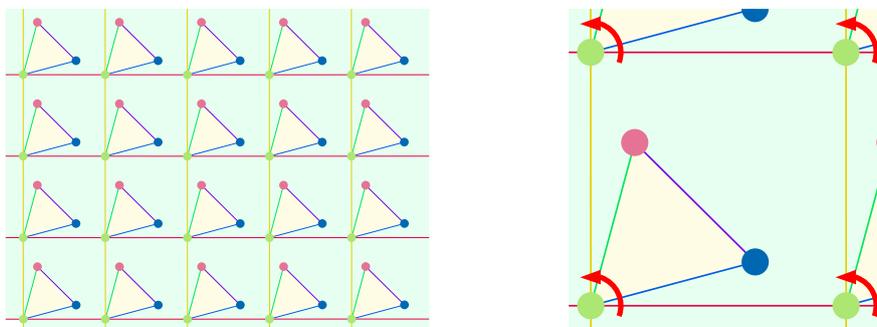
Supposons maintenant que Γ possède des 2-séparateurs déconnectant des composantes finies du graphe qui ne soit pas réduites à des arêtes. Soit $\{s, t\}$ une 2-séparation pour Γ et $\{s', t'\}$ son image par un automorphisme. Si $\{s, t\}$ déconnecte une composante finie Φ de Γ et si $\Phi \neq \varphi(\Phi)$ et $\Phi \cap \varphi(\Phi)$ n'est pas réduite à une des séparations, alors il est possible de trouver un couple de sommets $\{s'', t''\}$ séparant une composante $\Psi \subsetneq \Phi$. C'est une conséquence de la preuve du lemme 2.2.

Considérons une 2-séparation $\{s, t\}$ et une composante 2-connexe finie qui soit minimale au sens suivant : il n'existe pas d'automorphisme de Γ plongeant l'un des sommets $\{s, t\}$ à l'intérieur de la composante. La remarque précédente montre que c'est possible. En ce cas, Φ ne s'intersecte avec aucune de ses images dans l'orbite sous l'action du groupe d'automorphismes. Comme à l'étape précédente, il est possible de retirer la composante Φ du graphe Γ , c'est-à-dire les orbites des sommets de Φ différents de $\{s, t\}$ et les orbites des arêtes internes à Φ , et de la remplacer par une arête reliant s à t . Il est possible, lors de cette opération, de créer des arêtes multiples entre les sommets. Dans ce cas, ces arêtes sont fusionnées en une seule.

Cette opération réduit elle aussi strictement le nombre de classes de sommets par action du groupe d'automorphismes. Il est donc possible de la réitérer un nombre fini de fois de manière à éliminer toutes les composantes 2-connexes finies du graphe. Le nombre d'opérations est borné par le nombre d'orbites de sommets. Le graphe final obtenu vérifie alors les hypothèses du lemme 2.4 . La même démonstration que dans le corollaire 2.5 implique alors que les automorphismes envoient les bords des faces sur les bords des faces. Le graphe obtenu, noté Γ' , vérifie les conditions du lemme. \square

Maintenant que l'on a construit un graphe à partir de Γ qui vérifie la propriété de préservation des faces, la question qui se pose est la suivante : est-il possible de rajouter les composantes enlevées de manière à conserver cette propriété ? La réponse est négative dans le cas général, comme nous pouvons le voir dans l'exemple suivant.

Exemple 2.3.1 – Considérons la grille infinie \mathbb{Z}^2 . Dans le plongement usuel, ses automorphismes sont induits par les isométries du plan qui préservent la grille. En particulier, le groupe d'automorphismes contient des rotations d'angle $\pi/2$, des translations et des symétries. Rajoutons maintenant en chaque sommet de la grille une composante 1-connexe finie sous la forme d'un triangle :



Les automorphismes de ce graphe envoient les sommets de la grille sur les sommets de la grille, pour des questions de degré. Par conséquent, les triangles sont envoyés sur des triangles. Au final, les automorphismes du graphe sont donc induits par les automorphismes de la grille. Si l'on désire obtenir un plongement planaire vérifiant la propriété de préservation des faces, il va falloir “*spécialiser*” le groupe d'automorphismes du graphe, c'est-à-dire considérer un sous-groupe strict d'automorphismes qui vérifie la propriété. Ici, le fait de choisir une des faces de la grille dans laquelle plonger la composante 1-connexe fait que les rotations ne sont plus des automorphismes qui préservent les faces : les automorphismes restants assignent un sens de rotation à chaque sommet. —

Le processus décrit dans l'exemple 2.3.1 est en fait un phénomène général. Supposons vouloir effectuer une opération inverse aux opérations effectuées dans la construction donnée dans le lemme 2.7. Ces opérations se résument à trois types distincts :

- (a) dédoublement d'une arête en deux ou plusieurs arêtes multiples ;
- (b) remplacement d'une arête par une composante 2-connexe ;
- (c) ajout en un sommet d'une composante 1-connexe finie.

Supposons que dans chacune de ces opérations, la composante rajoutée n'est pas symétrique, *i.e.* le fait d'appliquer une symétrie à la composante n'est pas un automorphisme de la composante. Le fait de rajouter cette composante impose donc un *sens* aux extrémités auxquelles elle est raccrochée (cf. figure 2.2).



FIG. 2.2: Application d'une opération de remplacement d'une arête par une composante 2-connexe. L'arête peut posséder une symétrie propre, qui disparaît après transformation.

Considérons le graphe Γ avant de rajouter la composante. Si c'est une arête que l'on remplace, on considère le stabilisateur de l'ensemble constitué par l'arête et ses extrémités dans le graphe, et si c'est un sommet, on considère le stabilisateur de ce sommet. Si ce stabilisateur est non trivial, le fait d'effectuer la transformation élimine des automorphismes appartenant à ce stabilisateur. Vouloir rajouter l'arête en préservant les faces consiste alors à trouver un sous-groupe du groupe d'automorphismes de Γ dans lequel le stabilisateur est trivial. Si un tel sous-groupe existe, il est alors possible d'effectuer la transformation en préservant la propriété de conservation des faces.

Néanmoins, dans le cas général, un tel sous-groupe, s'il existe, va radicalement changer l'action du groupe d'automorphismes sur le graphe. L'exemple le plus criant est le cas d'un graphe qui soit sommet-transitif mais pas de Cayley. Pour un tel graphe, il est par définition impossible de trouver un sous-groupe transitif sur les sommets et dont le stabilisateur d'un sommet soit trivial. Si jamais on peut trouver un sous-groupe tel que les stabilisateurs des sommets soient triviaux, le nombre d'orbites distinctes de sommets aura donc strictement augmenté.

Dans le cadre de l'étude des graphes cofinis, il faut donc se résoudre à faire un choix. Si l'on décide d'étudier les groupes d'automorphismes de ces graphes, alors le fait d'utiliser le lemme 2.7 pour transformer Γ en Γ' permet de simplifier l'étude de ce groupe : les automorphismes de Γ sont des automorphismes de Γ' composés avec des automorphismes des composantes finies supplémentaires. Si l'on s'intéresse à l'étude des graphes en eux-mêmes, alors il suffit de savoir qu'il est toujours possible de reconstruire Γ à partir de Γ' en rajoutant un nombre fini de composantes. Par la suite, on s'intéressera donc aux graphes cofinis vérifiant la propriété de préservation des faces.

2.4 Invariants géométriques

L'action du groupe d'automorphismes sur le graphe conservant la structure des faces, il est possible de définir un ensemble d'invariants géométriques, *i.e.* de propriétés combinatoires liées au plongement, et restant invariantes par action du groupe d'automorphisme.

Ce paragraphe analyse ces différents invariants, qui serviront par la suite à construire le graphe entièrement à partir de ses propriétés locales. Dans ce paragraphe, le graphe Γ sera simplement supposé vérifier – en plus d’être planaire – le lemme 2.5 (cf. paragraphe 2.4.4 page 45 pour une discussion dans un cadre plus large). Le graphe Γ est supposé muni d’un groupe d’automorphismes G agissant de manière cofinie sur les sommets du graphe, *i.e* le nombre d’orbites des sommets de Γ sous l’action de G est finie.

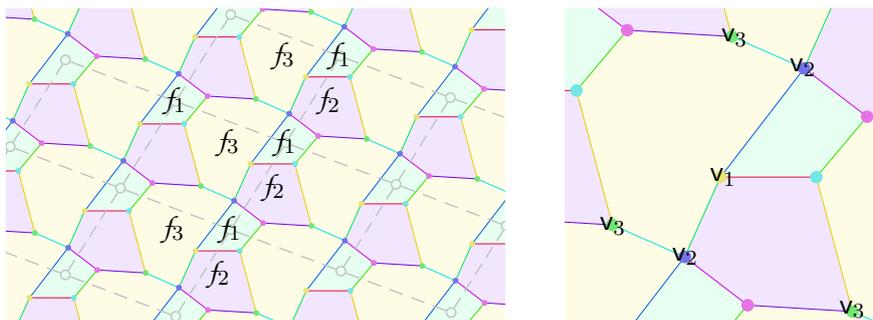
2.4.1 Coloration du graphe

Le groupe d’automorphismes agissant naturellement sur les sommets, les arêtes et les faces finies du plongement de Γ , il est alors possible de définir un étiquetage de ces éléments combinatoires selon l’orbite à laquelle ils appartiennent. A chacun de ces éléments, on associe un ensemble de couleurs, chacune correspondant exactement à une orbite :

$$\begin{array}{ll} \text{Classes de sommets} & \mathbf{V} = \{v_1, \dots, v_n, \dots\} \\ \text{Classes d’arêtes} & \mathbf{E} = \{e_1, \dots, e_m, \dots\} \\ \text{Classes de faces} & \mathbf{F} = \{f_1, \dots, f_p, \dots\} \end{array}$$

Dans un graphe sommet-transitif, il n’existe qu’une seule couleur de sommets. De plus, comme chaque sommet rencontre un nombre fixé d’arêtes, le nombre de couleurs d’arêtes est fini. Il en est de même pour le nombre de couleurs de faces. Les graphes cofinis sont exactement ceux pour lesquels le nombre de couleurs de sommets est fini. Dans ce cas, les couleurs d’arêtes et de sommets sont elles aussi en nombre fini. Dans le cas d’un graphe de Cayley, chaque couleur d’arête correspond à un couple de générateurs de la forme $\{a_i, a_i^{-1}\}$ (cet ensemble peut éventuellement ne contenir qu’un seul élément lorsque le générateur est son propre inverse).

Exemple 2.4.1 – Considérons le graphe cofini suivant tracé dans le plan euclidien. Les classes de sommets sont au nombre de 5, et à chacune de ces classes on a associé une couleur propre. De la même manière, il y a 8 classes d’arêtes et 3 classes de faces.



Dans le cas de ce graphe particulier, le groupe des automorphismes, dont le graphe de Cayley est représenté en pointillés sur le schéma, est isomorphe à \mathbb{Z}^2 , et tous les automorphismes du graphe sont des translations du plan euclidien. —

Cet étiquetage n’est pas forcément le plus habile : si e et f sont deux arêtes de la même couleur, s une extrémité de e et t une extrémité de f , il n’existe pas forcément d’automorphisme de Γ envoyant s sur t . Dans ce cas, au lieu d’étiqueter les arêtes, il est plus intéressant d’étiqueter les couples (s, e) où s est un sommet de Γ et e une arête incidente à s . Un tel couple est appelé une *demi-arête* ou un *brin* [CM92]. Le groupe

d'automorphismes de Γ agit sur les demi-arêtes, puisqu'il préserve l'adjacence, et cette action permet de différencier plus finement les automorphismes du graphe.

Dans le cas d'un graphe de Cayley, cette approche revient à étiqueter les arêtes du graphe de Cayley orienté, sans l'identification faite entre les générateurs. Dans l'analyse qui suit, il est tout de même plus simple d'identifier ces arêtes doubles en suivant la remarque 1.2 page 13. Par convention, dans un graphe de Cayley, lorsque l'on parle des générateurs apparaissant autour d'un sommet, ce seront les générateurs pointant vers ce sommet.

2.4.2 Cas de faces finies - Lemmes de Chaboud

Chaboud [Cha95] utilise des pavages normaux, dans lesquels toutes les faces sont finies, et même uniformément bornées dans le plan. Dans cette partie, nous supposons que les faces de Γ sont toutes de taille finie et que les automorphismes préservent les bords des faces. Considérons un sommet $s \in \Gamma$ et l'ensemble des arêtes incidentes à s . Du fait du plongement planaire du graphe, il est possible d'ordonner de manière cyclique les couleurs de ces arêtes, selon l'ordre dans lequel elles apparaissent lorsque l'on tourne autour de s dans le sens trigonométrique positif. Le vecteur obtenu est appelé le *vecteur d'arête* en s , noté ξ_s . De la même manière, si l'on ordonne les faces incidentes à un sommet s , on obtient le *vecteur de face* en s , noté ϕ_s . Ces deux vecteurs sont définis à inversion près (cf remarque 1.5). Néanmoins, nous allons préciser ces classes d'isomorphisme.

En tout sommet, le vecteur d'arête et le vecteur de face sont *liés* au sens suivant : il est possible de numéroter le vecteur d'arête sous la forme $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ et le vecteur de face $\{f_1, \dots, f_d\}$ de façon à ce que la face f_i se situe entre l'arête \mathbf{e}_i et l'arête $\mathbf{e}_{i+1 \bmod d}$. Par la suite, on supposera qu'en un sommet donné, ces deux vecteurs vérifient cette convention. Il est alors possible de définir les opérations suivantes sur les couples de vecteurs (ξ_s, ϕ_s) :

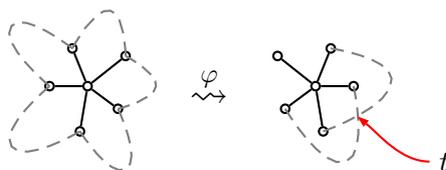
- Rotation : $\begin{cases} \xi_s : i \longrightarrow i + 1 \bmod d \\ \phi_s : i \longrightarrow i + 1 \bmod d \end{cases}$
- Symétrie : $\begin{cases} \xi_s : i \longrightarrow d - i + 1 \bmod d \\ \phi_s : i \longrightarrow d - i \bmod d \end{cases}$

Deux couples (ξ_s, ϕ_s) et (ξ_t, ϕ_t) sont dits *isomorphes* s'il est possible de transformer l'un en l'autre en usant d'une suite finie de rotations et de symétries. Ces opérations correspondent naturellement à des isométries du plan laissant le sommet fixe, c'est-à-dire des rotations axées sur le sommet et des symétries axiales d'axe passant par ce même sommet. Ces transformations sont ici exprimées de manière combinatoire ou discrète, c'est-à-dire comme une permutation particulière des vecteurs d'arêtes et de faces. Le lemme suivant, qui est une version forte d'un lemme prouvé par Chaboud, montre l'invariance de ces vecteurs par le groupe d'automorphisme :

Lemme 2.8 (Lemme de rotation de Chaboud)

Le couple de vecteurs en s , (ξ_s, ϕ_s) ne dépend que de la couleur du sommet s , à isomorphisme près.

Preuve : Grâce au corollaire 2.5, les bords des faces incidentes à un sommet s sont envoyées par un automorphisme φ sur le bord des faces incidentes au sommet $\varphi(s)$. Considérons la figure suivante dans laquelle on a dessiné le sommet s et en pointillés les bords des faces incidentes à s :



Si l'on considère les bords de chacune de ces faces et leur image par automorphisme, alors ces bords ne s'intersectent deux à deux que le long d'une arête incidente à s , grâce au lemme 2.4. Alors, si jamais l'ordre des couleurs d'arête change par passage de s à $\varphi(s)$, cela implique un croisement de ces bords en un sommet t qui ne soit pas un voisin de s , ce qui est absurde. \square

Corollaire 2.9

Le vecteur de type en s ne dépend que de la couleur du sommet s , à inversion près.

Exemple 2.4.2 – Prenons l'exemple d'un graphe sommet-transitif. Le couple de vecteurs (ξ, ϕ) est indépendant du sommet de Γ . Cela ne signifie pas qu'il détermine à lui tout seul entièrement le graphe. L'exemple suivant montre qu'il est possible d'exhiber des graphes possédant le même couple de vecteurs, tout en étant non-isomorphes.

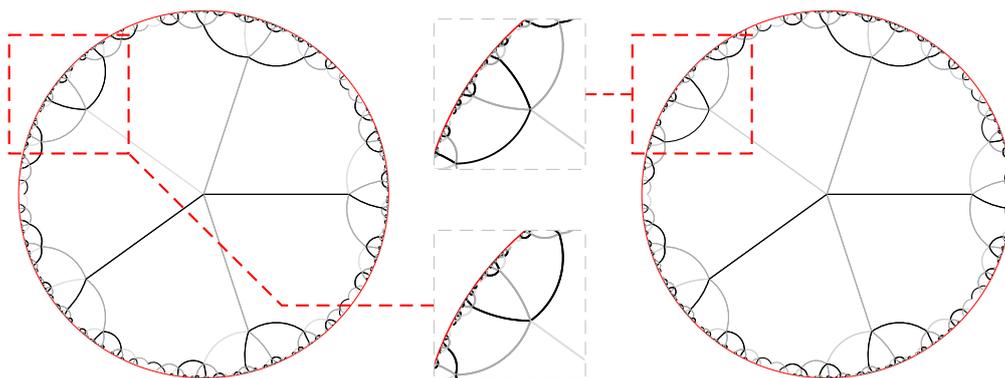


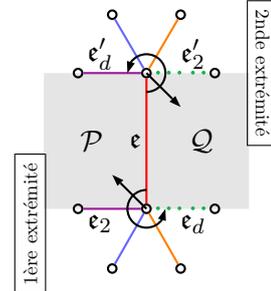
FIG. 2.3: Deux graphes de Cayley non-isomorphes possédant le même vecteur d'arête et le même vecteur de face. Les extrémités de l'arête la plus claire sont non-isomorphes (cf. détail), ce qui assure que les deux graphes sont non-isomorphes (cf. théorème de Whitney au paragraphe 2.4.4).

Considérons les graphes de la figure 2.3. Les deux graphes sont des réalisations du pavage du plan hyperbolique par des décagones. Chacun de ces graphes est arête-transitif et face-transitif et de plus, ils possèdent le même vecteur de type – ce qui ne découle pas des propriétés de transitivité, les tailles des faces pouvant différer. Néanmoins, les étiquetages des bords de leurs faces diffèrent : pour le graphe de gauche, ce bord correspond au mot $(\mathbf{rgrbrbgrbr})$ tandis que pour le graphe de droite, $(\mathbf{rgbrb})^2$, où les lettres \mathbf{r} , \mathbf{g} et \mathbf{b} correspondent aux trois couleurs que prennent les arêtes de Γ . —

Le lemme précédent fournit un invariant pour les sommets, mais il existe aussi un invariant pour les arêtes de Γ . Considérons deux sommets s et t voisins dans le graphe, reliés par une arête e de couleur ϵ . Cette arête fait partie des vecteurs d'arête de s et de t , et ces deux vecteurs cycliques peuvent être réordonnés de manière à ce que ϵ en soit le premier élément. Considérons le sous-graphe de Γ constitué par la réunion de ces deux

vecteurs d'arêtes à l'aide de l'arête e . Munissons cette structure des vecteurs de faces et d'arêtes en s et t . Une telle structure est appelée un *voisinage d'arête* pour l'arête e . Plus précisément, étant donné une arête e , on peut définir son voisinage d'arête de la manière suivante :

- Le vecteur d'arête de la 1^{ère} extrémité : $\xi_1 = \{e_1 = e, \dots, e_d\}$
- Le vecteur de face associé : $\phi_1 = \{f_1 = \mathcal{P}, \dots, f_d = \mathcal{Q}\}$
- Le vecteur d'arête de la 2^{nde} extrémité : $\xi_2 = \{e'_1 = e, \dots, e'_d\}$
- Le vecteur de face associé : $\phi_2 = \{f'_1 = \mathcal{Q}, \dots, f'_d = \mathcal{P}\}$



Les flèches sur la figure indiquent le sens de rotations des vecteurs selon les extrémités de l'arête e . De la même manière que sur les vecteurs d'arête, il est possible de définir précisément les opérations sur ces voisinages d'arête :

- **Inversion** : consiste à échanger les deux extrémités du voisinage d'arête (*i.e* intervertir ξ_1 et ξ_2 , ainsi que ϕ_1 et ϕ_2 sans modifier les vecteurs) ;
- **Symétrie** : consiste à appliquer une symétrie sur les vecteurs d'arête et de face en chaque extrémité, symétrie qui laisse stable l'arête e . Vu comme une permutation sur les vecteurs constituant le voisinage d'arête, cela se traduit par :

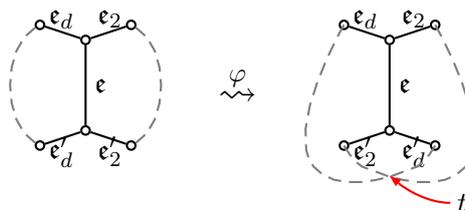
$$\xi_1, \xi_2 : i \longrightarrow 2 - i \pmod d \quad \phi_1, \phi_2 : i \longrightarrow 1 - i \pmod d$$

A noter que ces transformations traduisent encore une fois de manière combinatoire les isométries du plan laissant globalement fixe l'arête associée. Le *couleur* d'un voisinage d'arête correspond à la couleur de l'arête centrale. Deux voisinages d'arêtes sont dits *isomorphes* lorsqu'il est possible de passer de l'un à l'autre par une série d'opérations d'inversion et de symétrie. Un voisinage d'arête est dit *cohérent* avec un couple (ξ, ϕ) si et seulement si les deux extrémités du voisinage d'arête sont isomorphes avec le couple (ξ, ϕ) . Le lemme suivant montre l'invariance des voisinages d'arêtes par le groupe d'automorphisme du graphe :

Lemme 2.10 (Lemme d'inversion de Chaboud)

Le voisinage d'arête d'une arête e ne dépend que de la couleur de cette arête, à isomorphisme près.

Preuve : Considérons l'arête e , les voisins de ses extrémités et les bords des faces séparées par e , tracées en pointillés sur la figure suivante :



Selon le même raisonnement que pour le lemme de rotation, les bords des faces ne peuvent pas modifier la façon dont sont agencées les arêtes autour d'une des extrémités, sinon cela créerait un croisement sur un sommet t qui ne serait pas un des voisins d'une des extrémités de l'arête e . □

Considérons le couple (ξ, ϕ) correspondant à un graphe planaire localement fini Γ , et définissons la relation d'équivalence suivante : deux arêtes $e, f \in \xi$ étiquetées par la même couleur ϵ sont dites équivalentes, noté $e \sim f$, si et seulement si il existe un isomorphisme de (ξ, ϕ) envoyant l'arête e sur l'arête f . Remarquons que les isomorphismes des couples (ξ, ϕ) ne recouvrent pas forcément tous les automorphismes de Γ . Notons $\text{eq}_{\xi, \phi}(\epsilon)$ le nombre de classes d'équivalence pour les arêtes étiquetées par ϵ dans le couple (ξ, ϕ) . Une classe d'équivalence est dite *apparaître* à une extrémité d'un schéma d'étiquetage donné si et seulement si l'arête centrale du schéma d'étiquetage, vue comme faisant partie du vecteur d'arête et de face de l'une ou de l'autre extrémité du schéma d'étiquetage, appartient à cette classe d'équivalence.

Remarque 2.4 – Une des conséquences du lemme 2.10 nous assure que ce nombre, en plus d'être au moins égal à 1, ne peut pas excéder 2. En effet, dans la mesure où pour une couleur d'arête donnée il n'existe qu'un voisinage d'arête possible à isomorphisme près, chaque classe d'équivalence pour \sim doit correspondre à une extrémité du voisinage d'arête coloré par ϵ , et ce voisinage ne possède que deux extrémités. —

Une arête étiquetée par la couleur ϵ sépare toujours la même paire de couleurs faces finies. C'est une conséquence immédiate du lemme 2.10 lorsque les deux faces sont finies. Lorsque l'une au moins des deux faces est infinie, cela vient du fait que toutes les faces infinies ont la même couleur ∞ et de la propriété de préservation des faces. Il est alors possible de définir le *séparateur* de ϵ , noté $\text{sep}_{\xi, \phi}(\epsilon)$ qui est égal à la paire de couleurs séparées par l'arête étiquetée par ϵ dans le couple (ξ, ϕ) . Lorsque le graphe possède au plus une face infinie par sommet, ce principe de séparation a pour conséquence que les automorphismes préservent aussi les bords des faces infinies.

Exemple 2.4.3 – Considérons le vecteur d'arête $\xi = [\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, f]$ dans le cas d'un graphe Γ où toutes les faces sont finies. Pour accompagner un tel vecteur, choisissons un vecteur de face ϕ où toutes les faces sont finies de même couleur : $\phi = [f, f, f, f, f]$. Alors, le nombre de classes d'équivalence $\text{eq}_{\xi, \phi}(\epsilon)$ est égal à 2, tandis que $\text{eq}_{\xi, \phi}(f)$ vaut 1. Supposons que l'on rajoute une arête étiquetée par ϵ en début du vecteur ξ . Alors, si dans ϕ les faces sont toutes de la même couleur, $\text{eq}_{\xi, \phi}(\epsilon)$ sera égal à 3, ce qui en fait un vecteur d'arête impossible pour un graphe planaire localement fini. —

Les lemmes précédents s'appliquent si l'on restreint les vecteurs d'arête à des vecteurs de demi-arête. Cette remarque permet de les affiner dans le cas où Γ est un graphe de Cayley. En effet, pour un tel graphe, il est possible d'ordonner l'ensemble des générateurs $\{a_1, \dots, a_n\}$ de manière à ce que cet ordre reflète l'ordre d'apparition de ces générateurs autour d'un sommet donné. En corollaire du lemme 2.8, ce vecteur est indépendant du sommet, à inversion près. Notons ξ le vecteur représentant les générateurs apparaissant autour du sommet représentant le neutre ϵ dans le graphe. On peut alors identifier deux types de sommets : les sommets *directs*, pour lesquels le vecteur de demi-arête est exactement le vecteur ξ à rotation près, et les sommets *indirects* pour lesquels le vecteur de demi-arête est isomorphe à une inversion de ξ . De même, une demi-arête étiquetée par le générateur a_i est dite directe lorsqu'elle n'inverse pas cet ordre de rotation, et indirecte dans le cas contraire. Le lemme 2.10 assure que cette propriété dépend uniquement du générateur a_i .

2.4.3 Cas de faces infinies

Dans le cas où le graphe contient des faces infinies, les raisonnements restent relativement similaires, mais le fait que les faces infinies échappent aux automorphismes autorise une variété de plongements du graphe plus grande.

Considérons l'ensemble des demi-arêtes sur un sommet s donné. Sur les couples (s, e) , il est possible de définir une relation d'équivalence de la manière suivante : $(s, e) \sim (s, f)$ si et seulement si il existe une boucle dans $\Gamma \setminus \{s\}$, partant de s et arrivant en s , telle que la première arête traversée soit e et la dernière arête traversée soit f . Les classes d'équivalence pour cette relation sont les composantes séparées par le sommet s dans Γ . Elles ne dépendent que de la couleur de s , car les automorphismes préservent les chemins.

Le nombre de ces composantes en un sommet donné est fini. Du fait de la conservation des faces, si l'on regarde l'ordre des couleurs d'un vecteur d'arête restreint à une composante, cet ordre ne dépend que de la couleur du sommet, à inversion près. Dans le cas où il n'y qu'une seule composante, les automorphismes préservent les bords des faces finies et infinies (car il n'y a qu'au plus une face infinie par sommet), cet ordre est cyclique. Sinon il s'agit d'un ordre linéaire usuel. Ce résultat se prouve de la même manière que pour le lemme 2.8. Les faces qui séparent ces composantes dans le vecteur de face jouent un rôle important : si jamais l'une d'entre elles est finie, alors les automorphismes préservant cette face finie, ils préservent aussi le lien entre les deux composantes. Dans cette mesure, seules les composantes séparées par deux faces infinies pourront modifier le plongement.

Ces remarques permettent de définir de nouvelles opérations sur les couples (ξ_s, ϕ_s) de la manière suivante. Pour cela, on écrit les vecteurs d'arêtes et de faces comme des blocs contigus d'arêtes et de faces correspondant à chaque composante, en ne comptant que les faces finies pour les blocs de faces :

$$\begin{aligned} \xi &: \left[\underbrace{e_{k_1^d}, \dots, e_{k_1^f-1}, e_{k_1^f}}_{\text{Bloc 1}}, \underbrace{e_{k_2^d}, \dots, e_{k_2^f-1}, e_{k_2^f}}_{\text{Bloc 2}}, \dots, \underbrace{e_{k_t^d}, \dots, e_{k_t^f-1}, e_{k_t^f}}_{\text{Bloc t}} \right] \\ \phi &: \left[\underbrace{f_{k_1^d}, \dots, f_{k_1^f-1}, \infty}_{\text{Bloc 1}}, \underbrace{f_{k_2^d}, \dots, f_{k_2^f-1}, \infty}_{\text{Bloc 2}}, \dots, \underbrace{f_{k_t^d}, \dots, f_{k_t^f-1}, \infty}_{\text{Bloc t}} \right] \end{aligned}$$

On définit alors les transformations suivantes uniquement sur ces blocs, de manière à ce que les blocs de faces soient constamment séparés par des faces infinies :

- **Réarrangement** : consiste à réarranger l'ordre des composantes apparaissant autour d'un sommet, de manière à préserver le fait que les composantes soient bordées par des faces infinies. Un réarrangement correspond alors à une permutation de ces blocs selon une permutation σ :

$$\begin{aligned} \xi &: \left[\underbrace{e_{k_{\sigma(1)}^d}, \dots, e_{k_{\sigma(1)}^f-1}, e_{k_{\sigma(1)}^f}}_{\text{Bloc } \sigma(1)}, \underbrace{e_{k_{\sigma(2)}^d}, \dots, e_{k_{\sigma(2)}^f-1}, e_{k_{\sigma(2)}^f}}_{\text{Bloc } \sigma(2)}, \dots, \underbrace{e_{k_{\sigma(t)}^d}, \dots, e_{k_{\sigma(t)}^f-1}, e_{k_{\sigma(t)}^f}}_{\text{Bloc } \sigma(t)} \right] \\ \phi &: \left[\underbrace{f_{k_{\sigma(1)}^d}, \dots, f_{k_{\sigma(1)}^f-1}, \infty}_{\text{Bloc } \sigma(1)}, \underbrace{f_{k_{\sigma(2)}^d}, \dots, f_{k_{\sigma(2)}^f-1}, \infty}_{\text{Bloc } \sigma(2)}, \dots, \underbrace{f_{k_{\sigma(t)}^d}, \dots, f_{k_{\sigma(t)}^f-1}, \infty}_{\text{Bloc } \sigma(t)} \right] \end{aligned}$$

- **Twist** : consiste à appliquer une symétrie sur une des composantes tout en laissant toutes les autres composantes inchangées. Vu comme une permutation sur les vecteurs d'arête et de face, un twist sur le bloc 1 se traduit par :

$$\begin{aligned} \xi &: \left[\underbrace{e_{k_1^f}, \dots, e_{k_1^d+1}, e_{k_1^d}}_{\text{Bloc 1 renversé}}, \underbrace{e_{k_2^d}, \dots, e_{k_2^f-1}, e_{k_2^f}}_{\text{Bloc 2}}, \dots, \underbrace{e_{k_t^d}, \dots, e_{k_t^f-1}, e_{k_t^f}}_{\text{Bloc t}} \right] \\ \phi &: \left[\underbrace{f_{k_1^f-1}, \dots, f_{k_1^d}, \infty}_{\text{Bloc 1 renversé}}, \underbrace{f_{k_2^d}, \dots, f_{k_2^f-1}, \infty}_{\text{Bloc 2}}, \dots, \underbrace{f_{k_t^d}, \dots, f_{k_t^f-1}, \infty}_{\text{Bloc t}} \right] \end{aligned}$$

Définition (Isomorphismes des vecteurs d'arêtes et de faces) :

Deux couples (ξ_s, ϕ_s) et (ξ_t, ϕ_t) sont dits *isomorphes* si et seulement si il est possible de passer de l'un à l'autre par une série de rotations, symétries, réarrangements et twists. La figure 2.4 donne un exemple de deux couples isomorphes. \diamond

Cette définition reste en accord avec la définition précédente dans le cas où toutes les faces sont finies. De la même manière, il est possible de définir les opérations de réarrangement et de twist sur les voisinages d'une arête e comme des réarrangements et twists d'une des extrémités de l'arête centrale du voisinage. Cela permet d'étendre la notion d'isomorphisme entre voisinages d'arête en conséquence.

Définition (Isomorphismes des voisinages d'arêtes) :

Deux voisinages d'arêtes η_e et η'_e de même couleur sont dits *isomorphes* si et seulement si il est possible de passer de l'un à l'autre par une série d'inversions, symétries, réarrangements d'une extrémité et twist d'une extrémité. \diamond

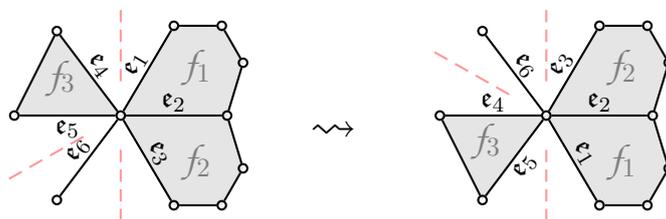


FIG. 2.4: Exemple de réarrangement des composantes et de twist.

Le lemme suivant assure que les invariants des sommets et des arêtes proposés dans le paragraphe précédent restent des invariants lorsque l'on s'autorise des faces infinies, dans la mesure où l'on étend la notion d'isomorphisme :

Lemme 2.11 (Rotation et inversion – Faces infinies)

Le couple de vecteurs en s , (ξ_s, ϕ_s) ne dépend que de la couleur de s , à isomorphisme près. Le voisinage d'une arête e ne dépend que de la couleur de l'arête, à isomorphisme près.

Preuve : La preuve est similaire à la preuve des lemmes de Chaboud. Il suffit de considérer les chemins associés aux bords des faces finies, et de voir que puisque ces chemins sont préservés par automorphisme, les seules opérations possibles sur les invariants du graphe sont celles décrites par les opérations de réarrangement et de twist. \square

Lorsque l'on découpe le graphe selon ses points d'articulation, les composantes connexes restantes sont appelées *composantes 2-connexes* de Γ . Ces composantes sont effectivement 2-connexes. Les composantes incidentes à un sommet ne dépendent à isomorphisme près que de la couleur de ce sommet. L'ensemble des composantes 2-connexes forme une partition des arêtes de Γ . Dans le cas de graphes sommet-transitifs, le lemme 2.2 assure que les composantes 2-connexes finies sont vides. Dans les autres cas, il est parfaitement possible d'avoir des composantes 2-connexes finies, en même temps que des composantes infinies. Un *arrangement* des composantes 2-connexes autour d'un sommet s consiste à se donner pour le sommet s un vecteur d'arête et un vecteur de face qui définissent à eux deux l'ordre dans lequel apparaissent les composantes autour du sommet (toujours à inversion près). Le théorème suivant montre qu'il est possible de choisir le plongement de Γ à l'aide des composantes 2-connexes.

Théorème 2.12 (Arrangement des composantes)

Étant donné un arrangement des C2C autour de chaque sommet de Γ , il est possible de construire un plongement localement fini de Γ tel que, en chaque sommet, les C2C apparaissent dans l'ordre prescrit par l'arrangement.

Preuve : La première chose à remarquer est que les composantes 2-connexes sont des graphes planaires localement finis. Cela étant dit, il suffit de construire le plongement de Γ par récurrence en rajoutant au fur et à mesure les composantes manquantes au graphe, tout en conservant la propriété “localement fini” du plongement. Si Γ est fini, le résultat est immédiat, ce qui fait que par la suite, on supposera le graphe infini.

Considérons un sommet s de Γ et l'ensemble des composantes 2-connexes attachées à ce sommet. Comme toutes ces composantes sont localement finies, il est possible de trouver un plongement du graphe Γ_0 constitué de s et de toutes ces composantes, de manière à ce que le plongement soit localement fini et l'ordre des composantes autour de s soit identique au choix fixé par l'arrangement autour du sommet. On impose de plus à ce plongement que les sommets à distance d de s dans le graphe soient situés à distance géométrique $\geq d$ de s . Il est nécessaire pour cela d'appliquer la méthode utilisée dans le lemme 2.1, qui permet d'appliquer des transformations purement topologiques à des composantes qui ne sont reliées au reste du graphe que par un unique sommet.

Supposons par hypothèse de récurrence avoir construit un graphe Γ_n qui contient toutes les composantes attachées aux sommets de Γ à distance de s dans le graphe inférieure ou égale à n , et dont le plongement soit localement fini. La construction de Γ_{n+1} consiste à rajouter dans le graphe Γ_n les composantes incidentes aux sommets à distance de s exactement égale à $n+1$ dans Γ . Comme en ces sommets, il n'y qu'une seule composante dans Γ_n , il est possible d'ajuster l'ordre dans lequel apparaissent les autres composantes dans le plongement. Et comme les composantes sont localement finies, et qu'une composante infinie s'inscrit forcément dans une face infinie du plongement de Γ_n , il est possible de construire un plongement de Γ_{n+1} qui soit localement fini. De la même manière que pour Γ_0 , on impose à ce plongement que les sommets à distance d de s dans le graphe soient situés à distance géométrique $\geq d$ de s .

La construction précédente fournit alors un plongement localement fini de Γ , puisque pour tout compact K du plan, il existe un rang N à partir duquel les composantes 2-connexes rajoutées ne s'intersectent pas avec K , ce qui assure le résultat. \square

Corollaire 2.13 (Arrangement des générateurs d'un graphe de Cayley)

Si Γ est un graphe de Cayley localement fini, alors il existe un plongement de Γ localement fini tel que l'ordre d'apparition des générateurs autour de chaque sommet soit indépendant du sommet, à inversion près.

Pour terminer ce chapitre, le tableau 2.1 résume les classes d'isomorphismes des objets considérés dans ces deux derniers paragraphes, à savoir les vecteurs d'arêtes, de faces et les voisinages d'arêtes. Les invariants géométriques seront dès maintenant toujours considérés à isomorphisme près. Cela touche aussi les classes de faces et d'arêtes des vecteurs de faces et d'arêtes.

2.4.4 Discussion concernant les graphes 3-connexes

Dans les paragraphes qui précèdent, la propriété de préservation des faces contraint les graphes planaires et permet de les étudier à l'aide d'invariants géométriques locaux. Une question naturelle concerne l'existence de graphes possédant cette propriété.

Invariant géométrique	Notation	Isomorphismes	Page
Vecteur d'arête et de face	(ξ, ϕ)	Rotation	p. 39
		Symétrie	p. 39
		Réarrangement	p. 43
		Twist	p. 43
Voisinage d'arête	η	Inversion	p. 41
		Symétrie	p. 41
		Réarrangement	p. 44
		Twist	p. 44

TAB. 2.1: Résumé des classes d'isomorphismes des invariants géométriques des graphes planaires vérifiant la propriété de préservation des faces.

En 1932, Whitney définit la notion de dual combinatoire d'un graphe [Whi32b]. Le dual combinatoire n'existe en fait que lorsque le graphe est planaire, et dans ce cas il est égal au dual géométrique défini dans les préliminaires. Whitney prouve que les graphes planaires finis 3-connexes possèdent un unique dual combinatoire [Whi32a] : le graphe dual d'un graphe planaire 3-connexe est lui aussi 3-connexe, et unique à isomorphisme de graphes près. Ce résultat a été plus tard étendu par Fleischner [Fle73] et Imrich [Imr75] dans la cas de graphes infinis possédant des sommets de degrés arbitraires.

En corollaire de ce théorème, le plongement des graphes 3-connexes planaires est lui aussi en un certain sens unique : comme le dual décrit la relation d'adjacence des faces dans le plongement, et que le dual combinatoire est unique, tout plongement d'un graphe 3-connexe vérifiera la même relation d'adjacence. En particulier, les graphes 3-connexes planaires vérifient naturellement la propriété de préservation des faces, qu'ils soient finis, localement finis ou même possèdent un nombre quelconque de points d'accumulation dans la sphère. Ce résultat fournit une famille importante de graphes planaires auxquels les théorèmes précédents s'appliquent. De plus, on remarque encore une fois que la connexité joue un rôle important dans les symétries des graphes planaires. Nous verrons dans le chapitre 5 des exemples de graphes non localement finis vérifiant cette propriété.

Chapitre 3

Schémas d'étiquetage

Considérant un graphe planaire vérifiant la propriété de préservation des faces, il est possible de donner des invariants locaux décrivant le plongement par ses sommets et ses arêtes. A partir de ces invariants, on définit une structure appelée *schéma d'étiquetage*. Cette structure permet la construction d'un automate, appelé *automate des bords*, calculant les bords des faces dans un éventuel plongement. En faisant abstraction du plongement initial, il est alors possible de reconstruire un plongement équivalent en utilisant le schéma d'étiquetage du graphe.

3.1 Étiquetage des graphes de Cayley

3.1.1 Schéma d'étiquetage

Considérons un graphe de Cayley Γ associé à un groupe G , et $S = \{a_1, \dots, a_d\}$ un ensemble de générateurs stable par passage à l'inverse. Grâce au corollaire 2.13, si Γ possède un plongement localement fini, alors il est possible de trouver un plongement dans lequel :

- (a) l'ordre cyclique d'apparition des générateurs autour d'un sommet est indépendant du sommet, à inversion près ;
- (b) le fait que deux sommets voisins aient des sens de rotations des générateurs égaux ou non ne dépend que du générateur étiquetant l'arête qui les relie.

Définition (Schéma d'étiquetage – Cas de Cayley) :

Un *schéma d'étiquetage* sur S consiste en la donnée d'un triplet (p, σ, τ) vérifiant :

- (i) p est une permutation cyclique de l'ensemble S ;
- (ii) σ est une involution sur S , *i.e.* $\sigma = \sigma^{-1}$;
- (iii) τ est une fonction de $A \longrightarrow \{-1; 1\}$ invariante par σ , *i.e.* $\tau(\sigma(x)) = \tau(x)$. ◇

La permutation p décrit l'ordre dans lequel les générateurs apparaissent autour d'un sommet donné de Γ . L'involution σ relie chaque générateur à son inverse dans le groupe G . La fonction τ assigne à chaque générateur une valeur 1 lorsqu'il est direct, et -1 lorsqu'il est indirect. A tout graphe de Cayley planaire localement fini Γ , il est possible d'associer un schéma d'étiquetage qui soit *cohérent* avec Γ au sens où le schéma d'étiquetage décrit bien les invariants du plongement de Γ (cf. remarque 2.1). Dans le mesure où l'on peut ordonner les générateurs autour d'un sommet, il est toujours possible de se ramener au cas où $p = (1, 2, \dots, d)$. Seules comptent alors réellement les fonctions σ et τ .

A l'aide du schéma d'étiquetage, nous allons reconstruire le bord des faces avec un automate d'états finis, en utilisant des techniques utilisées pour les cartes et hypercartes [CM92]. Considérons un sommet s de Γ autour duquel les générateurs apparaissent dans le sens trigonométrique positif. En suivant une arête incidente en s étiquetée par le générateur a_i , on arrive au sommet $t = s \cdot a_i$, et la même arête est vue par ce sommet comme étiquetée par $a_{\sigma(i)}$. A l'aide de la fonction τ , il est alors possible de connaître le sens de rotation des générateurs autour du sommet t . Si l'on cherche à calculer le bord d'une face, le processus va consister à partir d'une arête bordant cette face, obtenir l'arrangement des générateurs au sommet arrivée, et choisir l'arête suivante appartenant au bord de la face considérée, comme le montre la figure 3.1.

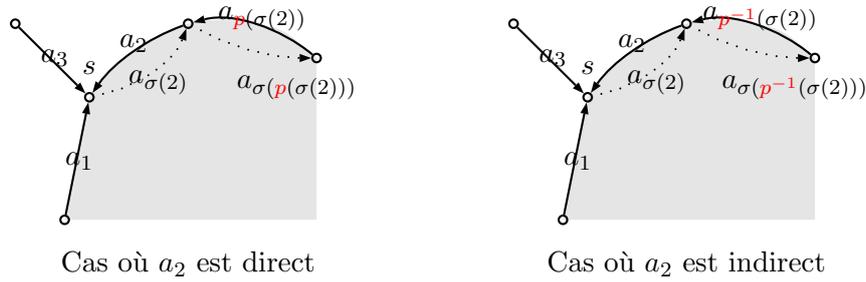


FIG. 3.1: Processus de construction du bord des faces

3.1.2 Automate des bords

Plaçons nous d'un point de vue plus formel : construisons un automate dont l'ensemble des sommets est $C = C^+ \cup C^-$, où C^+ contient les d sommets $\{1^+, \dots, d^+\}$ et C^- contient les d sommets $\{1^-, \dots, d^-\}$. Chacun des sommets de C correspond à l'union d'un générateur de S et d'un sens de rotation. Sur cet ensemble de sommets, on définit l'action de deux lettres p et σ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Action de } p : \quad & s^+ \xrightarrow{p} (s+1 \bmod d)^+ & \text{et } s^- \xrightarrow{p} (s-1 \bmod d)^- ; \\ \text{Action de } \sigma : \quad & s^+ \xrightarrow{\sigma} \begin{cases} (\sigma(s))^+ & \text{si } \tau(s) = 1 \\ (\sigma(s))^- & \text{si } \tau(s) = -1 \end{cases} & \text{et } s^- \xrightarrow{\sigma} \begin{cases} (\sigma(s))^- & \text{si } \tau(s) = 1 \\ (\sigma(s))^+ & \text{si } \tau(s) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que grâce aux propriétés du schéma d'étiquetage, ces deux actions constituent des bijections sur l'ensemble C des sommets de l'automate. Elles définissent une action du groupe $\{p, \sigma\}^*$ sur l'ensemble C . De plus, l'action de σ est involutive. Attachons nous maintenant à suivre les bords des faces. Pour cela, il suffit de partir d'un sommet s de l'automate, et de calculer $s \xrightarrow{p} \xrightarrow{\sigma} s'$, dans l'automate. Si l'on voit le sommet s comme un générateur muni d'un sens de rotation, ce procédé consiste exactement à calculer l'étiquette de l'arête suivante apparaissant dans le bord de la face à droite du générateur si le sens de s est positif, gauche si ce sens est négatif.

