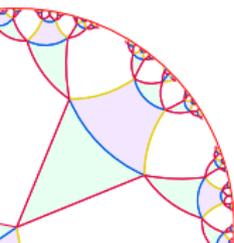


Étude des graphes planaires cofinis selon leurs groupes de symétries

David RENAULT

Groupe de Travail MC2
LIP, ENS Lyon

2 février 2005



Domaine de travail :

- Considérer des graphes possédant un **groupe de symétries** non trivial.
Graphes de Cayley, graphes sommet-transitifs, graphes cofinis . . .
- Se restreindre aux graphes planaires, pour leur **structure géométrique**.

Objectifs :

- Analyser les liens entre symétries du graphe / symétries du plan.
- Exploiter ces liens pour résoudre des problèmes plus généraux.
Connexité, largeur arborescente, problèmes de logique, théorie combinatoire des groupes . . .

Méthode :

- Capturer la structure géométrique **globale** grâce à des données **locales**.
Arrangement géométrique des sommets, arêtes et faces du plongement.

Domaine de travail :

- Considérer des graphes possédant un **groupe de symétries** non trivial.
Graphes de Cayley, graphes sommet-transitifs, graphes cofinis . . .
- Se restreindre aux graphes planaires, pour leur **structure géométrique**.

Objectifs :

- Analyser les liens entre symétries du graphe / symétries du plan.
- Exploiter ces liens pour résoudre des problèmes plus généraux.
Connexité, largeur arborescente, problèmes de logique, théorie combinatoire des groupes . . .

Méthode :

- Capturer la structure géométrique **globale** grâce à des données **locales**.
Arrangement géométrique des sommets, arêtes et faces du plongement.

Domaine de travail :

- Considérer des graphes possédant un **groupe de symétries** non trivial.
Graphes de Cayley, graphes sommet-transitifs, graphes cofinis . . .
- Se restreindre aux graphes planaires, pour leur **structure géométrique**.

Objectifs :

- Analyser les liens entre symétries du graphe / symétries du plan.
- Exploiter ces liens pour résoudre des problèmes plus généraux.
Connexité, largeur arborescente, problèmes de logique, théorie combinatoire des groupes . . .

Méthode :

- Capturer la structure géométrique **globale** grâce à des données **locales**.
Arrangement géométrique des sommets, arêtes et faces du plongement.

Résultats connus :

- Graphes de Cayley
 - Caractérisation des présentations planaires [Wil66, ZVC80, Mon87]
 - Caractérisation des graphes planaires [Mas96, Lev79, Cha95]
 - Caractérisation des graphes généraux de faible degré [Eff00]
- Graphes sommet-transitifs
 - Graphes sommet-transitifs finis [McK79, Roy97]
 - Graphes sommet-transitifs finis pas de Cayley [MP94, MP96]
- Graphes cofinis planaires à 1 bout [Bab97]

⇒ Est-il possible d'extraire de ces résultats une approche générale ?

Résultats connus :

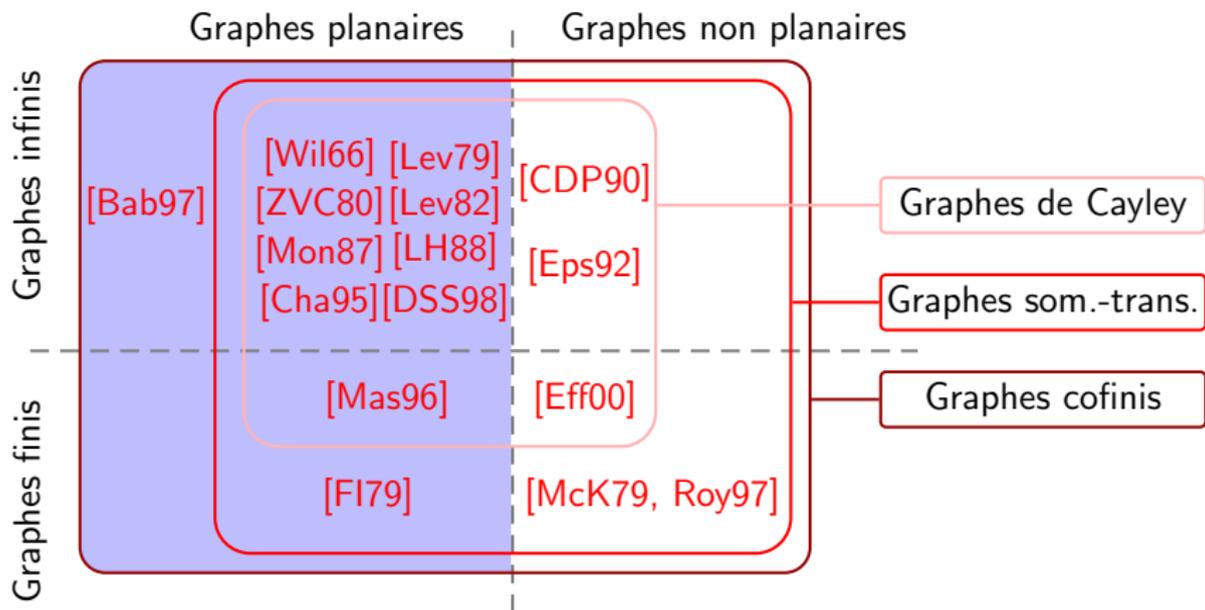
- Graphes de Cayley
 - Caractérisation des présentations planaires [Wil66, ZVC80, Mon87]
 - Caractérisation des graphes planaires [Mas96, Lev79, Cha95]
 - Caractérisation des graphes généraux de faible degré [Eff00]
- Graphes sommet-transitifs
 - Graphes sommet-transitifs finis [McK79, Roy97]
 - Graphes sommet-transitifs finis pas de Cayley [MP94, MP96]
- Graphes cofinis planaires à 1 bout [Bab97]

⇒ Est-il possible d'extraire de ces résultats une approche générale ?

Résultats connus :

- Graphes de Cayley
 - Caractérisation des présentations planaires [Wil66, ZVC80, Mon87]
 - Caractérisation des graphes planaires [Mas96, Lev79, Cha95]
 - Caractérisation des graphes généraux de faible degré [Eff00]
- Graphes sommet-transitifs
 - Graphes sommet-transitifs finis [McK79, Roy97]
 - Graphes sommet-transitifs finis pas de Cayley [MP94, MP96]
- Graphes cofinis planaires à 1 bout [Bab97]

⇒ Est-il possible d'extraire de ces résultats une approche générale ?

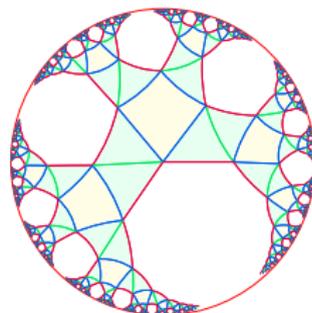
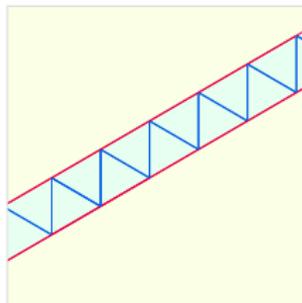
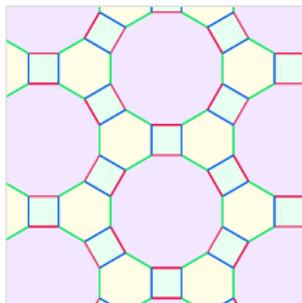


Famille de graphes à étudier :

les graphes planaires cofinis localement finis

Contient des graphes d'une grande diversité :

- Nombre de bouts, largeur arborescente
- Cayley, sommet-transitif, cofini
- Graphes finis, infinis euclidiens ou infinis hyperboliques