L'automate ainsi construit est appelé *automate des bords*. Les bords des faces associées à cet automate sont les runs de l'automate lorsque l'on lit le mot infini $(p\sigma)^\omega$ à partir d'un sommet de départ donné (dans cet automate, on se laisse la possibilité de choisir le sommet de départ). Comme les actions de p et de σ sont des bijections sur les sommets, ces runs sont exactement des cycles de l'automate. De plus, ils forment une partition de l'ensemble des sommets de l'automate, chaque sommet appartenant exactement à un cycle dans

l'automate. Une conséquence directe de cette approche est la suivante : dans un plongement de Γ vérifiant les hypothèses (a) et (b), les bords des faces sont périodiques. De plus, la période est nécessairement une puissance d'un cycle simple (sans répétitions d'états) de l'automate. Par la suite, on considérera ces runs comme des orbites de l'automate sous l'action conjuguée de σ et de p , et on les décrira comme des vecteurs $[s_1^{p_1}, \dots, s_k^{p_k}]$ définis à rotation près.

Exemple 3.1.1 – L'exemple suivant un l'exemple décrit par Chaboud dans [Cha95]. Considérons un schéma d'étiquetage (p, σ, τ) sur un ensemble à 8 générateurs de la manière suivante. On décrit une permutation σ par un tableau de la forme $[\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(d)]$. Dans notre cas, $p = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1]$, $\sigma = [1, 7, 3, 5, 4, 8, 2, 6]$ et $\tau = [1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1]$. Dans la figure 3.2, le schéma de gauche correspond au schéma d'étiquetage comme défini par Chaboud, l'ordre des sommets étant décrit par le cycle, et l'involution par les arcs internes et externes. Un générateur direct est décrit par un cercle, tandis qu'un générateur indirect est dessiné comme un carré.

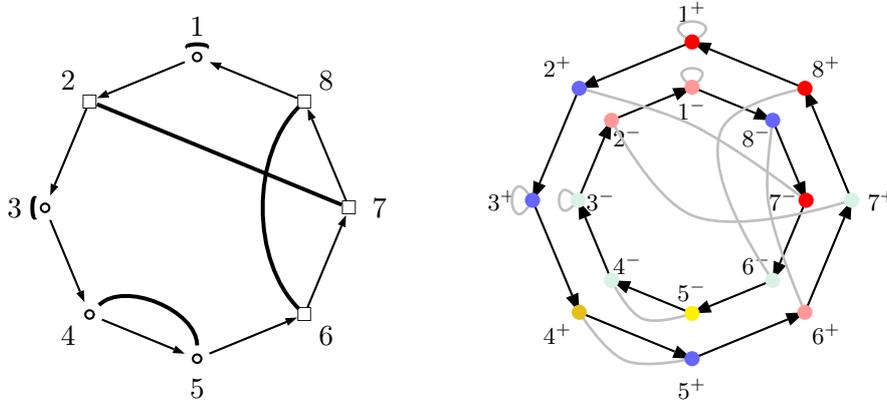


FIG. 3.2: Schéma d'étiquetage dans la représentation de Chaboud et l'automate des bords associé

Le schéma de droite décrit l'automate des bords associé, dans lequel les arêtes étiquetées par p sont noires et orientées, et les arêtes étiquetées par σ sont grises et non orientées. Pour calculer les cycles de cet automate, il suffit de suivre alternativement une arête noire et une arête grise. A chaque cycle dans l'automate est associé une couleur pour les sommets.

3.1.3 Vecteurs de types valides

Différentes orbites peuvent en fait correspondre à la même face. Cela peut se produire de deux manières différentes :

- lorsque $[s_1^{p_1}, \dots, s_k^{p_k}]$ et $[s_1^{-p_1}, \dots, s_k^{-p_k}]$ sont deux orbites différentes, qui correspondent alors aux bords de la même face, mais pour des sommets autour desquels les générateurs tournent tous dans des sens différents ;
- lorsqu'il existe deux orbites de la forme $[s_1^{p_1}, \dots, s_k^{p_k}]$ et $[s_{\sigma(1)}^{p_1}, \dots, s_{\sigma(k)}^{p_k}]$, où la seconde orbite est l'orbite des inverses de la première, ce qui correspond à calculer le bord de la face dans la direction opposée.

Deux orbites de l'automate des faces qui correspondent à la même face au sens précédent sont dites *jumelles* l'une de l'autre. A chaque générateur a_i , on associe la face calculée

dans l'automate à partir du générateur i^+ . Deux générateurs a_i et a_j correspondent à la même face si les orbites calculées dans l'automate partant de i^+ et de j^+ sont jumelles l'une de l'autre.

Définition (Vecteur de type primitif/valide) :

Considérons un générateur a_i pointant vers le sommet s de Γ . Soit k_i la taille de l'orbite – en terme de nombre de sommets – de l'automate des bords partant du sommet i^+ . Le vecteur $[k_1, \dots, k_d]$ est appelé le *vecteur primitif* associé au schéma d'étiquetage (p, σ, τ) . Un vecteur de type $[l_1, \dots, l_d]$, ($l_i \in \mathbb{N}$), est dit *valide* par rapport à ce schéma d'étiquetage (et son vecteur de type primitif $[k_1, \dots, k_d]$) si et seulement si il vérifie :

- (i) $\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket$, l_i est un multiple de k_i supérieur ou égal à 3;
- (ii) si a_i et a_j correspondent à la même face, alors $l_i = l_j$.

L'ensemble des vecteurs de type valides, pour un schéma d'étiquetage donné, peut toujours se mettre sous la forme d'un vecteur $v = [p_1 k_1, \dots, p_d k_d]$ où k_i a été défini précédemment, et les p_i sont des variables formelles vérifiant $p_i = p_j$ si a_i et a_j correspondent à la même face. Dans ce cas, tout vecteur de type valide correspond à une valuation entière des variables p_i dans le vecteur v . ◊

Exemple 3.1.2 – Reprenons l'exemple précédent et calculons les orbites de l'automate :

- $(1^+ 7^- 8^-)$ jumelée à $(6^+ 2^- 1^-)$, de longueur 3;
- $(2^+ 3^+ 5^+ 8^-)$ jumelée à $(7^+ 6^- 4^- 3^-)$, de longueur 4;
- (4^+) jumelée à (5^-) de longueur 1.

Le vecteur primitif associé au schéma d'étiquetage est donc le vecteur $[3, 4, 4, 1, 4, 3, 4, 3]$. Une longueur 1 signifie que l'ensemble des vecteurs valides contiendra des faces de tailles quelconques supérieures à 3 qui est la taille minimale pour une face plane. Les générateurs a_1 , a_8 et a_6 correspondent à la même face, et c'est aussi le cas des générateurs a_2 , a_3 , a_5 et a_7 . L'ensemble des vecteurs de type valides est donc résumé par le vecteur $[3p, 4q, 4q, r, 4q, 3p, 4q, 3p]$ où (p, q, r) sont des entiers naturels positifs tels que $r \geq 3$. —

A un schéma d'étiquetage correspond toujours une infinité de vecteurs de type valides différents. En particulier, dans la définition précédente, il est possible d'avoir des faces de taille infinie, représentée par le symbole ∞ , sachant que ce symbole est multiple de tout entier positif. La question qui se pose alors est de savoir si tous ces vecteurs de types correspondent effectivement à des graphes de Cayley dont on pourrait construire le plongement (cf. paragraphe 3.3).

3.2 Étiquetage des graphes sommet-transitifs

3.2.1 Schémas d'étiquetage

Considérons dans ce paragraphe que le graphe Γ soit simplement sommet-transitif, muni d'un groupe d'automorphismes agissant transitivement sur ces sommets. Soit E et F les ensembles de couleurs des arêtes et des faces de Γ . La difficulté supplémentaire par rapport au paragraphe précédent vient du fait qu'il n'existe pas pour Γ une numérotation des éléments d'un vecteur de type. Néanmoins, dans un plongement localement fini, on est assuré d'avoir :

- (a) un vecteur d'arête et de face indépendant du sommet, à isomorphisme près ;
- (b) un voisinage d'arête η_ϵ associé à chaque couleur d'arête ϵ , à isomorphisme près.

De plus, les voisinages d'arêtes vérifiant le lemme 2.10, leurs extrémités, en plus d'être cohérentes avec le couple formé par le vecteur d'arête et le vecteur de face, ne peuvent pas prendre toutes les formes possibles (cf remarque 2.4). Dans la définition suivante, on fait usage des notions d'isomorphismes sur les vecteurs de faces, d'arêtes et les voisinage d'arêtes, notions évoquées dans les paragraphes 2.4.2 et 2.4.3.

Définition (Schéma d'étiquetage – Cas sommet-transitif) :

Un *schéma d'étiquetage* sur (E, F) consiste en la donnée d'un triplet (ξ, ϕ, η) vérifiant :

- (i) $\xi \in E^d$ et $\phi \in F^d$ tels que, si $\xi_i = \xi_j$, alors $\{\phi_{i-1}, \phi_i\} = \{\phi_{j-1}, \phi_j\}$;
- (ii) pour chaque couleur $\epsilon \in \xi$, $\text{eq}_{\xi, \phi}(\epsilon)$ n'excède pas 2 ;
- (iii) pour chaque couleur $\epsilon \in \xi$, il existe un unique voisinage d'arête $\eta_\epsilon \in \eta$ colorié par ϵ , qui soit cohérent avec (ξ, ϕ) . De plus, si l'on considère les classes d'isomorphismes sur la paire de vecteurs (ξ, ϕ) pour les arêtes colorées par ϵ , alors si $\text{eq}_{\xi, \phi}(\epsilon) = 2$, chaque classe d'équivalence d'arête apparaît à une extrémité du voisinage d'arête et si $\text{eq}_{\xi, \phi}(\epsilon) = 1$, la classe d'équivalence d'arête apparaît aux deux extrémités du voisinage d'arête. \diamond

Les éléments (ξ, ϕ) représentent les vecteurs d'arête et de face liés, dans le graphe Γ . La propriété (i) assure que le séparateur d'une arête est bien unique. La propriété (ii) empêche d'avoir trop de classes d'équivalences dans (ξ, ϕ) et la propriété (iii) définit des voisinages d'arêtes cohérents avec les éléments précédents. Le lemme 2.11 nous assure qu'à tout graphe Γ localement fini sommet-transitif, il est possible d'associer un schéma d'étiquetage qui soit *cohérent* avec Γ , au sens où le vecteur d'arête et le vecteur de face de Γ sont isomorphes avec le couple (ξ, ϕ) , et de même pour les voisinages d'arête. Il est aussi possible de convertir les schémas d'étiquetages des graphes de Cayley du paragraphe précédent en schémas d'étiquetage de graphe sommet-transitif.

3.2.2 Reconstruction des faces

Considérons un schéma d'étiquetage (ξ, ϕ, η) cohérent avec un graphe Γ . Essayons de reconstruire les bords des faces comme on l'a fait pour les graphes de Cayley. Considérons un élément $e \in \xi$ de couleur ϵ , et η_ϵ le voisinage d'arête associé à cette couleur. Il est possible de *recoller* η_ϵ sur e si et seulement si il existe un voisinage d'arête κ isomorphe à η_ϵ tel que l'une des extrémités de κ soit exactement égale à (ξ, ϕ) , avec $e \in \xi$ comme arête centrale de κ . Cette opération est le pendant de l'opération décrite à la figure 3.1 pour les graphes sommet-transitifs. Avec les choix que nous avons fait pour le schéma d'étiquetage, le lemme suivant est immédiat :

Lemme 3.1 (Reconstruction des arêtes)

Soit (ξ, ϕ, η) un schéma d'étiquetage, $e \in \xi$ et $\eta_\epsilon \in \eta$ de la même couleur que e . Alors il existe une manière unique de recoller η_ϵ sur e , à isomorphisme près du voisinage d'arête.

Preuve : L'existence d'un recollement possible est dû au fait que toutes les classes d'équivalence des arêtes de même couleur que l'arête e apparaissent en au moins une extrémité du voisinage d'arête de cette couleur. L'unicité à isomorphisme près découle du lemme d'inversion 2.10 page 41 prouvant l'unicité du voisinage d'arête à isomorphisme près. \square

Le recollement successif des voisinages d'arêtes permet la reconstruction du graphe tout entier, cela de manière unique à isomorphisme du graphe près. Partons d'un graphe initial Γ_0 constitué d'un graphe isomorphe au vecteur d'arête ξ , c'est-à-dire un sommet central

s et autant d'arêtes que d'éléments de ξ , ordonnées dans le même ordre. Évidemment, ce graphe ne contient pas encore de faces, mais nous allons construire la face ϕ_i apparaissant entre les arêtes ξ_i et ξ_{i+1} . En recollant le voisinage d'arête adéquat sur l'arête ξ_{i+1} , on construit un graphe Γ_1 dans lequel on a rajouté $d - 1$ nouvelles arêtes incidentes à l'autre extrémité de ξ_{i+1} , étiquetées de manière à ce que le voisinage d'arête soit isomorphe à un élément de η . La face fictive ϕ_i est reconstruite de cette manière au fur et à mesure.

Exemple 3.2.1 – Considérons le schéma d'étiquetage de la figure 3.3, dans lequel les classes d'arêtes sont au nombre de trois, $E = \{\mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{g}\}$, de même pour les classes de faces, $F = \{\mathbf{g}, \mathbf{o}, \mathbf{v}\}$. A chacune des couleurs de E , on associe un unique voisinage d'arête. La couleur \mathbf{o} est supposée être infinie dans cet exemple, ce qui permet d'effectuer un twist sur les vecteurs (ξ, ϕ) . En particulier, on peut vérifier que $\text{eq}_{\xi, \phi}(\mathbf{r}) = 2$.

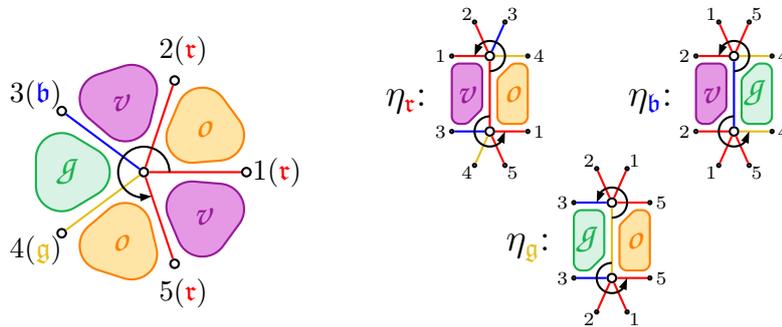


FIG. 3.3: Un schéma d'étiquetage de degré 5 décrit par son vecteur d'arête et son vecteur de face liés (à gauche), et les 3 voisinages d'arêtes correspondant aux 3 classes d'arêtes (à droite).

Supposons vouloir reconstruire le bord de la face orange, en recollant successivement les voisinages d'arêtes correspondant à cette face. Commençons par recoller le voisinage $\eta_{\mathbf{g}}$ correspondant à la couleur \mathbf{g} . La construction continue par le recollement du voisinage d'arête $\eta_{\mathbf{r}}$, à laquelle on applique une symétrie. Ensuite, il est nécessaire d'appliquer un twist échangeant les arêtes 1 et 5 au voisinage d'arête $\eta_{\mathbf{r}}$ pour continuer le processus. Et ainsi de suite pour reconstruire le bord de la face orange.

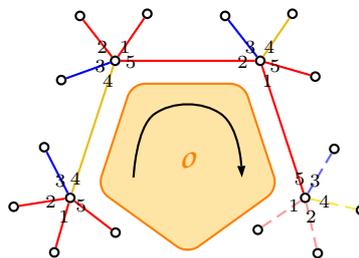


FIG. 3.4: Recollages successifs de voisinages d'arêtes le long du bord de la face \mathbf{o} . Le bord de cete face contient nécessairement une seule arête jaune, bordée de chaque côté d'une infinité d'arêtes rouges.

La reconstruction n'est pas forcément unique, dans le sens où il faut parfois choisir un voisinage d'arête dans une classe d'isomorphisme donné. Néanmoins, ces classes d'isomorphismes correspondent à des plongements distincts de Γ au sens où les bords des faces

infinies ne sont pas les mêmes. Néanmoins, les graphes sont isomorphes. En particulier, contrairement au cas des graphes de Cayley, il n'existe pas de plongement canonique. —

3.2.3 Automate des bords

Suite aux remarques précédentes, nous allons construire un *automate des bords* non déterministe permettant de calculer les bords des faces associés au schéma d'étiquetage (ξ, ϕ, η) . Pour cela, on définit une *configuration* comme un couple (c, b) où c est une classe d'équivalence d'arête dans le couple (ξ, ϕ) et $b \in \{-1; +1\}$ est un booléen définissant un sens de rotation. Les isomorphismes des configurations sont les mêmes que ceux pour les couples (ξ, ϕ) , néanmoins les symétries échangent le sens de rotation, tandis que les autres opérations le laissent inchangé. Pour un schéma d'étiquetage donné, le nombre de configurations est borné par $2d$ où d est la taille du vecteur de type. Ces configurations constituent les sommets de l'automate des bords. Définissons maintenant l'action de deux lettres n et i de la manière suivante :

Action de n : l'action de n associe à une configuration la configuration suivante dans l'ordre de rotation : $(c, b) \xrightarrow{n} (c', b)$ si et seulement si il existe $(\bar{\xi}, \bar{\phi})$ isomorphe à (ξ, ϕ) tel que $\bar{\xi}_i$ appartienne à c et l'élément après $\bar{\xi}_i$ dans l'ordre de rotation (si b est positif, il s'agit de $\bar{\xi}_{i+1}$ sinon $\bar{\xi}_{i-1}$) appartienne à c' ;

Action de i : l'action de i décrit les modifications de la configuration lorsque l'on traverse une arête : $(c, b) \xrightarrow{i} (c', b')$ si et seulement si chaque configuration correspond à une même couleur d'arête ϵ , et il existe un voisinage d'arête η_ϵ possédant ces deux configurations à ses extrémités, dans le sens de rotation approprié.

Le sens de rotation dans la configuration décrit en fait simplement le sens de rotation dans la 2-composante connexe à laquelle appartient la configuration. Dans la mesure où l'on peut appliquer des twists aux composantes 2-connexes, il est difficile de faire mieux. La composante de cet automate qui nous intéresse est la composante connexe contenant ses configurations tournant dans le sens direct¹. Comme conséquence du lemme 3.1 : les configurations appartenant à cette composante sont, à isomorphisme près, les configurations apparaissant dans le plongement.

L'action de la lettre i est une action involutive, tandis que l'action de n peut avoir plusieurs successeurs du fait des twists des composantes 2-connexes. Ces deux opérations définissent une action faible sur l'ensemble des configurations. Pour suivre le bord d'une face, il suffit de partir d'une configuration (c, b) et de calculer $(c, b) \xrightarrow{n} \xrightarrow{i} (c', b')$ dans l'automate. Si l'on voit une configuration (c, b) comme une arête pointant vers un sommet, ce procédé consiste exactement à calculer la configuration correspondant à l'arête suivante apparaissant dans le bord de la face à droite du générateur si b est positif, et à gauche dans le cas contraire.

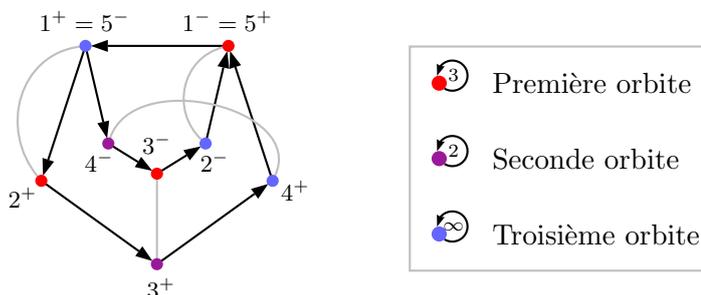
Déterminer le bord d'une face consiste à partir d'une configuration et lire le mot $(ni)^\omega$. Les bords des faces sont des runs de l'automate. Leur périodicité est *a priori* inconnue du fait du non-déterminisme de l'automate. Néanmoins, comme à toute face finie correspond nécessairement un bord périodique, seules les faces infinies peuvent avoir un bord non périodique. Comme les couleurs associées aux faces dans l'automate ne vérifient pas forcément cette propriété, cela signifie que le schéma d'étiquetage peut ne pas avoir de réalisation possible. Dans la pratique, il suffit de réassigner la couleur ∞ à ces faces.

¹Il est en effet possible que tous les sommets tournent dans le même sens, auquel cas l'automate possède deux composantes connexes : celle des configurations positives et celle des configurations négatives.

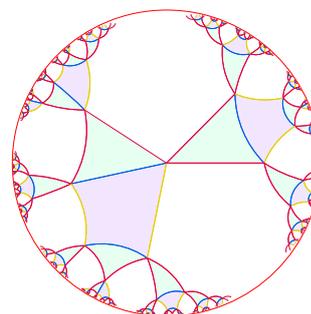
Au final, on peut donc associer à chaque élément du vecteur de face ϕ une orbite dans l'automate. Comme les couleurs des faces sont supposées distinguer les classes des faces selon l'action du groupe d'automorphisme, deux faces de la même couleur ont nécessairement le même bord. Deux faces finies de ϕ sont dites *équivalentes* si leurs bords respectifs dans l'automate sont les mêmes, éventuellement lus dans des directions opposées. Si deux faces ayant la même couleur ne sont pas équivalentes, le schéma d'étiquetage est dit *invalid*, car il ne correspond pas à un graphe existant. Les schémas d'étiquetages résultant de graphes sommet-transitifs localement finis sont nécessairement valides.

Dans ce cas, le fait pour deux générateurs d'appartenir au bord de la même face dans l'automate est assuré par le schéma d'étiquetage. Les notions de vecteur primitif et de vecteur de type valide s'étendent naturellement au cas de graphes sommet-transitifs. Néanmoins, les vecteurs de type primitif peuvent contenir des éléments infinis, dans la mesure où les faces apériodiques sont nécessairement de taille infinie. Les schémas d'étiquetages pour lesquels les vecteurs primitifs ne comportent pas d'éléments infinis sont tels que les bords des faces sont forcément périodiques. Ces schémas sont dits *périodiques*, par opposition aux schémas *apériodiques*.

Exemple 3.2.2 – Reprenons l'exemple précédent, dans lequel $E = \{\mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{g}\}$, $F = \{\mathbf{g}, \mathbf{o}, \mathbf{v}\}$ et la face orange est supposée infinie. La part la plus difficile du travail consiste à déterminer les configurations de l'automate. Dans le cas présent, la seule identification à faire est $1^+ = 5^-$ et l'identification symétrique. Cela nous permet de construire un automate des bords à 8 sommets et trois orbites :



Les arêtes orientées noires correspondent à l'action de \mathbf{n} , tandis que l'action de \mathbf{i} est représentée par des arêtes grises non orientées. La première orbite correspond à la face violette, coloriée \mathbf{v} , qui est bordée par $(\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{b})^*$. La seconde orbite est celle de la face verte, coloriée \mathbf{g} , bordée par $(\mathbf{b}\mathbf{g})^*$. Enfin, la troisième orbite correspond à la face orange \mathbf{o} et possède un bord non périodique. Ce bord peut être de la forme $\mathbf{r}^\omega \mathbf{g} \mathbf{r}^\omega$ ou tout simplement \mathbf{r}^ω selon le choix du plongement. Le vecteur primitif associé à Γ est égal à $[\infty, 3n, 2m, \infty, 3n]$ pour des valeurs de $(m, n) \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 2$. Le graphe dessiné ci-contre correspond à une réalisation de ce schéma d'étiquetage avec le vecteur de type $[\infty, 3, 4, \infty, 3]$. Dans le cas présent, aucun plongement possible ne peut éviter les faces apériodiques. Toutes les faces coloriées par \mathbf{o} possèdent dans leur bord une unique arête étiquetée par \mathbf{g} , bordée par une infinité d'arêtes \mathbf{r} . En particulier, ce graphe ne peut pas être un graphe de Cayley, pour aucun étiquetage possible de ses arêtes. —



Exemple 3.2.3 – La structure associée aux schémas d’étiquetages dans le cas de graphes sommet-transitifs est quelque peu complexe. Est-il possible de réduire le schéma uniquement à ses voisinages d’arêtes? En effet, ceux-ci contiennent les vecteurs d’arête et de face du graphe, ce qui est suffisant pour utiliser le lemme 3.1, mais cela ne réduit pas réellement la structure. La construction de l’automate des bords pourrait par contre laisser croire que le vecteur de face est inutile, puisqu’il suffit d’identifier les bords de faces identiques pour pouvoir déterminer les couleurs à associer aux faces. L’exemple de la figure 3.5 montre qu’une telle chose n’est pas évidente.

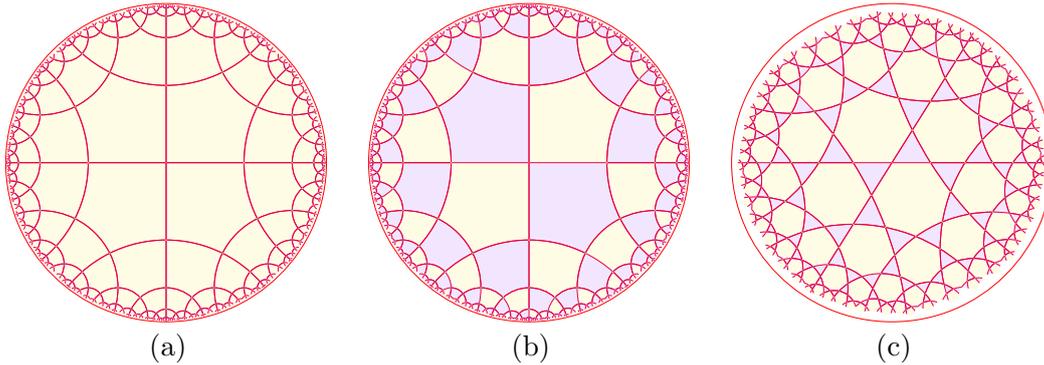


FIG. 3.5: (a) (b) Deux graphes sommet-transitifs possédant mêmes vecteurs d’arête et mêmes voisinages d’arêtes, en supposant que l’on retire les vecteurs de face des voisinages. Les graphes (b) et (c) possède le même schéma d’étiquetage avec faces.

En effet, ces deux graphes possèdent exactement le même vecteur d’arête et le même voisinage d’arête. Ils ont aussi même vecteur de type. Sans le vecteur de face, il est alors impossible de distinguer leurs groupes d’automorphismes. En particulier dans cet exemple, l’un des graphes est face-transitif tandis que le second possède deux classes de faces. Cela pourrait ne pas sembler gênant car les deux graphes sont isomorphes. Néanmoins, cela nous empêche de caractériser le troisième graphe, qui a même schéma d’étiquetage que le second, mais vecteur de type différent. —

3.3 Construction de plongements

Dans les paragraphes précédentes, on s’est attaché à construire des automates des bords donnant des vecteurs de type valides par rapport aux schémas d’étiquetages. Se pose maintenant la question de la réalisation de tels graphes, *i.e.* l’existence d’un plongement dans une géométrie du plan, d’un graphe cohérent avec le schéma d’étiquetage. Dans ce paragraphe, notre but consiste à construire des plongements de graphes sommet-transitifs planaires possédant certaines propriétés géométriques. Selon le graphe, on choisit une géométrie du plan appropriée, qu’elle soit sphérique, Euclidienne ou hyperbolique. Les plongements sont construits de manière à ce que les faces soit des polygones réguliers.

Définition (Polygone régulier) :

Considérons une isométrie s du plan et l’orbite d’un point sous l’action de cette isométrie. Si cette orbite est finie ou localement finie, rejoignons chaque point x de l’orbite et son successeur $s(x)$ par une géodésique. Lorsque aucune de ces géodésiques ne se croise ailleurs que sur une extrémité, la figure obtenue est un *polygone régulier*. Cette figure peut être vue comme un graphe planaire localement fini automatiquement plongé dans une géométrie.

La *taille* d'un polygone régulier est définie comme le nombre – éventuellement infini – de sommets dans l'orbite.

Dans un polygone régulier, l'angle (non orienté) entre deux arêtes consécutives et la longueur des arêtes sont constants. Dans le plan euclidien, un demi-plan est un polygone régulier de taille infinie associé à une translation. Dans le plan hyperbolique, il existe une infinité de polygones réguliers de taille donnée non isométriques deux à deux. Un polygone régulier sépare le plan en deux composantes connexes qui ne sont en général pas convexes, comme on peut le voir dans la figure 3.6. \diamond

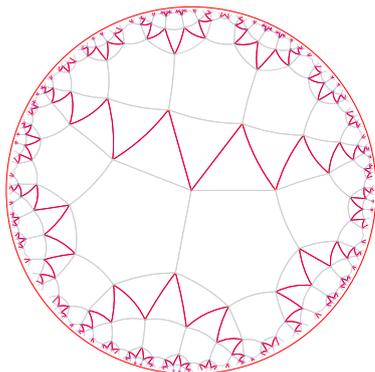


FIG. 3.6 : Un plongement d'un graphe de Cayley, dans lequel on considère les polygones réguliers engendrés par un élément du groupe. Ces polygones réguliers sont tous isométriques et chacun sépare le plan en deux faces non convexes.

Par la suite, les plongements seront des plongements de graphes sommet-transitifs, résolvant ainsi à la fois le problème des graphes de Cayley et des graphes sommet-transitifs.

Théorème 3.2 (Existence)

Étant donné un schéma d'étiquetage (ξ, ϕ, η) , et un vecteur de type valide $[k_1, \dots, k_d]$, il existe un graphe planaire localement fini sommet-transitif cohérent avec ce schéma d'étiquetage et vecteur de type. De plus, toutes les faces du plongement sont des polygones réguliers.

Preuve : Considérons un point dans le plan. Si le plongement est réalisé par des polygones réguliers, toutes les arêtes ont la même longueur. Nous allons calculer l'angle intérieur $< \pi$ d'un polygone régulier à k côtés de longueur l , puis faire la somme de tous ces angles apparaissant en un sommet donné, somme devant être égale à 2π . Les calculs suivants sont obtenus en appliquant des résultats élémentaires de trigonométrie sphérique [Lei44], Euclidienne ou hyperbolique [Bea83] :

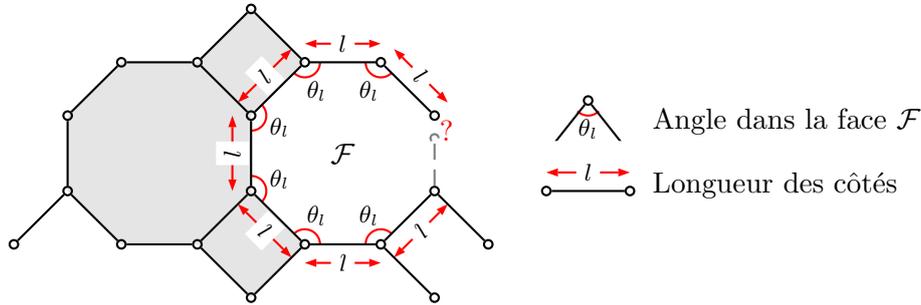
$$\theta_i(l) = \begin{cases} \text{Sphérique :} & 2 \arcsin \left(\frac{\cos(\pi/k_i)}{\cos(l/2)} \right) \\ \text{Euclidien :} & \frac{(k_i-2)}{k_i} \pi \\ \text{Hyperbolique :} & 2 \arcsin \left(\frac{\cos(\pi/k_i)}{\cosh(l/2)} \right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^d \theta_i(l) = 2\pi \quad (*)$$

Cette équation va déterminer le choix de la géométrie. En effet, si Σ correspond à la somme de ces angles dans le plan Euclidien, comparons Σ à 2π . Si $\Sigma = 2\pi$, on choisit la géométrie Euclidienne, et n'importe quelle valeur de l convient, les graphes correspondants étant homothétiques. Si $\Sigma < 2\pi$, on choisit la géométrie sphérique, tandis que si $\Sigma > 2\pi$, on choisit la géométrie hyperbolique. Le fait est que l'on peut écrire l'équation (*) comme le zéro d'une fonction de l admettant Σ comme limite quand l tend vers 0. Cette fonction est décroissante dans le cas hyperbolique, ce qui fait qu'il existe

toujours une solution lorsque $\Sigma > 2\pi$. Dans le cas $\Sigma < 2\pi$, une analyse des cas possibles montre qu'il existe toujours une solution, sauf pour les vecteurs $[3, 3, p \geq 5]$, $[3, 4, p \geq 6]$ et $[3, 5, p \geq 9]$. Néanmoins, il n'existe pas de schéma d'étiquetage validant de tels vecteurs de type. L'existence d'une solution à cette équation permet de construire les polygones réguliers correspondant au vecteur de type. De plus, il est possible d'arranger ces polygones sans intersection autour d'un point du plan s pour construire toutes les faces incidentes au sommet s dans le vecteur de face.

Construisons maintenant le plongement par récurrence. Soit Γ_1 le graphe planaire constitué d'un sommet s du plan et de toutes les arêtes incidentes à s dans le vecteur d'arête, disposées à des angles correspondant aux polygones réguliers calculés précédemment : la longueur de ces arêtes est une solution l de l'équation (*). Les angles entre les arêtes ξ_i et ξ_{i+1} sont égaux à $\theta_i(l)$. Nous allons construire par récurrence un graphe Γ_n correspondant à tous les sommets à distance $\leq n$ de s dans le graphe que nous cherchons à construire, et cela de manière à ce que le graphe reste planaire. Le schéma d'étiquetage décrit comment se construit le plongement.

Considérons Γ_n construit, et les sommets de Γ_n pour lesquels toutes les arêtes incidentes n'ont pas encore été ajoutées. Pour un tel sommet t , il est possible d'associer un vecteur de type qui soit cohérent avec les voisinages d'arêtes des arêtes déjà incidentes à t . Les recollements des voisinages d'arête préservent les couleurs des faces, et le fait que le vecteur de type soit valide assure par le lemme 3.1 qu'il existe une manière de recoller le vecteur d'arête sur t . Les isomorphismes préservant le vecteur de type à isomorphisme près, le choix du recollement n'est pas important. Reste alors à vérifier que lorsque l'on rajoute les arêtes incidentes à t , on ne crée pas de croisement dans Γ_n .



Le recollement d'un voisinage d'arête η préserve les faces séparées par l'arête correspondante, au sens où s'il y avait une face étiquetée f à droite de l'arête avant recollement, elle existera toujours après recollement. Comme les faces sont des polygones réguliers dans Γ_n , si le fait de rajouter une arête dans le plongement introduit un croisement des arêtes, la face qui a été refermée par ce croisement ne peut être un polygone régulier, ce qui est absurde car ces polygones existent par construction. Le graphe Γ_{n+1} est alors constitué du graphe Γ et des arêtes et sommets supplémentaires rajoutés par ces recollements d'arêtes.

Par récurrence, le graphe Γ_n reste planaire, ce qui fait qu'après passage à la limite, on obtient un plongement d'un graphe Γ planaire. De plus, comme les faces sont des polygones réguliers, tout sommet est à distance $\geq l$ de son plus proche voisin, ce qui assure que le plongement est localement fini. Enfin, en tout sommet de Γ , les invariants de Γ sont cohérents avec le schéma d'étiquetage. Le graphe Γ est sommet-transitif : si l'on se donne deux sommets s et t du plongement, on peut définir de manière inductive un automorphisme envoyant s sur t . Pour cela, on part d'un morphisme envoyant l'étoile centrée sur s sur l'étoile centrée sur t . Puis on construit le morphisme par récurrence de la même manière qu'on construit Γ , grâce à l'unicité des vecteurs d'arêtes et de faces

et des voisinages d'arêtes à isomorphisme près. Lorsque le graphe est issu d'un schéma d'étiquetage de graphe de Cayley, le stabilisateur d'un sommet est trivial, ce qui assure que le graphe Γ est bien de Cayley. Cela conclut la preuve. \square

Pour les graphes de Cayley Γ de groupe d'automorphismes G , étant donné un schéma d'étiquetage (p, σ, τ) , il est possible d'obtenir une présentation du groupe associé de la forme suivante :

- Générateurs :** l'ensemble $\{a_1, \dots, a_d\}$ où d est le degré du schéma d'étiquetage ;
- Relations :** l'ensemble des relations peut se décomposer en deux parties distinctes : l'ensemble des $a_i a_{\sigma(i)}$ pour $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$ et l'ensemble des $(a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_p})$ représentant les bords des faces distinctes du plongement, telles que définies dans le vecteur de type primitif.

Si l'on appelle G' le groupe engendré par cette présentation, il est aisé de voir que toutes les relations vraies dans G' sont vraies dans G . Réciproquement, toute relation vraie dans G peut se mettre sous la forme d'un cycle simple de Γ , donc d'une union de faces du graphe, et par conséquent est aussi une relation de G' . Donc les deux groupes sont bien isomorphes.

Théorème 3.3 (Cohérence)

Si Γ est un graphe planaire localement fini sommet-transitif possédant (ξ, ϕ, η) comme schéma d'étiquetage, alors la construction précédente construit un graphe isomorphe à Γ .

Dans le cas de la géométrie sphérique, ces plongements correspondent à des pavages de la sphère par des polygones réguliers, ce qui permet de construire les *polyèdres convexes uniformes* de la manière suivante : on associe à chaque pavage un 2-complexe plongé dans \mathbb{R}^3 , dont les sommets sont les sommets du pavage, les arêtes sont des segments de droite dans \mathbb{R}^3 reliant les extrémités d'arêtes du pavage. Comme, pour une face donnée du pavage, tous les sommets incidents sont dans le même plan de \mathbb{R}^3 , cela permet de lui associer une face plane du polyèdre dans \mathbb{R}^3 . Ces polyèdres sont *uniformes* au sens où il existe un groupe d'isométries transitif sur les sommets laissant le polyèdre globalement stable. Il est possible d'énumérer tous ces polyèdres convexes uniformes, qui sont au nombre de 18, plus 3 familles infinies dénombrables. Seuls deux d'entre eux ne sont pas des graphes de Cayley, le *dodécaèdre* [5; 5; 5] et l'*icosidodécaèdre* [3; 5; 3; 5] (cf. figure 3.7). Les autres correspondent à 24 graphes de Cayley non isomorphes, certains polyèdres admettant plusieurs étiquetages différents.

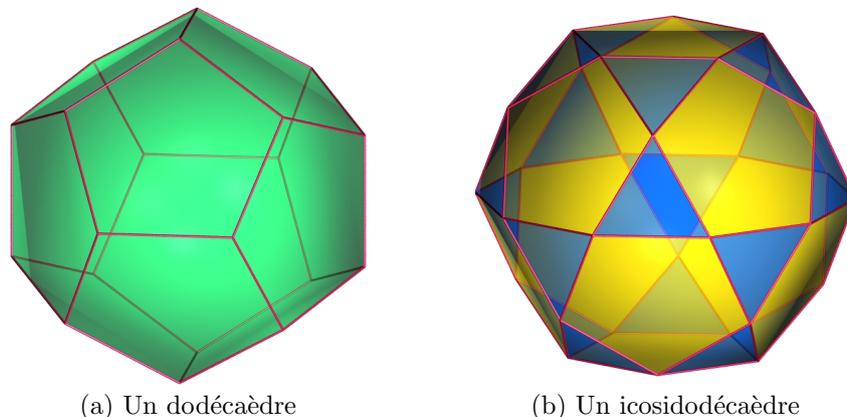


FIG. 3.7: Polyèdres convexes uniformes ne correspondant pas à des graphes de Cayley

Le cas Euclidien correspond exactement aux pavages *archimédiens*, qui sont au nombre de 11. Tous correspondent à des graphes de Cayley, et ces graphes au nombre de 24 ont été énumérés par Chaboud [Cha95]. Néanmoins, il est ici possible de calculer tous les groupes d'isométries discrets du plan euclidien, que leur stabilisateur soit trivial ou non.

Dans le cas de plongements dans le plan hyperbolique, il existe une infinité de plongements différents et non isométriques, étiquetage du graphe mis à part. Les plongements ainsi construits sont bien connus dans le cas des graphes 3-connexes (cf. [Bab97] par exemple). L'approche précédente a néanmoins le mérite d'être systématique, dans la mesure où elle décrit tous les pavages du plans hyperbolique par polygones réguliers réalisables. Elle étend les cas énumérés par Grünbaum et Shephard (cf. [GS87] chapitre 4.7 p.196), qui décrivent les pavages du plan hyperbolique de degré ≤ 4 , ainsi que les pavages où toutes les faces sont de taille paire. De plus, tous ces pavages peuvent contenir des tuiles de taille infinie. Lorsque toutes les tuiles sont infinies, on retrouve des graphes de Cayley de groupes libres ou virtuellement libres.

Remarque 3.1 (Des automorphismes du graphe aux isométries du plan) – Lorsque le graphe est de Cayley, à l'aide de la construction définie dans les théorèmes 3.2 et 3.3, on peut obtenir un plongement dans lequel l'ordre dans lequel apparaissent les générateurs en un sommet donné est indépendant du sommet. Cela implique en particulier que les automorphismes préservent les bords de toutes les faces, finies ou infinies. Ce raisonnement tient aussi pour les graphes sommet-transitifs 2-connexes. En particulier, dans un tel plongement, il n'est pas nécessaire d'appliquer de twist lorsque l'on considère les classes d'équivalence des vecteurs d'arête et de faces et des voisinage d'arêtes.

De plus, comme toutes les faces sont des polygones réguliers et que toutes les arêtes du plan ont même longueur, le bord d'une face donnée est envoyé par automorphisme sur le bord d'une face qui lui est isométrique. Alors, étant donné deux sommets s et t du plongement, il existe une isométrie de la géométrie dans laquelle on a plongé le graphe qui envoie s sur t et qui envoie les faces incidentes à s sur les faces incidentes à t , cela grâce au fait que le vecteur de type est indépendant du sommet. De plus, il est possible de choisir cette isométrie de manière à ce qu'elle préserve l'étiquetage des arêtes des bords des faces incidentes à s et t . Comme toute arête sépare toujours les deux mêmes classes de faces, et que l'ordre de rotation des arêtes autour d'un sommet est fixé, une induction simple montre que cette isométrie préserve le graphe tout entier.

En particulier, les automorphismes du graphe peuvent toujours être vus comme des isométries de la géométrie dans laquelle est considéré le plongement. —

Corollaire 3.4

Si Γ est un graphe de Cayley localement fini correspondant au groupe G , alors G est isomorphe à un groupes d'isométries discret du plan.

Dans le plan Euclidien, G est un groupe cristallographique, et dans le plan hyperbolique, G est un groupe fuchsien. Dans ce dernier cas, le groupe est lui aussi hyperbolique [CDP90]. Lorsque le graphe est 3-connexe, toutes les faces sont finies et le graphe est quasi-isométrique au plan hyperbolique. Dans les autres cas, le graphe est quasi-isométrique à un arbre infini, qui est aussi un espace hyperbolique. Ces résultats seront évoqués de manière plus détaillée dans le paragraphe 4.2.

3.4 Étiquetage des graphes cofinis

3.4.1 Schéma d'étiquetage

Dans ce paragraphe, le graphe Γ est supposé localement fini et cofini. Il est donc muni d'un groupe d'automorphismes agissant de manière cofinie sur les sommets. De plus, on suppose que ses automorphismes préservent les bords des faces finies du plongement (cf paragraphe 2.3). Par rapport au cas sommet-transitif, il est possible de modifier les propriétés exposées page 50 de la manière suivante :

- (a') un vecteur d'arête et de face par couleur du sommet, à isomorphisme près ;
- (b) un voisinage d'arête η_{ϵ} associé à chaque couleur d'arête, à isomorphisme près ;

Les voisinages d'arêtes et les vecteurs d'arête et de face doivent vérifier des conditions supplémentaires de cohérence par rapport aux graphes sommet-transitifs, comme c'est le cas pour les graphes sommet-transitifs par rapport aux graphes de Cayley. La différence principale consiste à assigner un vecteur d'arête et de face pour chaque couleur de sommet.

Définition (Schéma d'étiquetage – Cas cofini) :

Un *schéma d'étiquetage* sur (V, E, F) consiste en la donnée d'un triplet (ξ, ϕ, η) vérifiant :

- (i) à chaque couleur $v \in V$, on peut associer un couple $(\xi^v, \phi^v) \in (\xi, \phi)$ tel que, lorsque l'on a $\xi_i^v = \xi_j^w$, alors $\{\phi_{i-1}^v, \phi_i^v\} = \{\phi_{j-1}^w, \phi_j^w\}$;
- (ii) pour chaque couleur $\epsilon \in \xi^v$, $\text{eq}_{\xi^v, \phi^v}(\epsilon)$ n'excède pas 2 ;
- (iii) pour chaque couleur $\epsilon \in \{\xi^v, v \in V\}$, il existe un unique voisinage d'arête $\eta_{\epsilon} \in \eta$ colorié par ϵ , d'extrémités coloriées par $(v, w) \in V^2$, qui soit cohérent avec (ξ^v, ϕ^v) à une extrémité et avec (ξ^w, ϕ^w) à l'autre, et tel que si $\text{eq}_{\xi^v, \phi^v}(\epsilon) = 2$, alors $v = w$. \diamond

Les schémas d'étiquetage de graphes cofinis constituent donc bien une version étendue des schémas d'étiquetage dans le cas sommet-transitif : la propriété (i) assure que les séparateurs d'une arête sont les mêmes, indépendamment de la couleur du sommet. La propriété (iii) assure la cohérence des voisinages d'arête par rapport aux vecteurs d'arête et de face à leurs extrémités. Dans ces conditions, la réunion de deux schémas avec des couleurs distinctes est aussi un schéma. Deux couleurs de sommets (v, w) sont dites équivalentes, $v \sim w$ lorsqu'elles se trouvent aux extrémités d'un voisinage d'arête. Un schéma d'étiquetage est dit *connexe* lorsqu'il n'existe qu'une seule classe d'équivalence des couleurs de sommets pour la relation \sim . Par la suite, on ne s'intéressera qu'aux schémas d'étiquetage connexes.

À tout graphe Γ planaire localement fini vérifiant la propriété de préservation des faces, il est possible d'associer un schéma d'étiquetage (ξ, ϕ, η) qui soit *cohérent* avec ce schéma d'étiquetage au sens où ses vecteurs d'arête, de face et ses voisinages d'arête sont isomorphes aux éléments du schéma.