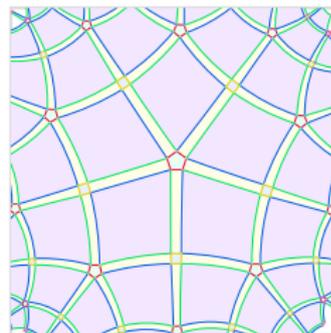
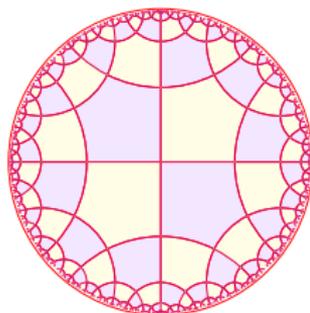
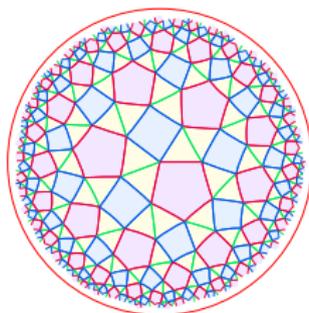


Famille de graphes à étudier :

les graphes planaires cofinis localement finis

Contient des graphes d'une grande diversité :

- Nombre de bouts, largeur arborescente
- Cayley, sommet-transitif, cofini
- Graphes finis, infinis euclidiens ou infinis hyperboliques

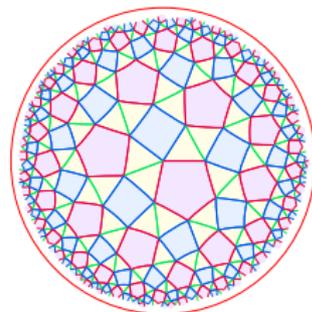
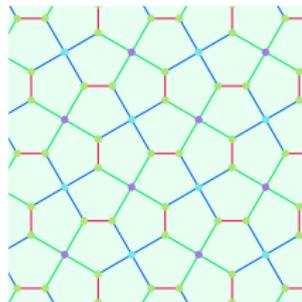
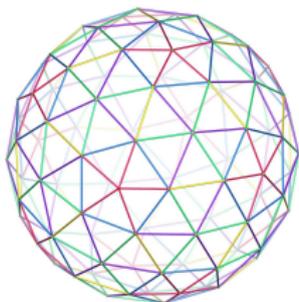


Famille de graphes à étudier :

les graphes planaires cofinis localement finis

Contient des graphes d'une grande diversité :

- Nombre de bouts, largeur arborescente
- Cayley, sommet-transitif, cofini
- Graphes finis, infinis euclidiens ou infinis hyperboliques



Problèmes étudiés

- Théorie des graphes planaires

caractérisation et énumération des graphes planaires cofinis localement finis

Domaines d'applications considérés :

- Théorie combinatoire des groupes

problème du mot, problème du mot généralisé, problème du sous-groupe libre . . .

- Problèmes de décidabilité de la logique

quelles formules peut-on décider sur cette famille de graphes ?

- Théorie des manifolds et des orbifolds

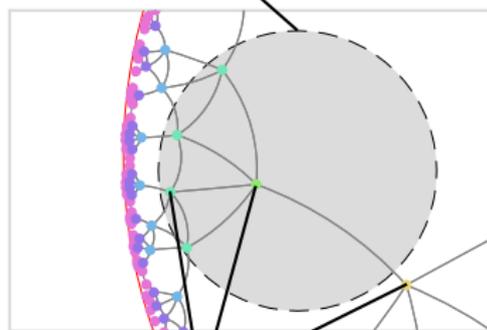
quel rapport y-a t'il entre la structure géométrique des graphes et leur plongement ?

- 1 Graphes planaires localement finis
- 2 Représentation par schémas d'étiquetage
- 3 Applications à des problèmes combinatoires
- 4 Graphes planaires généraux

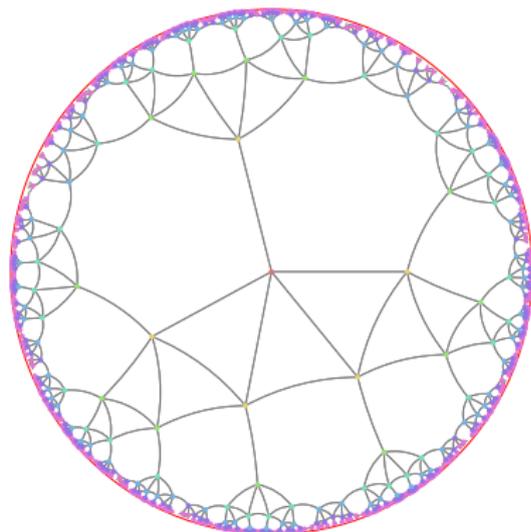
Graphes planaires localement finis

Un plongement d'un graphe planaire est dit **localement fini** lorsque ses sommets n'ont pas de points d'accumulation dans le plan.

Compact



Sommet



Symétries et automorphismes

Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe quelconque.

Définition : Automorphisme

Un *automorphisme* est une bijection de $V \cup E$ qui :

- préserve les sommets et les arêtes ;
- préserve la relation d'adjacence entre sommets et arêtes.

⇒ Un automorphisme est une opération agissant sur :

- les sommets et les arêtes du graphe.

Groupe d'automorphismes

Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe quelconque.

Convention d'étiquetage des sommets

Deux sommets ont même couleur si et seulement si il existe un automorphisme envoyant le premier sur le second.

Par définition :

- Graphe **cofini** \Leftrightarrow Nombre **fini** de couleurs de sommets.
- Graphe **sommet-transitif** \Leftrightarrow Une **unique** couleur de sommets.
- Graphe **de Cayley** \Leftrightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Graphe sommet-transitif} \\ + \\ \text{Aucun sommet fixé par automorphisme.} \end{array} \right.$

Propriété de préservation des faces finies

Soit Γ un graphe planaire cofini localement fini.

Théorème de préservation des faces finies

[Ren]

Il existe toujours un plongement planaire localement fini de Γ tel que :

- Si Γ est **sommet-transitif**, les faces finies sont envoyées par automorphisme sur des faces finies du plongement.
- Si Γ est **cofini**, on peut modifier Γ sans réduire son groupe d'automorphismes, tel que les faces finies soient envoyées par automorphisme sur des faces finies du plongement.

⇒ Un automorphisme est alors une opération agissant sur :

- les sommets et les arêtes du graphe ;
- les faces finies du plongement.

- 1 Graphes planaires localement finis
- 2 Représentation par schémas d'étiquetage**
- 3 Applications à des problèmes combinatoires
- 4 Graphes planaires généraux

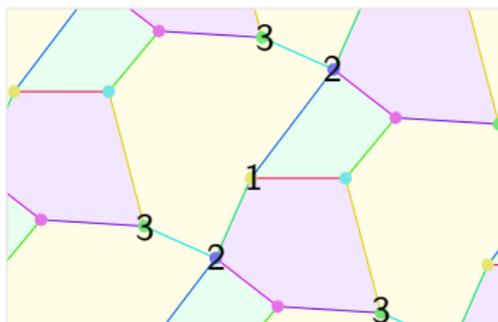
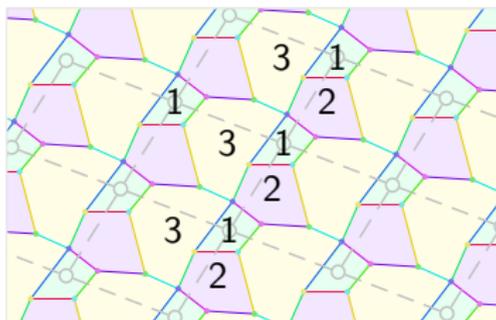
Coloration du graphe

Soit Γ un graphe planaire cofini localement fini.

Action du groupe d'automorphismes sur :

- les sommets et les arêtes ;
- les faces finies.

⇒ induit une coloration naturelle des ces objets géométriques.



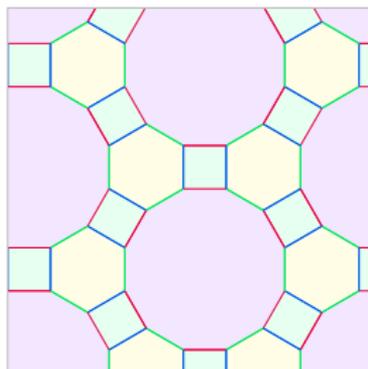
Un invariant géométrique simple

Soit s un sommet du graphe Γ .

Un **vecteur de type** en s est un vecteur donnant la liste des tailles des faces incidentes au sommet s , dans l'ordre trigonométrique positif.

[4; 6; 12]

Le vecteur de type ne dépend que de la couleur du sommet.



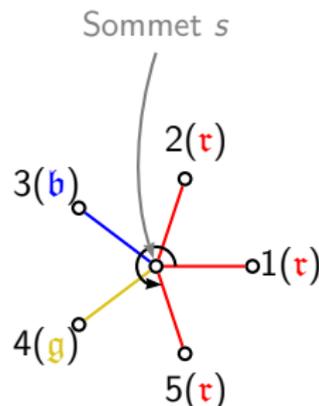
Vecteurs d'arêtes et vecteurs de faces

Soit s un sommet du graphe Γ .

Un **vecteur d'arête** en s est un vecteur donnant la liste des couleurs des arêtes incidentes au sommet s , dans l'ordre trigonométrique positif.

$$[\mathbf{r}; \mathbf{r}; \mathbf{b}; \mathbf{g}; \mathbf{r}]$$

Le vecteur d'arête ne dépend que de la couleur du sommet.

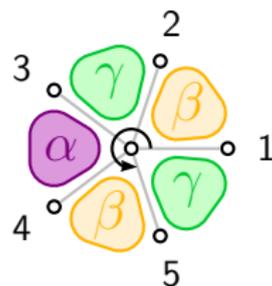


Vecteurs d'arêtes et vecteurs de faces

Soit s un sommet du graphe Γ .

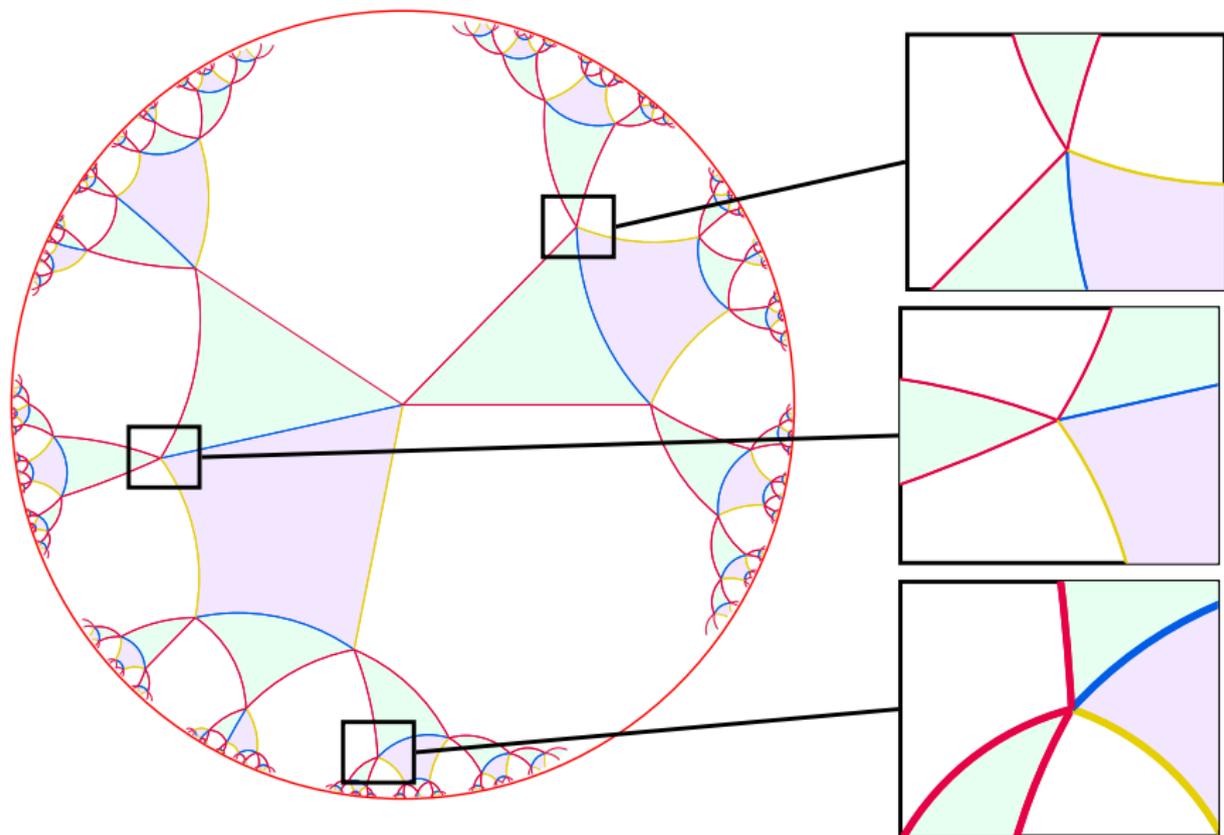
Un **vecteur de face** en s est un vecteur donnant la liste des couleurs des faces incidentes au sommet s , dans l'ordre trigonométrique positif.

$$[\beta; \gamma; \alpha; \beta; \gamma]$$



Le vecteur de face ne dépend que de la couleur du sommet.

Vecteurs d'arêtes et vecteurs de faces



Voisinages d'arêtes

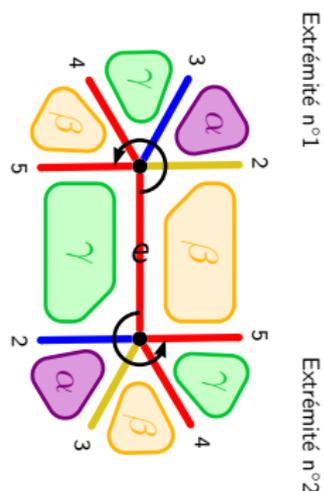
Soit e une arête du graphe Γ .

Un **voisinage d'arête** de e est un sous-graphe constitué de l'arête e et de toutes les arêtes incidentes à une des extrémités de e .

Extrémité n°1 : $[\tau, g, b, \tau, \tau]$, $[\beta, \alpha, \gamma, \beta, \gamma]$

Extrémité n°2 : $[\tau, b, g, \tau, \tau]$, $[\gamma, \alpha, \beta, \gamma, \beta]$

Le voisinage d'arête ne dépend que de la couleur de l'arête centrale.



Voisinages d'arêtes

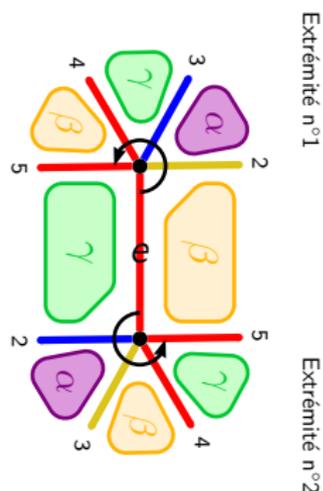
Soit e une arête du graphe Γ .

Un **voisinage d'arête** de e est un sous-graphe constitué de l'arête e et de toutes les arêtes incidentes à une des extrémités de e .