3.4.2 Automate des bords

Le lemme de reconstruction 3.1 reste valable dans le cas d'un graphe cofini. Dans ce cas, il est possible de construire un *automate des bords* de la même façon que dans le cas sommet-transitif. Une *configuration* consiste en la donnée d'un triple (v, c, b) où $v \in V$, c est une classe d'équivalence de ξ^v et $b \in \{-1; +1\}$ est un booléen définissant un sens de rotation. Les configurations constituent les sommets de l'automate des bords. On définit l'action des deux lettres n et i de la même manière que dans le cas cofini :

Action de n : l'action de n associe à une configuration la configuration suivante dans l'ordre de rotation : $(v, c, b) \xrightarrow{n} (v, c', b)$ si et seulement si il existe $(\bar{\xi}, \bar{\phi})$ isomorphe à (ξ, ϕ) tel que $\bar{\xi}_i$ appartienne à c et l'élément après $\bar{\xi}_i$ dans l'ordre de rotation (si b est positif, il s'agit de $\bar{\xi}_{i+1}$ sinon $\bar{\xi}_{i-1}$) appartienne à c' ;

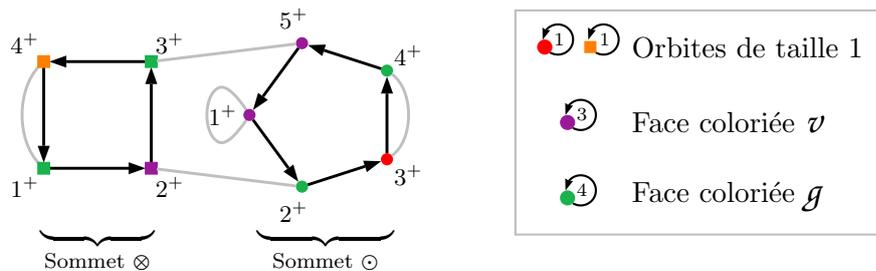
Action de i : l'action de i décrit les modifications de la configuration lorsque l'on traverse une arête : $(v, c, b) \xrightarrow{i} (v', c', b')$ si et seulement si chaque configuration correspond à une même couleur d'arête ϵ , et qu'il existe un voisinage d'arête η_ϵ possédant ces deux configurations à ses extrémités, dans le sens de rotation approprié.

Remarquons que l'action de la lettre i est toujours involutive. La composante de cet automate qui nous intéresse est la composante contenant les configurations tournant dans le sens positif. Cette composante est connexe si et seulement si le schéma d'étiquetage est connexe. A partir de cet automate, il est possible de calculer les bords des faces comme des runs de l'automate à partir d'une configuration donnée, en lisant le mot $(ni)^\omega$. Toute face finie correspond à un bord périodique, et deux faces sont dites *équivalentes* lorsque leurs bords dans l'automate sont les mêmes, éventuellement lus dans des sens opposés. Si deux faces équivalentes n'ont pas la même couleur, le schéma est dit *invalidé*. Les schémas résultant de graphes cofinis localement finis sont forcément valides.

Dans ce cas, le fait pour deux générateurs d'appartenir au bord la même face dans l'automate est assuré par le schéma d'étiquetage. Les notions de vecteur primitif et de vecteur de type valide s'étendent alors naturellement dans le cas de graphes cofinis, dans la mesure où l'on alloue un vecteur par couleur de sommet possible, et des relations entre les éléments de différents vecteurs.

Exemple 3.4.1 – Dans cet exemple, prenons comme ensembles de couleurs de sommets $V = \{\ominus, \otimes\}$, et $E = \{\mathbf{r}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{\eta}, \mathbf{v}\}$ et $F = \{\mathbf{v}, \mathbf{o}, \mathbf{g}, \mathbf{r}\}$ pour les arêtes et les faces. Dans le schéma d'étiquetage suivant, il y a nécessairement deux vecteurs d'arête et de face, et cinq voisinages d'arête distincts. Les figures suivantes décrivent un schéma d'étiquetage connexe et valide.

A partir de ce schéma, on construit l'automate des bords associé. Pour cela, il suffit de connaître l'ensemble des configurations. Dans le cas présent, les configurations positives constituent une composante connexe, car dans tous les voisinages d'arêtes le sens de rotation des arêtes est le même. Au delà de ce fait, aucune autre identification n'est possible lorsque toutes les faces sont supposées finies. Dans l'automate suivant, les arêtes noires orientées correspondent à l'action de n , et les arêtes grises non orientées à l'action de i .



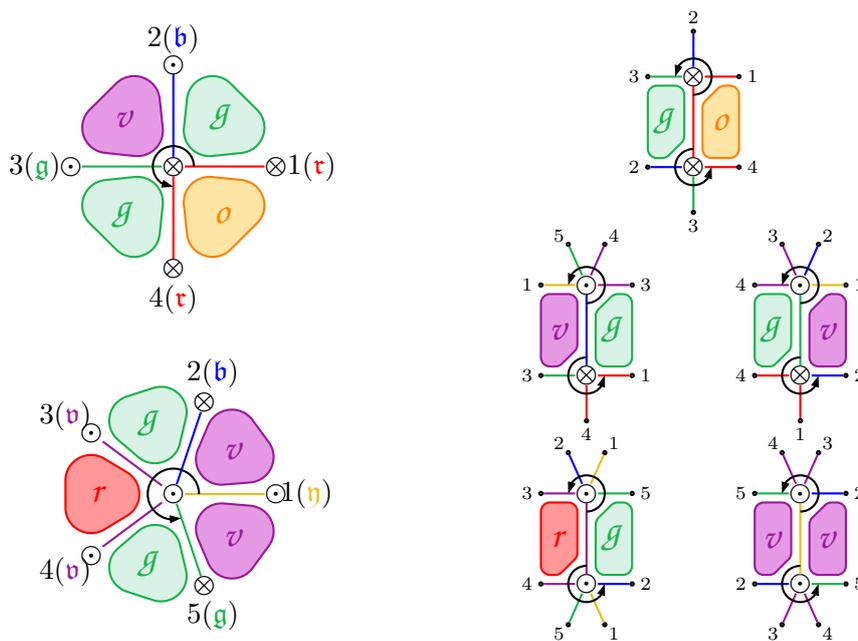
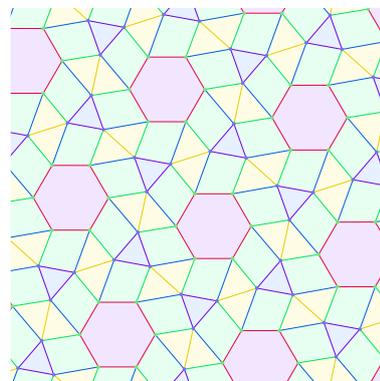


FIG. 3.8: Schéma d'étiquetage d'un graphe cofini possédant 2 classes de sommets distincts, donc deux vecteurs d'arêtes et de faces (à gauche), et 5 voisinages d'arêtes, un pour chaque classe d'arête (à droite).

Lorsque l'on calcule les bords des faces, on obtient deux orbites de longueur 1 correspondant aux faces o et r , une orbite de taille 3 pour la face étiquetée par v et une orbite de taille 4 pour la face étiquetée par g . Ainsi le vecteur primitif associé à la couleur \otimes vaut $[4n; 3m; 4n, p]$, et celui associé à la couleur \odot vaut $[3m; 4n; q; 4n; 3m]$, cela pour des valeurs $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}$ telles que $p, q \geq 3$. Le graphe dessiné ci-contre est un graphe cofini cohérent avec ce schéma d'étiquetage, tracé dans le plan Euclidien, avec pour vecteurs de type respectifs $\xi_{\otimes} = [4; 3; 4; 6]$ et $\xi_{\odot} = [3; 4; 3; 4; 3]$. Dans le cas présent, les arêtes sont des géodésiques du plan et les automorphismes du graphe correspondent à des isométries, comme dans le cas sommet-transitif.



3.4.3 Caractéristique du graphe

Supposons avoir choisi un schéma d'étiquetage, ainsi que des vecteurs de type valides, la question de l'existence du plongement se pose. Mais avant de rechercher un plongement, dans quelle géométrie ce plongement devra-t'il avoir lieu? En particulier, est-il possible de déterminer si le graphe est fini ou non? Et s'il est infini, vaut-il mieux le tracer dans le plan Euclidien ou hyperbolique? Examinons dans un premier temps le cas sommet-transitif.

Définition (Caractéristique) :

Si Γ est un graphe sommet-transitif planaire de degré d et de vecteur de type $[k_1, \dots, k_d]$, alors la *caractéristique* de Γ , notée $c(\Gamma)$, est donnée par la formule :

$$c(\Gamma) = 2 - \sum_{i=1}^d \frac{k_i - 2}{k_i} \quad \diamond$$

Lemme 3.5 (Nombre de sommets – Cas sommet-transitif)

Lorsque Γ est sommet-transitif planaire fini, son nombre de sommets est $n = \frac{4}{c(\Gamma)}$.

Preuve : Rappelons la formule d'Euler pour un graphe planaire Γ . Si n est le nombre de sommets du graphe, e son nombre d'arêtes et f son nombre de faces, alors $n - e + f = 2$. Tous les sommets étant de degré d , alors $e = nd/2$. Reste à compter le nombre de faces.

Considérons l'ensemble des faces de taille k du plongement. Supposons que l'on compte, pour chaque sommet, le nombre de faces de taille k qui lui soient incidentes, et que l'on en fasse la somme. Chaque face aura été comptée k fois. Donc, s'il y a t_k faces de taille k par sommet, cela fait en tout nt_k/k faces de taille k dans le plongement. Si l'on recompte toutes les faces, on obtient $f = \sum_{i=1}^d n/k_i$. Le résultat est alors une conséquence directe de la formule d'Euler. \square

Dans le paragraphe 3.3, on a vu que selon que la caractéristique du graphe était positive, nulle ou négative, il était possible de plonger le graphe respectivement dans la sphère (espace de courbure positive), le plan Euclidien (courbure nulle) ou dans le plan hyperbolique (courbure négative). La caractéristique de Γ donne ainsi un analogue discret de la courbure de l'espace autour du sommet courant du graphe.

Dans le cas d'un graphe cofini, comme le vecteur de type est dépendant du sommet, il est possible d'avoir des sommets correspondant à une caractéristique positive en même temps que des sommets de caractéristique négative. Essayons de définir une caractéristique généralisée dans le cas des graphes cofinis.

Lemme 3.6 (Nombre de sommets – Cas fini)

Soit Γ un graphe planaire fini, et $\{s_1, \dots, s_t\}$ l'ensemble des couleurs des sommets sous l'action d'un sous-groupe G du groupe des automorphismes de Γ . Chaque sommet s_i est supposé de degré d_i , et de vecteur de type $[k_1^i, \dots, k_{d_i}^i]$, et le stabilisateur de ce sommet de cardinal σ_i . Alors le nombre de sommets n de Γ est donné par la formule suivante :

$$n = 4 \times \frac{\left(\sum_{i=1}^t \frac{1}{\sigma_i} \right)}{\sum_{i=1}^t \frac{1}{\sigma_i} \left(2 - \sum_{j=1}^{d_i} \frac{k_j^i - 2}{k_j^i} \right)}$$

Preuve : Comme pour la preuve précédente, nous allons utiliser la formule d'Euler pour parvenir à nos fins : $n - e + f = 2$. Comme le graphe est fini, son groupe d'automorphismes Γ est lui aussi fini, donc G est lui aussi fini, de cardinal $|G| = N$. Calculons successivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de Γ en fonction de N . Faisons agir G sur les sommets coloriés s_i . Manifestement, chaque sommet est compté σ_i fois, ce qui implique que le nombre de sommets s_i vaut N/σ_i . Ainsi :

$$n = N \times \left(\sum_{i=1}^t \frac{1}{\sigma_i} \right)$$

Considérons maintenant les arêtes du graphe. Comme chaque sommet s_i est de degré d_i , en comptant chaque arête incidente à chaque sommet et en divisant le tout par deux,

il est possible d'obtenir l'équation suivante :

$$e = N \times \left(\sum_{i=1}^t \frac{d_i}{2\sigma_i} \right)$$

Reste à compter le nombre de faces. Pour chaque sommet et chaque face de taille p incidente à ce sommet, comptons $1/p$. Si l'on fait la somme sur tous les sommets et les faces qui leur sont incidentes, chaque face de taille p sera comptée p fois, ce qui équivaudra à une valeur de 1. D'où, en écrivant la somme :

$$f = N \times \left[\sum_{i=1}^t \frac{1}{\sigma_i} \left(\sum_{j=1}^{d_i} \frac{1}{k_j^i} \right) \right]$$

Ne reste plus alors qu'à appliquer la formule d'Euler. Multiplions par 2 et faisons passer N de l'autre côté de la formule :

$$\sum_{i=1}^t \frac{1}{\sigma_i} \left(2 - \sum_{j=1}^{d_i} \frac{k_j^i - 2}{k_j^i} \right) = \frac{4}{N}$$

En réinjectant l'équation exprimant n en fonction de N dans cette équation, on obtient bien le résultat escompté. \square

Remarque 3.2 (Cas des graphes cofinis non planaires) – Le lemme précédent permet de calculer le nombre de sommets d'un graphe cofini tracé sur une surface de Riemann compacte quelconque, du moment que l'on connaît la caractéristique d'Euler de cette surface. Cette remarque permet d'appliquer le lemme précédent dans un cadre plus général, comme on le fait dans le lemme 4.26. —

Définition (Caractéristique généralisée) :

Si Γ est un graphe planaire cofini, avec les notations du lemme précédent, la *caractéristique généralisée* de Γ , notée $c(\Gamma)$, est donnée par la formule :

$$c(\Gamma) = \left[\sum_{i=1}^t \frac{1}{\sigma_i} \left(2 - \sum_{j=1}^{d_i} \frac{k_j^i - 2}{k_j^i} \right) \right] \times \frac{1}{\sum_{i=1}^t \frac{1}{\sigma_i}}$$

Elle est égale à la caractéristique $c(\Gamma)$ lorsque le graphe est sommet-transitif. \diamond

Cette caractéristique généralisée est une moyenne des caractéristiques locales en chaque sommet, pondérée par les tailles des stabilisateurs de ces sommets. Pour l'instant, cette caractéristique permet simplement de calculer, lorsque le graphe est fini, le nombre de sommets, d'arêtes et de faces du graphe. Nous verrons au paragraphe 4.5 en quoi elle permet de décider de la géométrie qu'il faut choisir pour pouvoir construire un plongement localement fini.

3.4.4 Existence du plongement – Cas cofini

Dans ce paragraphe, Γ sera supposé préserver les bords des faces finies *et* infinies. Étant donné G un groupe agissant sur le plan de manière discrète, un *domaine fondamental* pour G consiste en la donnée d'un fermé connexe du plan \mathcal{D} tel que le plan soit la réunion des orbites de \mathcal{D} sous l'action de G , et que l'intersection de deux éléments distincts de l'orbite soit d'intérieur vide. Le lemme suivant, dû à Babai [Bab97] permet de construire un tel domaine fondamental, tel que l'action sur le domaine soit propre.

Lemme 3.7 (Domaine fondamental)

Soit Γ un graphe cofini planaire vérifiant la propriété de préservation des faces finies et infinies, et G son groupe d'automorphismes. Il est possible de construire un domaine fondamental \mathcal{D} pour Γ tel que l'action de G sur \mathcal{D} soit propre.

Preuve : Considérons le graphe barycentrique $\tilde{\Gamma}$ associé à Γ . Cela peut poser problème lorsque le graphe possède des faces infinies. Dans ce cas, on rajoute dans la face infinie, à partir de chaque sommet dans le bord de la face, une courbe infinie partant de ce chemin et se dirigeant à l'intérieur de la face vers l'infini. Il est toujours possible de réaliser ce genre de choses de manière à ce qu'aucune de ces courbes ne s'intersectent deux à deux, dans la mesure où l'ensemble constitué par la face infinie et son bord est homéomorphe au demi-plan euclidien bordé par l'axe horizontal.

Le plongement du graphe est ainsi décomposé en faces triangulaires, éventuellement infinies. Chacune de ces faces triangulaires est défini par une demi-arête de Γ et du centre d'une des faces de Γ éventuellement placé à l'infini. Le groupe d'automorphismes laissant stable cette demi-arête et le centre de la face par hypothèse, il définit une action sur ces faces triangulaires. Et comme le graphe barycentrique est cofini, il y a un nombre fini d'orbites. De plus, le stabilisateur d'une face fixe chacun des trois sommets de la face, l'un d'entre eux étant un sommet de Γ , l'un un milieu d'arête et le dernier un centre de face éventuellement à l'infini. Donc ce stabilisateur est trivial. Prenons un représentant dans chaque orbite $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_p\}$ de manière à ce que la réunion des faces obtenues $\cup_{i=1}^p \mathcal{D}_i$ soit connexe.

L'action du groupe d'automorphismes sur \mathcal{D} est alors simple et transitive, vu qu'on a pris un représentant de chacune des orbites. Le graphe dual associé à ce domaine est alors nécessairement un graphe de Cayley planaire localement fini pour le groupe G . \square

L'intérêt de posséder un domaine fondamental pour Γ est qu'il est alors possible de définir un graphe quotient : le graphe tracé sur le domaine fondamental, avec les identifications des côtés du domaine fondamental données par l'action de G sur \mathcal{D} . Dans tous les cas, le graphe quotient est un graphe fini, même si le domaine fondamental n'est pas fini. Néanmoins, il est parfaitement possible que le graphe quotient contienne des boucles et ne soit pas planaire.

Une des applications du lemme 3.7 consiste à construire des plongements des graphes cofinis vérifiant les propriétés de préservation des faces. La preuve du corollaire suivant est empruntée à [Bab97] et étendue à une famille de graphe un peu plus large. En effet, Babai se contente des graphes cofinis à un bout, et la famille que nous décrivons contient des graphes possédant des faces infinies qui n'entrent pas dans cette classe :

Corollaire 3.8

Il existe un plongement de Γ dans lequel les automorphismes sont des isométries.

Preuve : Pour cela, il suffit de considérer le domaine fondamental construit précédemment, et de construire le graphe de Cayley Γ' du groupe d'automorphismes G . Ce graphe est planaire localement fini car \mathcal{D} est un domaine fondamental. Le plongement de Γ' peut être choisi de manière à ce que ses automorphismes soient des isométries du plan (cf théorème 3.2). Considérons le graphe barycentrique associé à ce plongement. Comme les faces de Γ' sont des polygones réguliers, il est possible d'obtenir un plongement du graphe barycentrique de manière à ce que les arêtes soient des géodésiques. En prenant alors l'ensemble des faces incidentes à un sommet de Γ , on obtient un domaine fondamental particulier \mathcal{D}' pour Γ' .

Considérons maintenant le domaine fondamental \mathcal{D} associé au graphe Γ construit dans le lemme 3.7. Il suffit de faire coïncider \mathcal{D} avec \mathcal{D}' . Les groupes agissant sur les domaines sont isomorphes. Mieux, ils ont même graphe de Cayley, donc même présentation. Il est alors possible de recoller les bords du domaine fondamental \mathcal{D} sur les bords de \mathcal{D}' . En effet, l'intersection de deux domaines par l'action de G , quand elle n'est pas réduite à un point, constitue un segment du bord de \mathcal{D} . Il suffit de recoller ces segments deux à deux. Il est donc possible de déformer \mathcal{D} par un homéomorphisme sur \mathcal{D}' . L'orbite associée fournit un plongement dans lequel les automorphismes sont des isométries. \square

Problème ouvert (Existence d'un plongement par géodésiques) : Suite à ce lemme se pose la question naturelle suivante : est-ce qu'il est possible d'obtenir un plongement du graphe dans lequel toutes les arêtes sont des géodésiques dans la géométrie, comme c'est le cas pour les graphes sommet-transitifs ? Ce résultat est connu pour être vrai dans le cas de graphe planaires finis [Fár48]. Si l'on considère le domaine fondamental \mathcal{D} dans le plongement donné par le lemme précédent, ce domaine contient des sommets et des arêtes sur son bord, et un sous-graphe planaire fini à l'intérieur, noté Φ . Les éléments de Φ appartenant au bord de \mathcal{D} sont soit des sommets, soit des arêtes contenues dans des segments du bord, donc des géodésiques (on peut se débarrasser du cas où une arête appartient à plusieurs segments du bord en la considérant tracée par une géodésique à l'intérieur de \mathcal{D}). La question restant à résoudre est alors, étant donné un graphe planaire fini dont une face extérieure est déjà plongée par géodésiques, est-il possible d'obtenir un plongement du graphe tout entier par géodésiques ? —

Chapitre 4

Applications à la théorie combinatoire des groupes

Dans la mesure où il est possible de représenter les groupes planaires localement finis par des schémas d'étiquetages, il est possible de s'intéresser à divers problèmes de combinatoire des groupes. La première application consiste à classifier et énumérer les groupes planaires localement finis, notamment en fonction de leur connexité et de leur géométrie. Ensuite, il s'agit d'étudier les problèmes usuels de la théorie combinatoire des groupes, en particulier les problèmes du mot, pour voir en quoi l'hypothèse de planarité peut jouer sur l'existence d'algorithmes permettant de les décider. Enfin, le fait de considérer des groupes agissant discrètement sur le plan amène à s'intéresser à la théorie des surfaces, compactes ou non, et aux graphes non planaires qui sont alors engendrés.

4.1 Classification des graphes sommet-transitifs

Le problème de la classification et de l'énumération des graphes de Cayley est un vieux problème. Lorsque le graphe n'est pas planaire, des énumérations ont été proposées pour les graphes de petit degré [Eff00], et les graphes finis avec peu de sommets [McK79, MR90, Roy97]. Le problème a aussi été abordé de manière combinatoire [AM02] pour différentes familles de groupes finis. Dans le cas planaire, les graphes de Cayley finis sont connus depuis Maschke [Mas96], et les graphes sommet-transitifs finis plus récemment [FI79]. Les graphes de Cayley planaires normaux ont été traités par Chaboud [Cha95]. Nous étendons ici son travail à l'ensemble des graphes planaires sommet-transitifs localement finis.

Considérons l'ensemble des graphes sommet-transitifs planaires de degré $d \geq 3$ donné. A chacun de ces graphes, il est possible d'associer un schéma d'étiquetage et par conséquent un automate des bords. Néanmoins, le nombre de schémas d'étiquetages de degré d est fini et borné par $(2^d d!)$ dans le cas des graphes de Cayley, et par $(2^d (d!)^3)$ pour les graphes sommet-transitifs. Pour énumérer tous les graphes de degré d , il suffit donc d'énumérer tous les schémas d'étiquetage de degré d , puis tous les vecteurs de type valides associés à chacun de ces schémas.

Théorème 4.1 (Énumération des schémas d'étiquetages)

Étant donné un nombre $d \geq 2$, il est possible d'énumérer par algorithme tous les graphes de Cayley (resp. sommet-transitifs) ayant comme degré interne d , chaque graphe étant décrit par son schéma d'étiquetage et son vecteur de type.

Se pose alors le problème de l'énumération effective de ces schémas d'étiquetages. En effet, il s'agit d'objets combinatoires simples, mais considérés dans une classe d'isomor-

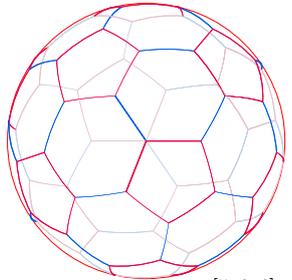
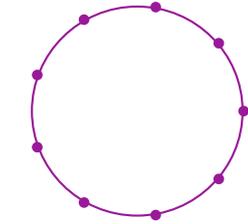
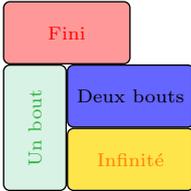
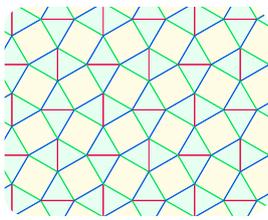
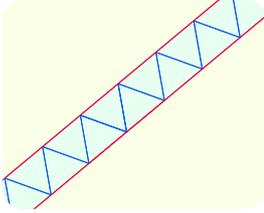
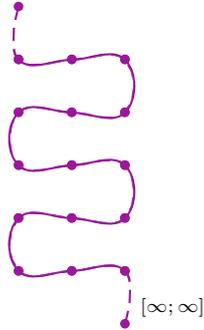
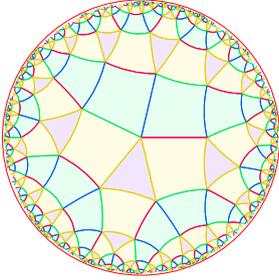
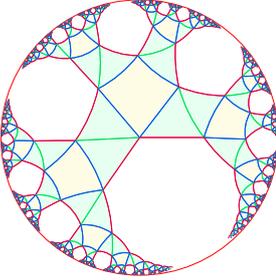
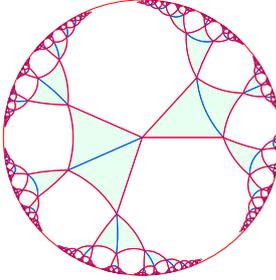
<p>Géométrie sphérique $c(\Gamma) < 2$</p>	 <p>[5; 6; 6]</p>	 <p>[9; 9]</p>	
<p>Géométrie Euclidienne $c(\Gamma) = 2$</p>	 <p>[3; 4; 3; 4; 3]</p>	 <p>[3; 3; 3; ∞]</p>	 <p>[∞; ∞]</p>
<p>Géométrie hyperbolique $c(\Gamma) > 2$</p>	 <p>[4; 4; 4; 4; 3]</p>	 <p>[3; 4; 3; 3; 3; ∞]</p>	 <p>[3; ∞; 3; 3; ∞]</p>
	<p>3-connexe toutes les faces sont finies</p>	<p>2-séparable une seule face infinie</p>	<p>1-séparable plusieurs faces infinies</p>

FIG. 4.1: Classification des graphes de Cayley planaires localement finis selon leur géométrie, définie par la caractéristique $c(\Gamma)$, et leur connexité, donnée par le nombre de faces infinies autour d'un sommet. Pour chaque famille, un graphe de Cayley est dessiné avec son vecteur de type. Le dessin en haut à droite représente une partition des cases du tableau selon le nombre de bouts des graphes.

Degré du graphe	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Schémas combinatoires	2	6	20	76	312	1384	6512	32400	...
Schémas réels	2	5	8	24	52	185	578	2412	...

TAB. 4.1: Énumérations des schémas d'étiquetages dans le cas des graphes de Cayley, comptés à la fois de manière combinatoire, et après passage au quotient par les rotations et symétries (schémas réels).

phisme complexe. Considérons tout d'abord le cas des graphes de Cayley. Il nous suffit de pouvoir compter les involutions sur n éléments selon le nombre de cycles. Notons de la manière suivante la série génératrice des involutions :

$$I(z, t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} z^n t^m$$

...où $a_{n,m}$ représente le nombre d'involutions sur n éléments possédant m cycles. La série des schémas d'étiquetages de taille n est alors donnée par $I(z, 2)$, dans la mesure où il suffit d'assigner à chaque cycle de la permutation un booléen pour obtenir un schéma d'étiquetage. La suite $(a_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$a_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } m > n \text{ ou } m < n/2 \\ 1 & \text{lorsque } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ a_{n-1,m-1} + (n-1)a_{n-2,m-1} & \text{lorsque } n > 2 \end{cases}$$

Le terme non linéaire de la récurrence empêche d'obtenir une expression simple de la série génératrice. La série $I(z, 1)$ correspond à la suite A000085 de l'encyclopédie de Sloane [SP95]. Les premiers termes de la série génératrice sont donnés par :

$$I(z, t) = tz + (t + t^2)z^2 + (t^3 + 3t^2)z^3 + (t^4 + 6t^3 + 3t^2)z^4 + \dots$$

Cette énumération permet de compter le nombre de schémas d'étiquetages distincts au sens combinatoire. Néanmoins, en pratique, les schémas d'étiquetages représentent des structures planaires, donc stables par symétrie et rotation. Deux schémas d'étiquetage (p, σ, τ) et (p', σ', τ') sont équivalents lorsque il est possible de passer de l'un à l'autre par une renumérotation des générateurs qui soit une rotation ou une symétrie. Dans ce cas, le comptage des schémas d'étiquetage "réels" est moins évident et l'on obtient les résultats du tableau 4.1.

Si le problème est difficile dans le cas des graphes de Cayley, il l'est encore plus si l'on s'intéresse aux graphes sommet-transitifs et cofinis en général. En effet, les opérations laissant stables les schémas d'étiquetages contiennent les rotations et symétries, mais aussi les twists et les réarrangements des voisinages d'arête (cf. tableau 2.1). Il est possible d'énumérer les schémas d'étiquetages selon qu'ils contiennent des twists ou non. S'il n'y a pas de twist, comme les bords des faces sont périodiques, les schémas sont périodiques. Dans le cas contraire, ils sont aperiodiques. Les résultats de cette énumération apparaissent dans le tableau 4.2.

Pour chacune de ces familles de graphe, il est possible d'effectuer la classification du tableau 4.1. En particulier, les graphes peuvent être classifiés selon leur géométrie et leur connexité. Lorsque la géométrie sous-jacente au graphe est hyperbolique, le graphe constitue lui aussi un espace hyperbolique (cf. paragraphe 4.2), donc radicalement différent

Degré du graphe	1	2	3	4	5	6	...
Schémas périodiques	2	6	16	52	174	775	...
Schémas apériodiques	0	0	0	1	> 1	> 1	...

TAB. 4.2: Énumérations des schémas d’étiquetages dans le cas des graphes sommet-transitifs, séparant les schémas périodiques des schémas apériodiques.

de la géométrie euclidienne. La classification en terme de connexité donne une information sur la structure du graphe, permettant de séparer les graphes 3-connexes, ne possédant qu’un bout, des graphes 2-séparables qui possèdent une structure arborescente. Les schémas d’étiquetage permettent donc de représenter des graphes ayant des structures complètement différentes.

Ayant effectué ces énumérations, la question qui se pose est celle de la détermination, dans les graphes sommet-transitifs, de ceux qui sont des graphes de Cayley et de ceux qui n’en sont pas. Là encore, le problème a été étudié dans le cas des graphes finis [MP94, MP96, Roy97]. Dans le cas des graphes localement finis, il est possible d’affiner les résultats précédents. En effet, étant donné un schéma d’étiquetage de graphe de Cayley, il est possible de construire les vecteurs d’arête, de face et les voisinages d’arêtes associés. Considérons alors deux schémas d’étiquetages (ξ, ϕ, η) et (ξ', ϕ', η') , et pour chacun un vecteur de type valide. Pour vérifier qu’ils construisent le même graphe, il suffit de vérifier que les voisinages d’arête construisent des faces de même taille pour les deux schémas, cela pour toute rotation, symétrie et twist d’un des schémas. En particulier :

Corollaire 4.2 (Énumération des présentations)

Étant donné un graphe Γ planaire localement fini sommet-transitif (donné par un schéma d’étiquetage) il est possible de déterminer s’il est de Cayley ou non. S’il est de Cayley, il est possible de déterminer l’ensemble des présentations de groupes ayant ce graphe pour graphe de Cayley.

Si le graphe Γ est de degré d , alors le nombre de présentations possibles est nécessairement borné par le nombre de schémas d’étiquetages de degré d . De plus, cette estimation peut encore être améliorée, dans la mesure où le vecteur de type du graphe est fixé. En effet, on ne doit considérer que les schémas d’étiquetages pour lesquels ce vecteur de type est valide. Par le même raisonnement, il est aussi possible de déterminer tous les étiquetages possibles d’un graphe sommet-transitif qui soient stables par un groupe d’automorphismes agissant transitivement sur les sommets. Chaboud [Cha95] a énuméré les présentations des groupes agissant transitivement sur les graphes archimédiens. Dans la figure 4.2, on décrit les groupes d’automorphismes transitifs d’un des pavages archimédiens. Cela permet de décrire d’une part les graphes de Cayley mais aussi les groupes d’automorphismes des graphes localement finis par le graphe lui-même et les stabilisateurs des sommets.

Dans un autre contexte, les graphes décrits dans cette énumération décrivent tous des pavages du plan. Il s’agit donc d’une extension naturelle des pavages archimédiens. L’énumération précédente permet d’obtenir des exemples de pavages sortant des exemples classiques (cf. [GS87] pp. 193–197). Grünbaum et Shephard parlent de l’existence de pavages pour des degrés internes ≤ 4 , et aussi dans le cas où toutes les faces sont de taille paire. La méthode usuelle de construction de ces pavages consiste à prendre un polygone

fondamental – usuellement un triangle, appelé triangle de Schwarz – et à paver le plan en considérant les symétries selon les arêtes de ce polygone. En prenant le pavage dual, on obtient des graphes sommet-transitifs. De nombreux exemples de ce type de construction peuvent être trouvés à la page [Hat02], mais ils ne sont pas exhaustifs. L'énumération des schémas d'étiquetage a le mérite d'être systématique et de produire l'ensemble des pavages du plan hyperboliques possibles.

4.2 Le problème du mot

Soit $G = \langle A, R \rangle$ un groupe défini par générateurs et relations. La donnée du groupe G sous la forme d'une présentation pose des problèmes algorithmiques, concernant notamment la possibilité de résoudre des questions naturelles dans le groupe G , telles que la simple égalité de deux éléments [LS77, MKS76, Rot94, Mil92]. Dans les paragraphes qui suivent, on se préoccupera en priorité du cas des groupes hyperboliques.

Définition (Problème du mot) :

Résoudre le *problème du mot* (WP) dans $G = \langle A, R \rangle$ consiste à pouvoir décider par un algorithme si, étant donné un mot $u \in A^*$ sur les générateurs de G , ce mot représente ou non l'identité de G . Résoudre ce problème est équivalent à pouvoir décider si étant donnés deux mots sur les générateurs de G , ils représentent le même élément du groupe G ou non. Intuitivement, il s'agit d'un test d'égalité dans le groupe. \diamond

Le problème du mot est le plus naturel que l'on puisse se poser lorsque l'on dispose d'une présentation de groupe. Lorsque le groupe est *automatique* [Eps92], il existe un algorithme résolvant le problème en temps quadratique en la longueur du mot d'entrée. Les groupes automatiques contiennent en particulier les groupes abéliens et les groupes hyperboliques, qui incluent eux-mêmes les groupes virtuellement libres. Néanmoins, il est possible d'exhiber [Rot94] des groupes finiment présentés pour lesquels le problème du mot n'est pas solvable.

Dans la mesure où il est possible de construire n'importe quelle partie finie du graphe de Cayley du groupe $G = \langle A, R \rangle$, le problème du mot est solvable. Par corollaire, il est

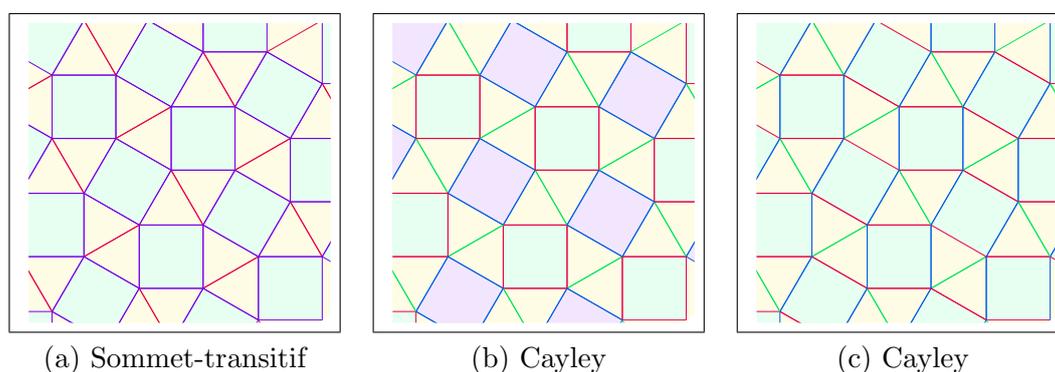


FIG. 4.2: Énumération des groupes d'automorphismes transitifs du pavage archimédien défini par le vecteur de type [4; 3; 4; 3; 3]. Le pavage (a) correspond à deux groupes d'automorphismes distincts, l'un possédant des isométries indirectes et l'autre non, mais dont l'étiquetage est le même. Les pavages (b) et (c) correspondent aux deux graphes de Cayley énumérés par Chaboud.

donc possible de le résoudre lorsque G possède un graphe de Cayley planaire localement fini. Pour une résolution efficace, nous allons donner deux algorithmes distincts, le premier utilisant les propriétés combinatoires de la présentation, et le second utilisant les propriétés géométriques du plongement. Les définitions d'hyperbolicité et de quasi-isométrie, ainsi que la preuve de la proposition suivants proviennent de [CDP90] :

Proposition 4.3

Si le groupe $G = \langle A, R \rangle$ est δ -hyperbolique, il existe une constante $L(\delta)$ calculable telle que si w est un mot sur A de longueur $\geq L(\delta)$ qui ne soit pas géodésique, il existe un facteur de w de longueur $\leq L(\delta)$ qui lui aussi n'est pas géodésique.

En particulier, cette propriété permet la résolution du problème du mot. Il suffit pour cela de calculer la constante L et de faire une liste de tous les mots de A de longueur $\leq L$ et de leur associer leur représentant dans le groupe G . Cela peut se faire en construisant le graphe de Cayley de G sur une boule de taille L . Ensuite, tout mot de longueur $> L$ non géodésique pourra se réécrire, d'après la proposition, en un mot de longueur strictement plus petite. La résolution de ce type de systèmes de réécriture peut s'effectuer en temps linéaire [Boo82].

Le problème principal qui se pose alors est le calcul de la constante d'hyperbolicité du graphe. Pour cela, il suffit de montrer que la métrique du graphe est équivalente à une métrique dans un espace hyperbolique au sens de Gromov [CDP90]. Pour les graphes 3-connexes, nous allons voir que le plan hyperbolique lui-même convient naturellement [Can84]. Dans les autres cas, il faut construire un espace hyperbolique adapté au graphe et à sa structure arborescente, de la manière suivante :

Définition (Arbre barycentrique) :

Soit Γ est un graphe planaire localement fini sommet-transitif et 2-séparable. L'arbre barycentrique $T(\Gamma)$ associé à Γ est le graphe suivant :

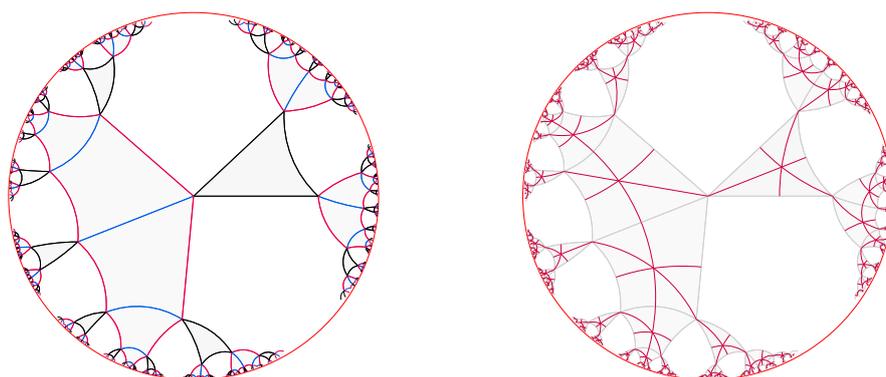
- Les sommets sont les sommets de Γ , les centres des arêtes de Γ et les centres de faces finies de Γ – on nommera ces sommets par l'objet qu'ils représentent dans Γ ;
- Les arêtes de $T(\Gamma)$ sont définies de la manière suivante : une arête est reliée à une face lorsqu'elle appartient à son bord. Enfin, pour tout sommet s de Γ et pour chaque composante 2-connexe à laquelle il est incident, on considère l'ensemble des arêtes et faces de la composante à laquelle s est incident. On choisit un élément de cet ensemble que l'on relie à s par une arête. ◊

Pour un exemple d'arbre barycentrique, on peut se référer à la figure 4.3. Le lemme suivant montre que l'arbre barycentrique est à la hauteur de sa définition, c'est-à-dire qu'il s'agit bien d'un graphe connexe sans cycles :

Lemme 4.4

Si Γ est un graphe planaire localement fini sommet-transitif 2-séparable. Alors $T(\Gamma)$ est un arbre, donc un espace 0-hyperbolique.

Preuve : Pour vérifier cela, il suffit de le vérifier sur les composantes 2-connexes, car ces composantes ne sont rattachées entre elles que par un seul point d'articulation. Dans le graphe $T(\Gamma)$ restreint à une de ces composantes, on peut remarquer que les sommets du graphe Γ sont des feuilles, c'est-à-dire des sommets de degré 1. Tout cycle simple de $T(\Gamma)$ est donc composé d'une alternance d'arêtes et de faces de Γ . Ce cycle délimite un ouvert borné du plan, et cet ouvert contient au moins un sommet s de Γ . En effet, les arêtes du

FIG. 4.3: Un graphe de Cayley Γ et un arbre barycentrique associé $T(\Gamma)$.

cycle possèdent nécessairement une extrémité dans cet ouvert. Par conséquent, le cycle est forcément recouvert par une union de faces finies de Γ , et du fait de l'hypothèse localement fini, l'ouvert borné ne s'intersecte qu'avec des faces finies de Γ . Ainsi, autour du sommet s , toutes les faces sont finies, ce qui contredit la 2-séparabilité par le lemme 2.6. \square

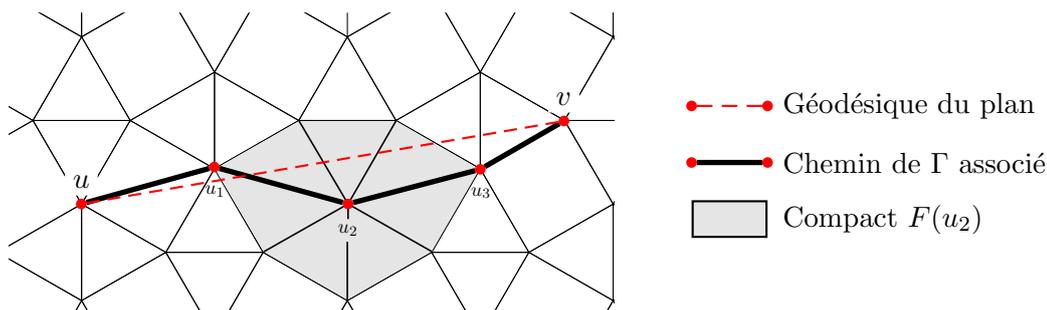
Quand le graphe est de Cayley, il est possible de choisir l'arbre barycentrique de manière à ce que le groupe d'automorphismes du graphe soit un sous-groupe d'automorphismes de l'arbre. Cela revient à faire un choix pour relier les sommets aux composantes qui est dicté par le groupe d'automorphismes.

Lemme 4.5 (Equivalence des distances)

Soit Γ un graphe sommet-transitif planaire localement fini plongé dans une des trois géométries par polygones réguliers. Si Γ est 3-connexe, la métrique de Γ est équivalente à la métrique dans la géométrie. Si Γ est 2-séparable, la métrique de Γ est équivalente à la métrique de l'arbre $T(\Gamma)$.

Preuve : Dans cette preuve, on note d_Γ la distance dans le graphe, $d_\mathbb{G}$ la distance dans la géométrie et d_T la distance dans l'arbre barycentrique pour les graphes 2-séparables.

Supposons Γ 3-connexe. Comme toutes les arêtes du plongement sont de la même longueur l , il est assez simple de voir que $d_\mathbb{G} \leq l \cdot d_\Gamma$ grâce à l'inégalité triangulaire. Réciproquement, si v est un point du plan, on note $N(v)$ un des sommets de Γ les plus proches de v , et $F(v)$ le compact formé de la réunion des faces (et de leurs bords) incidentes à $N(v)$. Il existe une constante C telle que, pour tout point v du plan, la boule de rayon C centrée sur v soit entièrement incluse dans $F(v)$. La constante C est calculable en fonction de la donnée du vecteur de type de Γ . Considérons une géodésique de longueur $d_\mathbb{G}(u, v)$ entre deux sommets u et v de Γ . La géodésique commence à traverser $F(u)$, jusqu'à arriver à son bord, où elle entre dans $F(u_1)$. On peut construire de cette manière une suite finie $\{u, u_1, \dots, u_k, v\}$ de sommets, commençant en u , telle que la géodésique passe successivement à travers les $F(u_k)$. Comme elle doit parcourir au moins une distance $C/2$ avant de sortir de $F(u_k)$, elle ne peut rencontrer qu'au plus $2d_\mathbb{G}(u, v)/C$ compacts $F(u_k)$. Si L est le maximum des distances entre deux sommets d'un compact $F(u_k)$, alors on obtient que $d_\Gamma \leq 2L/C \cdot d_\mathbb{G}$.



Supposons 2-séparable et $T(\Gamma)$ son arbre barycentrique. Notons d le degré du graphe. Si (u, v) forment une arête de Γ , alors il est relativement aisé de borner $d_T(u, v)$: 2 pour passer d'un sommet à une face, puis $2d - 4$ pour faire le tour des faces incidentes au sommet u , cela répété deux fois pour atteindre le sommet v . Au final, $d_T(u, v) \leq 4(d - 1)$. Cela nous assure que $d_T(u, v) \leq 4(d - 1) \cdot d_\Gamma(u, v)$. Réciproquement, une géodésique de taille $d_T(u, v)$ dans $T(\Gamma)$ rencontre au plus $d_T(u, v)/2$ faces de Γ . Si N est la taille de la plus grande face finie de Γ , cela nous assure que $d_\Gamma(u, v) \leq d_T(u, v) \cdot N/2$. \square

Corollaire 4.6 (Croissance)

La croissance d'un graphe sommet-transitif planaire localement fini est soit linéaire, soit quadratique, soit exponentielle.

Au final, les graphes de Cayley planaires localement finis plongés dans le plan hyperbolique sont bien eux-même des espaces hyperboliques, il est possible d'en calculer la constante d'hyperbolicité, et d'appliquer les méthodes combinatoires pour résoudre le problème du mot. Tentons maintenant d'appliquer une autre méthode de résolution donnée par le plongement du graphe. L'algorithme consiste, étant donné un mot u sur les générateurs de G , à calculer la position géométrique du sommet de Γ correspondant à u . Il suffit pour cela de connaître les isométries permettant de passer d'un sommet à chacun de ses voisins. On obtient ainsi un algorithme glouton permettant de calculer la position de n'importe quelle suite finie de générateurs de G dans le plan hyperbolique.

Le principal problème d'un tel algorithme provient de l'utilisation de nombres réels. Sa complexité pour un mot de longueur n n'est pas linéaire en n , dans la mesure où il faut adapter la précision des calculs avec la taille de n , cela pour éviter que les erreurs de calcul n'empêchent d'obtenir un résultat exact. En pratique, un tel algorithme est utilisé pour des valeurs faibles de n , ainsi que lorsque le graphe n'est pas forcément de Cayley. C'est sur la base de cet algorithme qu'il a été possible de dessiner à l'aide du langage `PostScript` les plongements des graphes sommet-transitifs et cofinis qui jonchent ces pages.

Ces algorithmes s'appliquent directement à la reconnaissance des présentations qui sont ou non planaires localement finies. Le problème général n'est pas si simple, dans la mesure où, pour un groupe donné, le fait de posséder une présentation planaire est une propriété de Markov [LS77] (cf. corollaire 5.2 page 102), ce qui implique en particulier qu'il n'existe pas d'algorithme capable de décider si un groupe donné possède une présentation planaire ou pas. Notre problème de reconnaissance est plus faible, dans la mesure où il pose la question directement au niveau de la présentation :

Lemme 4.7

Soit $G = \langle A, R \rangle$ un groupe finiment présenté dans lequel le problème du mot est soluble. Alors, il est possible de décider si cette présentation de G correspond à un graphe de Cayley planaire localement fini ou non.

Le problème de pouvoir décider si G admet une telle présentation est semi-décidable.

Preuve : Étant donné la présentation $\langle A, R \rangle$, il est possible d'enrichir A en générateurs de manière à ce qu'il soit stable par passage à l'inverse. Selon le cardinal de A , il n'existe, grâce à la proposition 4.1 qu'un nombre fini de schémas d'étiquetages correspondant à un tel degré. Reste à vérifier, pour un schéma d'étiquetage donné, si la présentation $\langle A, R \rangle$ peut correspondre à une des présentations valides pour ce schéma d'étiquetage.

Pour cela, si $n = |A|$, il suffit de numérotter les éléments de A de 1 à n . Pour chaque numérotation possible, il faut vérifier si les relateurs de G , vu comme des relateurs dans le schéma d'étiquetage, correspondent à un des bords des faces du schéma d'étiquetage, c'est-à-dire à une puissance d'une des orbites de l'automate de bords. On effectue cela pour chacun des relateurs de G . Si les faces du schéma correspondent exactement à des relateurs de G , et que le vecteur de type associé est valide, la réponse de l'algorithme est positive. Sinon, la réponse est négative.

Si G est donné par une présentation sous la forme $\langle A, R \rangle$, alors il est possible d'énumérer toutes les présentations possibles du groupe G en appliquant des transformations de Tietze [LS77]. Pour chacune de ces présentations, nous appliquons la méthode précédente pour pouvoir décider si elle est associée à un graphe de Cayley planaire localement fini. Comme le nombre de ces présentations est éventuellement infini, cela nous fournit un semi-algorithme de décision, c'est-à-dire un algorithme qui termine lorsqu'une présentation planaire localement fini existe. \square

4.3 Le problème du mot généralisé

Définition (Problème du mot généralisé) :

Résoudre le *problème du mot généralisé* (GWP) dans G consiste à décider la question suivante : étant donné un sous-groupe H engendré par un nombre fini de générateurs $\{h_1, \dots, h_n\} \subset A^*$, et un mot $u \in A^*$ sur les générateurs de G , l'élément u appartient-il ou non au sous-groupe H ? Lorsque $H = \{\epsilon\}$, cela revient à résoudre le problème du mot simple. \diamond

Le problème du mot généralisé est décidable pour les groupes libres [MKS76, LS77] à l'aide de transformations de Nielsen. Il a été résolu dans le cas des groupes polycycliques [Am89] et virtuellement libres [KMO92, MO98]. Néanmoins, comme sa résolution implique la résolution du problème du mot, le problème du mot généralisé est indécidable dans le cas général. Il existe même des groupes word-hyperboliques – *i.e.* dont le graphe de Cayley est un espace hyperbolique – pour lesquels le problème du mot est décidable mais pas le problème du mot généralisé (cf. par exemple [Rip82]). Dans le cas de groupes planaires, la situation est différente. En effet, Scott a montré que ces groupes sont *locally extended residually finite* [Sco78, Sco85], ce qui en particulier implique la décidabilité du problème du mot généralisé en toute généralité, sans que les algorithmes associés ne soient efficaces.

L'approche de Farb [Far94] pour les groupes possédant une *fonction de distortion* récursive fournit un algorithme pour la résolution du problème en utilisant le fait que la distance combinatoire dans le graphe de Cayley de H est bornée en fonction de la distance combinatoire des mêmes mots dans le graphe de Cayley de G . En ce qui concerne les groupes de surfaces, Pittet [Pit93] a montré que leurs sous-groupes étaient *quasi-convexes*. Cela implique que la borne soit nécessairement linéaire, ce qui fournit au final un algorithme exponentiel pour la résolution du problème du mot généralisé dans les groupes de surfaces.

L'approche décrite dans ce paragraphe permet à la fois de résoudre le problème tout en construisant un graphe de Cayley planaire pour le sous-groupe. Cette approche utilise à la fois les propriétés combinatoires du groupe, ainsi que les propriétés géométriques du plongement. Si G est un groupe fuchsien finiment engendré, alors il possède un domaine fondamental qui est un polygone convexe possédant un nombre fini de côtés [Bea83]. Lorsqu'il est Euclidien ou fini, il agit comme groupe d'isométries du plan euclidien ou de la sphère et dans ce cas les sous-groupes sont aussi des groupes d'isométries discrets du plan, donc sont soit finis, soit font partie des 17 groupes de symétries planes. Ces différentes remarques peuvent se résumer par le résultat suivant :

Théorème 4.8 (Hérédité par passage au sous-groupe)

Tout sous-groupe finiment engendré d'un groupe ayant un graphe de Cayley planaire localement fini possède lui aussi un graphe de Cayley planaire localement fini.

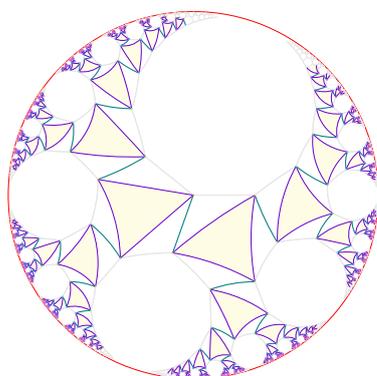


FIG. 4.4 : Un plongement du graphe de Cayley du groupe modulaire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Les arêtes foncées correspondent à la présentation naturelle de ce groupe avec deux générateurs d'ordre 2 et 3. En filigrane est dessiné le graphe de Cayley du sous-groupe (égal au groupe) à l'aide de faces hexagonales.

La figure 4.4 illustre le théorème 4.8 en donnant un exemple de graphe de Cayley de groupe et de sous-groupe superposés. Ce résultat est à relier à un résultat d'hérédité dû à Babai [Bab77] pour les graphes de Cayley planaires généraux (cf. page 112 pour plus de détails).

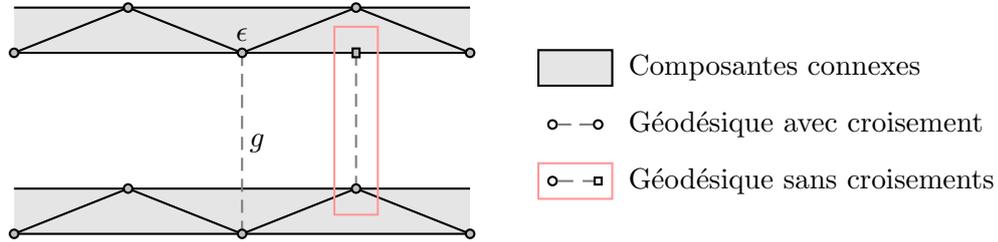
4.3.1 Approche géométrique du problème

Dans cette partie, nous montrons comment il est possible de décider ce problème dans la classe des groupes planaires localement finis à l'aide d'un algorithme utilisant les propriétés géométriques du plongement. L'idée consiste, étant donné un graphe de Cayley Γ et un ensemble fini de générateurs $\{g_1, \dots, g_n\}$ pour le sous groupe H , à construire une présentation pour H telle que le graphe de Cayley associé soit planaire localement fini.

Considérons le plongement par polygones réguliers du graphe Γ . Le sous-groupe H correspond à un sous-ensemble des sommets de Γ . La principale difficulté consiste à construire effectivement un domaine fondamental pour H , ou de manière équivalente le graphe de Cayley associé à cet ensemble de sommets. Une manière naturelle d'agir consiste à utiliser les techniques des pavages de Voronoï : en utilisant le plongement initial de G , le domaine fondamental autour du point courant est calculé par rapport aux sommets les plus proches géométriquement. L'idée pose des problèmes techniques, dans la mesure où le domaine fondamental n'est pas nécessairement compact, et qu'il n'est pas évident de connaître les points les plus proches géométriquement. De plus, l'exemple suivant montre qu'il faut s'y prendre avec précaution.

Exemple 4.3.1 – Considérons le cas particulier dans lequel les sommets du sous-groupe sont disposés de la manière suivante : des “frises” isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isométriques

et sans intersections deux à deux, en nombre infini, réparties dans le plan. Supposons vouloir construire un domaine fondamental en choisissant successivement les sommets les plus proches de l'identité ϵ comme générateurs du graphe de Cayley.



Dans cet exemple pris dans le plan Euclidien, la longueur des arêtes de la frise est telle que le minimum des distances entre deux sommets de deux frises données successives ne puisse se réaliser qu'en recoupant une arête préexistante. Le cas précédent se produit lorsque $G = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 | a_1 a_3, a_2 a_4, a_1 a_2 a_1 a_4 \rangle$, dont le graphe de Cayley est une grille infinie, et $H = \langle a_2^3 a_1, a_4^3 a_1, a_2^6, a_1^8 \rangle$. Dans le plan hyperbolique, une situation équivalente se produit dans le groupe $G = \langle a_1, \dots, a_5 | a_1 a_4, a_2^2, a_3^2, a_5^2, a_1 a_2 a_3, (a_4 a_5)^3 \rangle$, avec pour ensembles de générateurs du sous-groupe $H = \langle a_3 a_1^2, a_2 a_4^2, a_1^5, a_2 a_5 a_4^2 a_5 \rangle$.

L'idée de prendre successivement les sommets les plus proches comme ensemble de générateurs ne permet donc pas de construire un graphe de Cayley planaire. Néanmoins, il faut remarquer dans cet exemple que l'une des arêtes provoquant le croisement est superflue : il est possible de l'enlever du graphe de Cayley tout en préservant la connexité du graphe. —

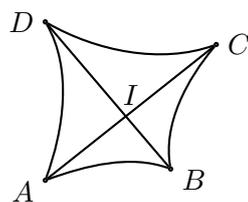
Lorsque deux arêtes se croisent dans un espace géodésique, leurs extrémités forment un quadrilatère convexe pour lequel le croisement correspond à l'intersection des diagonales. Le lemme suivant décrit les conditions que doivent vérifier les longueurs des côtés du quadrilatère en fonction des longueurs des diagonales :

Lemme 4.9 (Lemmes du quadrilatère)

Soit $(ABCD)$ un quadrilatère dont les diagonales se croisent dans un espace géodésique, et $L \geq l$ les longueurs de ses deux diagonales. Alors :

- (i) Si l'on prend deux côtés opposés du quadrilatère, au moins l'un d'entre eux est de longueur strictement plus courte que L ;
- (ii) Si deux côtés consécutifs du quadrilatère sont plus longs que L , alors les deux côtés restants sont strictement plus courts que l .

Preuve de (i) : Soit I le point d'intersection des diagonales. Supposons *ab absurdo* que les deux côtés \overline{AB} et \overline{CD} sont plus longs que L . Appliquons alors l'inégalité triangulaire aux triangles (AIB) et (CID) pour obtenir :



$$\begin{aligned} \overline{AI} + \overline{IB} &> \overline{AB} \geq L \\ \overline{CI} + \overline{ID} &> \overline{CD} \geq L \end{aligned}$$

Comme $(ABCD)$ est convexe, la somme des deux équations implique que $l + L > 2L$, ce qui est absurde car on a supposé $L \geq l$. Les cas limites dans lesquels trois ou quatre points du quadrilatère sont alignés sont tous triviaux. \triangleleft

Preuve de (ii) : Avec les mêmes notations que la preuve précédente, on suppose maintenant que $\overline{AB} \geq L = \overline{AC}$ et $\overline{AD} \geq L$. On utilise de la même façon l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} L &\leq \overline{AB} < \overline{AI} + \overline{IB} \\ &< (L - \overline{IC}) + \overline{IB} \quad \Rightarrow \quad \overline{IB} > \overline{IC} \\ L &\leq \overline{AD} < \overline{AI} + \overline{ID} \\ &< (L - \overline{IC}) + \overline{ID} \quad \Rightarrow \quad \overline{ID} > \overline{IC} \end{aligned}$$

Enfin, $\overline{BC} < \overline{BI} + \overline{IC} < \overline{BI} + \overline{ID} < \overline{BD} = l$ et symétriquement pour l'autre côté. Les cas limites dans lesquels trois ou quatre points du quadrilatère sont alignés se traitent de la même façon ou sont triviaux. \square

Idée de la construction Partons d'un ensemble de générateurs de H noté $\mathcal{S}_0 = \emptyset$, de manière à ce que le graphe de Cayley Γ_0 de H associé à \mathcal{S}_0 ne contienne aucune arête, et uniquement des sommets. Par récurrence, nous allons construire un ensemble \mathcal{S}_n , obtenu en ajoutant à chaque étape un nouveau élément de H , de manière à ce qu'à chaque étape, le graphe de Cayley correspondant Γ_n soit planaire localement fini. Puis nous montrerons que cette méthode fournit au bout d'un nombre fini d'étapes un graphe de Cayley connexe, planaire localement fini pour H .

A chaque étape de la construction, les automorphismes du graphe sont induits par les automorphismes de Γ , qui sont des isométries. Supposons vouloir rajouter un élément $h \in H$ à la liste actuelle \mathcal{S} . Dans cette construction, nous voulons préserver le fait que les automorphismes du graphe Γ_k soient des isométries. Donc, le plongement dans le plan de ce générateur par une arête devra être stable par le groupe d'isométries du plan H . Par exemple, si l'on choisit de plonger h comme une géodésique dans la géométrie considérée, l'orbite de h par les automorphismes de H sera plongée par l'orbite de cette géodésique. La longueur de h correspond dans ce cas à la longueur de la géodésique entre ϵ et le sommet de Γ représentant h .

Initiation de la récurrence Considérons pour le premier générateur de H un sommet de Γ différent de l'identité, appartenant à H , et qui soit le plus proche possible de l'identité de Γ . Un tel sommet existe car Γ est localement fini. Notons h_1 l'élément de H en question, et posons $\mathcal{S}_1 = \{h_1\}$. Si l'on plonge h_1 par géodésique, alors le graphe de Cayley Γ_1 est planaire, comme corollaire du lemme du quadrilatère 4.9(i) : si deux géodésiques de même longueur se croisent, alors il est possible de trouver deux éléments de H à distance strictement inférieure à la longueur des diagonales, ce qui est absurde par choix de h_1 .

Étape de récurrence Supposons avoir construit \mathcal{S}_{k-1} , et ajoutons un nouveau générateur au graphe. Soit Γ_{k-1} le graphe de Cayley de H associé à l'ensemble de générateurs \mathcal{S}_{k-1} . Ce graphe est composé de plusieurs composantes connexes, sans quoi la récurrence est terminée. Choisissons donc h_k qui réalise le minimum de distance entre l'identité de Γ et les sommets appartenant à des composantes connexes distinctes de celle de l'identité. Choisissons $\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k-1} \cup \{h_k\}$, et plongeons h_k par une géodésique. Comme le graphe Γ_{k-1}

est supposé planaire par récurrence, seules les géodésiques rajoutées à cette étape peuvent provoquer des croisements dans Γ_k .

Ces géodésiques ne peuvent se croiser entre elles, dans la mesure où le lemme du quadrilatère 4.9(i) permettrait d'obtenir une géodésique plus courte entre deux composantes connexes distinctes, ce qui contredirait l'hypothèse sur le choix de h_k . Supposons qu'une géodésique h_k d'extrémités A, C croise une géodésique h_l d'extrémités B, D pour $l < k$. On suppose sans perte de généralité que A n'appartient pas à la composante connexe contenant B et D . Comme le générateur h_k réalise un minimum de distances entre deux composantes, on a nécessairement $\overline{AB} \geq \overline{AC}$ et $\overline{AD} \geq \overline{AC}$. D'après le lemme 4.9(ii), les arêtes \overline{BC} et \overline{CD} correspondent à des générateurs strictement plus courts que h_l . Cela signifie que dans le processus de récurrence, les générateurs correspondant à \overline{BC} et \overline{CD} sont antérieurs à h_l , car les générateurs ajoutés sont de longueur croissante selon l'étape de récurrence. Cela implique que le générateur h_l ne relie pas deux composantes connexes distinctes, ce qui est absurde. Donc Γ_k est planaire.

Terminaison de la construction A chaque étape, la longueur des générateurs ne peut décroître. Soit L la longueur du plus grand des (g_k) , l'ensemble initial de générateurs de H . La boule hyperbolique centrée sur ϵ et de rayon L contient un nombre fini N de sommets de Γ , selon l'hypothèse localement fini. Au bout de N étapes le graphe de Cayley Γ_N contient nécessairement l'ensemble des (g_k) , ce qui assure qu'il est connexe. La construction termine donc en au plus N étapes.

La construction ainsi effectuée peut s'appliquer dans un cadre plus général que celui du problème du mot généralisé. Si l'on se donne une surface géodésique \mathcal{S} et un ensemble de points localement fini \mathcal{P} de cette surface sur lequel agit un groupe d'isométries G , de manière à ce que l'action du groupe d'isométries soit cofinie *i.e.* qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes de points sous l'action de G , alors il est possible de construire un graphe connexe Γ dont les sommets sont les points de \mathcal{P} , les arêtes sont des géodésiques de \mathcal{S} , et le groupe G soit un sous-groupe d'automorphismes de Γ . Ce résultat peut se résumer de la manière suivante :

Proposition 4.10 (Méthode du plus court chemin)

Étant donné un ensemble de points localement fini \mathcal{P} d'une surface géodésique \mathcal{S} et G un groupe d'isométries agissant de manière cofinie sur \mathcal{P} , il existe un graphe Γ connexe reliant les sommets de \mathcal{P} par géodésiques et stable sous l'action de G .

Et en se restreignant au cas du problème du mot généralisé :

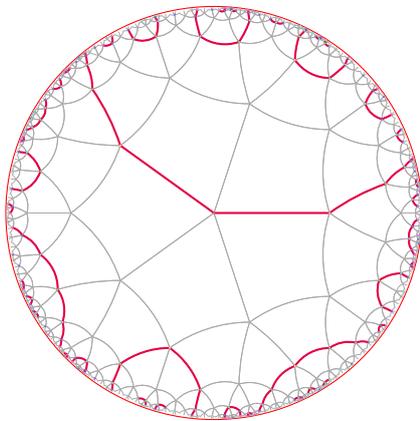
Corollaire 4.11 (Application au GWP)

Étant donné un groupe G possédant un graphe de Cayley planaire localement fini et H un sous-groupe de G défini par un nombre fini de générateurs, la méthode du plus court chemin fournit un graphe de Cayley planaire pour H .

Exemple 4.3.2 – Dans l'exemple de la figure 4.5, le graphe Γ correspond au pavage du plan hyperbolique par des carrés, à raison de cinq carrés par sommets. Le groupe possédant ce graphe de Cayley est le groupe suivant :

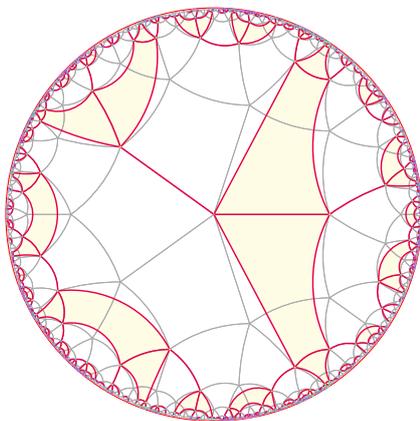
$$\left\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \mid a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2, (a_1 a_2)^2, (a_2 a_3)^2, (a_3 a_4)^2, (a_4 a_5)^2, (a_5 a_1)^2 \right\rangle$$

A l'intérieur de ce groupe, nous voulons déterminer le sous-groupe engendré par les éléments $\{a_1; a_3; a_2 a_5; a_4 a_5\}$, rangés ici par ordre de longueur croissante. Appliquons la



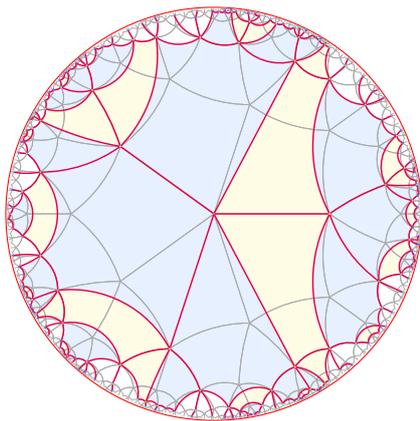
Γ_2 avec $\mathcal{S}_2 = \{a_1; a_3\}$

Le groupe engendré par $\langle \mathcal{S}_2 \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$



Γ_3 avec $\mathcal{S}_3 = \{a_1; a_3; a_2a_5\}$

Le groupe engendré par $\langle \mathcal{S}_3 \rangle$ est isomorphe à $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$



Γ_4 avec tous les générateurs

$\mathcal{S}_4 = \{a_1; a_3; a_2a_5; a_4a_5\}$

FIG. 4.5: Construction du graphe de Cayley pour $H = \langle a_1; a_3; a_2a_5; a_4a_5 \rangle$ dans le groupe $G = \langle a_1, \dots, a_5 \mid a_1^2, \dots, a_5^2, (a_1a_2)^2, (a_2a_3)^2, \dots, (a_5a_1)^2 \rangle$ (cf. l'exemple 4.3.2)

construction précédente à cet ensemble de générateurs : le générateur a_1 est d'ordre 2, et le sous-groupe qu'il engendre est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dont le graphe de Cayley correspond à une arête simple du graphe. De manière similaire, le générateur a_3 est lui aussi d'ordre 2. Le sous-groupe engendré par $\{a_1; a_3\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Après 3 étapes, le graphe Γ_4 est composé d'une seule et unique composante 3-connexe et correspond à la terminaison de la construction.

La connexité des graphes Γ_k est croissante en fonction de k . Lorsque le graphe Γ_k devient 3-connexe, la construction se termine, sinon cela signifierait que Γ_k contient au moins deux composantes connexes qui sont chacune 3-connexes. Comme l'une des deux est forcément incluse dans l'une des faces de l'autre, cela contredit l'hypothèse localement fini. Remarquons enfin que même si les automorphismes de Γ_k sont des isométries, les faces et les arêtes du graphe ne vérifient aucune condition de régularité. En particulier, les arêtes n'ont pas toutes même longueur, et les faces ne sont ni régulières, ni même forcément convexes. —

4.3.2 Réalisation de cette approche

L'algorithme proposé dans le paragraphe précédent permet de construire une présentation pour un sous-groupe de Γ lorsque les sommets du sous-groupe sont déjà connus dans le graphe. La réalisabilité de cette construction suppose donc que le problème du mot généralisé soit déjà résolu dans Γ . Dans ce paragraphe, nous montrons comment adapter la construction précédente de manière à résoudre le problème du mot généralisé tout en construisant le graphe de Cayley du sous-groupe, sans connaissance initiale.

L'idée principale consiste à choisir des générateurs pour le sous-groupe, et utiliser les lemmes du quadrilatère lors de chaque croisement d'arête pour obtenir des générateurs plus courts. Si l'on résout tous les croisements possibles de cette manière, la démarche termine, dans la mesure où l'on épuise tous les éléments de Γ à une distance donnée de l'origine. Et le graphe obtenu au final est nécessairement sans croisements, comme le montre la construction précédente.

Les éléments de cette construction qui ne sont pas simplement décidables à l'aide du problème du mot sont les suivants :

1. décider de deux géodésiques si l'une est plus courte, de la même longueur ou plus longue que la seconde ;
2. décider si deux géodésiques entre deux couples de sommets de Γ se croisent ou non ;
3. décider si le graphe de Cayley associé à un ensemble de générateurs de H , inscrit à l'intérieur de Γ possède des arêtes qui se croisent, et dans ce cas obtenir ces arêtes.

Si tous ces problèmes sont décidables, il est alors possible de mettre en place l'algorithme 4.1 pour résoudre le problème du mot généralisé.

Tâchons maintenant de résoudre les problèmes posés par ces questions de décidabilité. Par la suite, on supposera avoir construit le graphe de Cayley pour Γ sur une boule de taille géométrique supérieure ou égale au double de la longueur du plus long générateur de H . De plus, on suppose que les positions géométriques des sommets ont été calculées avec suffisamment de précision pour que l'on puisse déterminer la distance géométrique entre deux sommets avec une précision ϵ où ϵ est inférieur au quart de la longueur d'une arête de Γ .

Considérons le premier problème, c'est-à-dire la décidabilité des longueurs des géodésiques dans le plongement. Le raisonnement est le suivant : dans la mesure où l'on peut décider de la longueur d'une géodésique à ϵ près, le choix du classement des longueurs n'est

5	<p>Données : Γ un graphe de Cayley planaire localement fini $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_n\}$ un ensemble fini de générateurs</p> <p>Retour : $S = \{s_1, \dots, s_p\}$ un ensemble fini de générateurs</p>
5	<p>Ordonner les éléments de H selon leur longueur $S := \{ \text{un des générateurs les moins longs dans } \mathcal{H} \}$ Construire le graphe de Cayley Λ associé à S</p>
10	<p>Tant_que le graphe Λ ne contient pas tous les éléments de \mathcal{H} Faire Si le graphe Λ possède un croisement Alors Obtenir un générateur plus court h par le lemme du quadrilatère Reprendre l'algorithme avec pour générateurs $\mathcal{H} \cup \{h\}$</p>
15	<p>FinSi Ajouter à S un des générateurs les moins longs de $\mathcal{H} \setminus \Lambda$ Construire le graphe de Cayley Λ associé à S</p> <p>FinTant_que Renvoyer l'ensemble S</p>

Algorithme 4.1: Décision du problème du mot généralisé

pas réellement important. Au pire, si l'on effectue une erreur en décidant qu'une géodésique est plus longue qu'une autre alors qu'elle était en fait plus courte, le plongement, s'il n'est pas planaire, va alors contenir des croisements que l'on pourra résoudre avec le lemme du quadrilatère. Si l'on n'obtient pas alors de nouveaux générateurs pour H qui relancent l'algorithme, il suffira, après être revenu au même point, de recommencer en affirmant qu'en fait la géodésique était plus longue. Au final, on aura testé un nombre fini d'arrangements possibles des longueurs géodésiques, dans lesquels il en existe au moins un qui permet de poursuivre l'algorithme.

Le second problème est bien plus crucial : étant donné deux géodésiques hyperboliques ou euclidiennes de longueurs $L \geq l$, comment peut-on décider si ces deux géodésiques induisent un croisement ou non ? Dans tous les cas, il est possible de calculer les longueurs des générateurs du quadrilatère formé par ces deux géodésiques. Plaçons nous dans le cas où cette analyse ne permet pas de distinguer de générateurs strictement plus courts que $(L - \epsilon)$. Selon l'inégalité triangulaire, cela signifie que les extrémités des géodésiques sont situées à distance $\geq (L/2 - \epsilon)$ du point de croisement. Grâce au choix de ϵ , il est alors possible de déterminer géométriquement si les géodésiques se croisent ou non.

Lemme 4.12 (Planarité du graphe)

Soit Γ un graphe de Cayley planaire localement fini et $\{h_1, \dots, h_n\}$ un ensemble de générateurs de H , sous-groupe de Γ , construit selon l'algorithme précédent. Alors on peut décider si le graphe de Cayley de H associé à cet ensemble de générateurs est planaire ou obtenir un générateur de H permettant de reprendre l'algorithme.

Preuve : La première chose à voir concerne le fait que l'ordre des éléments dans Γ est forcément borné par la taille de la plus grande face finie du plongement. Pour cela, il suffit de voir que tout élément d'ordre fini, puisqu'il correspond à une isométrie du plan d'ordre fini, correspond nécessairement à une isométrie à point fixe. Le point fixe de cette isométrie ne peut correspondre à un sommet du plongement, car les stabilisateurs des sommets sont triviaux. Si ce point est sur une arête, l'isométrie est forcément au plus d'ordre 2. Enfin, si ce point se trouve sur une face, l'ordre de l'isométrie est borné par la taille de la face.

Arrangeons les générateurs selon leur ordre de rotation autour de l'identité. Si jamais il était impossible de départager l'alignement de deux générateurs, c'est que l'identité et les deux extrémités des géodésiques sont quasiment alignés. Dans ce cas, si a_1 est le plus long générateur et a_2 le plus court, l'élément $a_2^{-1}a_1$ est un élément strictement plus court que a_1 , à partir duquel on peut recommencer l'algorithme.

Lorsque l'on a arrangé les générateurs autour de l'identité, il est possible de déterminer le schéma d'étiquetage et l'automate des bords associé au graphe de Cayley du sous-groupe. On vérifie d'abord que la boule combinatoire du graphe de Cayley centrée sur l'identité et de rayon 2 est planaire, en testant l'existence de croisements sur le nombre fini d'arêtes que contient cette boule. Si cette boule possède des croisements, le résultat de la décision est naturellement négatif et on peut exhiber les arêtes fautives.

Si la boule est planaire, et si le graphe possède un croisement, alors ce croisement apparaîtra nécessairement lorsque l'on suit le bord d'une face, c'est-à-dire lorsqu'on applique le procédé décrit à la figure 3.1. Il nous suffit donc de rechercher les croisements dans les bords des faces pour vérifier la planarité. Comme le bord d'une face est périodique, soit u le mot sur les générateurs de H correspondant à cette période pour une face donnée, et m la taille maximale d'une face finie de G . On applique le lemme du quadrilatère à l'aide de la solution du problème du mot, à chaque couple d'arêtes de taille $\leq u^m$, sur le bord de gauche et de droite de la face. Si, par cette application, on obtient un élément du sous-groupe dans la boule centrée sur l'identité de taille géométrique la longueur du plus grand générateur de H jusqu'alors inconnu, c'est que l'on peut recommencer l'algorithme. Sinon, cela signifie qu'il n'y a pas de croisement sur ces couples d'arêtes. Dans ce cas, soit on a fait le tour de la face, soit la face est de taille infinie car d'ordre plus grand que m et ne possède pas alors de croisements avec elle-même.

Au final, si aucune des faces n'induit de croisement, le graphe est planaire et la réponse est positive. Dans tous les autres cas, on produit un élément du sous-groupe H jusqu'alors inconnu précédemment, ce qui permet de reprendre l'algorithme. \square

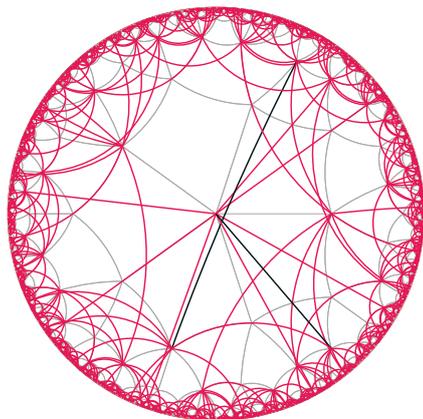
Exemple 4.3.3 – Reprenons l'exemple 4.3.2, dans lequel nous conservons le même groupe G , tout en prenant l'ensemble suivant d'éléments comme générateurs de H :

$$H = \langle a_2a_1a_5, a_1a_2a_4, a_4a_3a_1a_5, a_4a_5a_2a_5 \rangle$$

L'ensemble de générateurs a ici été ordonné par longueur géométrique croissante. Les inverses des éléments n'apparaissent pas ici. Le graphe de Cayley associé aux trois premiers éléments est planaire, mais lorsque l'on ajoute le quatrième, le graphe n'est plus planaire. Dans la figure 4.6, nous appliquons l'algorithme précédent pour obtenir un nouvel ensemble de générateurs, et recommençons à chaque fois que cet ensemble remet en cause l'ordre des générateurs donnés au début de l'algorithme. Dans ce cas, on obtient les éléments a_4a_5 et a_2a_4 , puis a_1 , et enfin $a_3a_4a_5$ et a_3 , ce qui donne après réarrangement :

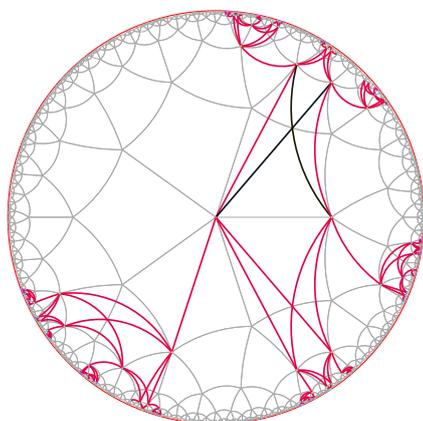
$$H = \langle a_1, a_3, a_2a_4, a_4a_5, a_3a_4a_5, a_2a_1a_5, a_1a_2a_4, a_4a_3a_1a_5, a_4a_5a_2a_5 \rangle$$

Le graphe alors obtenu en prenant les quatre premiers générateurs est planaire et contient tous les éléments de H . Il correspond exactement au graphe de Cayley du sous-groupe présenté dans l'exemple 4.3.2. Il ne reste plus qu'à vérifier que les générateurs initiaux de H sont bien dans ce graphe de Cayley, ce qui se fait en construisant le graphe sur une distance suffisante. —



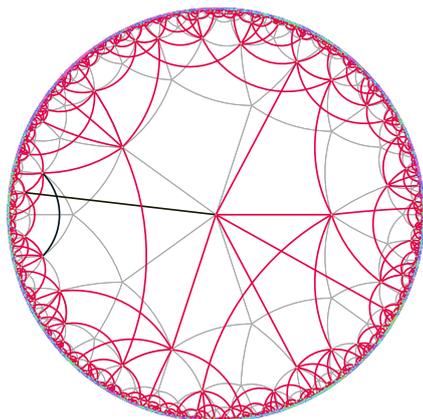
Le graphe de Cayley avec pour ensemble de générateurs :
 $\{a_2a_1a_5, a_1a_2a_4, a_4a_3a_1a_5, a_4a_5a_2a_5\}$

Les arêtes noires montrent l'existence d'un croisement en suivant le bord d'une des faces. A l'aide du lemme du quadrilatère, les éléments a_4a_5 et a_2a_4 appartiennent à H



Le graphe de Cayley avec pour ensemble de générateurs :
 $\{a_2a_5, a_4a_5, a_5a_1a_2\}$

Encore une fois, ce graphe de Cayley n'est pas planaire, et le croisement apparaît encore une fois à l'intérieur du bord d'une face. En retour, cela prouve que a_1 appartient à H .



Le graphe de Cayley avec pour ensemble de générateurs :
 $\{a_1, a_2a_5, a_4a_5, a_4a_3a_1a_5\}$

Ici, le dernier générateur $a_4a_3a_1a_5$ introduit un croisement qui permet d'obtenir $a_3a_4a_5$, qui permet à son tour de prouver que a_3 appartient à H .

FIG. 4.6: Exemple d'application de l'algorithme de résolution du problème du mot généralisé pour le sous-groupe $H = \langle a_2a_1a_5, a_1a_2a_4, a_4a_3a_1a_5, a_4a_5a_2a_5 \rangle$ du groupe $G = \langle a_1, \dots, a_5 | a_1^2, \dots, a_5^2, (a_1a_2)^2, (a_2a_3)^2, \dots, (a_5a_1)^2 \rangle$ (cf. l'exemple 4.3.3)

4.3.3 Décidabilité de la méthode géométrique

L'approche des problèmes combinatoires des groupes avec des méthodes utilisant les propriétés géométriques du plongement n'est pas forcément évidente en termes de décidabilité : les problèmes posés dans le paragraphe précédent, que ce soit pour déterminer les longueurs des géodésiques ou le fait qu'elles se croisent effectivement, en sont une preuve flagrante. Dans ce paragraphe, nous montrons en quoi l'utilisation de méthodes impliquant les propriétés géométriques du plongement est décidable lorsque les méthodes ne sont pas trop exotiques.

Lemme 4.13 (Algébricité des coordonnées)

Si Γ est un graphe planaire localement fini plongé dans le plan par polygones réguliers, de manière à ce que l'identité ait des coordonnées algébriques, alors il existe un plongement dans lequel les coordonnées de tous les autres sommets du graphe sont algébriques.

Preuve : La preuve de ce lemme s'effectue par récurrence sur la distance combinatoire à l'identité dans le graphe Γ . Le résultat est évidemment vrai pour l'identité de Γ . La longueur d'une arête du graphe peut être prise égale à 1 dans le cas euclidien, dans les autres cas, elle vérifie l'équation suivante, pour un graphe possédant le vecteur de type $[k_1, \dots, k_d]$:

$$\begin{aligned} \text{Cas hyperbolique : } \sin\left(\sum_{i=1}^d \theta_i(l_{\mathbb{H}})\right) &= 0 \quad \text{où } \theta_i(l_{\mathbb{H}}) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\cos(\pi/k_i)}{\cosh(l_{\mathbb{H}}/2)}\right) & (k_i \text{ fini}) \\ \arcsin\left(\frac{1}{\cosh(l_{\mathbb{H}}/2)}\right) & (k_i = \infty) \end{cases} \\ \text{Cas sphérique : } \sin\left(\sum_{i=1}^d \theta_i(l_{\mathbb{S}})\right) &= 0 \quad \text{où } \theta_i(l_{\mathbb{H}}) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\cos(\pi/k_i)}{\cos(l_{\mathbb{S}}/2)}\right) & (k_i \text{ fini}) \\ \arcsin\left(\frac{1}{\cos(l_{\mathbb{S}}/2)}\right) & (k_i = \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on obtient une équation algébrique en la variable $\cosh(l_{\mathbb{H}}/2)$ (hyperbolique) ou $\cos(l_{\mathbb{S}}/2)$ (sphérique). De par l'existence même du graphe Γ , ces équations algébriques ont une solution non triviale qui permet d'obtenir la longueur de l'arête du graphe. Donc ces nombres sont algébriques. Cela signifie alors que les coordonnées réelles dans la sphère (en fonction de $\cos(l_{\mathbb{S}})$ et $\sin(l_{\mathbb{S}})$) ou dans le modèle de Poincaré (en fonction de $\tanh(l_{\mathbb{H}}/2)$) sont aussi algébriques. En particulier, les cosinus et sinus des angles $\theta_i(l_{\mathbb{H}})$ et $\theta_i(l_{\mathbb{S}})$ sont eux aussi algébriques.

Reste alors à voir que les transformations permettant de passer d'un sommet à un autre sont aussi des transformations préservant les nombres algébriques. Dans le plan euclidien et dans la sphère, les isométries correspondant aux générateurs de Γ sont des rotations d'angles rationnels ou $\theta_i(l_{\mathbb{S}})$, des symétries ou des translations et symétries glissées de longueurs la longueur d'une arête de Γ . De telles transformations sont toujours exprimables sous une forme d'une matrice dont tous les éléments sont algébriques, ce qui assure l'algébricité de l'ensemble des coordonnées.

Dans le modèle de Poincaré, il faut vérifier que les isométries hyperboliques sont elles aussi des opérations préservant les coordonnées algébriques. Dans le cas qui nous concerne, il s'agit de transformations de Möbius, et les opérations qui permettent de passer d'un sommet à un autre sont des conjuguées de rotations d'angles $\theta_i(l_{\mathbb{H}})$ par des translations de la forme $z \rightarrow \frac{z+p}{1+pz}$ où p est l'image de zéro (dont les coordonnées sont algébriques), qui chacune préservent le caractère algébrique des coordonnées des points. Cela termine la preuve. \square

Ce lemme permet alors d'utiliser un résultat très fort de décidabilité sur la logique des nombres réels, à savoir le théorème de Tarski [Tar48, Jac74] :

Théorème 4.14 (Théorème de Tarski)

Pour toute formule de la logique monadique du premier ordre sur les nombres réels muni des opérations usuelles, $(\mathbb{R}, +, \times, =, >)$, l'élimination des quantificateurs est possible. En particulier, cette logique est décidable.

L'élimination des quantificateurs dans une formule logique consiste, étant donné une formule logique quantifiée, à obtenir une formule logique équivalente dans laquelle le quantificateur a été éliminé. En appliquant cette méthode par récurrence, il est possible d'éliminer tous les quantificateurs d'une formule, pour se réduire à la décision sur un nombre fini de formules sans quantificateurs, dans ce cas des zéros d'expressions algébriques. En pratique, les méthodes utilisées pour résoudre ce type d'équations font appels à la décomposition algébrique cylindrique [ACM84, Bro02], qui partitionnent l'espace total \mathbb{R}^d en cylindres $\mathbb{R} \times K$ où $K \subset \mathbb{R}^{d-1}$ dépendant de la formule, et effectuent une élimination sur chaque cylindre. Dans tous les cas, l'algorithme est au plus doublement exponentiel en le nombre de quantificateurs.

Le lemme 4.13 nous assure que les coordonnées d'un sommet donné du graphe sont algébriques et nous donnent une série d'équations vérifiées par ces coordonnées. Ces équations peuvent avoir plusieurs solutions, mais il est toujours possible de rajouter des inéquations permettant de borner la solution adéquate. En effet, ces solutions sont déjà calculées de manière approchée lors de la construction de boules du graphe. Ensuite, toutes les questions concernant les longueurs des géodésiques et leurs croisements éventuels sont donc naturellement décidables par corollaire de ce théorème. Cela permet d'envisager des algorithmes utilisant des propriétés du plongement tout en sachant que ces algorithmes, à défaut d'être réalisables, sont décidables. Ensuite, il s'agit de reprendre les questions d'un point de vue combinatoire afin d'essayer de s'affranchir des problèmes d'explosion de la complexité dûs au théorème de Tarski.

D'autres problèmes combinatoires ... En plus des problèmes du mot, deux autres types de problèmes combinatoires sur les présentations de groupes ont été formulés par Dehn en 1911 et sont discutés dans [MKS76, Mil92]. Il s'agit du problème de la conjugaison et du problème de l'isomorphisme. Nous rappelons ici quelques résultats généraux.

Définition (Problème de la conjugaison) :

Résoudre le *problème de la conjugaison* dans G consiste à décider, étant donnés deux éléments $u, v \in G$, si ils sont conjugués dans G , c'est-à-dire s'il existe un élément $g \in G$ tel que $u = gvg^{-1}$. Lorsque $u = \epsilon$ l'identité de G , cela revient à résoudre le problème du mot pour v . ◇

A noter qu'il existe des groupes pour lesquels le problème du mot est solvable, mais pas le problème de la conjugaison. Ce problème correspond exactement au problème du mot dans les groupes abéliens. Dans le cas des groupes hyperboliques, le problème de la conjugaison est connu pour être décidable, et même solvable en un temps sous-quadratique en la somme des longueurs des mots u et v [EH03]. L'algorithme utilise une procédure capable de déterminer une forme normale géodésique pour un mot w dans G en temps linéaire en la longueur de ce mot. Dans les groupes planaires localement finis, le problème peut être simplifié par le fait que les classes de conjugaison des groupes d'isométries des différentes géométries du plan sont bien connues.

Une idée de résolution consisterait à utiliser le fait que deux isométries sont conjuguées dans G si et seulement si il existe deux orbites conjuguées dans G . Comme ces deux orbites

sont isométriques, il suffirait de rechercher des orbites isométriques dans G . Ensuite, les orbites sont conjuguées dans G si et seulement si tout automorphisme de G envoyant un sommet de la première orbite sur un sommet de la seconde envoie la première orbite sur la seconde. Lorsque les isométries sont d'ordre fini, il suffit de trouver le point fixe de chaque isométrie pour obtenir facilement des orbites isométriques lorsqu'elles existent. Dans le cas euclidien, deux translations ne peuvent être conjuguées dans G , sinon leurs orbites se croiseraient en un sommet pour lequel on obtiendrait un élément non trivial dans le stabilisateur. Il resterait alors à gérer le cas des isométries hyperboliques d'ordre infini. Pour cela, il faudrait procéder par énumération des orbites afin de pouvoir décider s'il en existe ou non.

Définition (Problème de l'isomorphisme) :

Résoudre le *problème de l'isomorphisme* consiste à se donner deux groupes G et G' décrits par des présentations finies et à décider s'il existe un isomorphisme φ envoyant le groupe G sur le groupe G' . \diamond

Le problème de l'isomorphisme est le problème combinatoire le plus complexe proposé par Dehn. En toute généralité, il n'existe pas d'algorithme pour pouvoir décider si une présentation finie donnée représente ou non le groupe trivial. Le problème est solvable dans les cas où l'on possède des théorèmes de classification, en particulier les groupes libres et les groupes abéliens [MKS76]. Sela [Sel95] a résolu le problème de l'isomorphisme pour certaines classes de groupes hyperboliques sans torsion.

Vu que nous possédons des résultats de classification dans les groupes planaires localement finis, il est envisageable d'étudier le problème de l'isomorphisme restreint à cette classe de groupes. Néanmoins, même en considérant des problèmes plus simples il semble que des problèmes indécidables apparaissent rapidement. Une approche consisterait à choisir le morphisme φ , et à décider si l'image $\varphi(G)$ est égale ou non au groupe G' . Si le groupe G' est planaire localement fini, les images des relateurs de G constituent nécessairement des cycles dans le plan. Ce problème est donc équivalent à se donner un ensemble de cycles dans un graphe planaire localement fini et à se demander si cet ensemble de cycles engendre ou non les cycles de base du groupe G' qui sont les bords des faces. Ce problème est loin d'être évident, même lorsque G' correspond au groupe abélien \mathbb{Z}^2 .

4.4 Décidabilité des logiques

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux problèmes de décidabilité des logiques dans les graphes de Cayley planaires localement finis. Une logique consiste en un ensemble de formules logiques définies sur une structure à partir de prédicats et de variables. Selon la variété des formules logiques que l'on s'autorise, il est possible d'exprimer des problèmes sur la structure plus ou moins complexes. Se pose alors le problème de la décidabilité d'une logique, à savoir de pouvoir décider si, étant donné une formule appartenant à la logique et une structure spécifique, si la formule est vraie sur cette structure ou non.

4.4.1 Logique du premier et du second ordre

Dans le cas spécifique où la structure est un graphe de Cayley Γ , le domaine de la structure – les éléments sur lesquels portent les formules logiques – est constituée par les sommets du graphe et les prédicats sont de la forme $(x, y) \rightarrow P_a(x, y)$ pour a un générateur du graphe de Cayley. Étant donnés deux sommets x, y de Γ , le prédicat $P_a(x, y)$ est vrai

si et seulement si le sommet y est obtenu en suivant l'arête étiquetée par a incidente au sommet x . On ajoute à la structure une constante spéciale ϵ correspondant au sommet identité de Γ .

Les formules de la logique du premier ordre – ou *FO* pour *first order* – sont formées sur ces prédicats, en utilisant des connecteurs logiques comme la conjonction, la disjonction, la négation et l'implication, mais aussi des quantificateurs existentiels de la forme $(\exists x)$ ou $(\forall x)$ permettant de définir des formules dépendant de variables qui sont des éléments du domaine. Les formules de la logique du second ordre monadique – ou *MSO* pour *monadic second order* – sont les mêmes formules, mais les quantificateurs existentiels s'autorisent à définir des variables qui sont des *ensembles* d'éléments du domaine, ainsi que l'appartenance à ces ensembles.