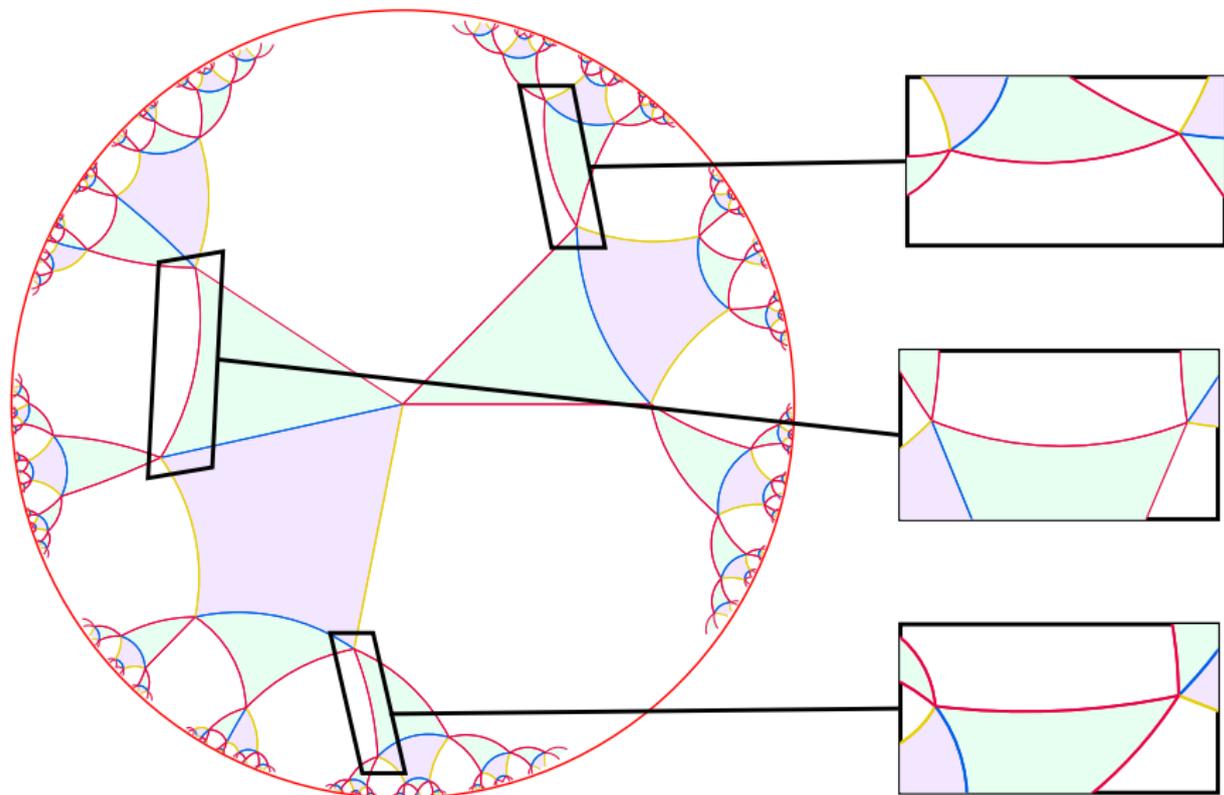
Extrémité n°1 : $[\tau, g, b, \tau, \tau]$, $[\beta, \alpha, \gamma, \beta, \gamma]$

Extrémité n°2 : $[\tau, b, g, \tau, \tau]$, $[\gamma, \alpha, \beta, \gamma, \beta]$

Le voisinage d'arête ne dépend que de la couleur de l'arête centrale.



Voisinnages d'arêtes



Schémas d'étiquetage

Soit Γ un graphe planaire cofini localement fini.

Schéma d'étiquetage

Un schéma d'étiquetage de Γ consiste en la donnée de :

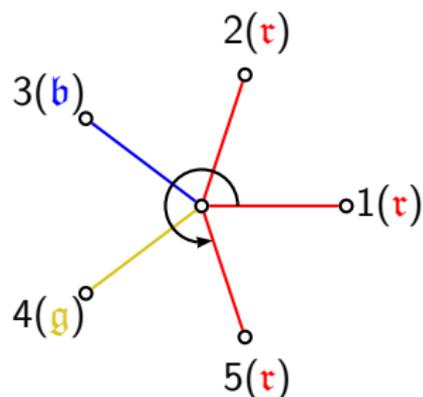
- un vecteur d'arête et de face par couleur de sommet ;
- un voisinage d'arête par couleur d'arête.

... plus quelques conditions de cohérence.

Exemple de schéma d'étiquetage

Vecteurs d'arêtes/de faces :

Voisinnages d'arêtes :

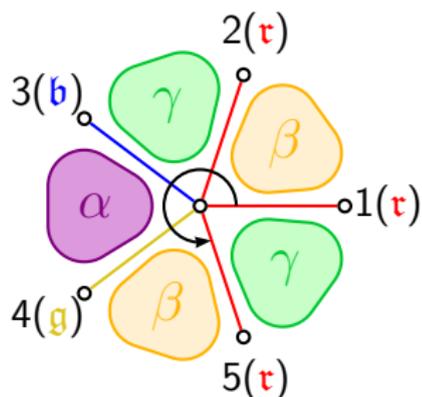


Remarque : Γ est un graphe sommet-transitif \Rightarrow une seule couleur de sommets

Exemple de schéma d'étiquetage

Vecteurs d'arêtes/de faces :

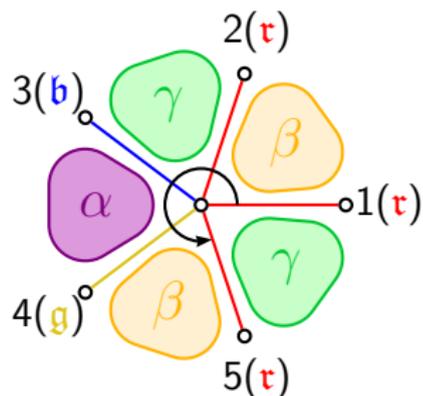
Voisins d'arêtes :



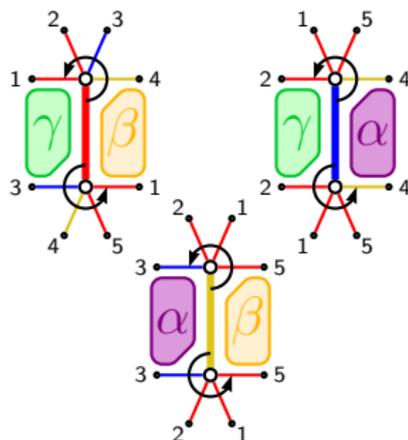
Remarque : Γ est un graphe sommet-transitif \Rightarrow une seule couleur de sommets

Exemple de schéma d'étiquetage

Vecteurs d'arêtes/de faces :



Voisins d'arêtes :



Remarque : Γ est un graphe sommet-transitif \Rightarrow une seule couleur de sommets

Reconstruire le graphe

Considérons un schéma d'étiquetage de graphe cofini localement fini.

Lemme de reconstruction des faces

Il est possible de reconstruire les bords des faces du schéma uniquement à l'aide du schéma d'étiquetage.

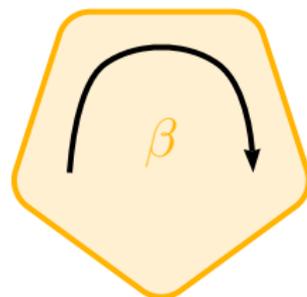
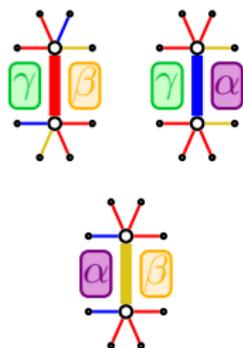
Automate des bords

Les bords des faces associées au schéma d'étiquetage peuvent être décrits à l'aide d'un automate fini, appelé automate des bords.