Exemple 4.4.1 – Étant donné un mot u sur les générateurs de Γ , le problème du mot pour u peut simplement se ramener à une formule de logique du premier ordre pour le graphe. En effet, si $u = a_1 \dots a_n$ et que ϵ représente le sommet identité de Γ , alors la formule suivante est équivalente au problème du mot pour u :

$$\exists x_1 \dots \exists x_{n-1}, \quad P_{a_1}(\epsilon, x_1) \wedge P_{a_2}(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge P_{a_n}(x_{n-1}, \epsilon)$$

Pour le même mot u et un sous-groupe $H = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$, le problème du mot généralisé pour u peut s'exprimer à l'aide d'une formule logique du second ordre monadique. Pour cela, on construit des prédicats $P_{h_k}(x, y)$ à partir des prédicats P_a , vrais si et seulement si y est obtenu à partir de x en suivant le mot h_k sur les générateurs de Γ . Dans la formule suivante, le sous-groupe H est l'instanciation la plus petite (pour l'inclusion) de la variable K qui rende vraie la formule $\phi(K)$ dans la structure définie par Γ :

$$\phi(K) = \left\{ \begin{array}{l} \bigwedge_{k=1}^n (h_k \in K) \\ \wedge \bigwedge_{k=1}^n (\forall x \forall y, (x \in K) \wedge P_{h_k}(x, y) \Rightarrow y \in K) \end{array} \right.$$

D'où la formule ψ exprimant que u appartienne bien au sous-groupe $\langle h_1, \dots, h_n \rangle$:

$$\psi = \exists H, \quad \forall K, \quad \left(\left(\phi(H) \wedge \left[\phi(K) \Rightarrow H \subseteq K \right] \right) \wedge u \in H \right)$$

La différence entre la logique dans le graphe de Cayley et dans le groupe est subtile : les seuls prédicats dans le graphe de Cayley sont des prédicats locaux, résultant des arêtes dans le graphe. Dans la logique pour le groupe, l'opération de multiplication dans le groupe est une relation de la logique, ce qui nous assure que la logique dans le graphe de Cayley est un sous-ensemble ou fragment de la logique du groupe. Les résultats suivants sur la décidabilité de la logique dans les graphes de Cayley proviennent de [KL04, KL03] :

Théorème 4.15 (Décidabilité de FO)

La logique du premier ordre de Γ est décidable si et seulement si le problème du mot sur Γ est décidable.

Comme le problème du mot est décidable dans les graphes que l'on considère, cela nous assure automatiquement de la décidabilité des formules de la logique du premier ordre dans les graphes de Cayley planaires localement finis. De plus, vu qu'il existe des groupes ayant

un problème du mot solvable, mais pas le problème du mot généralisé – par exemple la classe des groupes résiduellement finis finiment présentés [Mil92] ou certains groupes word-hyperboliques [Rip82] –, le problème du mot généralisé appartient nécessairement à la logique du second ordre monadique.

Pour ce qui est des classes de graphes plus générales comme les graphes planaires cofinis, la décidabilité de la logique du premier ordre est une conséquence du théorème de Gaifman [Gai82], qui nous assure qu’une formule du premier ordre est équivalente à une formule du premier ordre définie localement. Il suffit alors de vérifier la décidabilité des formules dans les boules finies des graphes cofinis. Comme il n’existe qu’un nombre fini de telles classes de boules, ces formules sont décidables. A noter que dans le théorème précédent, le problème du mot revient à la connaissance des boules finies du graphe de Cayley.

Définition (Largeur arborescente) :

Une *décomposition arborescente* d’un graphe connexe $G = (V, E)$ consiste en la donnée d’un arbre $T = (V_T, E_T)$ et d’une application $f : V_T \rightarrow P(V) \setminus \{\emptyset\}$, qui à chaque sommet de T associe un sous-ensemble non-vide de V tel que :

- (i) tout sommet de V appartienne à l’image d’au moins un sommet de T ;
- (ii) toute arête $(u, v) \in E$ est telle que ses extrémités u et v appartiennent à l’image d’un même sommet de T ;
- (iii) si $(w_1, w_3) \in V_T$ et w_2 est un sommet de T sur l’unique chemin allant de w_1 à w_3 , alors $f(w_1) \cap f(w_3) \subset f(w_2)$.

La *largeur* d’une décomposition est le supremum des cardinaux $|f(w)|$ pour $w \in V_T$. La *largeur arborescente* de G , ou *treewidth*, est l’infimum des largeurs des décompositions arborescentes de G . Elle peut éventuellement être infinie. \diamond

Définition (Largeur arborescente forte) :

Si $G = (V, E)$ est un graphe connexe, et P une partition de V , il est possible de construire le *graphe quotient* G_P dont les sommets sont les éléments de P et les arêtes relient deux éléments $(p_1, p_2) \in P$ si et seulement si il existe une arête dans E dont les extrémités sont respectivement dans p_1 et p_2 .

Une *décomposition arborescente forte* est une partition P de V telle que le graphe quotient soit un arbre. La *largeur* d’une telle décomposition est le supremum des cardinalités des éléments de la partition. La *largeur arborescente forte* ou *strong treewidth* de G est l’infimum des largeurs des décompositions arborescentes fortes de G . \diamond

Les deux notions de largeur arborescentes décrivent la ressemblance du graphe G avec un arbre, et chacune est appropriée à des problèmes différents. Pour les graphes qui nous concernent, elles sont équivalentes :

Lemme 4.16 ([Bod99])

Si G est dénombrable et de degré borné d , alors G est de largeur arborescente finie si et seulement si il est de largeur arborescente forte finie.

Les graphes de largeur arborescente bornée sont donc virtuellement des arbres, pour lesquels les problèmes de décidabilité ont été largement étudiés. Les résultats concernant la logique monadique du second ordre sont dûs principalement à [MS85, Cou89, KL04, KL03] et peuvent se résumer au théorème suivant :

Théorème 4.17 (Décidabilité de MSO)

Si Γ est un graphe cofini, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la logique monadique du second ordre de Γ est décidable ;
- (ii) le graphe Γ est de largeur arborescente bornée ;
- (iii) le groupe G est virtuellement libre.

Dans le cas des graphes planaires localement finis sommet-transitifs, la frontière entre les graphes pour lesquels la logique monadique du second ordre est décidable ou non est dessinée par la connexité du graphe :

Lemme 4.18 (Largeur arborescente – Cas planaire localement fini)

Soit Γ un graphe infini, sommet-transitif et localement fini. Alors Γ a une largeur arborescente finie si et seulement si Γ est 2-séparable.

Preuve : Lorsque Γ est 2-séparable, il suffit de voir que la largeur arborescente du graphe est bornée par la taille de la plus grande face finie du graphe, en prenant comme décomposition la décomposition associée à un arbre barycentrique de Γ .

Lorsque Γ est 3-connexe, supposons par l'absurde pouvoir trouver une décomposition arborescente forte de Γ de largeur bornée par b . Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et retirons de cette décomposition tous les ensembles de sommets contenant au moins un sommet à distance $\leq n$ de l'identité de Γ (ou un sommet fixé si le graphe est cofini). Après avoir retiré tous ces sommets, il reste un graphe, dans lequel il est toujours possible de trouver un cycle faisant le tour de l'identité dans le plan, cela du fait de la 3-connexité de Γ . En choisissant n suffisamment grand, ce cycle sera de longueur $> 3b$. Dans ce cas, ce cycle intersecte au moins 3 ensembles de la décomposition arborescente forte, qui constituent un cycle dans le graphe quotient. Cela n'est donc forcément pas une décomposition arborescente. \square

4.4.2 Graphes de groupes

Si l'on se replace dans le contexte des graphes de Cayley, les groupes ayant une logique MSO-décidable sont les groupes virtuellement libres, c'est-à-dire possédant un sous-groupe d'index fini qui soit libre. Dans la suite de ce paragraphe, nous approfondissons quelques questions combinatoires liées aux groupes virtuellement libres, dans le cas des graphes planaires localement finis.

Soit Γ un graphe de Cayley 2-séparable pour un groupe G , et $T(\Gamma)$ un arbre barycentrique associé, de manière à ce que le groupe d'automorphismes de Γ soit un sous-groupe d'automorphismes de $T(\Gamma)$. L'action de G sur $T(\Gamma)$ est cofinie, au sens où il n'y a qu'un nombre fini d'orbites des sommets sous l'action de G , chacun de ces sommets correspondant à une orbite de faces, d'arêtes ou de sommets de Γ . Il n'y a qu'une seule orbite pour les sommets de Γ , car l'action du graphe est transitive sur les sommets.

Formons le graphe $Q(\Gamma)$ qui soit le quotient du graphe $T(\Gamma)$ selon l'action de G : les sommets de $Q(\Gamma)$ sont les orbites des sommets de $T(\Gamma)$ sous l'action de G , deux orbites étant reliées dans $Q(\Gamma)$ si et seulement si elles contiennent chacune une extrémité d'une arête de $T(\Gamma)$. Les sommets de $Q(\Gamma)$ représentent des orbites de sommets, arêtes ou faces de Γ sous l'action de G , orbites auxquelles on se référera en parlant d'*éléments* du graphe Γ .

A chaque sommet t de $Q(\Gamma)$, il est possible d'associer le sous-groupe de G stabilisant l'élément correspondant dans Γ , c'est-à-dire le stabilisateur de t , noté G_t . De même, pour chaque arête (s, t) de $Q(\Gamma)$, on peut associer le sous-groupe de G stabilisant les deux

extrémités s et t de $Q(\Gamma)$, noté $G_{(s,t)}$. Il est naturel de voir $G_{(s,t)}$ comme un sous-groupe $G_{s \rightarrow t} \subseteq G_s$, et symétriquement $G_{t \rightarrow s} \subseteq G_t$. Ces deux sous-groupes étant isomorphes, on note $\varphi_{s \rightarrow t}$ l'isomorphisme entre $G_{s \rightarrow t}$ et $G_{t \rightarrow s}$:

$$\begin{array}{ccc} G_s & & G_t \\ \cup & \xrightarrow{\varphi_{s \rightarrow t}} & \cup \\ G_{s \rightarrow t} & \xleftrightarrow{\varphi_{t \rightarrow s}} & G_{t \rightarrow s} \end{array}$$

Le graphe $Q(\Gamma)$ muni de cet ensemble de groupes et d'isomorphismes est appelé le *graphe de groupes* [DD89] associé à G vu en tant qu'agissant sur l'arbre $T(\Gamma)$. Notons que dans les groupes planaires localement finis, tous les G_t et leurs sous-groupes sont des groupes finis d'isométries du plan, d'ordre borné par le double de la taille maximale des faces finies de Γ . Les stabilisateurs des sommets de Γ sont triviaux. Le stabilisateur d'une arête est sous-groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et les stabilisateur d'une face de taille n est sous-groupe du groupe diédral D_n

Définition (Groupe fondamental) :

Soit Q un arbre couvrant maximal pour $Q(\Gamma) = (V_Q, E_Q)$. Le *groupe fondamental* associé à Q , noté $\pi(G, Q(\Gamma), Q)$ est défini de la manière suivante :

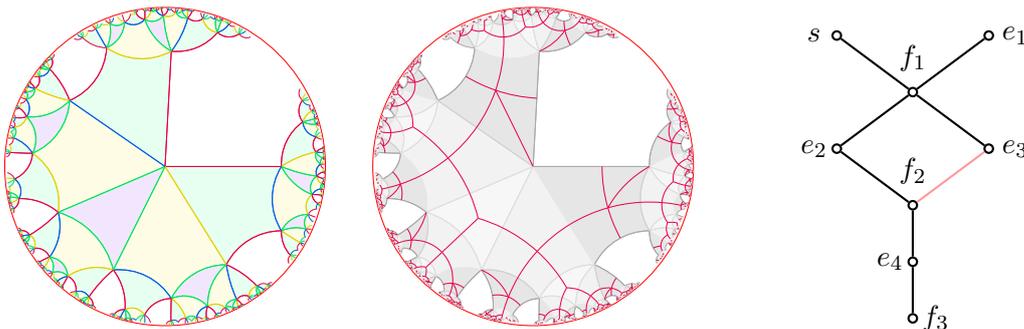
$$\text{Générateurs : } \bigcup_{t \in V_Q} G_t \cup \left\{ t_e, e \in E_Q \right\}$$

- Relations :
- les relations des G_t pour $t \in V_Q$;
 - $t_e^{-1} g t_e = \varphi_{s \rightarrow t}(g)$ pour tout $e = (s, t) \in E_Q, g \in G_{s \rightarrow t}$;
 - $t_e = 1$ si e est une arête de Q . ◇

Exemple 4.4.2 – Considérons le groupe G défini par les générateurs et relations suivants :

$$G = \langle a_1, \dots, a_6 | a_1 a_2, a_3^2, a_4 a_5, a_6^2, (a_5 a_6 a_4 a_3)^4, (a_3 a_1 a_6 a_2)^4, a_4^3 \rangle$$

Le graphe de Cayley Γ du groupe G , représenté ci-dessous, est planaire localement fini, et ne comporte qu'une seule composante 2-connexe. Dans ce cas, l'arbre barycentrique correspond exactement à l'arbre d'adjacence des faces dans la composante, auquel on rajoute des arêtes reliant cet arbre aux sommets de Γ . Considérant l'action de Γ sur le graphe, il n'y a qu'une classe de sommets s , 4 classes d'arêtes e_1, e_2, e_3 et e_4 , et 3 classes de faces finies f_1, f_2 , et f_3 ce qui donne 8 sommets dans le graphe quotient $Q(\Gamma)$.



A chacun des éléments de $Q(\Gamma)$, on peut associer le stabilisateur engendré. Dans les cas qui nous concernent, ces stabilisateurs sont isomorphes aux groupes suivants (Id correspond au groupe trivial) :

$$G_s = G_{e_1} = G_{e_4} = Id; \quad G_{f_1} = G_{f_2} = G_{e_2} = G_{e_3} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \quad G_{f_3} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

Les stabilisateurs des arêtes de $Q(\Gamma)$ correspondent soit au groupe trivial, soit à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme tous les groupes sont monogènes, on désignera le générateur du groupe par la lettre représentant le sommet correspondant dans $Q(\Gamma)$. On choisit un arbre couvrant correspondant aux arêtes noires de $Q(\Gamma)$ et le générateur correspondant à l'arête claire est noté t :

$$\text{Générateurs : } \{s, e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2, f_3, t\}$$

$$\text{Relations dans les stabilisateurs : } s = e_1 = e_4 = f_1^2 = f_2^2 = e_2^2 = e_3^2 = f_3^3 = \epsilon$$

$$\text{Relations entre les stabilisateurs : } e_3 = e_2 = f_1 = f_2 \quad \text{et} \quad te_3t^{-1} = f_2$$

La présentation que l'on obtient en retirant les générateurs et les relations inutiles est alors : $\langle t, e_3, f_3 | te_3 = e_3t, f_3^3 = e_3^2 = \epsilon \rangle$. Elle correspond à un produit libre entre le groupe cyclique $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et l'échelle $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. —

Le groupe fondamental est en fait une construction permettant d'obtenir une présentation du groupe G . En effet, le théorème suivant montre que lorsque le graphe sur lequel G agit est un arbre, comme c'est le cas pour $Q(\Gamma)$, alors $\pi(G, Q(\Gamma), Q)$ est toujours isomorphe à G , indépendamment du choix de l'arbre couvrant dans $Q(\Gamma)$:

Théorème 4.19 (Théorème de structure pour les groupes agissant sur les arbres – [DD89] p. 15)
Si G agit sur un arbre T , si Q est le graphe quotient pour cette action et si Q_0 est un arbre couvrant de Q , alors G est isomorphe au graphe de groupes $\pi(G, Q, Q_0)$.

Remarquons qu'il est nécessaire que G agisse sur un arbre. Lorsque G agit sur un graphe Γ possédant des cycles, il est toujours possible d'appliquer la construction précédente, mais l'isomorphisme entre le groupe engendré par le graphe de groupes et le groupe G n'existe plus. Une version forte du théorème précédent fait alors intervenir le groupe fondamental de Γ (cf. [DD89] p. 39).

Définition (Produit amalgamé) :

Étant donné deux groupes $G_1 = \langle A_1, R_1 \rangle$ et $G_2 = \langle A_2, R_2 \rangle$, et un isomorphisme $\varphi : H_1 \subset G_1 \longrightarrow H_2 \subset G_2$, le *produit amalgamé* de G_1 par G_2 selon φ , noté $G_1 *_\varphi G_2$, est le groupe présenté par :

$$G_1 *_\varphi G_2 = \langle A_1 \cup A_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{\varphi(g) = g, g \in H_1\} \rangle$$

Lorsque le sous-groupe est trivial, le produit amalgamé est un produit libre.

Définition (HNN-extension) :

Étant donné un groupe $G_1 = \langle A_1, R_1 \rangle$ et un isomorphisme $\psi : H_1 \subset G_1 \longrightarrow H_1$, l'*HNN-extension* de G_1 par ψ , notée $G *_\psi t$ est le groupe présenté par :

$$G *_\psi t = \langle A_1 \cup \{t\} \mid R_1 \cup \{t^{-1}\psi(g)t = g, g \in H_1\} \rangle$$

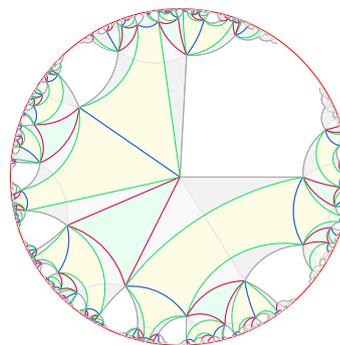
où t est un générateur n'appartenant pas à A_1 . ◇

Dans les graphes de groupes, une arête entre deux sommets distincts correspond à un produit amalgamé, tandis qu'une boucle sur une arête – et par extension un cycle dans le graphe – correspond à une HNN-extension. Le théorème 4.19 fournit donc une décomposition du groupe G en terme de produits amalgamés et d'HNN-extensions. Cette décomposition existe toujours lorsque le graphe G possède au moins 2 bouts, d'après un théorème de Stallings [Sta68]. C'est le cas des graphes de Cayley planaires localement finis et de treewidth bornée.

Théorème 4.20 (Stallings)

Tout groupe finiment engendré possédant au moins deux bouts peut se décomposer soit comme un produit amalgamé non-trivial, avec des sous-groupes amalgamés finis, soit en une HNN-extension avec un sous-groupe fini.

Dans le cas de l'exemple précédent, considérons le sous-groupe de G engendré par l'ensemble de générateurs $\{a_3, a_4, a_5, a_4a_1, a_2a_5\}$. Ce groupe est isomorphe à G , comme l'on peut le voir sur le graphe de Cayley ci-contre. Cette présentation correspond à la présentation du graphe de groupes p. 91. On peut décomposer ce groupe comme un produit libre d'un groupe fini, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, avec le groupe abélien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui se trouve être lui-même une HNN-extension de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par le morphisme identité.



Si l'on effectue une décomposition en composantes 2-connexes du graphe Γ , alors dans l'arbre barycentrique $T(\Gamma)$, ces composantes sont reliées uniquement par les sommets de Γ . Comme ces sommets ont un stabilisateur trivial, cela permet d'affirmer que :

Corollaire 4.21

Si Γ est un graphe de Cayley planaire localement fini, alors ses composantes 2-connexes sont elles aussi des graphes de Cayley. Le groupe associé à Γ est un produit libre des groupes associés à chaque composante.

4.4.3 Sous-groupes libres

Revenons maintenant au problème consistant à obtenir des sous-groupes d'index fini qui soient libres dans G . Pour cela, supposons avoir construit la décomposition fournie par le théorème 4.19. Cette décomposition est axée sur les stabilisateurs du graphe, stabilisateurs qui sont triviaux dans un groupe libre. D'où l'idée suivante, qui est un corollaire du théorème 4.19 :

Proposition 4.22

Supposons posséder un morphisme φ de G dans un groupe H fini, de manière à ce que φ soit injectif sur les stabilisateurs G_t de G . Alors le groupe quotient $G/\ker \varphi(G)$ est un groupe libre d'index fini.

Le problème consiste à construire le morphisme φ . Pour cela, il suffit de définir φ sur les générateurs de $\pi(G, Q, Q_0)$ de manière à ce que φ respecte les relations dans le groupe fondamental. Considérons l'ensemble des stabilisateurs G_t du graphe de groupes, et un nombre n qui soit le ppcm des $|G_t|$, fini car l'ordre de éléments finis de G est borné. Choisissons $H = \mathcal{S}_n$, et U un ensemble à n éléments sur lequel nous allons faire agir G , en définissant le morphisme φ de la manière suivante :

- Pour tout t sommet du graphe de groupes, comme $|G_t|$ divise n , il est possible de subdiviser U en un nombre fini de copies de G_t . Cela induit naturellement une action injective de G_t sur U par permutation des éléments dans chaque copie ;
- Pour chaque arête (s, t) du graphe de groupes, les sous-groupes $G_{s \rightarrow t}$ et $G_{t \rightarrow s}$ agissent sur U par restriction de l'action précédente, et les deux groupes étant isomorphes, cela signifie qu'il existe une permutation de U qui transforme la première action en la seconde. Cette permutation est l'image de l'arête par φ .

La construction explicite du morphisme φ est donnée dans [DD89] à la page 31.

Exemple 4.4.3 – Si l'on reprend l'exemple 4.4.2, les stabilisateurs étant soit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, soit $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, prenons $H = \mathcal{S}_6$ et construisons le morphisme φ . Connaissant la présentation réduite du graphe de groupes, il suffit de définir φ sur les 3 générateurs du groupe. Ainsi, en notant les permutations comme des produits de cycles :

$$\begin{cases} \varphi(e_3) = (1, 2)(3, 4)(5, 6) \\ \varphi(f_3) = (1, 2, 3)(4, 5, 6) \\ \varphi(t) = (1)(2)(3)(4)(5)(6) \end{cases}$$

Considérons maintenant les éléments dans le noyau de φ , afin de construire un sous-groupe libre d'index fini. Dans le cas présent, l'image de G par φ est en fait $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, ce qui permet d'obtenir un sous-groupe d'index 6. Les générateurs de ce sous-groupe, à partir du groupe initial, sont : $\{a_4a_1, a_2a_5, a_4a_3a_5a_3, a_3a_4a_3a_5, a_5a_3a_4a_3, a_3a_5a_3a_4\}$. —

Le fait que ces sous-groupes admettent forcément un graphe de Cayley planaire nous permet de construire, à partir du morphisme φ , un ensemble de générateurs pour le groupe libre, qui possède en plus de cela un graphe de Cayley planaire. La question qui se pose alors consiste à rechercher des sous-groupes libres qui soient d'index le plus petit possible.

4.5 Groupes et Surfaces

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux liens existant entre les schémas d'étiquetages, les groupes d'isométries agissant discrètement sur le plan et les surfaces de Riemann, en particulier lorsqu'elles sont compactes. Considérant une géométrie du plan, il est possible de considérer l'espace quotient par un tel groupe d'isométries. De tels espaces ont été introduits par Thurston [Thu80] et plus récemment dans [Sti92, Mon87] :

4.5.1 Orbifolds et manifolds

Définition (Orbifold) :

Considérons un graphe de Cayley planaire Γ localement fini 3-connexe, de degré d et de schéma d'étiquetage $(p = (1, 2, \dots, d), \sigma, \tau)$ (cf. p. 47), muni de son plongement par polygones réguliers. Comme toutes les faces du graphe sont finies, il est possible de construire le graphe dual de manière géodésique, les sommets du graphe dual étant exactement les centres des faces de Γ .

Considérons le polygone convexe à d côtés $\mathcal{P} = (A_1A_2 \dots A_d)$ correspondant au bord de la face du graphe dual contenant le sommet identité du graphe Γ . Considérons l'application ψ définie sur le bord de \mathcal{P} de la manière suivante. Donnons nous $k \in \llbracket 1; d \rrbracket$ et :

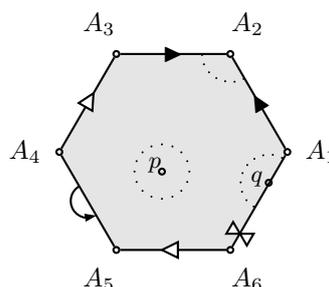
- si $\tau(k) = 1$, alors $[A_k; A_{k+1 \bmod d}]$ est envoyé par ψ sur $[A_{\sigma(k)+1 \bmod d}; A_{\sigma(k)}]$;
- si $\tau(k) = -1$, alors $[A_k; A_{k+1 \bmod d}]$ est envoyé par ψ sur $[A_{\sigma(k)}; A_{\sigma(k)+1 \bmod d}]$.

L'application ψ restreinte à un segment est définie comme une isométrie. L'espace quotient \mathcal{O} du polygone \mathcal{P} muni de la topologie du plan habituelle, par l'application ψ est égal à l'espace quotient du plan par le groupe d'isométries Γ . Un tel espace est appelé un *orbifold* et le polygone \mathcal{P} , sa représentation géométrique, est son *polygone fondamental*. \diamond

Considérons un point p dans l'espace quotient. Si ce point est à l'intérieur du polygone, il existe une boule centrée sur ce point qui soit isométrique à une boule de \mathbb{R}^2 . Par contre, si p appartient au bord du polygone, une boule centrée en p est en fait un recollement de portions de boules centrées sur les divers points qui s'identifient à p dans \mathcal{O} . Comme on travaille à isométries près, il est possible de parler de la somme des angles autour du point p comme la somme des angles internes de ces portions de boules.

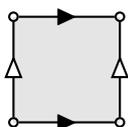
Schéma d'étiquetage :

$$\begin{array}{l} \sigma \quad [2; 1; 5; 4; 3; 6] \\ \tau \quad [0; 0; 1; 0; 1; 1] \end{array}$$

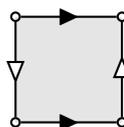


Dans cet exemple, les identifications entre arêtes sont symbolisées par des flèches. L'arête A_4A_5 s'identifie à elle-même par une rotation, ce qui peut se simplifier par la subdivision de l'arête en ses deux moitiés et le rajout d'un sommet au polygone en son milieu. L'arête A_6A_1 s'identifie à elle-même par symétrie. En pointillés sont tracées des boules centrées en divers points de l'espace quotient. Lorsque en tout point de \mathcal{O} , il existe une boule isométrique à une boule de \mathbb{R}^2 centrée en ce point, alors l'espace quotient est naturellement un *manifold*, c'est-à-dire une surface de Riemann, qui plus est compacte.

Exemple 4.5.1 (Les surfaces euclidiennes) – Les surfaces les plus simples que l'on puisse rencontrer sont celles construites avec un polygone fondamental carré. Si l'on énumère tous les schémas d'étiquetage possibles de degré 4, on obtient en fait seulement deux surfaces non isométriques deux à deux :



Le tore



La bouteille de Klein

Tous les autres schémas d'étiquetages mènent à des orbifolds. Ces deux surfaces sont appelées euclidiennes car elles apparaissent comme espace quotient du plan euclidien par un groupe d'isométries discrètes. Ce sont d'ailleurs les seules, à homéomorphisme de surface près. Si l'on ne se restreint pas aux surfaces compactes, alors il faut ajouter à cette énumération le cylindre infini et le *twisted cylinder* [Sti92]. —

A un schéma d'étiquetage donné correspondent une infinité de vecteurs de type valides. Et à chacun de ces vecteurs de type valides correspond un orbifold et une représentation géométrique sous la forme d'un polygone. Dans le cadre de ce paragraphe, nous nous sommes restreints aux orbifolds compacts, ceux pour lesquels l'action du groupe d'isométrie dans le plan est cocompacte *i.e.* le polygone fondamental est compact. Néanmoins, il

est parfaitement envisageable de construire des polygones fondamentaux non compacts (cf. [Bea83]). Dans ce cas, le polygone fondamental possède des côtés de longueur infinie. Dans le cas du cylindre infini dans le plan euclidien, on peut choisir un polygone fondamental comme le bord de la bande $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1\}$. Par la suite, on choisira de se restreindre au cas des orbifolds compacts.

4.5.2 Construction de manifolds

Pour caractériser les orbifolds qui sont des manifolds, il est nécessaire de vérifier les deux conditions suivantes :

- (i) Dans le schéma d'étiquetage, la fonction σ n'admet pas de point fixe.
En effet, le fait d'envoyer une arête sur elle-même correspond à une isométrie d'ordre 2 dans la représentation géométrique, ce qui assure que la somme des angles autour du milieu de l'arête vaille π .
- (ii) Le vecteur de type associé à Γ est égal au vecteur de type primitif de (p, σ, τ) .
En effet, le voisinage d'un sommet du polygone peut être mis en correspondance avec une orbite dans l'automate des bords. Si jamais cette orbite est répétée k fois, cela signifie que l'angle autour du sommet associé vaut $2\pi/k$.

Ces deux conditions sont alors suffisantes pour qu'en chaque point de l'orbifold, la somme des angles autour du point vaille 2π , ce qui donne à l'orbifold une structure de manifold.

Pour un manifold, la géométrie du plan associée au graphe de Cayley sous-jacent constitue un *revêtement*, au sens où la projection est un homéomorphisme local. Ce revêtement est en fait appelé universel, au sens où toute surface de Riemann, pas forcément compacte, admet un revêtement simplement connexe, qui est en fait l'une des trois géométries du plan [Bea83]. Cela permet de présenter toute surface de Riemann comme le quotient de cette géométrie par un groupe d'isométries discrètes telles que aucun élément ne possède de point fixe. On peut alors parler de surfaces sphériques, euclidiennes et hyperboliques.

La représentation d'une surface de Riemann sous la forme d'un polygone permet de classifier l'ensemble des surfaces compactes en les décomposant en sommes connexes de surfaces simples [Mas97] :

Théorème 4.23 (Classification des surfaces compactes)

Toute surface de Riemann compacte est homéomorphe soit à une sphère, soit à une somme connexe de tores, soit à une somme connexe de plans projectifs.

Il est alors possible de décider de l'homéomorphisme entre deux surfaces compactes simplement en calculant la caractéristique d'Euler de chaque surface et leur orientabilité. La caractéristique d'Euler d'une surface \mathcal{S} est égale à la caractéristique d'Euler des graphes plongés sur la surface de manière à ce que leurs faces soient homéomorphes à des disques. L'orientabilité de la surface revient à la préservation de l'orientation des dièdres le long des chemins fermés tracés dessus.

Considérons un orbifold \mathcal{O} et le groupe G associé à une de ses représentations géométriques. Si l'on prend H un sous-groupe de G d'index fini, il est alors possible de construire l'orbifold \mathcal{O}' associé H , dont le domaine fondamental correspond à la réunion de copies du domaine de \mathcal{O} , une copie pour chaque classe à droite $\{Hg, g \in G\}$. Lorsque l'orbifold \mathcal{O}' obtenu est un manifold, l'application permettant de passer de \mathcal{O} à \mathcal{O}' se nomme une *désingularisation*. En clair, cela consiste à éliminer les points singuliers autour desquels la somme des angles n'est pas égale à 2π . Le théorème suivant montre qu'une désingularisation est toujours possible :

Théorème 4.24 (Désingularisation des orbifolds – [Sti92] chap. 8)

Étant donné un orbifold compact \mathcal{O} et G le groupe associé, alors il existe un sous-groupe H d'index fini de G tel que l'orbifold associé soit un manifold.

La méthode de désingularisation fournie par Stillwell est complexe, et se passe en plusieurs étapes. Premièrement, on considère uniquement le sous-groupe des transformations directes de G , afin d'éliminer les symétries. Ensuite, il est nécessaire de réduire les singularités de la surface, deux par deux ou trois par trois, pour obtenir au final un manifold. Des optimisations de la méthode permettent de choisir les méthodes de réduction de manière à tenter de réduire l'index du sous-groupe.

Supposons avoir désingularisé un orbifold et considérons maintenant l'action du groupe G sur le manifold obtenu. Si le manifold \mathcal{M} est une réunion finie de copies de \mathcal{O} , notées $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$, et que l'on considère les orbites de ces domaines sous l'action de H , alors l'action de G préserve ces orbites si et seulement si le groupe H est distingué dans G . Dans ce cas, le groupe quotient G/H agit naturellement sur le manifold \mathcal{M} . De plus, si jamais on possède un graphe Γ tracé dans le plan qui soit stable sous l'action de G , alors le passage au quotient fournit un graphe tracé sur \mathcal{M} sur lequel agit G/H . En particulier :

Lemme 4.25

Si \mathcal{O} est un orbifold pour l'action de G , et H un sous-groupe distingué de G désingularisant \mathcal{O} en \mathcal{M} , alors les orbites et les stabilisateurs des points du plan sous l'action de G passent au quotient en des orbites et des stabilisateurs de points de \mathcal{M} sous l'action de G/H .

La transformation demandant de passer d'un sous-groupe d'index fini H à un sous-groupe distingué d'index fini H_d se fait en prenant H_d comme l'intersection des conjugués gHg^{-1} , qui sont en nombre fini car H est d'index fini, puis en appliquant le lemme de Poincaré, qui affirme que l'intersection de deux sous-groupes d'index fini est aussi d'index fini. Lorsque l'on a obtenu un tel sous-groupe distingué, l'image d'un graphe de Cayley par le quotient est un graphe de Cayley, l'image d'un graphe sommet-transitif est un graphe sommet-transitif et l'image d'un graphe cofini est un graphe cofini. De plus, le passage au quotient préserve les bords des faces du graphe.

4.5.3 Applications aux graphes cofinis

Calcul de la caractéristique généralisée Considérons maintenant un graphe localement fini cofini Γ vérifiant la propriété de préservation des faces. Selon le résultat du lemme 3.7 p. 65, si G est le groupe d'automorphismes de Γ , il est possible de construire un domaine fondamental \mathcal{D} sur lequel l'action de G est propre. Grâce au résultat du paragraphe précédent, il est possible de trouver un sous-groupe distingué d'index fini H de G dans lequel l'orbifold associé à G est désingularisé et le passage au quotient préserve les bords des faces. L'orbifold \mathcal{M} est constitué d'un nombre fini de copies du domaine fondamental \mathcal{D} . De plus, les stabilisateurs des sommets de Γ et du graphe quotient sont isomorphes comme conséquence de la propriété de préservation des faces. Cela permet d'appliquer le raisonnement du lemme 3.6 en tenant compte de la remarque 3.2 pour obtenir le lemme suivant :

Lemme 4.26 (Nombre de sommets – Cas cofini)

Soit Γ un graphe planaire localement fini cofini, et $\{s_1, \dots, s_t\}$ l'ensemble des couleurs des sommets sous l'action du groupe d'automorphismes de Γ . Chaque sommet s_i est supposé de degré d_i , et de vecteur de type $[k_1^i, \dots, k_{d_i}^i]$, et le stabilisateur de ce sommet de cardinal σ_i . Alors la géométrie correspondant au groupe d'automorphismes de Γ est donnée par la caractéristique généralisée de Γ :

- si $c(\Gamma) > 0$, il s'agit de la géométrie sphérique ;
- si $c(\Gamma) = 0$, il s'agit de la géométrie euclidienne ;
- si $c(\Gamma) < 0$, il s'agit de la géométrie hyperbolique.

Preuve : Rappelons les résultats du lemme 3.6 en ce qui concerne le nombre de sommets n , d'arêtes e et de faces f de Γ dans le plongement, en fonction du cardinal N du groupe d'automorphismes sur le manifold \mathcal{M} .

$$\chi(\mathcal{M}) \stackrel{\text{(Euler)}}{=} n - e + f \stackrel{\text{(Lem. 3.6)}}{=} \frac{N}{2} \times c(\Gamma)$$

Considérons alors le graphe de Cayley Λ de H qui agit sur l'espace \mathcal{M} qui correspond à un domaine fondamental recopié N' fois, et considérons son quotient sur la surface \mathcal{M} . Si Λ est de degré \tilde{d} et que son vecteur de type est $[\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{\tilde{d}}]$, alors en effectuant les mêmes calculs pour ce graphe quotient :

$$\chi(\mathcal{M}) \stackrel{\text{(Euler)}}{=} \tilde{n} - \tilde{e} + \tilde{f} = N' \times \left(1 - \frac{\tilde{d}}{2} + \left(\sum_{i=1}^{\tilde{d}} \frac{1}{\tilde{k}_i} \right) \right) = N' \times \frac{c(\Lambda)}{2}$$

... où $c(\Lambda)$ est la caractéristique du graphe de Cayley Λ . En particulier, les deux caractéristiques ont le même signe. Comme la géométrie correspondant à un graphe de Cayley planaire localement fini ne dépend que du signe de cette caractéristique, il en va de même dans le cas d'un graphe cofini localement fini. \square

Ce résultat nous permet de connaître à l'aide de calculs locaux la géométrie la mieux appropriée pour les plongements des graphes cofinis localement finis, en particulier dans le but d'obtenir des plongements pour lesquels les groupes d'automorphismes sont des isométries.

Graphes de Cayley finis non planaires A l'aide des constructions précédentes, il nous est possible de représenter des graphes de Cayley finis non planaires, tracés sur des surfaces quelconques, comme quotient de graphes de Cayley planaires localement finis par des groupes de surfaces. En fait, il est possible de représenter n'importe quel graphe de Cayley fini non planaire de cette manière. Pour cela, il suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme 4.27 (Plongement des graphes de Cayley non planaires finis)

Tout graphe de Cayley fini Γ associé au groupe G admet un plongement sans croisements dans une surface, de manière à ce que ses automorphismes préservent les bords des faces.

Preuve : Soit d le degré de Γ et n le nombre d'éléments de sommets. Construisons un plongement de Γ sous la forme d'une carte combinatoire [CM92], c'est-à-dire sous la forme de deux permutations (σ, α) à nd éléments, ce qui correspond au nombre de demi-arêtes ou *brins* dans Γ . Les cycles de la permutation σ décrivent l'ordre dans lequel les brins apparaissent autour d'un sommet, tandis que les cycles de α sont d'ordre 2 et associent à une demi-arête le brin qui constitue la deuxième moitié de l'arête.

Choisissons un ordre de rotation ρ des générateurs autour d'un sommet, sous la forme d'un cycle sur les générateurs et construisons la permutation σ . Cette permutation est constituée de n cycles à d éléments, qui sont des translations du cycle ρ par la translation $(+d)$. La permutation α est alors définie par le graphe de Cayley, où l'on associe à un brin l'autre extrémité. La carte combinatoire ainsi obtenue fournit alors un plongement du graphe sur une surface, dans laquelle les propriétés de rotation et d'inversion sont vérifiées. En effet, l'ordre de rotation des générateurs autour d'un sommet est défini par ρ , et aucun sommet ne tourne dans le sens indirect.

Reste alors à vérifier que dans ce plongement, les automorphismes préservent les bords des faces. Pour cela, il suffit de calculer les bords des faces à la manière de l'automate des bords pour constater que ce calcul est indépendant du choix du sommet incident à la face. Cela nous assure que dans ce plongement, le groupe d'automorphismes vérifie la propriété voulue. \square

Ayant obtenu ce plongement dans un manifold \mathcal{M} , il est alors possible de construire le revêtement universel de \mathcal{M} . Pour cela, on construit le schéma d'étiquetage associé à \mathcal{M} et le graphe de Cayley planaire localement fini Λ correspondant au vecteur de type primitif de ce schéma d'étiquetage. Le groupe H correspondant admet alors \mathcal{M} comme domaine fondamental, ce qui nous assure que G est un sous-groupe distingué de H . Donc Γ apparaît bien comme quotient du plan par le groupe d'isométries H . On peut alors représenter le graphe Γ à l'aide d'un schéma d'étiquetage représentant le graphe sur le revêtement et un groupe d'isométries représentant le groupe quotient.

Notons que dans la construction du lemme 4.27, nous avons choisi le sens de rotation des générateurs autour d'un sommet, ce qui consiste à choisir le premier élément d'un schéma d'étiquetage. Néanmoins, nous n'avons pas forcément le choix quant à savoir si les générateurs sont directs ou indirects. En effet, il faut que ce choix soit cohérent avec les cycles dans le graphe : tout les cycles doivent contenir un nombre pair de générateurs indirects. Néanmoins, lorsque cette condition est vérifiée, le plongement obtenu vérifie lui aussi la propriété de préservation des faces. Cela nous laisse un peu de liberté lorsque l'on cherche à minimiser le genre de la surface sur laquelle on plonge Γ .

La question naturelle qui se pose alors est celle des graphes de Cayley infinis mais non planaires. Le problème est alors rendu plus complexe par le résultat suivant :

Théorème 4.28 (Genre d'un graphe de Cayley infini – [Lev70])

Si G est un groupe infini dénombrable, et Γ le graphe de Cayley d'une présentation de G , alors soit Γ est un graphe planaire, soit il n'est pas possible de le plonger sans intersections dans une surface de genre fini.

Chapitre 5

Points d'accumulation

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux graphes planaires infinis non localement finis, c'est-à-dire pour lesquels les plongements possèdent des points d'accumulation des sommets dans le plan. Afin d'étudier la structure de tels plongements, nous mettons en évidence les liens existant entre la propriété de planarité et des objets géométriques infinis comme les bouts du graphe et les points d'accumulation du plongement. Nous appliquons cette analyse à l'étude des graphes planaires 3-connexes infinis, au regard de l'unicité de leur plongement planaire.

5.1 Planarité et nombre de bouts

5.1.1 Graphes à un bout

Dans ce paragraphe, Γ est un graphe planaire à un bout, sans propriété de symétrie particulière. Le lemme suivant, basé sur une preuve de Lopez [Lop94], montre que Γ fait partie des graphes que nous avons étudié précédemment :

Proposition 5.1 (Graphes à un bout)

Si Γ est un graphe planaire à un bout, alors il admet un plongement localement fini.

Preuve : La preuve de ce lemme ressemble à celle du lemme 2.1, au sens où elle utilise des propriétés topologiques afin de modifier le plongement. Considérons un plongement planaire de Γ dans la sphère. Dans ce plongement, chaque cycle simple \mathcal{C} sépare la sphère en deux composantes connexes. Seule l'une de ces composantes contient une infinité de sommets de Γ , sans quoi le graphe posséderait plus d'un bout. On associe au cycle \mathcal{C} l'ensemble connexe compact $K_{\mathcal{C}}$ de la sphère séparé par \mathcal{C} et contenant une infinité de sommets de Γ . Considérons alors le compact K défini par :

$$K = \bigcap_{\mathcal{C} \text{ cycle de } \Gamma} K_{\mathcal{C}}$$

K est un ensemble compact, et il s'agit de vérifier qu'il est non vide. Pour cela, il suffit de vérifier que toute intersection finie de compacts $K_{\mathcal{C}}$ est non vide. Mais comme le complémentaire d'une telle intersection est la réunion d'un nombre fini de compacts contenant chacun un nombre fini de sommets de Γ , alors cette réunion ne peut contenir à elle seule tous les sommets de Γ . Donc le compact K est non vide.

De plus, K est connexe. En effet, si l'on décompose K en deux fermés disjoints $K = K_1 \cup K_2$ et que l'on note ϵ la distance strictement positive entre ces deux compacts disjoints.

Soit B la boule ouverte au sens de la distance de Hausdorff centrée sur K , et de rayon $\epsilon/4$ et notons son complémentaire compact L . Alors comme tout point de L appartient à un cycle de Γ contenant un nombre fini de points, et que L est compact, il est possible de recouvrir L avec un nombre fini de tels ensembles compacts. Mais un tel ensemble fini de sommets de Γ séparerait deux composantes infinies du graphe, ce qui contredirait le fait que Γ ne possède qu'un seul bout.

Soit O le complémentaire de K dans la sphère. Il s'agit d'un ouvert connexe par arcs comme réunion d'ensembles connexes par arcs, dont le complémentaire est connexe. O est donc lui-même simplement connexe. Il est alors homéomorphe au disque unité du plan. Cela nous fournit alors un plongement du graphe Γ dans lequel tous les points d'accumulation sont sur le bord du disque, c'est-à-dire un plongement localement fini. \square

En conclusion, le fait de se restreindre à des graphes planaires localement fini permet de capturer toute la classe des graphes planaires à un bout. En particulier, grâce au lemme 4.6, cela limite forcément la croissances des graphes planaires à un bout : linéaire, quadratique ou exponentielle. De cette remarque, il est possible de tirer :

Corollaire 5.2 (Planarité est de Markov)

La propriété "posséder un graphe de Cayley planaire" est une propriété de Markov.

Preuve : Pour prouver qu'une propriété est de Markov, il est nécessaire de prouver deux choses : d'abord l'existence d'un groupe finiment présenté G_1 possédant la propriété, et ensuite l'existence d'un autre groupe finiment présenté G_2 tel que tout groupe admettant G_2 comme sous-groupe ne puisse pas avoir la propriété. L'existence de G_1 est assurée par les graphes donnés en exemple dans ce mémoire.

Considérons $G_2 = \mathbb{Z}^3$, et supposons l'existence d'un groupe G finiment présenté possédant un graphe de Cayley planaire Γ et admettant \mathbb{Z}^3 comme sous-groupe. Soit $\{g_1, \dots, g_t\}$ un ensemble de générateurs de \mathbb{Z}_3 en tant que sous-groupe de G . Fixons, pour chacun de ces générateurs, un mot sur les générateurs de G qui lui soit égal, ce qui correspond à un chemin dans Γ . Considérons le sous-graphe Λ de Γ construit de la manière suivante : tout d'abord, ϵ appartient à Λ . Ensuite, pour tout sommet $s \in \Lambda$ et pour tout $k \in \llbracket 1; t \rrbracket$, les sommets et les arêtes appartenant au chemin de Γ consistant à suivre le mot g_k en partant de s appartiennent à Λ .

Le graphe Λ ainsi construit est planaire, et cofini, sous l'action de \mathbb{Z}^3 , chaque orbite étant un élément d'un (ou plusieurs) chemin g_k . Plus précisément, il ne possède qu'un seul bout. En effet, lorsque l'on enlève une boule finie centrée sur l'origine de Λ , si jamais on sépare le graphe en deux composantes infinies, chacune d'entre elles doit posséder une infinité de sommets de \mathbb{Z}^3 . C'est absurde car le graphe de Cayley de \mathbb{Z}^3 finiment présenté ne possède qu'un seul bout.

En résumé, la croissance du graphe Λ est nécessairement cubique, car \mathbb{Z}^3 agit sur Λ de manière cofinie. Cela prouve que Λ est un graphe planaire cofini à un bout, donc localement fini, de croissance cubique. Et c'est impossible par le lemme 4.6. \square

5.1.2 Nombre de bouts d'un graphe cofini

Dans ce paragraphe, le graphe Γ est supposé cofini, mais ne possède toujours pas de symétrie particulière. Nous allons nous intéresser au nombre de bouts du graphe Γ . Lorsque Γ est un graphe de Cayley, la décomposition du groupe donnée par le théorème de Stallings (cf. th. 4.20) nous assure que le nombre de bouts de Γ , s'il est supérieur à 1, ne

peut être égal qu'à 2 ou être infini. Ce résultat ne se restreint pas aux graphes de Cayley, et nous en donnons une preuve géométrique.

Définition (Ensemble séparant) :

Un *ensemble séparant* du graphe Γ est un sous-graphe connexe et fini Γ_s tel que le complémentaire de Γ_s dans Γ possède au moins deux composantes connexes infinies (en terme de nombre de sommets). \diamond

Tout graphe possédant au moins deux bouts possède nécessairement des ensembles séparants. Il s'agit d'ailleurs d'une équivalence, résultant directement des définitions. Remarquons aussi que la notion d'ensemble séparant est stable par automorphisme du graphe.

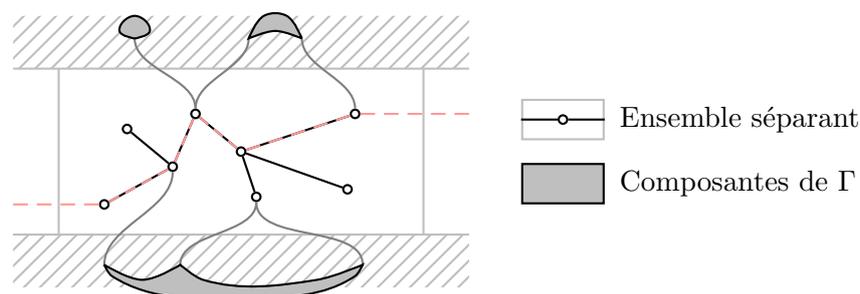
Un ensemble séparant minimal est un ensemble séparant auquel on ne peut enlever de sommet ou d'arête sans lui ôter la propriété d'être séparant. Pour les graphes localement finis, les ensembles séparants minimaux se résument, lorsqu'ils existent, soit à des sommets (cas 1-séparable), soit à des arêtes (cas 2-connecte). Dans le cas planaire, les ensembles séparants minimaux se décrivent assez aisément :

Lemme 5.3 (Ensembles séparants minimaux)

Les ensembles séparants minimaux des graphes planaires de degré fini sont des chemins du graphe.

Preuve : Soit Γ_s un ensemble séparant du graphe planaire Γ . Si Γ_s contient des cycles, il est toujours possible d'en retirer des arêtes sans altérer le caractère séparant du graphe. Par la suite, on suppose donc que l'ensemble séparant est un graphe connexe sans cycles, c'est-à-dire un arbre.

Considérons maintenant les arêtes incidentes à Γ_s , et définissons une relation d'équivalence entre ces arêtes : deux arêtes sont équivalentes si et seulement si il existe un chemin dans Γ ne passant par aucun sommet de Γ_s reliant les deux arêtes. De par la propriété de séparation, il existe au moins deux classes d'équivalence correspondant à des composantes infinies de Γ . Chacune des classes d'équivalence correspond donc à un ensemble de sommets de Γ_s . De plus, la composante de Γ associée à cette classe d'équivalence est un graphe planaire. Globalement, le graphe Γ peut être plongé de la manière suivante :



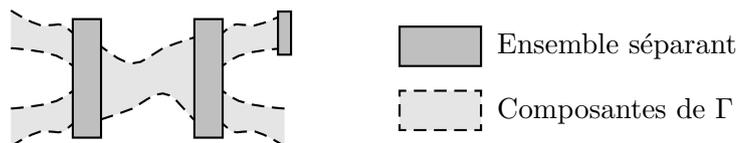
Le fait que Γ soit planaire nous assure qu'il est possible de plonger chaque classe d'équivalence dans une lunule reliée à des sommets de Γ_s . Modifions le plongement de Γ de manière à ce que Γ_s soit dans la bande du plan euclidien $-1 \leq y \leq 1$. En allongeant les arêtes reliées à l'ensemble séparant, il est possible de repousser chaque lunule entièrement dans un demi-plan $y > 1$ ou $y < -1$. Il est alors possible de relier un des sommets les plus à gauche de Γ_s à l'un des sommets les plus à droite par un unique chemin dans l'arbre. Cela fournit un séparateur minimal qui est un chemin du graphe \square

Exemple 5.1.1 – Il est intéressant de remarquer que l'hypothèse planaire possède son importance dans le lemme précédent. En effet, dans le cas général, les séparateurs minimaux ne sont pas des segments. Prenons par exemple le graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ muni des générateurs usuels. Le graphe est constitué d'une infinité de couches $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ reliées successivement les une aux autres. Chacune de ces couches est un séparateur, et à partir de ces séparateurs, il est possible de trouver des séparateurs minimaux qui ne soient pas des segments. —

Proposition 5.4 (Nombre de bouts d'un graphe cofini)

Le nombre de bouts d'un graphe cofini connexe Γ est égal à 0, 1, 2 ou est infini.

Preuve : Supposons que le graphe Γ possède au moins deux bouts, et considérons un ensemble séparant Γ_s du graphe. Intéressons nous à l'orbite de Γ_s sous l'action de groupe d'automorphismes de Γ . Supposons que l'ensemble sépare au moins trois composantes infinies de Γ – ce qui assure un particulier que Γ possède au moins trois bouts. Il est toujours possible de trouver un automorphisme φ de Γ tel que Γ_s et $\varphi(\Gamma_s)$ ne possèdent aucun sommet commun, en envoyant un sommet de l'ensemble séparant à distance suffisamment grande. On se retrouve alors dans la situation suivante :



Comme ces deux ensembles séparent chacun trois composantes infinies de Γ , leur réunion sépare au moins quatre composantes infinies de Γ . En particulier, il est possible de choisir à l'intérieur de quelle composante infinie on veut envoyer le séparateur. L'itération d'un tel procédé permet de construire des ensembles séparants k composantes infinies de Γ pour tout $k \geq 3$. En particulier, le graphe possède une infinité de bouts. □

Le preuve précédente caractérise la structure des bouts d'un graphe cofini, à rapprocher d'une structure arborescente dans laquelle les noeuds seraient les ensembles séparants. Cette structure arborescente s'oppose à la structure des graphes à un bout et leur unique composante infinie, indépendante du séparateur. L'opposition entre ces deux familles de graphes est à rapprocher de la dichotomie en ce qui concerne la décidabilité des logiques.

Le cas de graphes à deux bouts, qui est intermédiaire dans cette dichotomie, présente des propriétés intéressantes : les ensembles séparants découpent invariablement le graphe en deux composantes infinies. Les exemples de tels graphes possédant des plongements localement finis ressemblent au cycle infini. Nous analyserons cette famille de graphes au paragraphe 5.3.

5.2 Points d'accumulation essentiels

Le travail sur les points d'accumulation des sommets dans les graphes planaires est basé sur les travaux de Levinson [Lev82, Lev79, LH88], qui s'est intéressé de la même manière que Chaboud aux propriétés géométriques des plongements des graphes de Cayley planaires, mais dans un cadre plus général. Dans ce paragraphe, on nommera *singularité* tout point d'accumulation des sommets d'un graphe planaire.

5.2.1 Généralités

Définition (Nombre de singularités essentielles) :

Soit Γ un graphe planaire infini. Lorsque l'on considère un plongement planaire de Γ , on s'intéresse au nombre de singularités – éventuellement infini – de l'ensemble constitué par les sommets du graphe dans le plongement. Le *nombre de singularités essentielles* de Γ , noté $n(\Gamma)$, est défini comme le minimum sur l'ensemble des plongements plans de Γ de ce nombre de singularités dans le plongement. \diamond

Les graphes planaires finis possèdent un nombre $n(\Gamma)$ égal à zéro. Pour les graphes infinis localement finis, ce nombre est égal à 1. La proposition 5.1 nous assure que tout graphe planaire à un bout vérifie $n(\Gamma) = 1$. Le graphe de Cayley de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, dessiné figure 5.1, donne un exemple de graphe possédant deux points d'accumulation. Comme ce graphe est 3-connexe, d'après le théorème de Whitney, il possède un unique dual (cf. p. 45), ce qui nous assure que tout plongement de ce graphe possède exactement deux points d'accumulation.

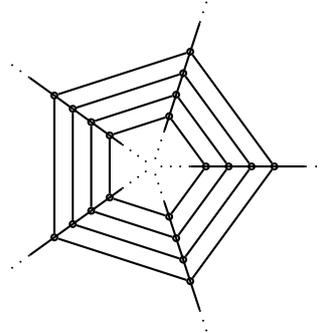


FIG. 5.1: Plongement planaire du graphe de Cayley de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Pour un graphe donné, il n'est pas possible de considérer une singularité donnée comme étant essentielle, dans la mesure où cette singularité peut dépendre du plongement du graphe. Levinson fournit un critère pour pouvoir décider lorsque deux singularités données sont réellement distinctes ou non :

Définition (Critère de séparation des singularités – [Lev82]) :

Soit p et q deux singularités distinctes du plongement de Γ . Ces deux singularités sont dites *séparées* si et seulement si il existe dans le plongement un cycle qui sépare la sphère en deux régions distinctes, chacune contenant l'une des singularités.

Un plongement de Γ est dit *essentiel* lorsque toutes ses singularités sont séparées.

Manifestement, lorsque deux points d'accumulation sont séparés par un cycle du graphe, ce cycle découpe le graphe en deux composantes infinies qui correspondent à des bouts différents. Dans un plongement où toutes les singularités sont séparées, on peut associer à chaque singularité un ensemble de bouts du graphe. En particulier, lorsqu'un tel plongement existe, le nombre de bouts de Γ est supérieur au nombre de singularités.

Théorème 5.5 (Plongement essentiel)

Tout graphe planaire Γ admet un plongement dans lequel les singularités sont séparées.

Preuve : Fixons ϵ un sommet du graphe Γ , et B_n la boule du graphe centrée sur ϵ et de rayon n pour la métrique dans le graphe. Considérons un plongement planaire de Γ dans la sphère. La boule B_n constitue un graphe planaire fini, et il est possible de considérer son

complémentaire dans la sphère. Ce complémentaire est un ouvert de la sphère, dont les composantes connexes contiennent les composantes du graphe séparées par B_n . De plus, chacun de ces composantes connexes est simplement connexe dans la sphère, vu que leur complémentaire est connexe.

Pour chacune de ces composantes connexes, nous allons appliquer une transformation équivalente à celle du lemme 2.1. Soit \mathcal{C} une telle composante. Elle est reliée par un nombre fini d'arêtes à la boule B_n . Comme la composante est simplement connexe, elle est homéomorphe au disque unité. Il est donc possible de rajouter autour de ce disque un anneau de rayon donné, de tracer à l'intérieur de cet anneau les arêtes reliant \mathcal{C} à B_n , et de replonger le disque obtenu dans le graphe. Dans le plongement ainsi obtenu, on a "repoussé" les points d'accumulation à distance de la boule B_n du plongement, tout en laissant les sommets et les arêtes de B_n inchangés. Cela permet d'éviter les points d'accumulation sur des arêtes ou des sommets du graphe.

Itérons cette transformation en choisissant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers croissante, et en appliquant successivement la transformation à la boule B_{u_n} du graphe. La transformation précédente ne modifie pas le plongement des arêtes correspondant à la boule B_n . Toute arête du graphe voit donc son plongement n'être modifié qu'un nombre fini de fois. Ainsi, le plongement limite est bien défini et c'est un plongement planaire de Γ . Dans cette construction, s'il n'existe pas de cycle dans le graphe séparant deux singularités, alors elles appartiennent, à chaque étape, à la même composante simplement connexe, et sont repoussées vers un même point d'accumulation des sommets. Si par contre il existe un cycle les séparant, les singularités sont séparées dans le plongement. \square

Corollaire 5.6

Le nombre de bouts d'un graphe Γ est supérieur ou égal à son nombre de singularités essentielles.

Noter que si l'on dispose d'un cycle séparant deux singularités, son image par automorphisme n'a *a priori* aucune raison de séparer lui aussi deux nouvelles singularités. Cette propriété est une propriété du plongement qui peut ne pas être stable par automorphisme. Néanmoins, le théorème 5.5 nous assure qu'il est toujours possible d'éviter le cas où le plongement possède deux singularités distinctes non séparées par un cycle du graphe

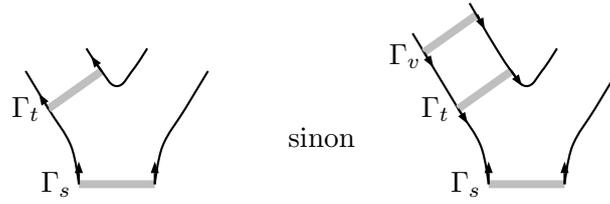
5.2.2 Nombre de singularités essentielles

Intéressons nous plus précisément au nombre de singularités essentielles d'un graphe planaire cofini. Comme les ensembles séparant les singularités sont des cycles, nous utilisons les propriétés de transitivité du graphe pour prouver une proposition équivalente au théorème de Stallings, mais pour les singularités essentielles. Dans les lemmes suivants, Γ est supposé simplement cofini.

Lemme 5.7 (Lemme d'inclusion)

Soit Γ_s en ensemble séparant de Γ . Alors pour toute composante Λ de Γ séparée par Γ_s , il existe un automorphisme φ tel que $\varphi(\Lambda) \subset \Lambda$.

Preuve : Soit Λ une composante séparée par Γ_s . Envoyons par un automorphisme σ le séparateur Γ_s sur un séparateur distinct Γ_t dans la composante Λ , de manière à ce que $\Gamma_s \cap \Gamma_t = \emptyset$. Si $\sigma(\Lambda) \subset \Lambda$, alors le résultat est prouvé. Sinon, cela signifie que $\sigma(\Lambda)$ contient Γ_s , et c'est la seule composante attachée à Γ_t contenant Γ_s .

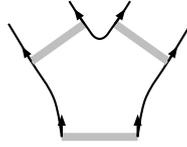


Envoyons alors l'ensemble séparant Γ_t sur un graphe Γ_v dans une composante connexe rattachée à Γ_t et ne contenant pas Γ_s , cela par un automorphisme σ' . Soit $\sigma' \circ \sigma(\Lambda) \subset \Lambda$ et le lemme est prouvé, soit, encore une fois, l'image de Λ contient le séparateur Γ_s . Néanmoins, dans ce cas, $(\sigma')^{-1}$ envoie la composante attachée à Γ_v contenant Γ_s et isomorphe à Λ dans la composante attachée à Γ_t contenant Γ_s . En conjuguant cet automorphisme par $\sigma' \circ \sigma$, on obtient bien le résultat escompté. \square

Lemme 5.8 (Lemme d'exclusion)

Supposons que Γ possède une infinité de bouts. Soit Γ_s un ensemble séparant et Λ une composante séparée par Γ_s . Alors il existe un automorphisme σ tel que $\sigma(\Lambda)$ contienne Γ_s .

Preuve : A l'aide du lemme d'inclusion 5.7, il est possible d'obtenir un automorphisme σ_1 tel que $\sigma_1(\Lambda) \subset \Lambda$. Comme le graphe possède une infinité de bouts, il est possible de choisir σ_1 de manière à ce que $\sigma_1(\Lambda)$ ne contienne pas tous les bouts contenus dans Λ . Il existe alors par le lemme d'inclusion un second automorphisme σ_2 envoyant Λ à l'intérieur d'un bout différent de $\sigma_1(\Lambda)$, c'est-à-dire $\sigma_2(\Lambda) \subset \Lambda$ et $\sigma_1(\Lambda) \cap \sigma_2(\Lambda) = \emptyset$.



Alors $\sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$ est un automorphisme qui convient. \square

Proposition 5.9 (Nombre de singularités essentielles d'un graphe cofini)

Le nombre de singularités essentielles d'un graphe cofini Γ vaut soit 0, 1, 2 ou est infini.

Preuve : Supposons que le plongement essentiel de Γ possède un nombre minimal et fini de singularités $n \geq 3$. Soit p une singularité du plongement, et C_p un cycle de Γ séparant cette singularité de toutes les autres. Un tel cycle existe car les singularités sont en nombre fini. Soit O_p l'ouvert du plan séparé par C_p et contenant la singularité p .

Soit Λ une composante infinie de Γ séparée par C_p et inscrite à l'intérieur de O_p . A l'aide du lemme d'exclusion 5.8, il est possible de trouver un automorphisme φ qui tel que $\varphi(\Lambda)$ contienne C_p . Cela signifie en particulier que toutes les autres composantes du graphe qui sont rattachées au cycle $\varphi(C_p)$ sont tracées à l'intérieur de l'ouvert O_p .

Au final, à l'intérieur de l'ouvert O_p , il n'y a qu'une seule singularité dans le plongement. Prenons deux composantes attachées à C_p correspondant à deux singularités distinctes ne se trouvant pas dans O_p . Comme le plongement est essentiel, ces deux singularités sont séparées par un cycle tracé à l'intérieur de O_p . Comme il n'y a qu'une singularité à l'intérieur de O_p , cela signifie que les deux singularités peuvent être plongées du même côté de C_p . Cela contredit le fait que le cycle soit séparant, et donc la minimalité du plongement. \square

Au final, lorsque $n(\Gamma) = \infty$, la structure des singularités dans un plongement essentiel possède des propriétés topologiques fortes :

- Ensemble fermé : tout point d'accumulation de points d'accumulation des sommets est lui-même point d'accumulation des sommets. C'est donc un compact de la sphère.
- Totalelement discontinu : ses composantes connexes sont forcément réduites à un point, de par la construction du plongement essentiel.
- Ensemble parfait : tout cycle séparant deux singularités doit séparer deux ensembles infinis de singularités, par le lemme d'exclusion, ce qui fait que toute singularité est point d'accumulation de singularités.

Cet ensemble présente donc toutes les propriétés d'un ensemble de Cantor.

5.3 Graphes cylindriques

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser plus précisément au cas d'un graphe Γ possédant deux singularités essentielles. Ce type de graphes est relativement simples, dans la mesure où son nombre de bouts vaut 2 :

Lemme 5.10

Un graphe planaire Γ possédant deux singularités essentielles ne possède que deux bouts.

Preuve : L'idée consiste à trouver un ensemble séparateur Γ_s pour le graphe Γ qui soit un cycle séparant les deux singularités. Supposons que Γ_s sépare plus de deux composantes infinies de Γ . Définissons, comme dans le lemme 5.3, une relation d'équivalence sur les arêtes incidentes à Γ_s : deux arêtes sont équivalentes si et seulement si il existe un chemin tracé dans $\Gamma \setminus \Gamma_s$ ayant ces deux arêtes pour extrémités. Comme le cycle Γ_s est séparant, il existe plusieurs classes d'équivalence pour cette relation, plongées de part et d'autre du cycle. Représentons nous chacune de ces composantes comme les lunules du lemme.

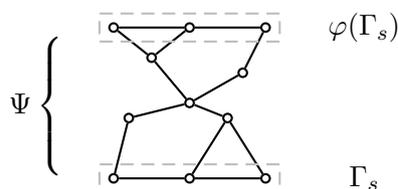
Supposons que Γ_s sépare plus de deux composantes infinies. Alors, il existe une partie du plan séparée par Γ_s contenant au moins deux composantes connexes infinies. Et, par le lemme d'inclusion, il est possible de plonger Γ_s dans chacune de ces deux composantes infinies. Mais comme à l'intérieur du cycle, il n'y a qu'une seule singularité, les images du cycle Γ_s ne sont pas séparantes. Dans ce cas, cela signifie qu'il existe un plongement planaire de Γ dans lequel toutes les lunules incidentes à Γ_s sont du même côté du cycle. Cela signifie en particulier que le cycle n'est pas réellement un cycle séparant. En résumé, les graphes ne comportant que deux singularités essentielles comportent donc exactement deux bouts, car le nombre de bouts est au moins égal au nombre de singularités. \square

Donnons nous Γ_s un cycle séparant les deux singularités de Γ . Chacun des ouverts séparés par Γ_s contient exactement un bout de Γ . Soit Λ une composante infinie séparée par Γ_s . Considérons, par le lemme d'inclusion, un automorphisme φ tel que $\varphi(\Lambda) \subset \Lambda$. Comme l'inclusion est stricte, l'automorphisme φ est nécessairement d'ordre infini. Soit $\Psi = \Lambda \setminus \varphi(\Lambda)$. Le graphe Ψ est fini car Γ ne possède que deux bouts. De plus :

$$\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(\Psi) \quad (\text{union disjointe})$$

Considérons un plongement de $\Phi = \Psi \cup \Gamma_s \cup \varphi(\Gamma_s)$ sur un cylindre fini $\mathcal{C} [0; 1] \times [0; 1]$ où les points $(0, y)$ et $(1, y)$ sont identifiés, de manière à ce que les deux cycles Γ_s et $\varphi(\Gamma_s)$ coïncident avec les extrémités du cylindre $\{(x, 0), x \in [-1; 1]\}$ et $\{(x, 1), x \in [-1; 1]\}$. Ce plongement est réalisable car Φ est un graphe planaire fini et les deux cycles Γ_s et

$\varphi(\Gamma_s)$ sont des cycles disjoints. Le graphe Γ est alors exactement une union de copies de tels cylindres, recollés de la manière suivante : considérons $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de cylindres isométriques à \mathcal{C} . Le cycle $\varphi(\Gamma_s)$ du cylindre \mathcal{C}_k est isomorphe au cycle Γ_s du cylindre \mathcal{C}_{k+1} , ce qui définit un recollement entre les deux cylindres le long de l'une de leurs extrémités. Le plongement obtenu est un plongement localement fini sur le cylindre infini.



Dans ce plongement, toutes les faces sont finies. Si le graphe est sommet-transitif, en utilisant la preuve du lemme d'intersection des faces 2.4, il est possible de montrer que les 2-séparateurs finis du graphe sont triviaux, *i.e.* réduits à des arêtes du graphe. Cela n'implique pas forcément que les intersections des faces se réduisent à des arêtes ou à des sommets du graphe. Néanmoins, en adaptant la preuve du lemme 2.5, on montre que les automorphismes du graphe préservent les bords des faces. Pour les graphes cofinis, cette propriété n'est pas automatique et l'on en revient à la discussion évoquée lors du lemme 2.7, où il ressort qu'il faut se restreindre à un sous-graphe possédant la propriété de préservation des faces.

Au final, si l'on découpe le cylindre \mathcal{C} selon un chemin simple rejoignant les cycles supérieurs et inférieurs du cylindre, on obtient un graphe tracé sur un rectangle. En identifiant les côtés du rectangle deux à deux (cf. page 95), on obtient un graphe sommet-transitif tracé sur le tore dont les automorphismes préservent les bords des faces. Comme le revêtement universel du tore est le plan euclidien, il est possible de construire le revêtement du graphe Γ dans cette géométrie, sur lequel le groupe \mathbb{Z}^2 agit naturellement. Enfin, les automorphismes préservant toutes les faces du plongement, ils s'étendent naturellement en des automorphismes du revêtement. Au final, il apparaît que :

Proposition 5.11 (Graphes sommet-transitifs à deux singularités)

Tout graphe planaire sommet-transitif (resp. de Cayley) à deux singularités essentielles est un quotient d'un graphe planaire localement fini euclidien sommet-transitif (resp. de Cayley) par un groupe d'isométries engendré par une seule translation.

Et dans le cas des graphes cofinis :

Proposition 5.12 (Graphes cofinis à deux singularités)

Tout graphe planaire cofini à deux singularités essentielles vérifiant la propriété de préservation des faces est un quotient d'un graphe planaire cofini euclidien par un groupe d'isométries engendré par une seule translation.

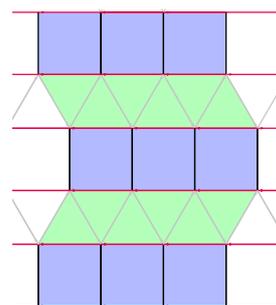
Dans la proposition précédente, on effectue un quotient par un groupe d'isométries dont le domaine fondamental est non borné. Il est possible de représenter ce domaine fondamental comme un espace d'identification d'un polygone à deux côtés infinis, le recollement se faisant par translation. Ces graphes apparaissent donc naturellement comme tracés sur une surface euclidienne non compacte, avec les automorphismes agissant comme des isométries. Néanmoins, il existe deux surfaces euclidiennes non compactes, à savoir le cylindre et le *twisted cylinder*, mais une seule d'entre elles contient des graphes planaires

sommet-transitifs. En effet, le groupe d'isométries du *twisted cylinder* n'est pas transitif sur les points du cylindre, et toutes les faces du plongement étant bornées, cela rend impossible la propriété de préservation des faces pour les graphes tracés sur cette surface.

Exemple 5.3.1 (Graphes de Cayley cylindriques) – Au regard des propositions précédentes, il existe relativement peu de graphes de Cayley tracés sur le cylindre. En effet, pour qu'un sous-groupe engendré par une translation t soit distingué, il est nécessaire et suffisant qu'à partir de n'importe quel sommet s du graphe, le vecteur d'extrémités s et $t(s)$ pointe dans la même direction. Et les seuls graphes de Cayley euclidiens possédant cette propriété correspondent à des pavages uniformes, ne contenant qu'un seul type de faces (c'est-à-dire les pavages par des carrés, triangles ou hexagones), hormis le cas de l'exemple suivant. Le graphe de Cayley ci-contre est défini par la présentation suivante :

$$G = \langle a_1, \dots, a_5 \mid a_1 a_3, a_2^2, a_5 a_4, a_5^2 a_3, a_2 a_3 a_2 a_1, a_1^3 \rangle$$

Les premiers relateurs (excepté le dernier) correspondent à un graphe de Cayley euclidien, et le dernier relateur est le générateur d'un sous-groupe distingué de translations. Dans le graphe ci-contre, seules les faces colorées appartiennent au graphe cylindrique, l'identification des côtés se faisant naturellement par la translation horizontale envoyant le bord de gauche sur le bord de droite.



5.4 Graphes planaires 3-connexes

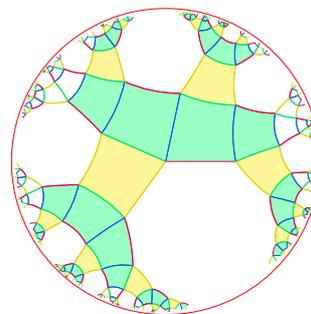
Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser plus particulièrement au cas des graphes de Cayley planaires 3-connexes. Les définitions pour les éléments du plongement tels que les sommets, arêtes et faces, restent inchangées. Les plongements des graphes considérés sont supposés essentiels, ce qui fait que les bords des faces sont nécessairement des suites consécutives de sommets et d'arêtes. Pour éviter toute confusion, les singularités ne sont pas considérées être des points du plongement.

Le cas des graphes planaires généraux est particulièrement plus complexe que le cas localement fini. Remarquons tout d'abord que la propriété du lemme 2.6 distinguant la connexité du graphe en fonction du nombre de faces infinies incidentes à un sommet n'est plus valide : les graphes 3-connexes peuvent posséder des faces infinies.

Exemple 5.4.1 – L'exemple suivant est dû à Bonnington [BW03]. Considérons le graphe de Cayley du groupe G_n défini pour $n \geq 2$ par la présentation suivante :

$$G_n = \langle a_1, \dots, a_4 \mid a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, (a_4 a_3)^2, a_2 a_3 a_2 a_1, (a_2 a_4)^{2n} \rangle$$

Les premiers relateurs correspondent à un graphe de Cayley localement fini tracé sur le plan hyperbolique, tracé ci-contre. Le dernier relateur est variable et dépend de n . Le graphe obtenu au final est un graphe 3-connexe, tracé sur le cylindre lorsque $n = 2$. Mais lorsque $n \geq 3$, il possède une infinité de singularités, et chaque sommet est incident à une face infinie. Sur la figure, les faces colorées correspondent au quotient pour $n = 4$. Bonnington conjecture que dans un graphe 3-connexe planaire, on ne peut avoir strictement plus d'une face infinie par sommet.



Revenons maintenant aux propriétés des automorphismes des graphes 3-connexes. Dans la mesure où les 2-séparateurs sont réduits à des arêtes du graphe, le lemme suivant est une conséquence directe de la définition :

Lemme 5.13 (Intersection des faces – Cas 3-connexe)

Dans un graphe planaire 3-connexe, l'intersection des bords de deux faces distinctes, lorsqu'elle est non vide, est réduite à un sommet ou à une arête.

Or les graphes planaires 3-connexes possèdent une propriété d'unicité du plongement (cf. p. 45) qui laisse à penser que les automorphismes préservent les bords des faces. Le corollaire suivant prouve ce résultat en utilisant une preuve similaire à celle du lemme 2.5 :

Corollaire 5.14 (Préservation des faces – Cas 3-connexe)

Les automorphismes d'un graphe planaire 3-connexe envoient les bords des faces sur les bords des faces.

Preuve : Considérons le bord d'une face \mathcal{F} , et φ un automorphisme de Γ envoyant le bord de cette face sur un chemin c du graphe. Supposons par l'absurde que c n'est pas le bord d'une face et considérons deux composantes Λ_1 et Λ_2 , non réduites à une arête du graphe, séparées par le chemin c .

Pour chaque composante Λ_i , il existe au moins deux sommets rattachés à c , car le graphe n'est pas 1-séparable. De plus, si l'on considère l'ensemble des sommets \mathcal{S}_i de c attachés à Λ_i , alors deux ensembles \mathcal{S}_i et \mathcal{S}_j distincts vérifient une propriété de non-intersection : étant donné deux sommets de \mathcal{S}_i et deux sommets de \mathcal{S}_j , il existe un chemin dans c reliant les sommets de \mathcal{S}_i et un chemin dans c reliant les sommets de \mathcal{S}_j , tels que les deux chemins ne s'intersectent que sur leurs extrémités.

Si l'on considère une composante \mathcal{S}_i et les deux sommets extrémités dans c entre lesquelles apparaissent tous les sommets attachés à Λ_i , ces deux extrémités constituent une 2-séparation du graphe, ce qui n'est possible que dans le cas où il n'y a qu'une composante séparée par c . Cela conclut la preuve. \square

Considérons un graphe de Cayley planaire 3-connexe Γ associé à un groupe $G = \langle A | R \rangle$. Grâce au lemme précédent, il est possible de définir le vecteur de type du graphe Γ . Mieux, les générateurs du graphe vérifient les lemmes de rotation 2.8 et d'inversion 2.10 de Chaboud. Associons à Γ le schéma d'étiquetage (p, σ, τ) défini par ces lemmes. Le vecteur de type de Γ est un vecteur de type valide pour ce schéma, dans la mesure où l'automate des bords calculé à partir de ce schéma d'étiquetage calcule les bords des faces de Γ . Construisons alors le graphe de Cayley planaire localement fini Γ' associé à ce schéma d'étiquetage et ce vecteur de type. Ce graphe de Cayley correspond à un groupe $G' = \langle A' | R' \rangle$. Considérons l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} A' & \rightarrow A \\ \varphi(a'_i) & = a_i \end{cases}$$

Suite aux considérations précédentes, l'image du bord d'une face finie de Γ' s'envoie sur le bord d'une face finie de Γ . L'application φ s'étend donc naturellement en un morphisme de groupes surjectif de G' dans G . Cela signifie donc que :

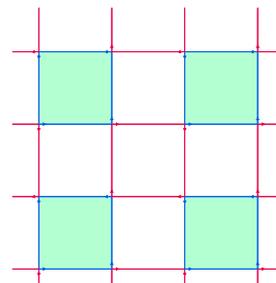
Proposition 5.15

Tout graphe de Cayley planaire 3-connexe est un graphe quotient d'un graphe de Cayley planaire localement fini.

De plus, le graphe apparaît comme un quotient par un sous-groupe distingué de Γ' , de manière à ce que l'espace quotient soit un manifold. Comme c'était le cas pour les graphes cylindriques, cette surface apparaît comme un repliage le long de chemins tracés sur la surface. La structure de l'espace quotient est naturellement une surface de Riemann, dont la métrique est induite par la métrique dans Γ' . Dans cette surface, les automorphismes agissent comme des isométries de la surface.

Exemple 5.4.2 (Champ de cactus) – Nous donnons ici un exemple de graphe de Cayley planaire 3-connexe dans lequel la surface de Riemann associée est simple à construire. Considérons le graphe de Cayley du groupe défini par :

$$G = \langle a_1, \dots, a_4 \mid a_1 a_4, a_2 a_3, (a_3 a_1)^2, a_2^4, a_4^4 \rangle$$



Le graphe de Cayley de ce groupe est isomorphe à la grille infinie, mais il possède un générateur de degré 4, correspondant aux faces colorées de la figure ci-contre. Si l'on effectue un produit amalgamé de G par le groupe $H = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ muni des générateurs usuels, le long de ce cycle de longueur 4, cela revient à recoller un cube sur chacune des faces colorées, et une copie de la grille correspondant à G sur la face opposée du cube. Le graphe obtenu au final est 3-connexe, de vecteur de type $[4; 4; 4; 4; 4]$. et la surface de Riemann associée ressemble intuitivement à un champ de cactus. —

La construction définie page 76 pour la résolution du problème du mot généralisé se base uniquement sur l'existence d'une surface géodésique sur laquelle les automorphismes agissent par isométries. Les lemmes du quadrilatère étant valides dans une telle surface, la construction de graphes de Cayley pour les sous-groupes est toujours possible. D'où le fait que les sous-groupes de ces graphes possèdent eux aussi un graphe de Cayley planaire. Ce résultat est en fait une forme faible d'un théorème dû à Babai :

Théorème 5.16 (Hérédité par passage au sous-groupe – [Bab77])

Tout sous-groupe d'un groupe possédant un graphe de Cayley planaire possède un graphe de Cayley planaire.

5.5 Graphes de moindre connexité

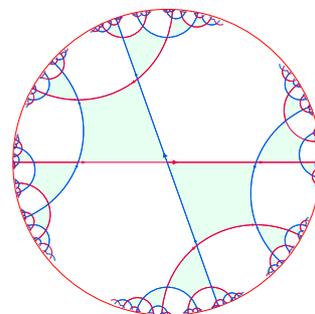
Pour les graphes de moindre connexité, il est possible d'utiliser les techniques des graphes de groupes, ainsi que le théorème de Dunwoody 4.19 pour caractériser le graphe. Pour l'instant, nous nous restreignons au cas des graphes de Cayley.

Considérons le cas des graphes 1-séparables. Si Γ est un graphe 1-séparable planaire, il est possible de le décomposer en composantes 2-connexes. Construisons alors l'arbre des composantes 2-connexes, ou *block-cutpoint tree* [DSS98], noté $t_2(\Gamma)$: il s'agit d'associer à chaque composante 2-connexe un sommet, et de relier les sommets associés à deux composantes par une arête si et seulement si les composantes possèdent un sommet commun. Le graphe ainsi construit est naturellement un arbre. Le stabilisateur d'une arête est trivial car c'est le stabilisateur d'un sommet de Γ . De plus, le nombre de composantes 2-connexes non isomorphes est borné par le degré du graphe. En appliquant le théorème de Dunwoody à cet arbre, il est possible de montrer que :

Proposition 5.17 (Graphes de Cayley planaires 1-séparables – [DSS98])

Tout groupe G possédant un graphe de Cayley 1-séparable, est un produit libre de groupes cycliques \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et de groupes ayant des graphes de Cayley 2-connexes planaires.

Exemple 5.5.1 – La décomposition précédente n'est pas forcément la décomposition en composantes 2-connexes. Comme le montre l'exemple du groupe $G = \langle a_1, a_2 | (a_1 a_2)^2 \rangle$. Son graphe de Cayley est 1-séparable et localement fini, et les composantes 2-connexes sont des circuits. Néanmoins, ces circuits ne sont pas des sous-groupes de G , puisqu'ils correspondent au relateur $(a_1 a_2)^2$. La décomposition en graphes de groupes montre que G est bien isomorphe à un produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais ce produit libre n'apparaît pas naturellement dans le graphe de Cayley lui-même. —



En résumé, même si du point de vue de la structure des groupes, il est possible de se restreindre au cas de groupes possédant des graphes de Cayley au moins 2-séparables, cette proposition ne fournit pas d'indications sur la structure des graphes de Cayley 1-séparables en général.

La même technique, consistant à construire un arbre sur lequel le graphe agit, est légèrement plus complexe. Considérons un 2-séparateur de Γ , et les composantes séparées par ce 2-séparateur. Si, dans ces composantes, il y a une arête seule, on recolle cette arête à chacune des autres composantes. Cela permet d'éviter de réduire le graphe à la somme de ses arêtes. Les composantes obtenues dans cette décomposition sont en nombre fini, borné par le carré du degré du graphe. Comme elles ne comportent pas de 2-séparateurs non triviaux, elles sont soit 3-connexes, soit de degré 2, c'est-à-dire des circuits vu que l'on a éliminé la possibilité de composantes réduites à une arête. Dans le cas 2-séparable localement fini, cette décomposition fournit les circuits associés aux bords des faces finies du plongement.

Construisons alors l'arbre des composantes 3-connexes, ou *three-block tree*, noté $t_3(\Gamma)$. Les composantes obtenues dans la décomposition précédente sont reliées entre elles par des sommets ou par des couples de sommets. Associons à chacun de ces couples de sommets un sommet de $t_3(\Gamma)$, et à chaque composante un autre sommet de $t_3(\Gamma)$. Deux sommets de $t_3(\Gamma)$ sont reliés entre eux par une arête si et seulement si l'un d'entre eux représente une composante séparée par le couple de sommets représenté par l'autre. Cette construction est identique à la construction de l'arbre barycentrique dans le cas localement fini. Elle mène naturellement à un arbre. A l'aide de cette décomposition, il est possible de prouver le résultat :

Proposition 5.18 (Graphes de Cayley planaires 2-séparables – [DSS98])

Tout groupe G possédant un graphe de Cayley 2-séparable est soit cyclique fini, soit diédral, soit le groupe fondamental d'un graphe de groupes dans lequel les arêtes sont des groupes d'ordre 2 au plus, et les groupes associés aux sommets possèdent des graphes de Cayley planaires 3-connexes.

Néanmoins, comme pour l'arbre $t_2(\Gamma)$, ces composantes 3-connexes peuvent n'avoir aucun rapport avec le graphe de Cayley initial. Au final, même si l'on peut caractériser la structure des groupes en question, il n'est pas évident que l'on puisse en tirer des

résultats sur la structure des graphes associés. Dans l'optique d'analyser les graphes planaires sommet-transitifs ou même cofinis, il est donc nécessaire d'analyser la structure des graphes de manière plus précise.

Dans les exemples que nous avons construits explicitement, les graphes planaires apparaissent comme des quotients de graphes planaires localement finis par des groupes d'isométries ayant des propriétés particulières. La propriété clé dans ces démonstrations est la propriété de préservation des faces, qui permet de construire des schémas d'étiquetages et par là même de construire un quotient. La question qui se pose au final consiste à savoir si l'on peut étendre ce type de représentation des graphes aux graphes planaires en général. Si l'on se limite aux schémas d'étiquetages tels que définis dans ce mémoire, Droms répond par la négative, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.5.2 – Construisons le graphe de Cayley à partir du groupe diédral D_3 et de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ munis des générateurs usuels, deux graphes de Cayley 3-connexes. On peut construire le produit amalgamé de ces deux groupes le long de leur sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il se trouve que le graphe de Cayley associé à ce produit amalgamé n'a aucune chance de vérifier la propriété de préservation des faces. En effet, le générateur d'ordre 2 inverse le sens de rotation des générateurs du groupe diédral, mais pas le sens de rotation des générateurs du groupe abélien. —

L'exemple 5.5.2 montre que dans le cas planaire général, les classes d'isomorphismes définies dans le chapitre 3 atteignent leurs limites. Néanmoins, les décompositions obtenues dans ce dernier paragraphe laissent à penser qu'il est possible de raffiner les raisonnements faits dans le cas localement fini et de définir de nouvelles classes d'isomorphismes permettant de décrire les graphes cofinis planaires généraux à l'aide de schémas d'étiquetages plus évolués.

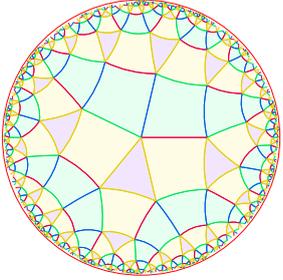
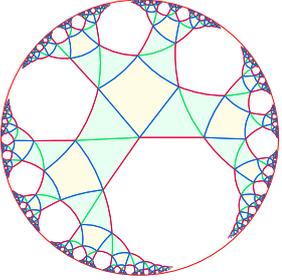
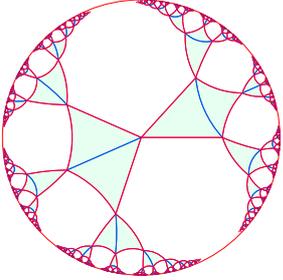
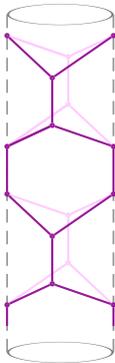
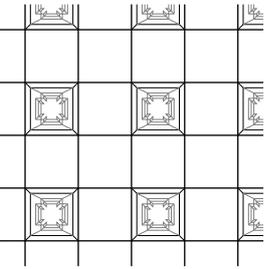
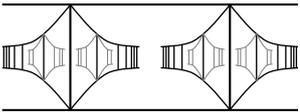
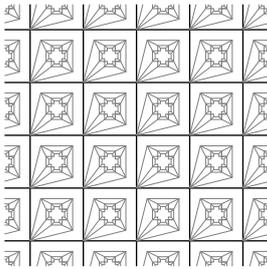
Localement fini $n(\Gamma) = 1$	 $[4; 4; 4; 4; 3]$	 $[3; 4; 3; 3; \infty]$	 $[3; \infty; 3; 3; \infty]$
Deux singularités $n(\Gamma) = 2$	 $[4; 4; 3; 3; 3]$	 $[6; 6; 6]$	
Infinité de singularités $n(\Gamma) = \infty$	Exemple 5.4.2  $[4; 4; 4; 4; 4]$	Exemple 5.5.2  $[\infty; \infty; \infty; \infty; \infty]$	$\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2$  $[8; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8]$
	3-connexe	2-séparable	1-séparable

FIG. 5.2: Classification des graphes de Cayley planaires selon leur connexité et leur nombre de singularités, défini par le nombre $n(\Gamma)$. Il n'existe pas de graphe 1-séparable à 2 singularités.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons analysé la famille des graphes planaires cofinis topologiquement localement finis, et tirant partir de leur groupe de symétries. En se basant sur les propriétés des graphes de Cayley normaux, nous avons proposé d'utiliser les caractéristiques locales des graphes cofinis afin d'obtenir une représentation sous la forme d'une structure de données nommée *schéma d'étiquetage*. Cette représentation décrit non seulement la structure du graphe, mais aussi celle de son plongement dans le plan, de son groupe de symétries en tant que graphe et en tant que pavage du plan. En cela, nous avons exploré les liens possibles avec la théorie combinatoire des groupes, la théorie des surfaces, compactes ou non, mais aussi en ce qui concerne la théorie des pavages et la structure des graphes cofinis en général.

La démarche adoptée lors de cette étude est une démarche constructive, faisant appel à l'intuition pour étudier les propriétés des graphes et développer des théories. En ce sens, les techniques de preuve utilisées fournissent une approche nouvelle des problèmes. De nombreux résultats évoqués dans ce mémoire rejoignent des théorèmes prouvés et plus ou moins connus, mais qui se profilent naturellement le long du chemin suivi. De plus, le caractère constructif des démonstrations permet une approche systématique, et éventuellement algorithmique des divers problèmes rencontrés. A cet égard, le choix de ces directions de recherche se révèle intéressant et rempli de possibilités.

Parmi ces possibilités, nous reprenons ici des lignes de recherche qui s'inscrivent dans la continuation de ce mémoire, selon les domaines concernés.

Théorie des groupes Les groupes possédant des graphes de Cayley planaires ont été classifiés que ce soit en terme de groupes de surfaces pour le cas localement fini, ou à l'aide d'une décomposition sous la forme de graphe de groupes, en caractérisant les groupes intervenant dans le graphe. Néanmoins, il est conjecturé que cette famille de groupes est effectivement énumérable. Même si, au regard des conclusions du chapitre 5, une représentation locale de ces graphes de Cayley ne semble pas évidente en utilisant la même approche que celle utilisée dans ce mémoire, elle n'en resterait pas moins intéressante.

L'étude des sous-groupes des graphes de Cayley planaires localement finis présente aussi un certain intérêt, surtout s'il est possible de caractériser efficacement ces sous-groupes qui sont distingués. La structure des sous-groupes des groupes archimédiens, qui possèdent tous un sous-groupe strict isomorphe au groupe de départ, doit différer sensiblement du cas hyperbolique, où cette propriété semble ne pas être toujours vérifiée. De plus, une connaissance efficace des espaces quotients et des procédures de désingularisation des orbifolds permettrait une analyse systématique de ces surfaces.

En revenant à ces surfaces, sachant qu'il est toujours possible de représenter un graphe de Cayley fini non planaire sous la forme d'un quotient, une recherche effective d'un tel quotient de manière efficace, en minimisant par exemple le genre de la surface quotient,

permettrait d'utiliser directement la représentation des schémas d'étiquetage pour des graphes non planaires. Ces propriétés peuvent s'appliquer à des algorithmes utilisant les propriétés intrinsèques des graphes de Cayley, comme des algorithmes de routage, ou impliquant l'utilisation d'automates cellulaires.

Enfin, il s'agirait d'étudier de manière plus approfondie les surfaces compactes et non compactes qui sont constructibles à l'aide de quotients. Même si ces surfaces sont connues et classifiées, une analyse systématique pourrait permettre de donner une représentation de ces surfaces, ainsi que des graphes de Cayley tracés dessus. Cela pourrait par exemple permettre d'énumérer les graphes de Cayley pouvant être tracés sur une surface donnée, euclidienne ou hyperbolique, de genre minimal.

Théorie des graphes planaires Les résultats évoqués dans le cadre des graphes possédant une infinité de singularités fournissent des éléments pour la description sous une forme arborescente des graphes planaires cofinis en général. La connaissance des plongements des graphes de Cayley n'est déjà pas suffisante dans le cas localement fini pour caractériser les plongements, il est envisageable d'obtenir des graphes d'une plus grande variété en étudiant le cas général. Même si les schémas d'étiquetages prouvent leurs limites dans le cas de Cayley, l'étude d'une représentation locale est une piste d'étude prometteuse, quitte à modifier la façon de représenter ces graphes.

Les plongements de graphes obtenus dans le cas sommet-transitif montrent leurs limites dès que l'on s'intéresse au cas cofini. L'existence d'un plongement par géodésiques n'est pas prouvée, mais nous avons donné des éléments montrant que, dans le cas où le graphe vérifie la propriété de préservation des faces, l'existence d'un tel plongement pourrait être subordonnée à l'existence d'un plongement d'un graphe planaire fini dans lequel on fixerait certains sommets. La preuve de l'existence d'un plongement pourrait permettre de construire un algorithme capable de calculer efficacement ce plongement.

Un aspect peu exploré au cours de ce mémoire concerne l'implication avec des problèmes sur les pavages périodiques, qui correspondent exactement aux graphes planaires cofinis euclidiens. En particulier, est-il possible de résoudre des problèmes de pavages en utilisant leurs groupes de symétries? Une étude systématique des propriétés des pavages périodiques peut profiter à la classification entre pavages périodiques et apériodiques. En cela, il est possible de s'intéresser à des problèmes de réécriture de pavages, pour discerner des propriétés telles que l'auto-similarité, ou la possibilité de discrétiser les pavages, comme c'est le cas pour les pavages archimédiens.