Reconstruire le bord d'une face

Considérons le schéma d'étiquetage de Γ .

Il est alors possible de reconstruire le bord d'une face β :

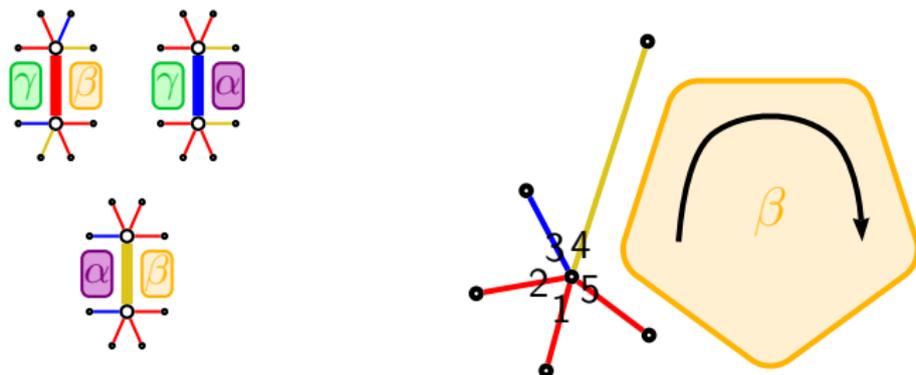


- Deux opérations : "traverser une arête" (*inv*) et "tourner autour" (*next*)
- Rejoint les techniques des cartes et hypercartes [CM92].

Reconstruire le bord d'une face

Considérons le schéma d'étiquetage de Γ .

Il est alors possible de reconstruire le bord d'une face β :

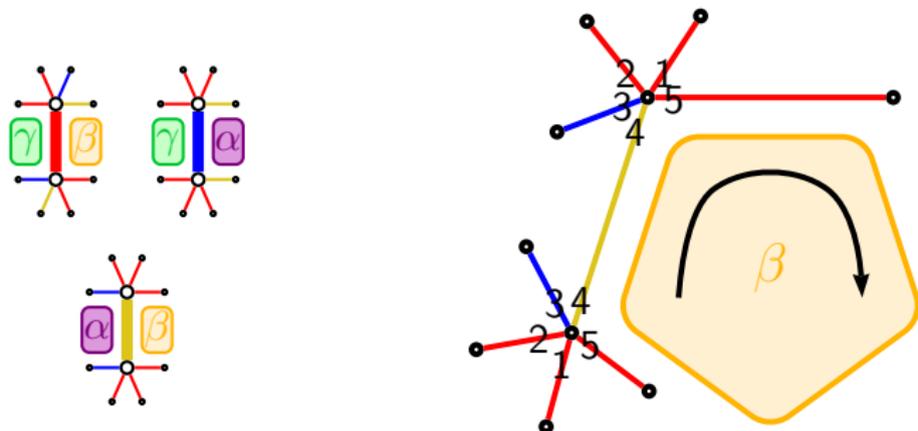


- Deux opérations : "traverser une arête" (*inv*) et "tourner autour" (*next*)
- Rejoint les techniques des cartes et hypercartes [CM92].

Reconstruire le bord d'une face

Considérons le schéma d'étiquetage de Γ .

Il est alors possible de reconstruire le bord d'une face β :

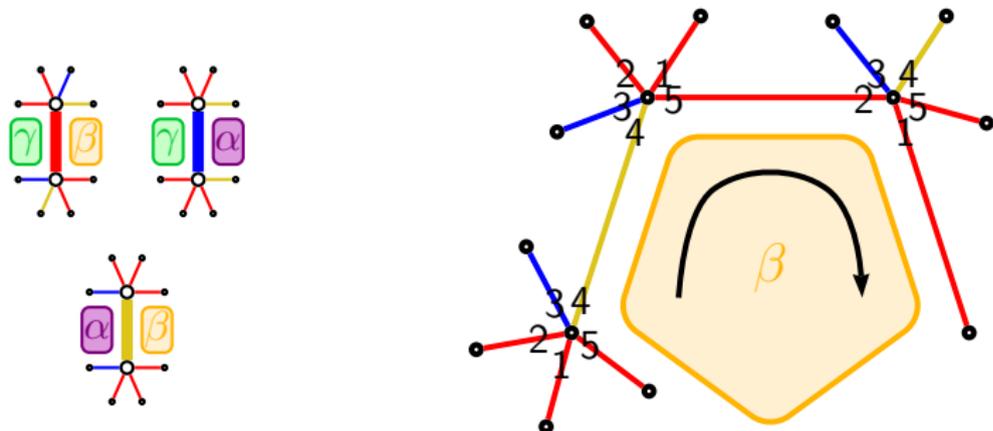


- Deux opérations : "traverser une arête" (*inv*) et "tourner autour" (*next*)
- Rejoint les techniques des cartes et hypercartes [CM92].

Reconstruire le bord d'une face

Considérons le schéma d'étiquetage de Γ .

Il est alors possible de reconstruire le bord d'une face β :

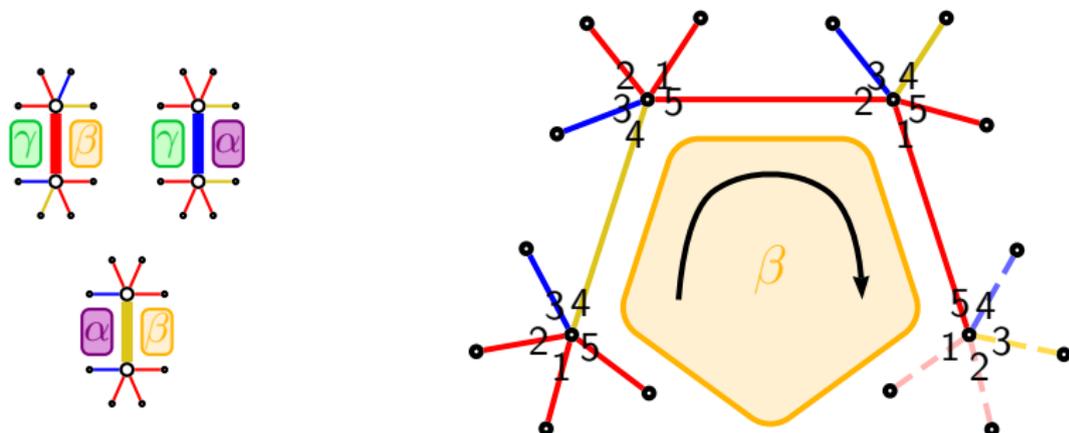


- Deux opérations : “traverser une arête” (*inv*) et “tourner autour” (*next*)
- Rejoint les techniques des cartes et hypercartes [CM92].

Reconstruire le bord d'une face

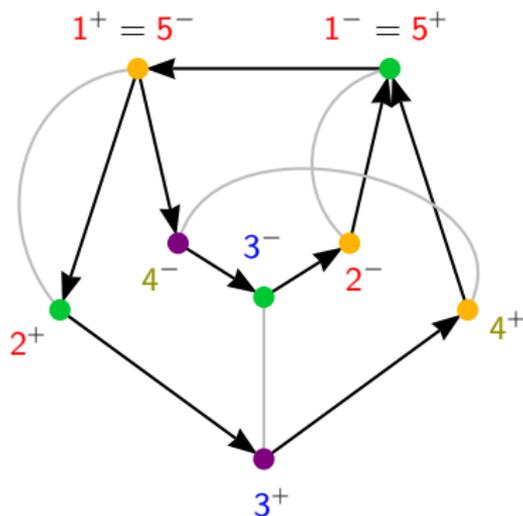
Considérons le schéma d'étiquetage de Γ .

Il est alors possible de reconstruire le bord d'une face β :



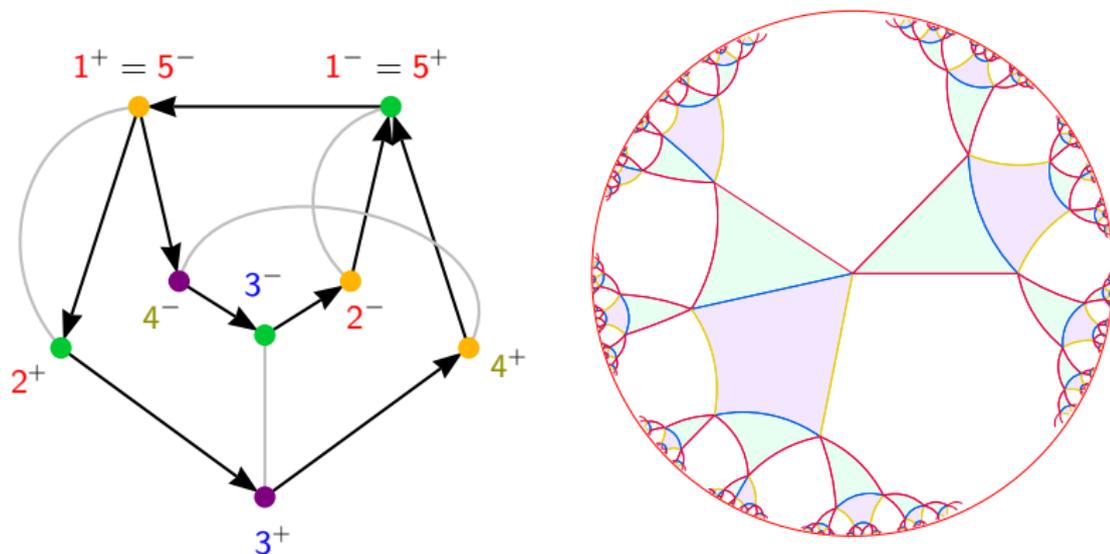
- Deux opérations : “traverser une arête” (*inv*) et “tourner autour” (*next*)
- Rejoint les techniques des cartes et hypercartes [CM92].

Exemple d'automate des bords



- Le bord d'une face correspond à un ensemble d'états de l'automate.
- Les états sont ainsi partitionné en ensembles appelés **orbites**.

Exemple d'automate des bords



- Le bord d'une face correspond à un ensemble d'états de l'automate.
- Les états sont ainsi partitionné en ensembles appelés **orbites**.

Graphes et schémas

Théorème – Représentation par schémas d'étiquetages

[Ren]

- (i) Étant donné Γ un graphe cofini localement fini, on peut construire son schéma d'étiquetage et son automate des bords.
- (ii) Étant donné un schéma d'étiquetage et des tailles de faces compatibles avec les orbites de l'automate des bords, il existe un graphe Γ possédant ce schéma d'étiquetage et ces tailles de faces.

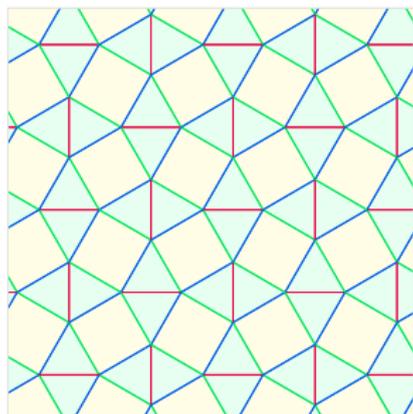
Dans ce cas, il est possible de reconstruire toute boule finie de Γ .

Énumération des graphes

- (ii') Il est possible d'énumérer les vecteurs de types représentant ces tailles de faces compatibles.

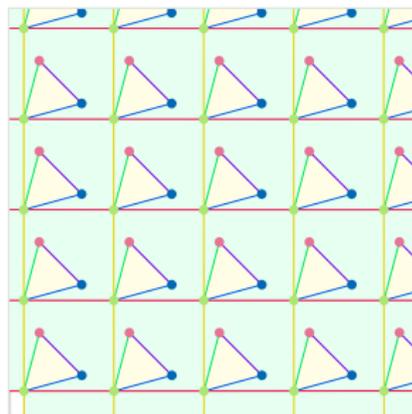
Plongement du graphe

Graphes sommet-transitifs



Plongement par polygones réguliers

Graphes cofinis



Calcul d'un plongement particulier

Propriétés des plongements

Cas des graphes de Cayley

Tout graphe de Cayley planaire localement fini correspond à un groupe d'isométries du plan dans lequel il est plongé.

Cas des graphes cofinis

Si les automorphismes préservent toutes les faces (finies et infinies), il est possible de plonger le graphe de manière à ce que les automorphismes soient des isométries du plan.

- Étend des résultats dû à Babai [Bab75] sur les graphes cofinis à un bout.
- Remarque : le plongement ne se fait pas forcément par géodésiques dans le cas cofini.

- 1 Graphes planaires localement finis
- 2 Représentation par schémas d'étiquetage
- 3 Applications à des problèmes combinatoires**
 - Énumération
 - Problèmes combinatoires
 - Décidabilité de la logique
 - Théorie des surfaces
- 4 Graphes planaires généraux

Énumération

Soit $d \geq 2$ représentant le degré d'un graphe sommet-transitif. .

Énumération – cas sommet-transitif et de Cayley

[Ren]

Il est possible d'énumérer les schémas d'étiquetage des graphes sommet-transitifs (resp. de Cayley) de degré d , et par conséquent tous les graphes sommet-transitifs (resp. de Cayley) de degré d .

Séparation des graphes sommet-transitifs et de Cayley

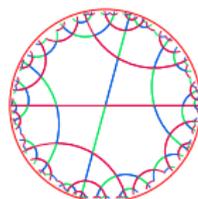
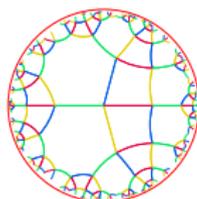
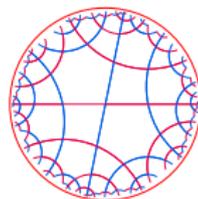
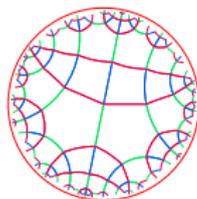
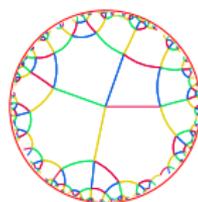
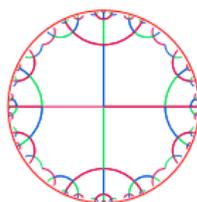
[Ren]

Étant donné un graphe sommet-transitif Γ , il est possible de décider si c'est un graphe de Cayley et, si c'est le cas, les présentations de groupes ayant un graphe de Cayley isométrique à Γ .

Nombre de schéma d'étiquetages de faible degré

Degré	Sommet-Transitif	Cayley
-------	------------------	--------

1	n.s.	n.s.
2	2	2
3	16	8
4	52	24
5	174	52
6	775	185



Énumération

Soit $d \geq 2$ représentant le degré d'un graphe sommet-transitif et $n \geq 2$ représentant un nombre de couleurs.

Énumération – cas cofini

[Ren]

Il est possible d'énumérer les schémas d'étiquetage des graphes cofinis possédant n couleurs de sommets et de degré maximal d , et par conséquent tous les graphes cofinis qu'ils représentent.

Problèmes combinatoires

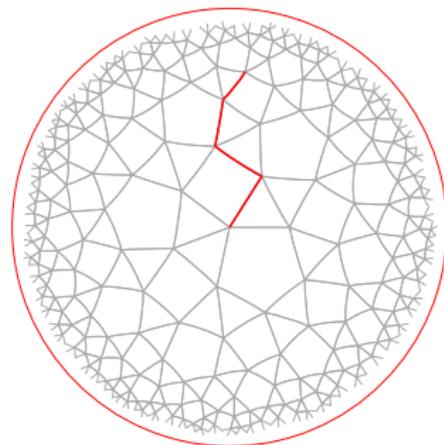
Soit Γ un graphe de Cayley localement fini associé au groupe G .