Perspectives algorithmiques Les schémas d'étiquetage constituent une manière efficace de représenter des graphes planaires sommet-transitifs, voire cofinis. Une partie du travail consacré à ce mémoire a consisté à s'intéresser aux problèmes algorithmiques associés aux graphes étudiés, et ce dans la mesure où la famille des graphes localement finis s'intersecte avec des familles de groupes très différentes. Il s'avère intéressant de créer des algorithmes spécialement adaptés, comme on l'a montré pour les problèmes du mot.

La mise en oeuvre de ces algorithmes est un prolongement nécessaire de ce travail, dans la mesure où elle s'inscrit dans une démarche expérimentale. Il est même possible d'envisager la création d'une plate-forme permettant d'appliquer ces algorithmes spécifiques aux groupes localement finis à l'aide d'un langage de programmation, dans la lignée de programmes comme GAP [Gap04]. Une telle plate-forme permettrait de mieux comprendre la structure des objets représentés et de permettre une analyse systématique de leurs propriétés.

Annexe A

Exemples d'énumérations

Dans cette annexe, nous présentons des résultats d'énumération pour les graphes cofinis planaires localement finis de faible degré, comme évoqué dans le théorème 4.1. Nous donnons ici une description :

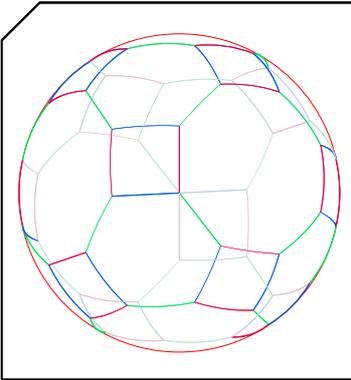
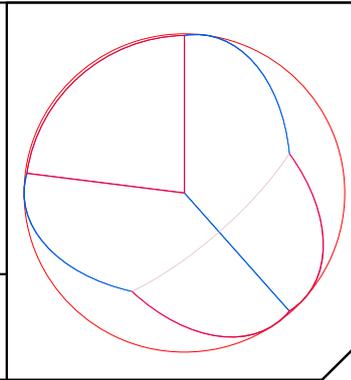
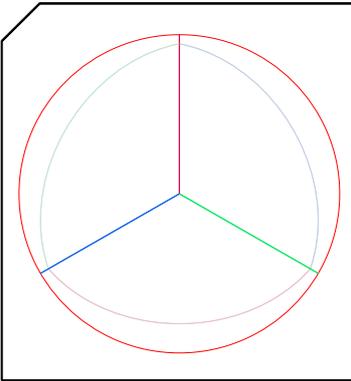
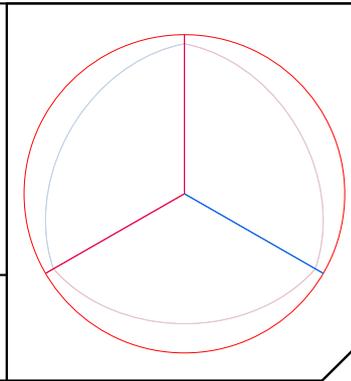
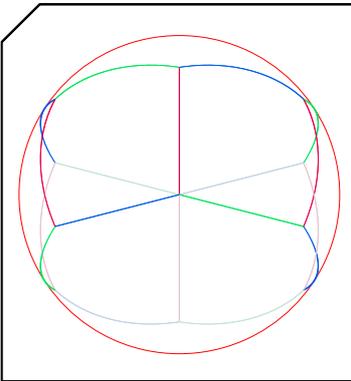
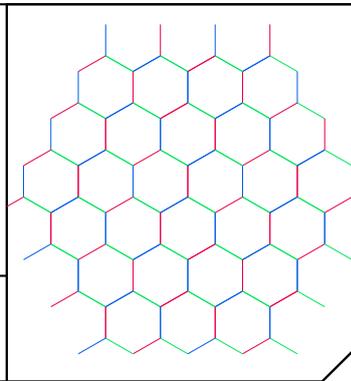
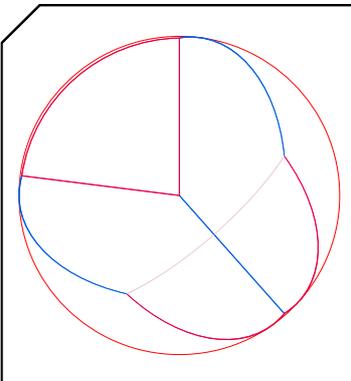
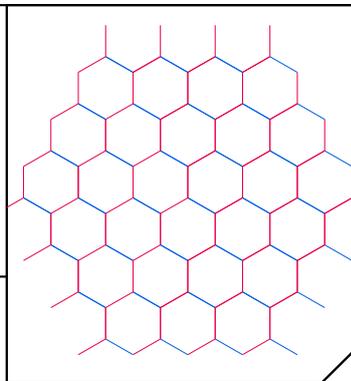
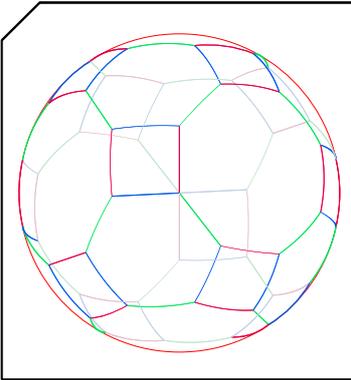
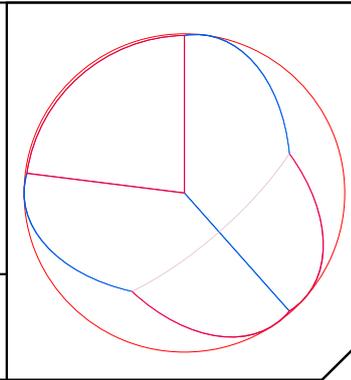
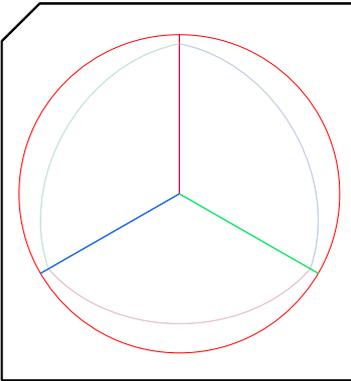
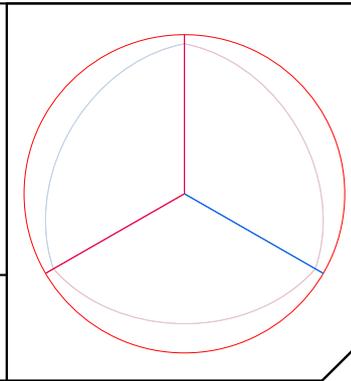
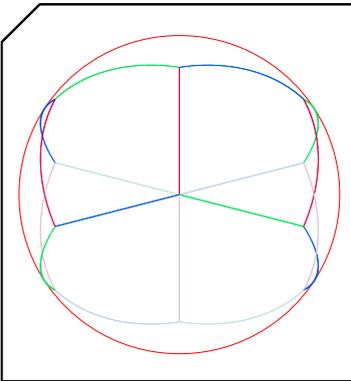
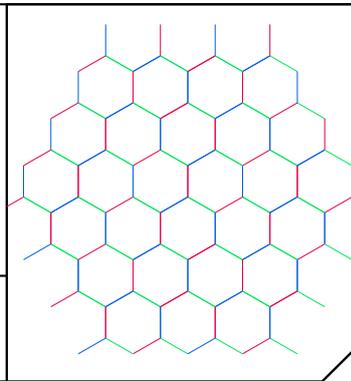
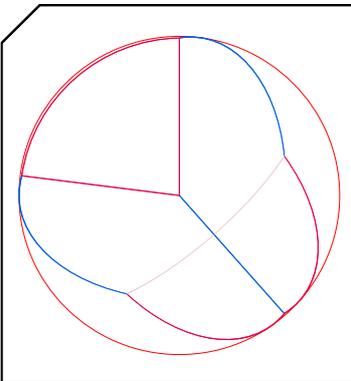
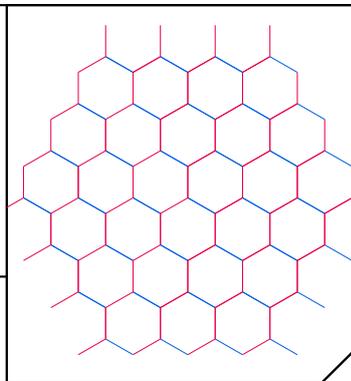
- (1) des 8 schémas d'étiquetage de graphes de Cayley de degré 3 ainsi que des 24 schémas d'étiquetages de degré 4 comptés dans le tableau 4.1 ;
- (2) des 16 schémas d'étiquetages de graphes sommet-transitifs de degré 3 ainsi que des 52 schémas d'étiquetage périodiques de degré 4 comptés dans le tableau 4.2 ;
- (3) de quelques graphes cofinis tracés dans les diverses géométries.

Pour chacun des schémas d'étiquetages, nous calculons le vecteur de type primitif (Prim) ainsi que la présentation associée (Pres). De plus, un exemple de graphe possédant un vecteur de type valide représentatif du schéma d'étiquetage est associé à chaque schéma. Naturellement, ne sont énumérées ici que les présentations des groupes, et pas les groupes d'automorphismes eux-mêmes. Un groupe donné peut correspondre à plusieurs graphes non isomorphes, et donc à plusieurs schémas distincts.

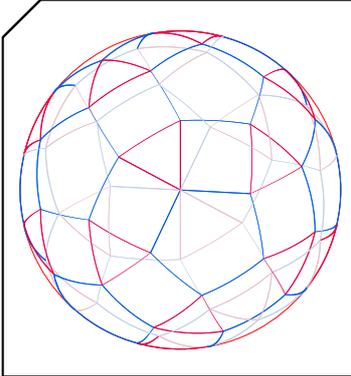
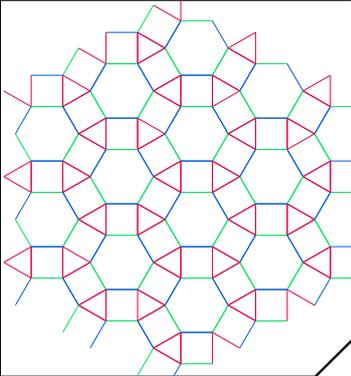
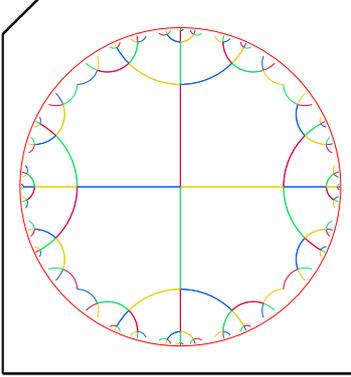
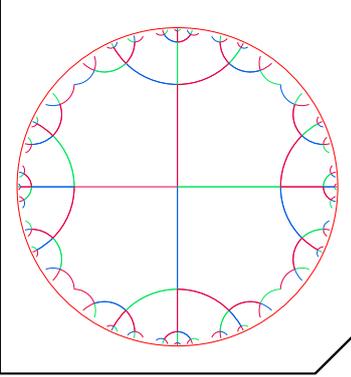
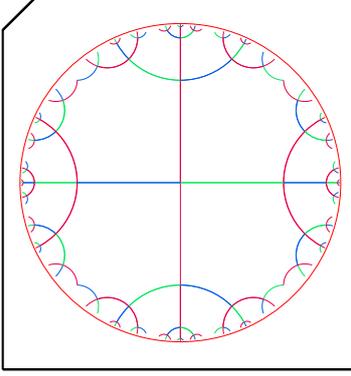
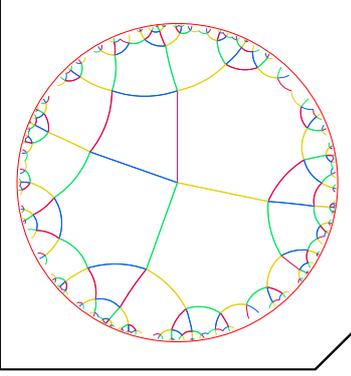
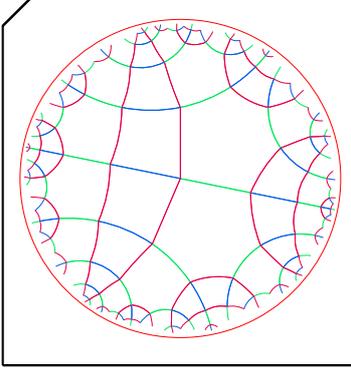
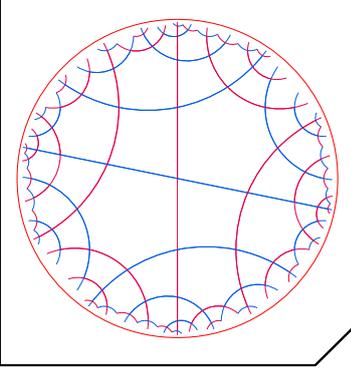
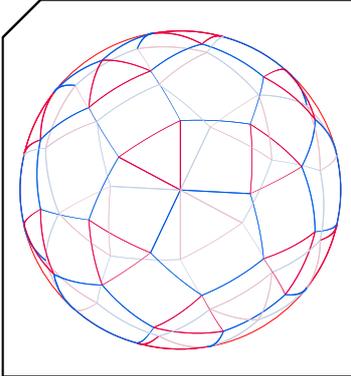
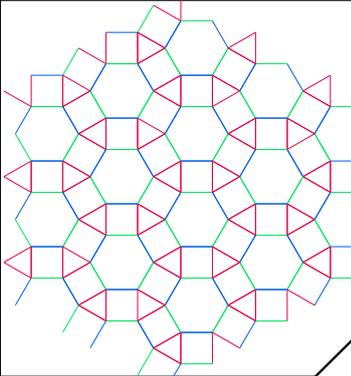
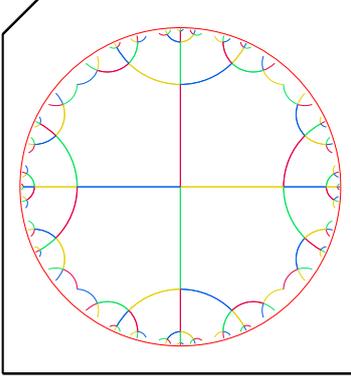
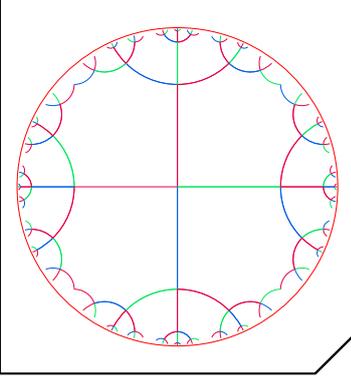
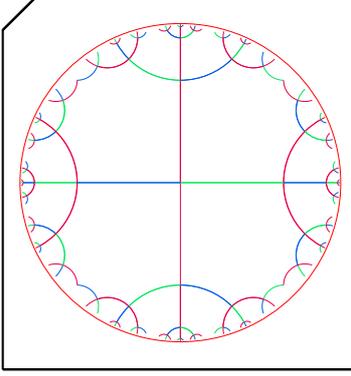
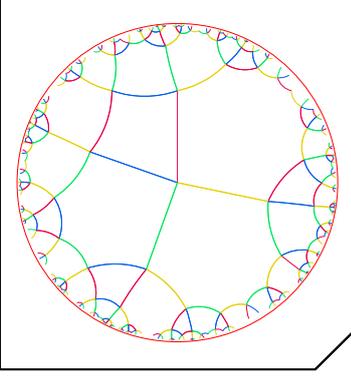
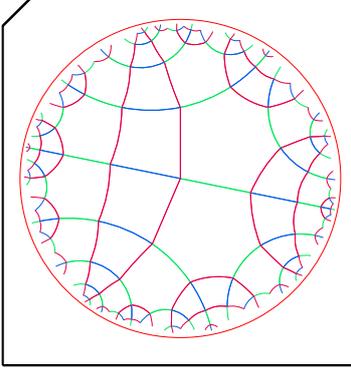
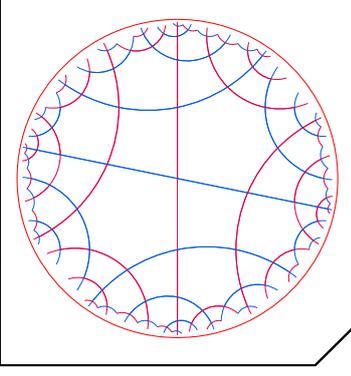
Liste des exemples

Graphes de Cayley localement finis de degré 3	120
Graphes de Cayley localement finis de degré 4	121
Graphes transitifs localement finis de degré 3	124
Graphes transitifs localement finis de degré 4	126
Exemples de graphes cofinis localement finis	132

A.1 Graphes de Cayley localement finis de degré 3

	Prim : $[2n_1; 2n_2; 2n_3]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} (a_1 a_3)^{n_3}, (a_3 a_2)^{n_2}, \\ (a_2 a_1)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[3n_1; 3n_1; 3n_1]$	Pres : $\left\{ (a_2 a_3 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[4n_1; 2n_2; 4n_1]$	Pres : $\left\{ (a_3 a_2)^{n_2}, (a_2 a_1 a_3 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[n_1; 4n_2; 4n_2]$	Pres : $\left\{ (a_3 a_1 a_3 a_2)^{n_2}, (a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[n_1; 2n_2; 2n_2]$	Pres : $\left\{ (a_3 a_2)^{n_2}, (a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[3n_1; 3n_1; 3n_1]$	Pres : $\left\{ (a_1 a_3 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[6n_1; 6n_1; 6n_1]$	Pres : $\left\{ (a_2 a_3 a_2 a_1 a_3 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[6n_1; 6n_1; 6n_1]$	Pres : $\left\{ (a_1 a_3 a_2^2 a_3 a_1)^{n_1} \right\}$	

A.2 Graphes de Cayley localement finis de degré 4

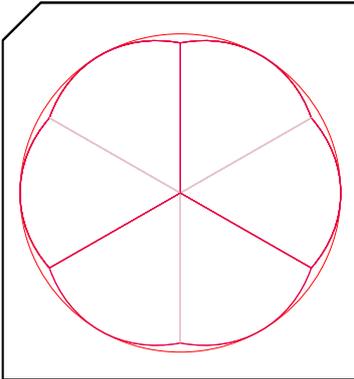
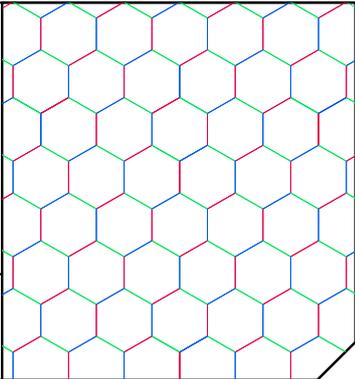
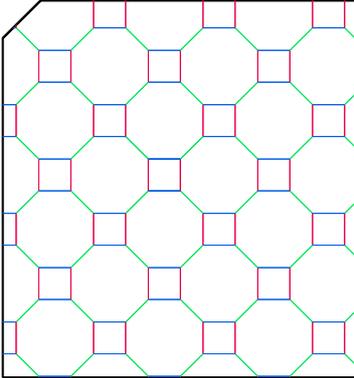
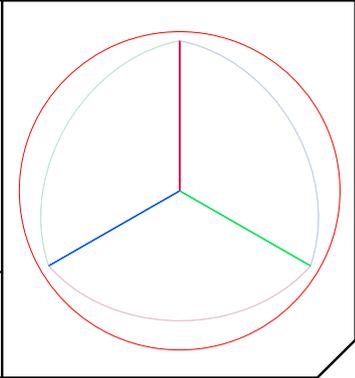
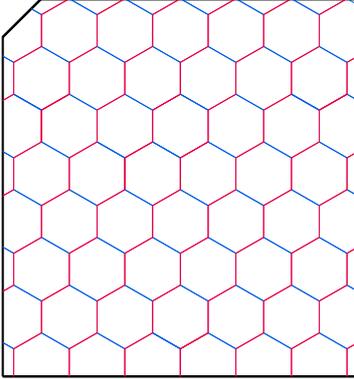
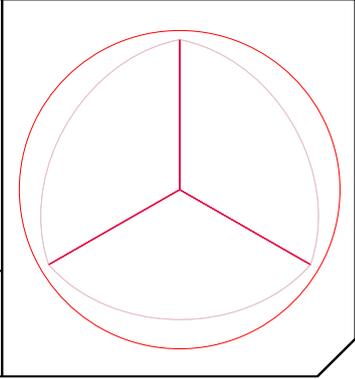
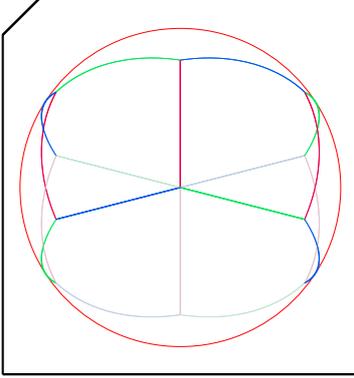
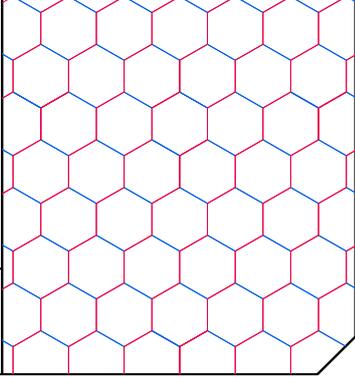
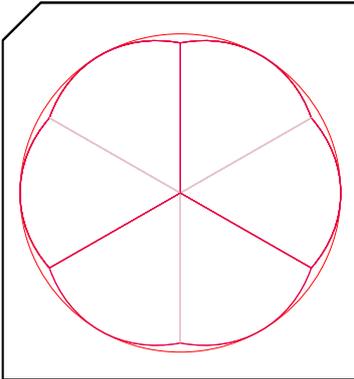
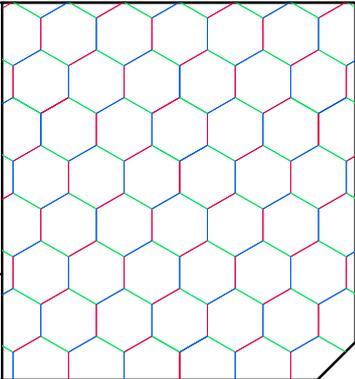
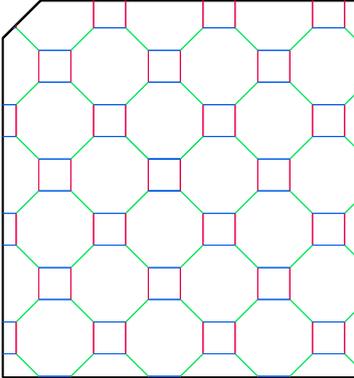
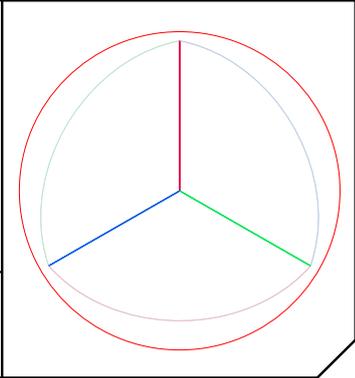
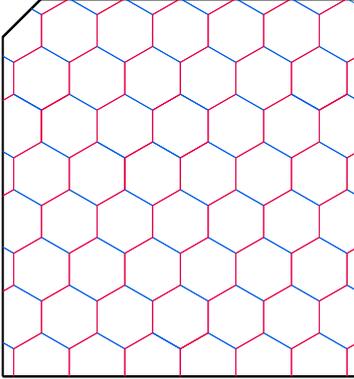
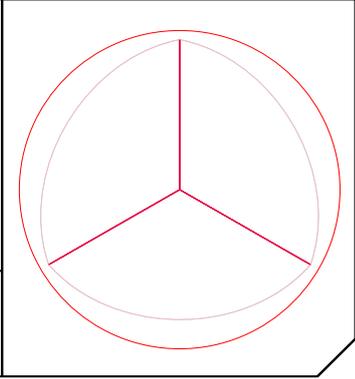
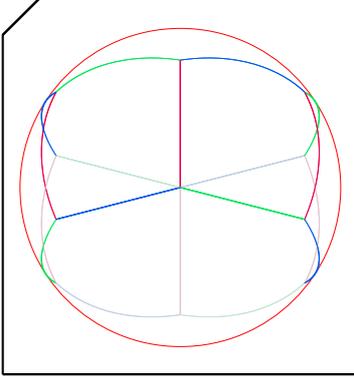
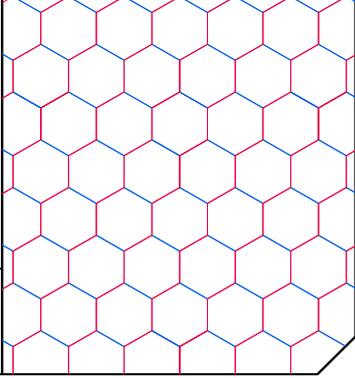
	Prim : $[n_1; 2n_2; n_3; 2n_2]$	Pres : $\left\{ (a_3)^{n_3}, (a_4 a_2)^{n_2}, (a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[8n_1; 8n_1; 8n_1; 8n_1]$	Pres : $\left\{ (a_2 a_3 a_4 a_3 a_2 a_1 a_4 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[8n_1; 8n_1; 8n_1; 8n_1]$	Pres : $\left\{ (a_2 a_1 a_4 a_3 a_2 a_3 a_4 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[2n_1; 2n_1; 2n_3; 2n_3]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_3)^{n_3}, (a_2 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[n_1; 4n_2; 2n_3; 4n_2]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_3)^{n_3}, (a_3 a_1 a_4 a_2)^{n_2}, (a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[8n_1; 8n_1; 8n_1; 8n_1]$	Pres : $\left\{ (a_1 a_4 a_2^2 a_3 a_4 a_3 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[2n_1; 2n_2; 2n_3; 2n_4]$	Pres : $\left\{ (a_1 a_4)^{n_4}, (a_4 a_3)^{n_3}, (a_3 a_2)^{n_2}, (a_2 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[2n_1; 2n_2; 2n_1; 2n_2]$	Pres : $\left\{ (a_1 a_2)^{n_2}, (a_4 a_1)^{n_1} \right\}$	

Liste des exemples

	Prim : $[4n_1; 4n_2; 4n_2; 4n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} (a_3 a_4 a_3 a_2)^{n_2}, \\ (a_2 a_1 a_4 a_1)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[4n_1; 4n_1; 4n_1; 4n_1]$	Pres : $\left\{ (a_1 a_4 a_3 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[4n_1; 4n_2; 4n_1; 4n_2]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} (a_1 a_4 a_3 a_2)^{n_2}, \\ (a_2 a_3 a_4 a_1)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[4n_1; 4n_1; 4n_3; 4n_3]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} (a_4 a_1 a_4 a_3)^{n_3}, \\ (a_2 a_3 a_2 a_1)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[4n_1; 4n_1; 4n_1; 4n_1]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_1 a_2 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[4n_1; 4n_1; 4n_1; 4n_1]$	Pres : $\left\{ (a_1 a_3^2 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[4n_1; 4n_1; 4n_1; 4n_1]$	Pres : $\left\{ (a_2 a_1 a_4 a_1)^{n_1} \right\}$	

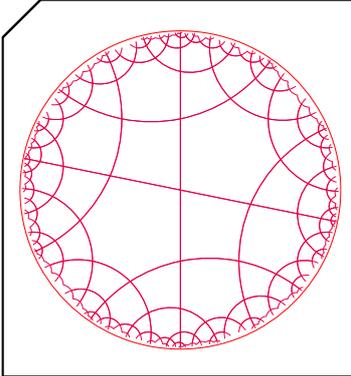
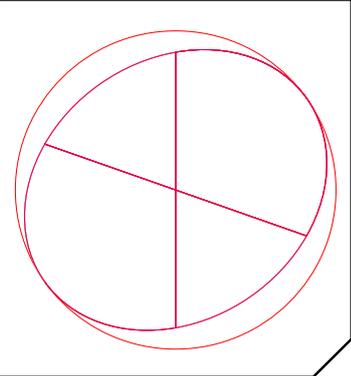
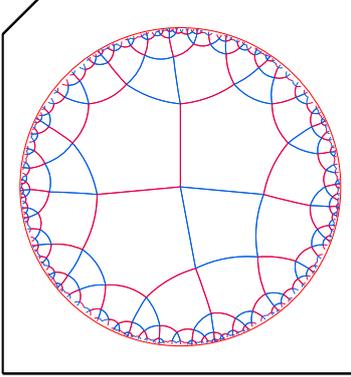
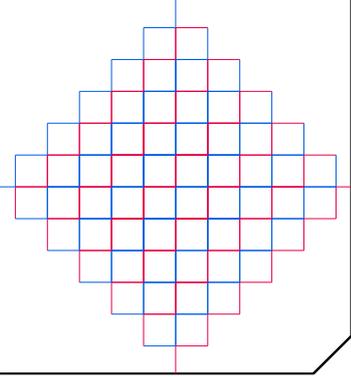
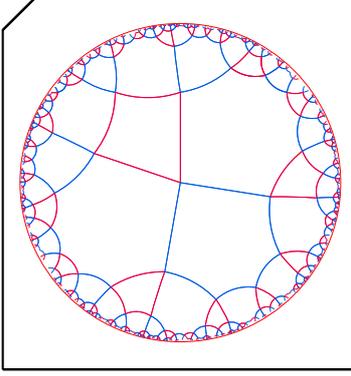
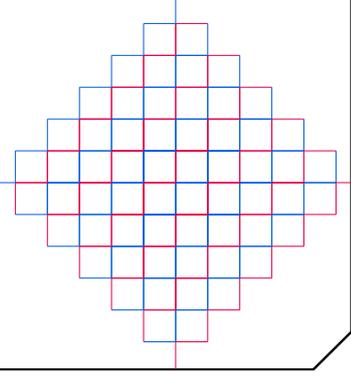
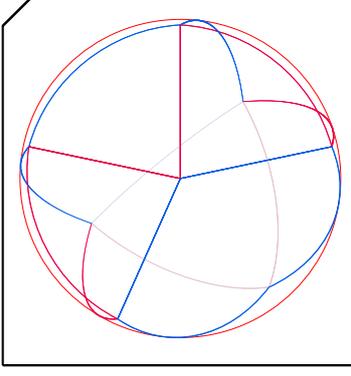
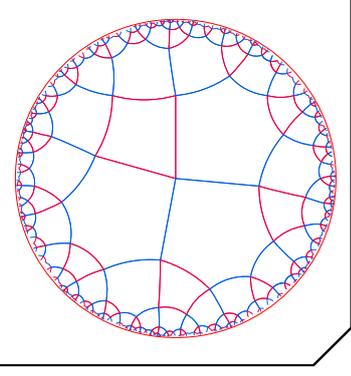
	Prim : $[4n_1; 4n_1; 4n_1; 4n_1]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_3 a_2 a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[6n_1; 6n_1; 2n_3; 6n_1]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_3)^{n_3}, (a_1 a_4 a_2^2 a_3 a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[n_1; 6n_2; 6n_2; 6n_2]$	Pres : $\left\{ (a_3 a_4 a_3 a_1 a_4 a_2)^{n_3}, (a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[n_1; 3n_2; 3n_2; 3n_2]$	Pres : $\left\{ (a_3 a_4 a_2)^{n_3}, (a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[n_1; 3n_2; 3n_2; 3n_2]$	Pres : $\left\{ (a_1^2 a_2)^{n_3}, (a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[4n_1; 2n_2; 2n_3; 4n_1]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_3)^{n_3}, (a_3 a_2)^{n_2}, (a_2 a_1 a_4 a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[2n_1; 2n_1; 4n_3; 4n_3]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_1 a_4 a_3)^{n_3}, (a_2 a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[6n_1; 6n_1; 2n_3; 6n_1]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_3)^{n_3}, (a_2 a_3 a_2 a_1 a_4 a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[6n_1; 6n_1; 2n_3; 6n_1]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_3)^{n_3}, (a_1 a_4 a_2^2 a_3 a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[n_1; 6n_2; 6n_2; 6n_2]$	Pres : $\left\{ (a_3 a_4 a_3 a_1 a_4 a_2)^{n_3}, (a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[n_1; 3n_2; 3n_2; 3n_2]$	Pres : $\left\{ (a_1^2 a_2)^{n_3}, (a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[4n_1; 2n_2; 2n_3; 4n_1]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_3)^{n_3}, (a_3 a_2)^{n_2}, (a_2 a_1 a_4 a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[2n_1; 2n_1; 4n_3; 4n_3]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_1 a_4 a_3)^{n_3}, (a_2 a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[6n_1; 6n_1; 2n_3; 6n_1]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_3)^{n_3}, (a_2 a_3 a_2 a_1 a_4 a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[6n_1; 6n_1; 2n_3; 6n_1]$	Pres : $\left\{ (a_4 a_3)^{n_3}, (a_1 a_4 a_2^2 a_3 a_1)^{n_1} \right\}$
	Prim : $[n_1; 6n_2; 6n_2; 6n_2]$	Pres : $\left\{ (a_3 a_4 a_3 a_1 a_4 a_2)^{n_3}, (a_1)^{n_1} \right\}$

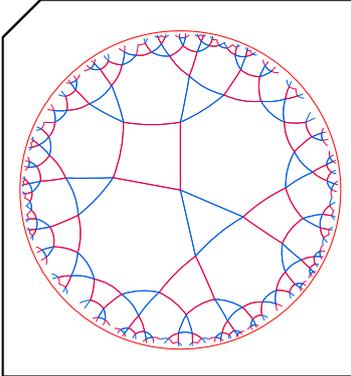
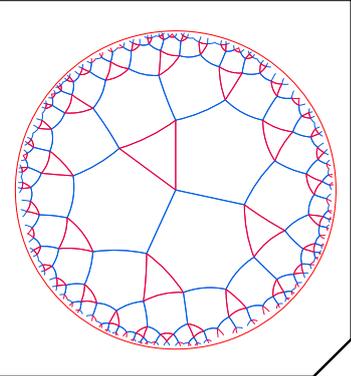
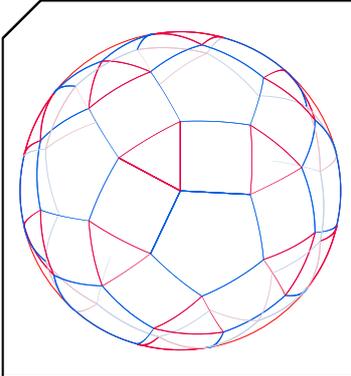
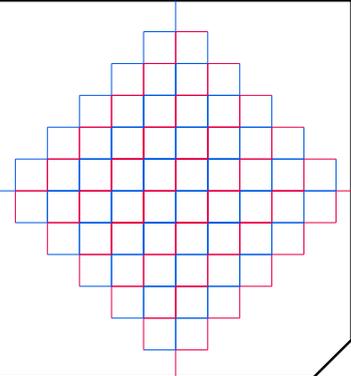
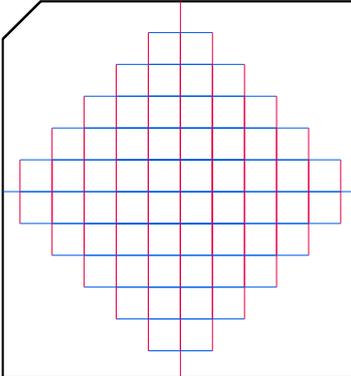
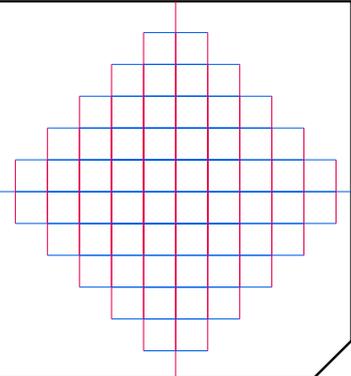
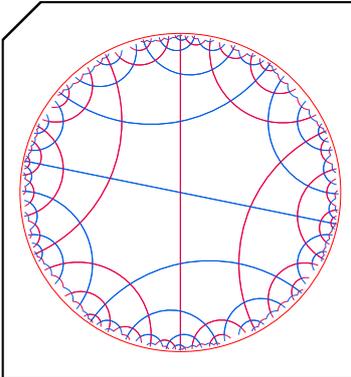
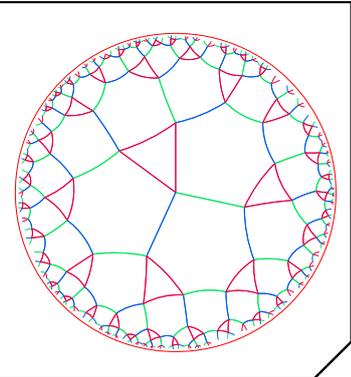
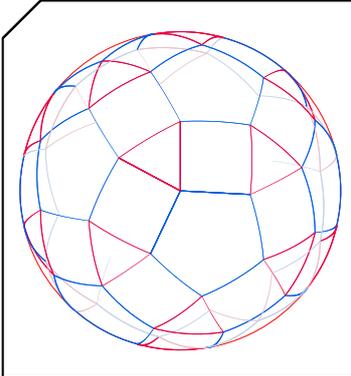
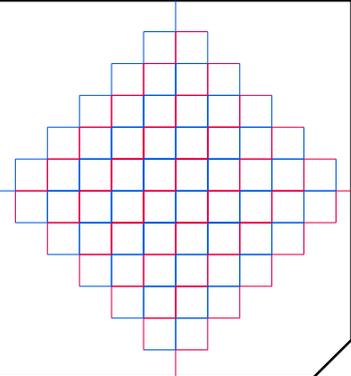
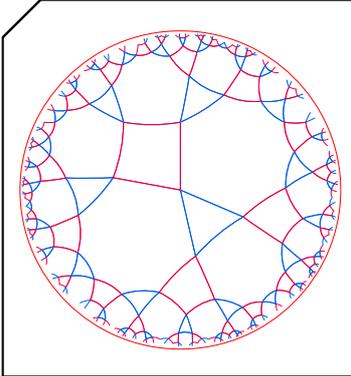
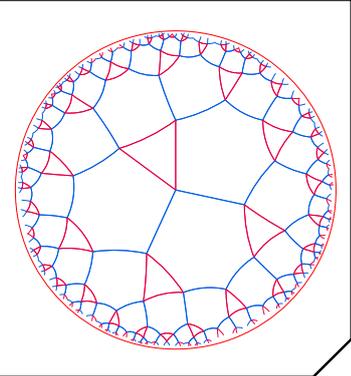
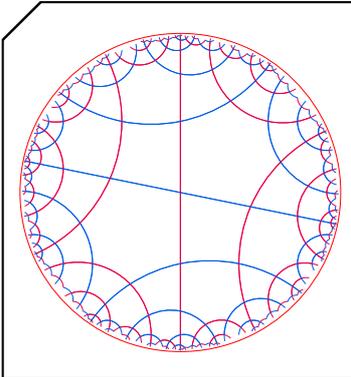
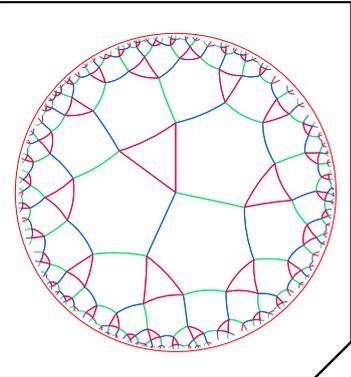
A.3 Graphes transitifs localement finis de degré 3

	Prim : $[2n_1, 2n_1, 2n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^1, (a_2^2)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[2n_1, 4n_2, 4n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^0, a_3^0, (a_1 a_2)^{n_1}, (a_2 a_3 a_1 a_2)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[6n_1, 6n_1, 6n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^1, (a_1 a_2 a_2^2 a_2 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, 2n_2, 4n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^1, a_3^1, (a_1 a_3 a_1 a_2)^{n_1}, (a_2 a_3)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[6n_1, 6n_1, 6n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^1, (a_1 a_2 a_2^2 a_2 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[6n_1, 6n_1, 6n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^0, a_3^1, (a_1 a_3 a_1 a_2 a_3 a_2)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[3n_1, 3n_1, 3n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^0, a_3^0, (a_1 a_3 a_2)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[n_1, n_1, n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, (a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[6n_1, 6n_1, 6n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^1, (a_1 a_2 a_2^2 a_2 a_1)^{n_1} \right\}$	

	Prim : $[3n_1, 3n_1, 3n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^0, (a_1 a_2 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[3n_1, 3n_1, 3n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^0, (a_1 a_2 a_1)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[2n_1, 2n_2, 2n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^0, (a_2^2)^{n_1}, (a_1 a_2)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[n_1, 2n_2, 2n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^0, (a_1)^{n_1}, (a_1 a_2)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[n_1, 2n_2, 2n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^0, (a_1)^{n_1}, (a_1 a_2)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[2n_1, 2n_2, 2n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^0, a_3^1, (a_1 a_2)^{n_1}, (a_2 a_3)^{n_2}, (a_3 a_1)^{n_3} \right\}$	

A.4 Graphes transitifs localement finis de degré 4

	Prim : $[2n_1, 2n_2, 2n_1, 2n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^1, (a_2^2)^{n_1}, (a_2^2)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[6n_1, 6n_1, 2n_2, 6n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^1, (a_1 a_2 a_2^2 a_2 a_1)^{n_1}, (a_2^2)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[2n_1, 2n_3, 2n_2, 2n_3]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^1, (a_2^2)^{n_1}, (a_1 a_2)^{n_2}, (a_2^2)^{n_3} \right\}$	
	Prim : $[3n_1, 3n_1, n_2, 3n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^0, (a_1 a_2 a_1)^{n_1}, (a_2)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[2n_1, 6n_2, 6n_2, 6n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^1, (a_2^2)^{n_1}, (a_1 a_2 a_1 a_2)^{n_2} \right\}$	

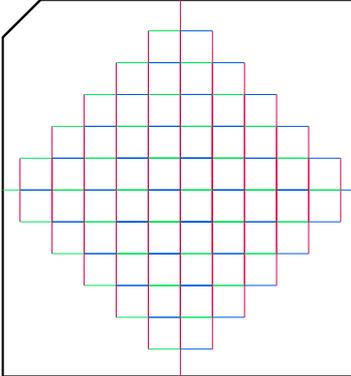
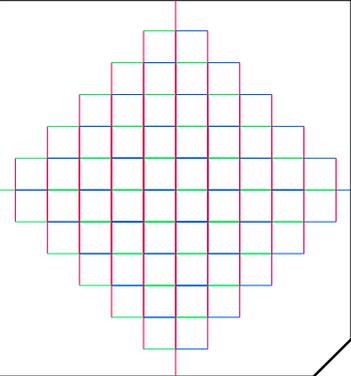
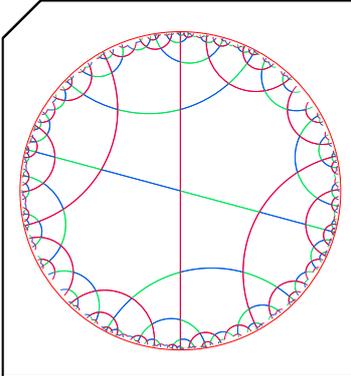
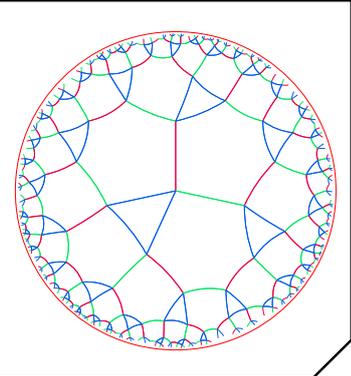
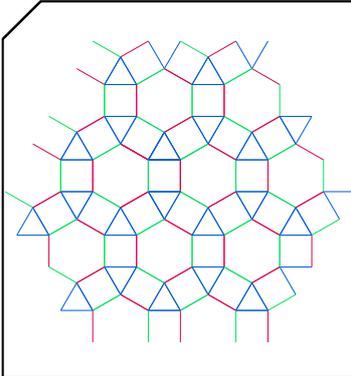
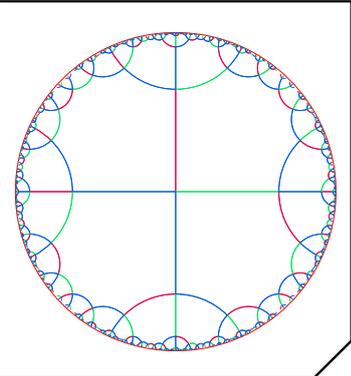
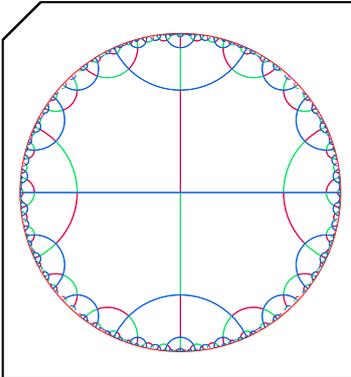
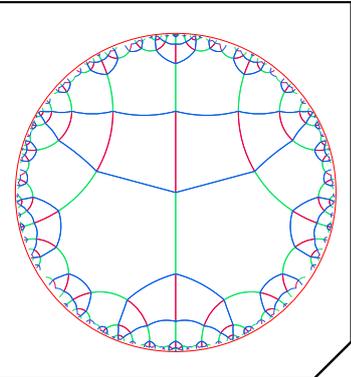
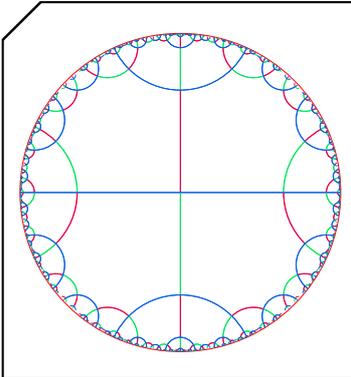
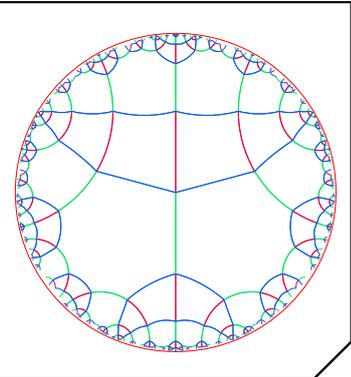
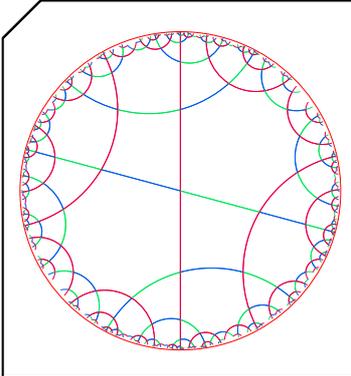
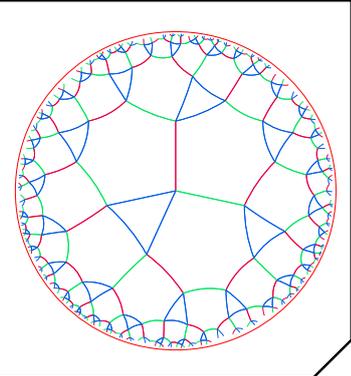
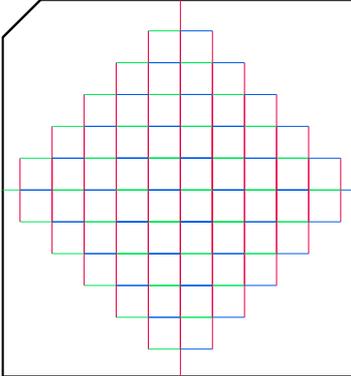
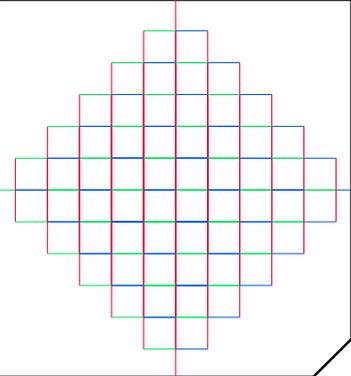
	Prim : $[2n_1, 4n_2, n_3, 4n_2]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^1, a_2^0, (a_2^2)^{n_1}, \\ (a_1 a_2 a_1 a_2)^{n_2}, (a_2)^{n_3} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[n_1, 2n_2, n_3, 2n_2]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^0, (a_1)^{n_1}, (a_1 a_2)^{n_2}, \\ (a_2)^{n_3} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, 4n_1, 4n_1, 4n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^0, (a_1 a_2 a_1 a_2)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[2n_1, 2n_2, 2n_1, 2n_2]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^1, a_2^0, (a_1 a_2)^{n_1}, (a_2 a_1)^{n_2} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, 4n_1, 4n_1, 4n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^1, a_2^0, (a_1 a_2^2 a_1)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[n_1, 3n_2, 3n_2, 3n_2]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^1, (a_1)^{n_1}, (a_1 a_2^2)^{n_2} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[n_1, 6n_2, 6n_2, 6n_2]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^0, a_3^1, (a_1)^{n_1}, \\ (a_1 a_3 a_1 a_2 a_3 a_2)^{n_2} \end{array} \right\}$	