Problème du mot

Résoudre le problème du mot dans Γ , c'est pouvoir décider si un mot $u = u_1 \dots u_n$ sur les générateurs de Γ vaut l'identité de G ou non.

Théorème

Le problème du mot dans Γ est décidable.



Problèmes combinatoires

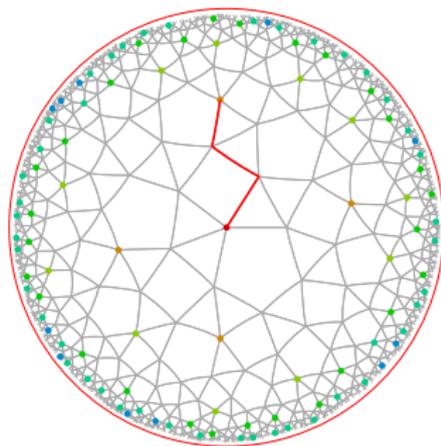
Soit Γ un graphe de Cayley localement fini associé au groupe G .

Problème du mot généralisé

Résoudre le problème du mot généralisé dans Γ , c'est pouvoir décider si, étant donné un sous-groupe $H < G$ et un mot $u = u_1 \dots u_n$ sur les générateurs de Γ , si ce mot correspond à un élément de H ou non.

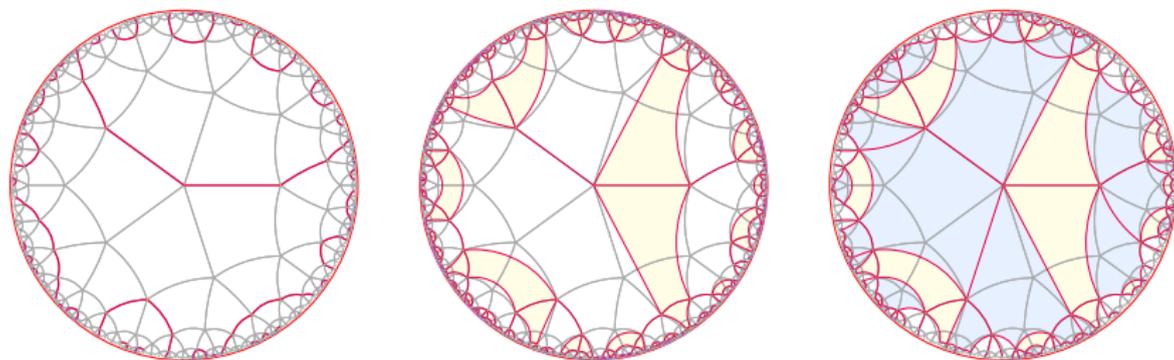
Théorème

Le problème du mot généralisé dans Γ est décidable.



Problème du mot généralisé

Méthode géométrique de construction du sous-groupe [Ren] :



- Ajouts successifs d'éléments du sous-groupe pour générer le graphe de Cayley.
- Contrainte : le graphe reste planaire à chaque étape de la construction.

Décidabilité de la logique

Soit Γ un graphe cofini général.

Décidabilité I

La logique du premier ordre est décidable sur Γ .

Conséquence d'un résultat de Gaifman [Gai82].

Décidabilité II

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- La logique monadique du second ordre est décidable sur Γ .
- La largeur arborescente de Γ est bornée.

Théorème dû à Lohrey [KL03].

Décidabilité de la logique

Soit Γ un graphe sommet-transitif localement fini et infini.

Théorème de connexité

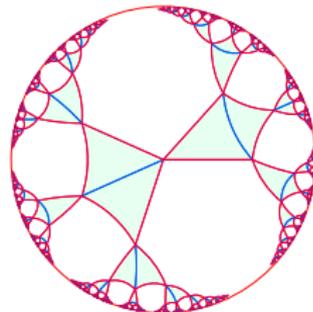
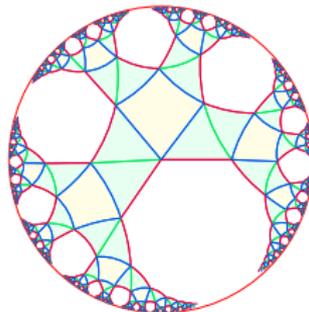
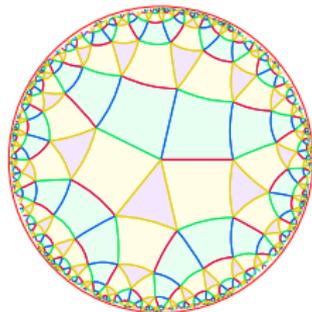
[Ren]

La connexité de Γ dépend directement du nombre n de faces infinies incidentes à chaque sommet :

- $n = 0 \Leftrightarrow \Gamma$ est 3-connexe
- $n = 1 \Leftrightarrow \Gamma$ est 2-connexe et 2-séparable ;
- $n \geq 2 \Leftrightarrow \Gamma$ est 1-séparable.

\Leftrightarrow Largeur arborescente infinie

} Largeur arborescente finie



Géométrie du graphe

Soit Γ un graphe sommet-transitif localement fini et infini.

Lemme de quasi-isométrie

[Ren]

- Si Γ est 3-connexe, il est quasi-isométrique au plan correspondant à son groupe d'automorphismes
- Si Γ est 2-séparable, il est quasi-isométrique à un arbre.

Recherche d'un sous-groupe libre

Si Γ est 2-séparable, son groupe d'automorphismes est virtuellement libre, et il est possible de calculer un sous-groupe libre d'index fini.

Conséquence de la théorie des graphes de groupes [DD89].

Application à la théorie des surfaces

Soit Γ un graphe de Cayley localement fini 3-connexe associé au groupe G .

Orbifold

Un orbifold est l'espace obtenu en quotientant le plan sous l'action du groupe d'isométries G .

Problème : un orbifold n'est pas une surface compacte au sens usuel.

Construction de surfaces compactes

[Sti92]

Il est possible de construire un sous-groupe $H \triangleleft G$ de manière à ce que le quotient de Γ selon H représente une surface compacte.

⇒ Offre une méthode de représentation des surfaces compactes à l'aide de schémas d'étiquetages.

⇒ Représentation de graphes de Cayley de groupes non planaires finis sur des surfaces quotient.

- 1 Graphes planaires localement finis
- 2 Représentation par schémas d'étiquetage
- 3 Applications à des problèmes combinatoires
- 4 Graphes planaires généraux**

Étude du nombre de bouts

Soit Γ un graphe sommet-transitif général.

Nombre de bouts de Γ

[Sta68]

Le nombre de bouts de Γ vaut nécessairement 0, 1, 2 ou ∞ .

Lorsque les graphes sont planaires :

Graphes à un bout

Les graphes planaires à 1 bout sont nécessairement localement finis.

Idée de la construction due à Lopez [Lop94].

Étude des points d'accumulation

Nombre de singularités essentielles

Le nombre de singularités essentielles d'un graphe planaire Γ est le nombre minimal de points d'accumulation sur tous les plongements planaires possibles du graphe.

Théorème

Le nombre de singularités essentielles vaut nécessairement 0, 1, 2 ou ∞ .

Mise au point d'une construction due à Levinson [Lev79].

Structure des singularités

L'ensemble des points d'accumulation du plongement, lorsqu'il est infini, possède la structure d'un ensemble de Cantor.