Liste des exemples

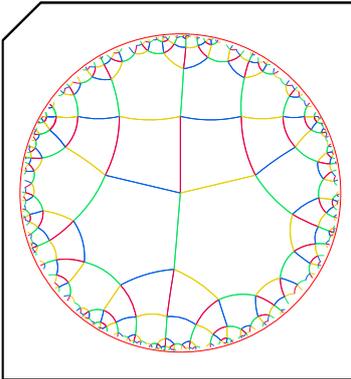
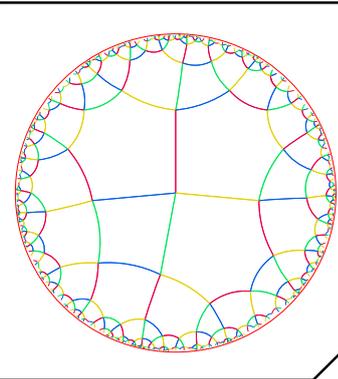
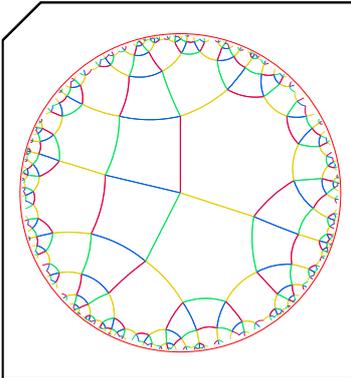
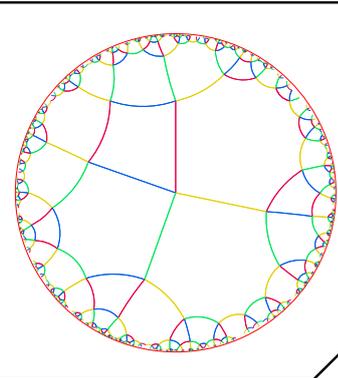
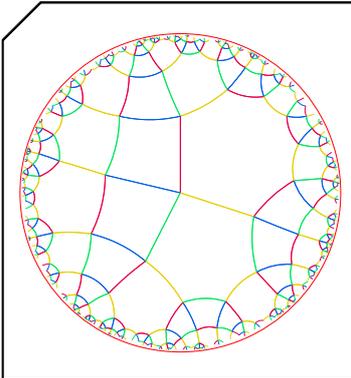
	Prim : $[n_1, 3n_2, 3n_2]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^0, a_3^0, (a_1)^{n_1}, \\ (a_1 a_3 a_2)^{n_2} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[n_1, 6n_2, 6n_2]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^1, a_3^0, (a_1)^{n_1}, \\ (a_1 a_3 a_2 a_3 a_1 a_2)^{n_2} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, 4n_1, 4n_1, 4n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^1, a_2^0, a_3^0, (a_1 a_2 a_3 a_1)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[8n_1, 8n_1, 8n_1, 8n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^1, a_2^1, a_3^1, \\ (a_1 a_2 a_3 a_2^2 a_3 a_1)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[6n_1, 6n_1, 2n_2, 6n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^1, a_2^1, a_3^1, \\ (a_1 a_2 a_2^2 a_3 a_1)^{n_1}, (a_2 a_3)^{n_2} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[8n_1, 8n_1, 8n_1, 8n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^0, a_3^0, \\ (a_1 a_3 a_1 a_2 a_1 a_3 a_1 a_2)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, 4n_1, 4n_1, 4n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^0, a_3^0, (a_1 a_3 a_1 a_2)^{n_1} \end{array} \right\}$	

	Prim : $[4n_1, 4n_1, 4n_1, 4n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^1, a_3^1, (a_1 a_3 a_1 a_2)^{n_1} \right\}$	Prim : $[4n_1, 4n_1, 2n_2, 2n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^0, a_3^1, (a_1 a_2 a_1 a_2)^{n_1}, (a_1 a_3)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, 4n_1, 4n_2, 4n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^0, a_3^0, (a_1 a_2 a_1 a_2)^{n_1}, (a_1 a_3 a_1 a_3)^{n_2} \right\}$	Prim : $[2n_1, 2n_1, 2n_2, 2n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^1, a_3^1, (a_1 a_2)^{n_1}, (a_1 a_3)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[2n_1, 2n_1, 4n_2, 4n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^0, a_3^1, (a_1 a_2)^{n_1}, (a_1 a_3 a_1 a_3)^{n_2} \right\}$	Prim : $[2n_1, 2n_1, 2n_2, 2n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^0, a_3^0, (a_1 a_2)^{n_1}, (a_1 a_3)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, 4n_1, 4n_2, 4n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^1, a_3^1, (a_1 a_2 a_1 a_2)^{n_1}, (a_1 a_3 a_1 a_3)^{n_2} \right\}$	Prim : $[8n_1, 8n_1, 8n_1, 8n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^0, a_3^1, (a_1 a_3 a_1 a_2 a_1 a_3 a_1 a_2)^{n_1} \right\}$	

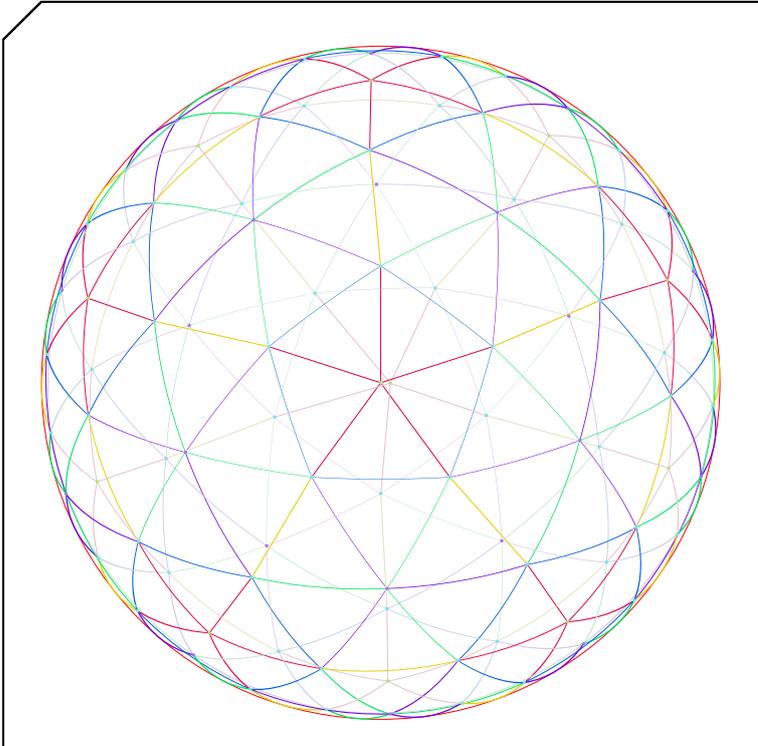
Liste des exemples

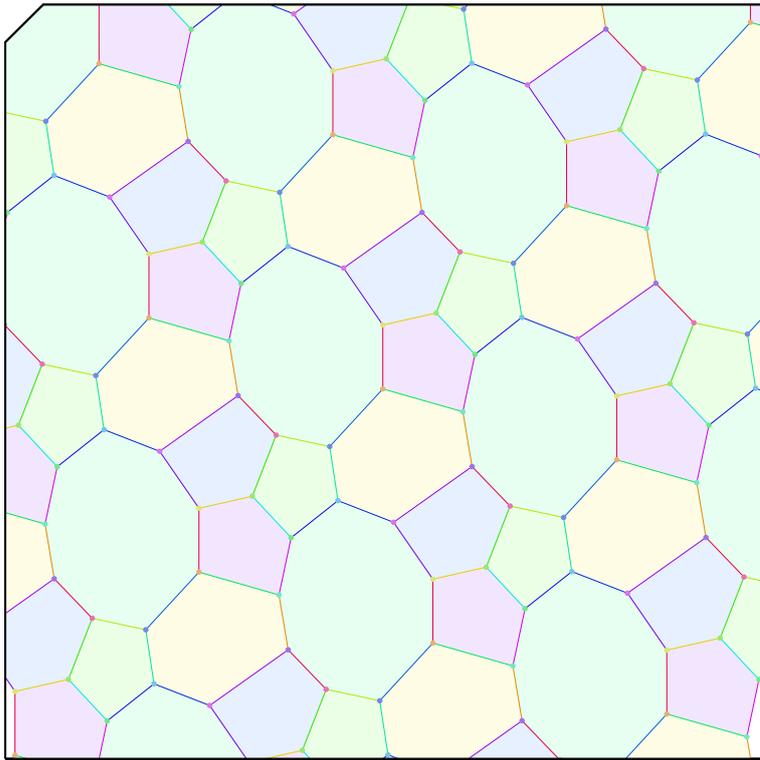
	Prim : $[4n_1, 4n_1, 4n_1, 4n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^0, a_3^0, (a_1 a_3 a_1 a_2)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, 4n_2, 4n_1, 4n_2]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^1, a_3^1, (a_1 a_3 a_1 a_2)^{n_1}, (a_2 a_1 a_3 a_1)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, n_2, 4n_1, 2n_3]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^0, a_3^1, (a_1 a_2 a_3 a_2)^{n_1}, (a_2)^{n_2}, (a_3 a_1)^{n_3} \right\}$	
	Prim : $[8n_1, 8n_1, 8n_1, 8n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^0, a_3^0, (a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 a_2 a_3 a_2)^{n_1} \right\}$	
	Prim : $[2n_1, 4n_2, 4n_2, 2n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^1, a_3^0, (a_1 a_2)^{n_1}, (a_2 a_3 a_2 a_3)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[6n_1, n_2, 6n_1, 6n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^0, a_2^0, a_3^1, (a_1 a_3 a_1 a_2 a_3 a_2)^{n_1}, (a_2)^{n_2} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, 4n_1, 4n_1, 4n_1]$	Pres : $\left\{ a_1^1, a_2^1, a_3^1, (a_1 a_3 a_1 a_2)^{n_1} \right\}$	

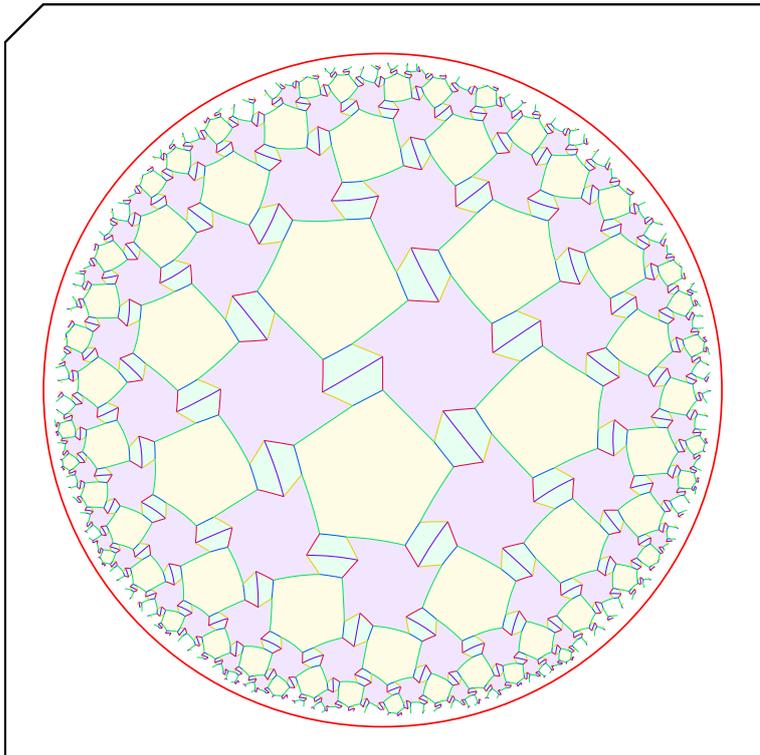
	Prim : $[4n_1, 2n_2, 2n_2, 4n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^1, a_2^0, a_3^0, (a_1 a_2 a_1 a_2)^{n_1}, \\ (a_2 a_3)^{n_2} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[8n_1, 8n_1, 8n_1, 8n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^1, a_3^1, a_4^3, \\ (a_1 a_2^2 a_2 a_1 a_2)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[8n_1, 8n_1, 8n_1, 8n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^1, \\ (a_1 a_4 a_1 a_2 a_3 a_4 a_3 a_2)^{n_1} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[6n_1, 6n_1, 2n_2, 6n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^0, a_3^1, a_4^1, \\ (a_1 a_4 a_1 a_2 a_3 a_2)^{n_1}, \\ (a_3 a_4)^{n_2} \end{array} \right\}$	
	Prim : $[4n_1, 4n_2, 4n_2, 4n_1]$	Pres : $\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^1, a_3^0, a_4^1, \\ (a_1 a_4 a_1 a_2)^{n_1}, \\ (a_2 a_3 a_4 a_1 a_3)^{n_2} \end{array} \right\}$	

	Prim :	$[4n_1, 2n_2, 2n_3, 4n_1]$	$\left\{ \begin{array}{l} a_1^0, a_2^1, a_3^1, a_4^1 \\ (a_1 a_4 a_1 a_2)^{n_1}, (a_2 a_3)^{n_2}, \\ (a_3 a_4)^{n_3} \end{array} \right\}$	
	Pres :			
	Prim :	$[4n_1, 4n_1, 2n_2, 2n_3]$	$\left\{ \begin{array}{l} a_1^1, a_2^0, a_3^1, a_4^1 \\ (a_1 a_2 a_3 a_2)^{n_1}, (a_3 a_4)^{n_2}, \\ (a_4 a_1)^{n_3} \end{array} \right\}$	
	Pres :			
	Prim :	$[2n_1, 2n_2, 2n_3, 2n_4]$	$\left\{ \begin{array}{l} a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, (a_1 a_2)^{n_1}, \\ (a_2 a_3)^{n_2}, (a_3 a_4)^{n_3}, \\ (a_4 a_1)^{n_4} \end{array} \right\}$	
	Pres :			

A.5 Exemples de graphes cofinis localement finis

	Géom :	Sphérique
	Index :	3 sommets 5 arêtes 3 faces
	Prim :	$[3n_1; 3n_1; 3n_1;$ $3n_1; 3n_1];$ $[3n_1; 3n_2; 3n_3;$ $3n_3; 3n_2; 3n_1];$ $[3n_2; 3n_3; 3n_2;$ $3n_3; 3n_2; 3n_3]$
<p>Ce graphe est obtenu en considérant le plongement par polygones réguliers de l'icosaèdre dans la sphère, puis en subdivisant chaque face triangulaire en 9 triangles. Il appartient à la famille des dômes géodésiques, qui sont des triangulations particulières de la sphère.</p>		

	Géom :	Euclidienne
	Index :	10 sommets 15 arêtes 5 faces
	Prim :	$[9n1; 6n2; 5n3]$; $[5n4; 9n1; 5n3]$; $[5n5; 5n4; 5n3]$; $[9n1; 5n5; 5n3]$; $[6n2; 9n1; 5n3]$; $[9n1; 6n2; 5n5]$; $[6n2; 9n1; 5n5]$; $[6n2; 5n4; 9n1]$; $[6n2; 9n1; 5n4]$; $[5n4; 5n5; 9n1]$
<p>Ce graphe est obtenu en effectuant un plongement du graphe de Petersen, plongé dans le tore, puis en considérant le revêtement universel du tore dans le plan euclidien. On vérifie facilement que ce graphe n'est pas sommet-transitif.</p>		

	Géom :	Hyperbolique
	Index :	3 sommets 5 arêtes 3 faces
	Prim :	$[4n1; 2n2; 3n3]$; $[3n3; 2n2; 4n1]$; $[4n1; 3n3; 4n1]$
<p>Ce plongement fournit un exemple de graphe cofini tracé sur le plan hyperbolique, possédant des symétries d'ordre 4 et 5 et des faces non convexes. Le groupe de symétries de ce graphe correspond au pavage du plan hyperbolique par des carrés, à raison de 5 carrés par sommet.</p>		

Annexe B

Implémentation des algorithmes

Cette annexe décrit l'implémentation des algorithmes basés sur les schémas d'étiquetages et utilisés pour obtenir les plongements des graphes planaires cofinis localement finis qui apparaissent dans ce mémoire. Le langage de programmation utilisé pour les algorithmes est le langage fonctionnel `OCaml`, pour les facilités de programmation offertes, tandis que le format des dessins des plongements est le langage `PostScript`, pour ses capacités à rendre rapidement et efficacement de très gros graphes.

Deux programmes ont été réalisés dans le cadre de ce mémoire. Le premier concerne la réalisation de plongements de graphes planaires cofinis localement finis, et est subséquentement nommé `draw`. Le second, qui s'intéresse à l'énumération des graphes de Cayley planaires localement finis et l'élimination des paires de graphes isomorphes, se nomme de manière appropriée `enum`.

B.1 Dessin des plongements : `draw`

La structure modulaire du programme `draw` est représentée à la figure B.1. Ce programme se compose de plusieurs parties distinctes :

- une bibliothèque de fonctions géométriques, nécessaire pour effectuer des calculs dans les trois géométries du plan. Cette librairie permet de calculer des distances et des isométries, tracer des géodésiques ...
- une bibliothèque de plongement des graphes, permettant de stocker les sommets, arêtes et faces des graphes dans des tables de hachage et de produire les plongements de ces éléments ;
- une bibliothèque spécialement adaptée au traitement des graphes cofinis, permettant en particulier d'essayer de calculer un plongement de ces graphes ;
- des implémentations de construction de graphes : graphes de Cayley, sommet-transitifs, cofinis, arbres barycentrique.

Les éléments des graphes sont stockés dans des tables de hachage, qu'il s'agisse des sommets, des arêtes ou des faces finies. Le calcul du plongement des graphes sommet-transitifs est basé sur les formules données dans la preuve du théorème 3.2, et utilise une méthode de descente de gradient pour essayer d'obtenir le plongement de graphes cofinis. Lorsque la connaissance locale de la géométrie du graphe a été calculée, les différents modules permettent de construire les graphes à une distance quelconque de l'origine. Le module `Graph` trace les graphes sommet-transitifs, tandis que le module `Cofinite` trace les graphes cofinis. Les modules `Subgraph` et `Treegraph` permettent de calculer

respectivement, en fonction d'un graphe de Cayley donné, le graphe de Cayley d'un sous-groupe et son graphe barycentrique (un arbre barycentrique si le graphe est 2-séparable).

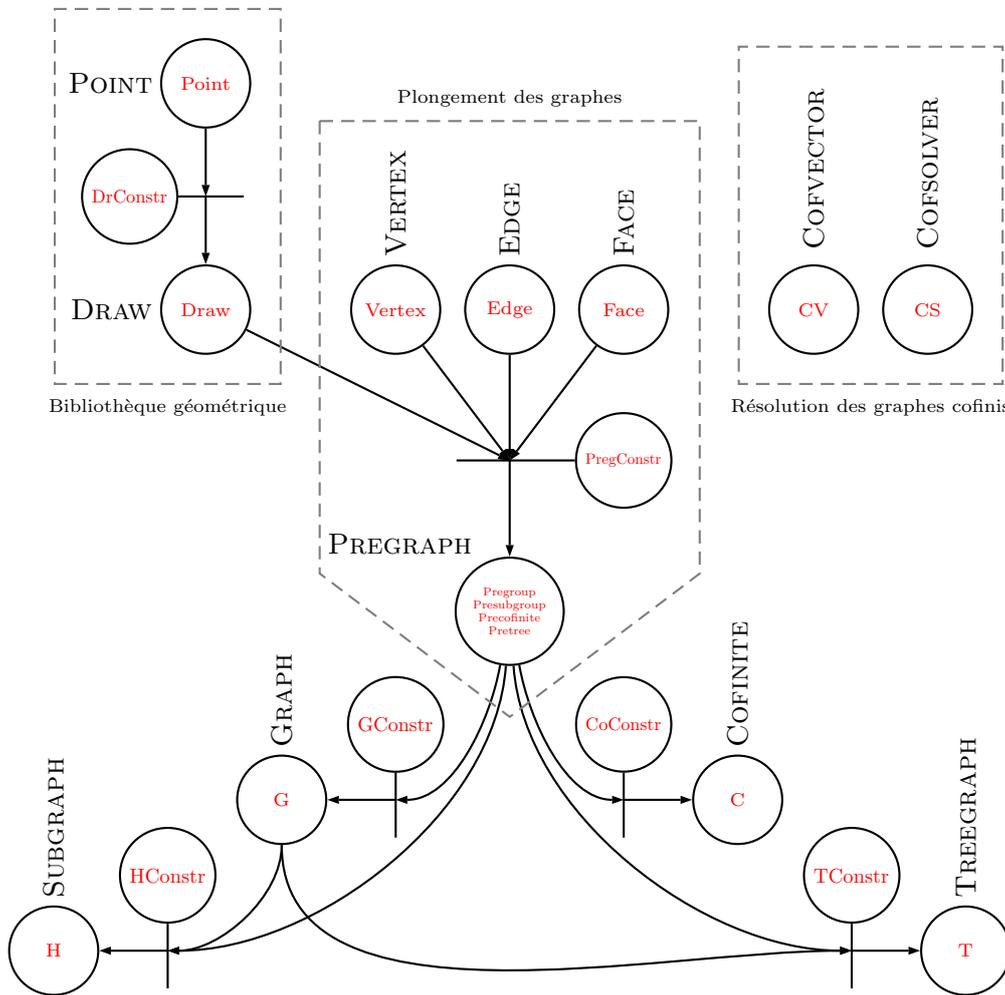


FIG. B.1: Description modulaire du programme `draw`. Chaque cercle simple représente une signature de module, les cercles auxquels sont rattachés des segments représentent des signature de foncteurs. Les noms apparaissant dans les cercles représentent des implémentations de ces signatures.

Le programme prend en argument des fichiers représentant les schémas d'étiquetages, dont un exemple est présentée figure B.2. Ces fichiers sont lus à partir d'une grammaire décrivant leur syntaxe, et contiennent, une représentation du schéma d'étiquetage sous la forme d'une liste de vecteurs de nombres entiers. Pour les graphes sommet-transitifs, il s'agit du vecteur de type, d'un vecteur de direction – représentant la permutation d'ordre 2 du schéma – et d'un vecteur d'inversion – représentant les changements d'ordre de rotation des générateurs autour d'un sommet. Pour les graphes cofinis, il est nécessaire d'avoir une série de tels vecteurs par classe de sommets.

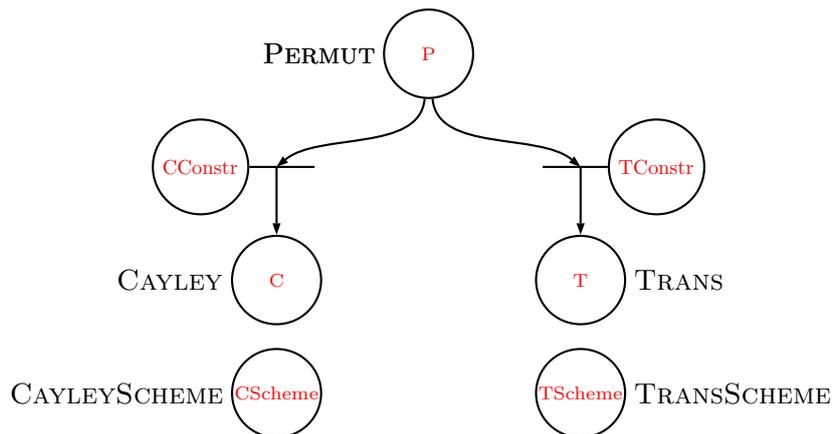
En-tête	→	# !C
Degré du graphe	→	5
Vecteur de type	→	4 4 4 4 4
Vecteur de direction	→	1 2 3 4 5
Vecteur d'inversion	→	1 1 1 1 1
Couleurs des arêtes	→	1 2 3 4 5
Couleurs des faces	→	1 2 2 3 3

FIG. B.2: Exemple de fichier représentant un schéma d'étiquetage.

B.2 Énumération des graphes : `enum`

Le programme `enum` a une structure modulaire beaucoup plus simple que le programme `draw`. Les difficultés algorithmiques que présentent le problème de l'énumération sont plus d'ordre combinatoires que géométriques. Globalement, les schémas d'étiquetage sont stockés dans une table de hachage, à l'aide d'une clé basée sur le schéma d'étiquetage. L'énumération est d'abord faite de manière directe, à l'aide d'un algorithme du type *code de Gray*, permettant d'énumérer les permutations d'un ordre donné de manière efficace. Puis, les graphes apparaissant en double, à rotation ou symétrie près, sont éliminés.

Les techniques d'énumération utilisées pour les graphes sommet-transitifs ne sont pour l'instant implémentées qu'à titre expérimental en `OCaml`¹. Les schémas d'étiquetages étant plus variés et les classes d'isomorphismes plus larges, ces techniques posent des problèmes complexes d'algorithmique pour réaliser des programmes efficaces. L'objectif à long terme consiste à réaliser l'énumération des graphes cofinis, ceci en fonction du nombre de classes de sommets et du degré maximal du graphe.

FIG. B.3: Description modulaire du programme `enum`. Le schéma est construit de manière similaire au schéma de la figure B.1.

¹Ces algorithmes ont été implémentés et fonctionnent en langage `Maple`.

Bibliographie

- [ACM84] Arnon, D. S., G. E. Collins, and S. McCallum: *Cylindrical algebraic decomposition I: the basic algorithm*. Siam Journal on Computing, 13:865–877, 1984.
- [Am89] Avenhaus, J. and D. Wißmann: *Using rewriting techniques to solve the generalized word problem in polycyclic groups*. In *Proceedings of the ACM-SIGSAM 1989 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pages 322–337. ACM Press, 1989.
- [AM02] Alspach, B. and M. Mishna: *Enumeration of Cayley graphs and digraphs*. Discrete Mathematics, 256(3):527–539, 2002.
- [Bab77] Babai, L.: *Some applications of graph contractions*. Journal of Graph Theory, 1 :125–130, 1977.
- [Bab97] Babai, László: *The growth rate of vertex-transitive planar graphs*. In *Proc. 8th Ann. Symp. on Discrete Algorithms*, pages 564–573. New Orleans LA, ACM—SIAM, 1997.
- [Bea83] Beardon, A. F.: *The geometry of discrete groups*. Number 91 in *Graduate Text in Mathematics*. Springer Verlag, New York, 1983.
- [BMS99] Beauquier, D., D. Muller, and P.E. Schupp: *The bar problem : a simple tiling problem which is np-complete on the euclidean tessellation by squares but which is polynomial time on the hyperbolic tessellations by 4g-gons*. In *Groups, Languages and Geometry*, Comtemporary Mathematics, 250:29–36, 1999.
- [Bod99] Bodlaender, H.L.: *A note on domino treewidth*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 3 :141–150, 1999.
- [Boo82] Book, R. V.: *Confluent and other types of Thue systems*. Journal of the Association for Computing Machinery, 29:171–182, 1982.
- [Bro02] Brown, C. F.: *Qepcad, quantifier elimination by partial cylindrical algebraic decomposition*. "<http://www.cs.usna.edu/~qepcad/B/QEPCAD.html>", 2002.
- [BW03] Bonnington, P. et M. Watkins: *Planar embeddings with infinite faces*. Journal of Graph Theory, 42(4) :257–275, 2003.
- [Can84] Cannon, J.W.: *The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups*. Geometriae Dedicatae, 16 :123–148, 1984.
- [CDP90] Coornaert, M., T. Delzant et A. Papadopoulos: *Géométrie et théorie des groupes : les groupes hyperboliques de Gromov*. Numéro 1441 dans *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1990.
- [Cha95] Chaboud, T.: *Pavages et graphes de Cayley planaires*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Février 1995.

- [CM92] Cori, R. and A. Machì: *Maps, hypermaps and their automorphisms : a survey*. *Expositiones Mathematicae*, 10:403–467, 1992.
- [Cou89] Courcelle, B.: *The monadic second-order logic of graphs, ii : Infinite graphs of bounded width*. *Mathematical Systems Theory*, 21:187–221, 1989.
- [DC93] Do Carmo, M. P.: *Riemannian geometry*. *Mathematics : Theory & applications*. Birkhäuser, 1993.
- [DD89] Dicks, W. and M. J. Dunwoody: *Groups acting on graphs*. Cambridge University Press, 1989.
- [Die00] Diestel, R.: *Graph theory, second edition*, tome 173 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, Février 2000. Une version électronique de ce livre est disponible à l'adresse "<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/>".
- [DSS98] Droms, C., B. Servatius et H. Servatius: *Connectivity and planarity of Cayley graphs*. *Beiträge zur Algebra and Geometrie*, 39 :269–282, 1998.
- [Eff00] Effler, S.: *Enumeration, isomorphism and hamiltonicity of Cayley graphs : 2-generated and cubic*. Master's thesis, University of Victoria, 2000.
- [EH03] Epstein, D. and D. Holt: *The linearity of the conjugacy problem in word hyperbolic groups*. Une version électronique de cet article est disponible à l'adresse <http://www.maths.warwick.ac.uk/ftp/people/dfh/papers/>, 2003.
- [Eps92] Epstein, David B.A.: *Word processing in groups*. Jones and Bartlett, Juin 1992.
- [Fár48] Fáy, I.: *On straight line representations of planar graphs*. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 11:229–233, 1948.
- [Far94] Farb, B.: *The extrinsic geometry of subgroups and the generalized word problem*. *Proceedings of the London Mathematical Society (3)*, 68:577–593, 1994.
- [FI79] Fleischner, H. and W. Imrich: *Transitive planar graphs*. *Mathematica Slovaca*, 29(2):97–105, 1979.
- [Fle73] Fleischner, H.: *The uniquely embeddable planar graphs*. *Discrete Mathematics*, 4:347–358, 1973.
- [Gai82] Gaifman, H.: *On local and non-local properties*. In Stern, J. (editor): *Proceedings of the Herbrand symposium, Logic Colloquium'81*, pages 105–135, 1982.
- [Gap04] The Gap Group: *GAP Reference Manual – Release 4.3*, (Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra), 2004. La page de développement de ce programme se situe à l'adresse "<http://www.gap-system.org/>".
- [GS87] Grünbaum, B. and G. C. Shephard: *Tilings and patterns*. W. H. Freeman Company, 1987.
- [Har00] Harpe, P. de la: *Topics in geometric groupe theory*. Chicago Lectures in Mathematics, 2000.
- [Hat02] Hatch, D.: *Hyperbolic planar tessellations*. "<http://www.hadron.org/~hatch/HyperbolicTesselations/>", 2002.

-
- [HD97] Heydemann, M.-C. et B. Ducourthial: *Graph symmetry : algebraic methods and applications*, tome 497 of the NATO ASI Series (Series C : Mathematical and Physical Sciences), chapitre Cayley graphs and Interconnection networks, pages 167–224. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [Hil01] Hilbert, D.: *Über Flächen von konstanter gausscher Krümmung*. Transactions of the American Mathematical Society, pages 87–99, 1901.
- [Hil80] Hilbert, D.: *The foundations of geometry*. Open Court, 2nd ed. edition, 1980.
- [Imr75] Imrich, W.: *On Whitney’s theorem on the unique embeddability of 3-connected planar graphs*. In *Recent advances in graph theory, Proc. Symp. Prague 1974*, pages 303–306, 1975.
- [Jac74] Jacobson, N.: *Basic Algebra I*. W.H. Freeman and Co., 1974.
- [KL03] Kuske, D. and M. Lohrey: *Decidable theories of Cayley-graphs*. In *Proceedings of STACS 2003*, LNCS 2607, pages 463–474, 2003.
- [KL04] Kuske, D. and M. Lohrey: *Logical aspects of Cayley graphs : the group case*. A paraître dans *Annals of Pure and Applied Logic*, 2004.
- [KMO92] Kuhn, N., K. Madlener, and F. Otto: *Computing presentations for subgroups of context-free groups*. In *Papers from the international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pages 240–250. ACM Press, 1992.
- [Lei44] Leighton, H.: *Solid geometry and spherical trigonometry*. D. van Nostrand Company, Inc., 1944.
- [Lev70] Levinson, H.: *On the genera of graphs of group presentations*. Annals of the New York Academy of Sciences, 175 :277–284, 1970.
- [Lev79] Levinson, H.: *Planar Cayley diagrams : weak point-symmetry*. *Congressus Numerantium*, 24:679–697, 1979.
- [Lev82] Levinson, H.: *Planar Cayley diagrams : accumulation points*. *Congressus Numerantium*, 36:207–215, 1982.
- [LH88] Levinson, H. and H. Hevia: *Cylindric embeddings of p.s. ans w.p.s. planar Cayley diagrams*. *Congressus Numerantium*, 66:173–180, 1988.
- [Lop94] Lopez, L.M.: *Hyperbolic groups with planar Cayley graphs*. Technical Report IGM 94-40, Université de Marne-la-Vallée, 1994.
- [LS77] Lyndon, R.P. and P.E. Schupp: *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag, 1977.
- [Mas96] Maschke, H.: *The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three and four-dimensional space, by Cayleys color diagrams*. *American Journal of Mathematics*, 18:156–194, 1896.
- [Mas97] Massey, W. S.: *Algebraic topology : an introduction*, tome 56 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1997.
- [McK79] McKay, B. D.: *Transitive graphs with fewer than twenty vertices*. *Mathematics of Computation*, 33:1101–1121 (with microfiche supplement), 1979.
- [MD98] Mazoyer, J. et M. Delorme: *Cellular automata : a parallel model*, tome 460 de *Mathematics and its applications*. Kluwer, 1998.

- [Mil92] Miller, C. F.: *Decision problems for groups : survey and reflections*, in *algorithms and classification in combinatorial group theory*. Number 23 in *MSRI Publications*. Springer-Verlag, 1992.
- [MKS76] Magnus, W., A. Karrass, and D. Solitar: *Combinatorial group theory : Presentations of groups in terms of generators and relations*. Dover Publications, Inc., second edition edition, 1976.
- [MO98] Madlener, K. and F. Otto: *Some applications of prefix-rewriting in monoids, groups, and rings*. Number 22 in *Reports On Computer Algebra*. ZCA Kaiserslautern, November 1998.
- [Mon87] Montesinos, J.M.: *Classical tessellations and three-manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, 1987.
- [MP94] McKay, B. D. and C. E. Praeger: *Vertex-transitive graphs which are not Cayley graphs I*. *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)*, 56:53–63, 1994.
- [MP96] McKay, B. D. and C. E. Praeger: *Vertex-transitive graphs that are not Cayley graphs II*. *Journal of Graph Theory*, 22(4):321–334, 1996.
- [MR90] McKay, B. D. and J. F. Royle: *The transitive graphs with at most 26 vertices*. *Ars Combinatorica*, 30:161–176, 1990.
- [MS85] Muller, D.E. et P.E. Schupp: *The theory of ends, pushdown automata, and second-order logic*. *Theoretical Computer Science*, 37(1) :51–75, 1985.
- [Mäd00] Mäder, R.: *The uniform polyhedra*. "<http://www.mathconsult.ch/showroom/unipoly/list-graph.html>" (Last access : 24th January 2005), 2000.
- [Pit93] Pittet, C.: *Surface groups and quasi-convexity*. In Press, Cambridge University (editor): *Geometric group theory*, volume 1 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 169–175. 1993.
- [Rip82] Rips, E.: *Subgroups of small cancellation groups*. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14:45–47, 1982.
- [Rot94] Rotman, J. J.: *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1994.
- [Roy97] Royle, G. F.: *Catalogues of combinatorial objects*. "<http://www.cs.uwa.edu.au/~gordon/data.html>", 1997. (Last access : 24th January 2005).
- [Sag94] Sagan, H.: *Space-filling curves*. Universitext. Springer Verlag, 1994.
- [Sco78] Scott, P.: *Subgroups of surface groups are almost geometric*. *Journal of the London Mathematical Society*, 17:555–565, 1978.
- [Sco85] Scott, P.: *Correction to 'Subgroups of surface groups are almost geometric'*. *Journal of the London Mathematical Society*, 32:217–220, 1985.
- [Sel95] Sela, Z.: *The isomorphism problem for hyperbolic groups*. *Annals of Mathematics*, 141(2) :217–283, 1995.
- [SP95] Sloane, N.J.A. and S. Plouffe: *The Encyclopedia of Integer Sequences*. Academic Press, 1995. La page électronique associée à ce livre est disponible à l'adresse "<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>", 2004.

-
- [Sta68] Stallings, J.R.: *On torsion-free groups with infinitely many ends*. Annals of Maths, 88:312–334, 1968.
- [Sti01] Stillwell, J.: *Mathematics and its history*, chapitre 17 – Non-Euclidean geometry. Springer Verlag, 1901.
- [Sti92] Stillwell, J.: *Geometry of surfaces*. Universitext. Springer Verlag, 1992.
- [Tar48] Tarski, A.: *A decision method for elementary algebra and geometry*. RAND Corporation, 1948.
- [Thu80] Thurston, W.P.: *Notes informelles (geometry and topology of three-manifolds)*. Chapitre 13, tome 13. Publications Mathématiques d’Orsay, 1980.
- [Wey64] Weyl, H.: *Symétrie et mathématique moderne*. Nouvelle bibliothèque scientifique. Flammarion, 1964.
- [Whi32a] Whitney, H.: *Congruent graphs and the connectivity of graphs*. American Journal of Math., 54:150–168, 1932.
- [Whi32b] Whitney, H.: *Non-separable and planar graphs*. Transactions of the American Mathematical Society, pages 339–362, 1932.
- [Wil66] Wilkie, H.C.: *On non-Euclidean crystallographic groups*. Mathematische Zeitschrift, 91 :87–102, 1966.
- [Wol84] Wolf, J.: *Spaces of constant curvature*. Publish or Perish, Wilmington, 1984. Chap. 2.
- [ZVC80] Zieschang, H., E. Vogt et H.D. Coldewey: *Surfaces and planar discontinuous groups*. Numéro 835 dans *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1980.

Index

- Symbols
- $eq_{\xi, \phi}$ 42
 - $sep_{\xi, \phi}$ 42
- A
- action
 - de groupe 13
 - faible 15
 - arête 7
 - arbre 8
 - barycentrique 72
 - automate des bords 48, 53, 60
 - automorphisme 9, 11
- B
- bout 8
- C
- **Cantor** 108
 - caractéristique
 - d'Euler 25, 96
 - d'un graphe 62
 - généralisée 64
 - **Cayley** 13
 - cofini 9
 - complexe 26
 - composante 2-connexe 44
 - connexité 8
- D
- décomposition arborescente 89
 - désingularisation 96
 - domaine fondamental 64
- E
- ensemble séparant 103
 - espace hyperbolique 72
 - étiquetage 38
- F
- face 24
- G
- formule d'Euler 25, 63
 - générateur 10, 12
 - géodésique 8, 17
 - géométrie 18–22
 - euclidienne 19
 - hyperbolique 21
 - sphérique 20
 - genre 26
 - graphe 7–9
 - barycentrique 25
 - cofini 9, 60
 - de Cayley 13, 47
 - de groupes 91
 - dual 25
 - localement fini 24
 - planaire 23
 - sommet-transitif 9, 51
 - **Gromov** 72
 - groupe 10–15
 - abélien 12
 - d'automorphismes 11
 - fondamental 91
 - libre 12
 - quotient 10
- H
- HNN-extension 92
 - hyperbolique
 - espace 72–75
 - plan 17, 18
- I
- index 10
 - inversion 41
 - isométrie 11, 17
- K
- **Killing-Hopf** 18

- L
- largeur arborescente 89
 - localement fini 24
- M
- **Möbius** 22, 85
 - manifold 95
 - **Markov** 74, 102
 - monoïde 10
 - morphisme
 - de graphe 9
 - de groupe 10
- N
- nombre
 - de bouts 68, 101
 - de singularités essentielles 105
- O
- orbifold 95
 - orbite 13, 15
 - ordre 12
- P
- pavage 27
 - archimédien 27, 59
 - normal 27
 - plongement 23, 26
 - essentiel 105
 - **Poincaré** 17
 - point d'accumulation 24
 - polyèdre convexe 20, 58
 - polygone
 - fondamental 95
 - régulier 55
 - préservation des faces 34
 - problème
 - de l'isomorphisme 87
 - de la conjugaison 86
 - du mot généralisé 75
 - du mot simple 71
 - produit
 - amalgamé 92
 - direct 12
 - libre 12, 92
- R
- réarrangement 43, 44
 - relation 12
 - revêtement 18, 96
- rotation 39
- S
- séparateur 42
 - schéma d'étiquetage 47, 51, 60
 - simplexe 26
 - singularité 104
 - sommet 7
 - sommet-transitif 9
 - stabilisateur 13
 - **Stallings** 93, 102
 - strong treewidth 89
 - surface 15–18
 - de Riemann 17
 - symétrie 39, 41
- T
- **Tarski** 86
 - topologiquement localement fini 24
 - treewidth 89
 - twist 43, 44
- V
- vecteur
 - cyclique 25
 - d'arête 39
 - de face 39
 - de type 24
 - primitif 50
 - voisinage d'arête 41
- W
- **Whitney** 46

Little lamb, who made thee?
Does thou know who made thee,
Gave thee life, and bid thee feed
By the stream and o'er the mead

The lamb – Songs of innocence
WILLIAM BLAKE

Ce mémoire a été réalisé à l'aide de \LaTeX accompagné
des bibliothèques suivantes :

memoir v1.61
pstricks v1.04
hyperref v6.73n
listings v1.0

Les figures ont été réalisées à l'aide de **Gnuplot**, de la
bibliothèque **pstricks**, et les plongements des graphes
directement en langage Postscript.

Étude des graphes planaires cofinis selon leurs groupes de symétries

Résumé : Les graphes cofinis constituent une famille de graphes possédant un groupe de symétries non trivial, comme les graphes de Cayley ou les graphes sommet-transitifs. Lorsque ces graphes sont en plus planaires, ces symétries peuvent se traduire de manière simple grâce à des symétries du plan dans lequel les graphes sont dessinés. L'ensemble de ces symétries ou automorphismes permet alors de décrire globalement le graphe à l'aide de données géométriques locales, par des structures appelées schémas d'étiquetage.

Dans cette thèse, nous étudions les groupes de symétries et décrivons les schémas d'étiquetage des graphes planaires cofinis possédant une représentation topologique simple : les graphes planaires localement finis. Nous montrons comment ces schémas permettent de caractériser le graphe et ses plongements. Cette analyse permet d'énumérer cette famille des graphes planaires cofinis, en particulier lorsqu'ils sont de Cayley ou sommet-transitifs.

A partir de ces résultats, nous nous intéressons à la structure des groupes d'automorphismes de cette famille de graphes. Des problèmes de la théorie combinatoire des groupes usuellement indécidables se trouvent devenir décidables dans notre cadre : c'est le cas en particulier des problèmes du mot, simple et généralisé. Les problèmes de décidabilité de la logique permettent de classer ces graphes en deux grandes familles, selon leur largeur arborescente et la géométrie de leur plongement.

Enfin, la question de l'extension de cette description à une famille de graphes plus généraux est étudiée. La classification de ces graphes en terme de bouts et de points d'accumulation dans les plongements permet d'obtenir des informations sur la forme que peuvent prendre les plongements des graphes planaires cofinis non localement finis. Nous discutons alors des difficultés d'extension de la méthode "localement finie" au cas général.

Mots-clé : graphes de Cayley, graphes planaires, sommet-transitifs, cofinis, groupes d'automorphismes, schéma d'étiquetage, problèmes du mot simple et généralisé

Analysis of the cofinite planar graphs led by their groups of symmetries

Abstract : The cofinite graphs represent a family of graphs possessing a non-trivial group of symmetries, such as the Cayley graphs and the vertex-transitive graphs. When such graphs are planar, these symmetries correspond merely to symmetries of the plan in which the graphs are embedded. This set of symmetries – or, more precisely, automorphisms – can provide a global description of the graph from local data, by means of structures called labeling schemes.

In this thesis, we study the groups of symmetries and describe the labeling schemes of the planar cofinite graphs possessing a simple topological representation : the planar locally finite graphs. We prove how a labeling scheme allows to characterize the graph and its embeddings. This analysis allows the enumeration of this family of the planar cofinite graphs, in particular when they are vertex-transitive or Cayley graphs.

With these results, it is possible to analyze the structure of the groups of automorphisms of this family of graphs. There exist problems of the combinatorial group theory unsolvable in general that become solvable within this framework. That is the case in particular of the simple and generalized word problems. Problems of decidability of logics allow for the classification of these graphs into two families, depending on their treewidth and the geometry of their embedding.

Finally, we raise the question of the extension to the more general family of the cofinite planar graphs. The classification of these graphs in terms of number of ends and of accumulation points in their embeddings provides information on the structure of the embeddings of these more general graphs. We discuss the problems raised by the extension of the "locally finite" method to the general case.

Keywords : Cayley graphs, planar graphs, vertex-transitive, cofinite, automorphisms group, labeling scheme, simple and generalized word problem