Contributions :

- Caractérisation et énumération des graphes cofinis localement finis.
- Applications à des problèmes combinatoires variés.
 - Application de méthodes géométriques à la résolution des problèmes du mot.
 - Lien avec la théorie des surfaces et représentation des orbifolds.
- Analyse de la structure des points d'accumulation dans le cas général.

Perspectives :

- Structure des sous-groupes d'un groupe planaire localement fini.
- Problèmes concernant les pavages périodiques du plan.
- Possibilités de généralisation aux graphes planaires généraux.
- Structure des graphes cofinis localement finis (connexité, plongement)

Annexes

Schéma d'étiquetage d'un graphe sommet-transitif

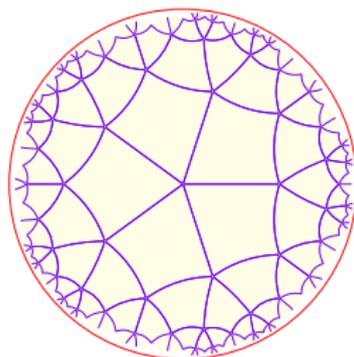
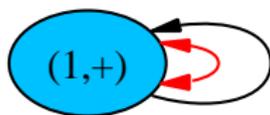
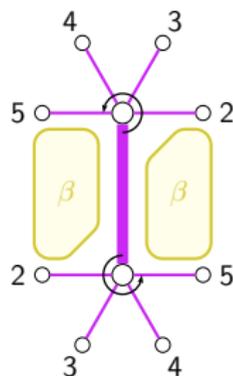
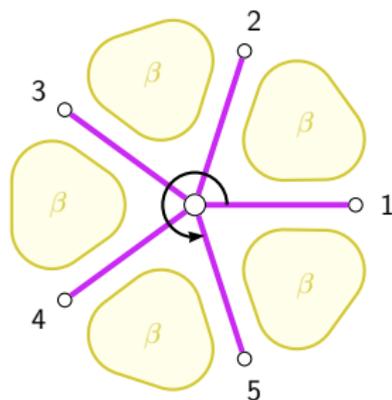
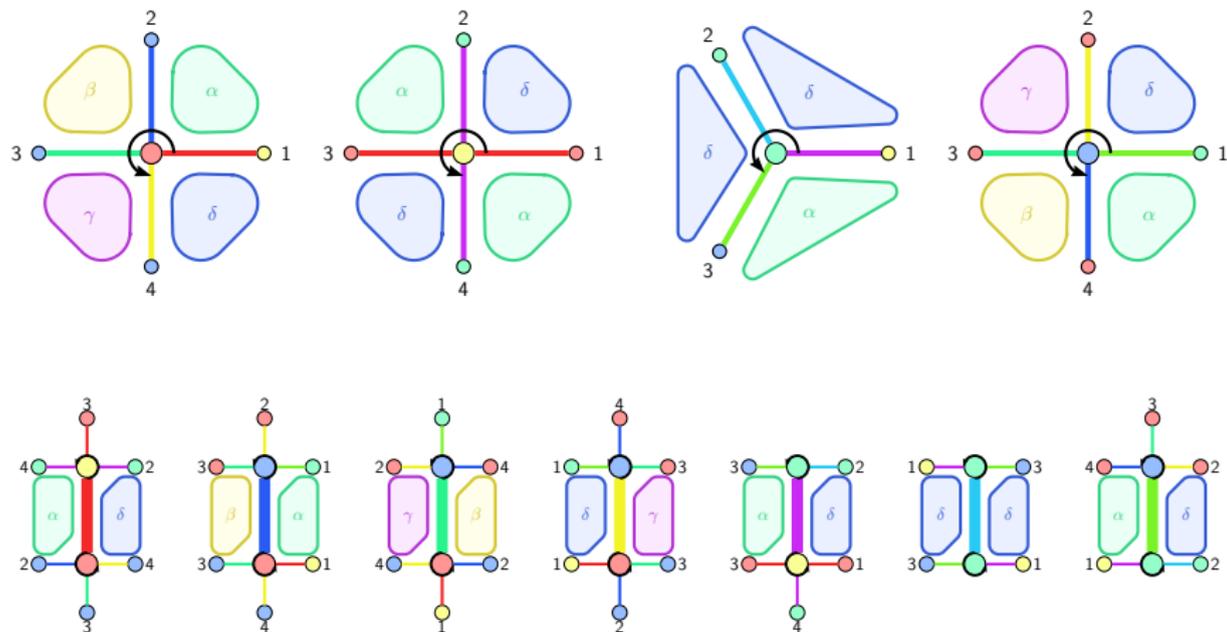


Schéma d'étiquetage d'un graphe cofini





László Babai.

Automorphism groups of planar graphs ii.

In *Proc. Conf. Keszthely*, volume 10 of *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, pages 29–84, 1975.



László Babai.

The growth rate of vertex-transitive planar graphs.

In *Proc. 8th Ann. Symp. on Discrete Algorithms*, pages 564–573. New Orleans LA, ACM—SIAM, 1997.



M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos.

Géométrie et théorie des groupes : les groupes hyperboliques de Gromov.

Number 1441 in *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1990.



T. Chaboud.

Pavages et graphes de Cayley planaires.

PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Février 1995.



R. Cori and A. Machì.

Maps, hypermaps and their automorphisms : a survey.

Expositiones Mathematicae, 10 :403–467, 1992.



W. Dicks and M. J. Dunwoody.

Groups acting on graphs.

Cambridge University Press, 1989.



C. Droms, B. Servatius, and H. Servatius.

Connectivity and planarity of Cayley graphs.

Beiträge zur Algebra and Geometrie, 39 :269–282, 1998.



S. Effler.

Enumeration, isomorphism and hamiltonicity of Cayley graphs : 2-generated and cubic.

Master's thesis, University of Victoria, 2000.



David B.A. Epstein.

Word processing in groups.

Jones and Bartlett, Juin 1992.



H. Fleischner and W. Imrich.

Transitive planar graphs.

Mathematica Slovaca, 29(2) :97–105, 1979.



H. Gaifman.

On local and non-local properties.

In J. Stern, editor, *Proceedings of the Herbrand symposium*, Logic Colloquium'81, pages 105–135, 1982.



D. Kuske and M. Lohrey.

Decidable theories of Cayley-graphs.

In *Proceedings of STACS 2003*, LNCS 2607, pages 463–474, 2003.



H. Levinson.

Planar Cayley diagrams : weak point-symmetry.

Congressus Numerantium, 24 :679–697, 1979.



H. Levinson.

Planar Cayley diagrams : accumulation points.

Congressus Numerantium, 36 :207–215, 1982.



H. Levinson and H. Hevia.

Cylindric embeddings of p.s. and w.p.s. planar Cayley diagrams.

Congressus Numerantium, 66 :173–180, 1988.



L.M. Lopez.

Hyperbolic groups with planar Cayley graphs.

Technical Report IGM 94-40, Université de Marne-la-Vallée, 1994.



H. Maschke.

The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three and four-dimensional space, by Cayleys color diagrams.

American Journal of Mathematics, 18 :156–194, 1896.



B. D. McKay.

Transitive graphs with fewer than twenty vertices.

Mathematics of Computation, 33 :1101–1121 (with microfiche supplement), 1979.



J.M. Montesinos.

Classical tessellations and three-manifolds.

Universitext. Springer-Verlag, 1987.



B. D. McKay and C. E. Praeger.

Vertex-transitive graphs which are not Cayley graphs I.

Journal of the Australian Mathematical Society (Series A), 56 :53–63, 1994.



B. D. McKay and C. E. Praeger.

Vertex-transitive graphs that are not Cayley graphs II.

Journal of Graph Theory, 22(4) :321–334, 1996.



D. Renault.



G. F. Royle.

Catalogues of combinatorial objects.

"<http://www.cs.uwa.edu.au/~gordon/data.html>", 1997.

(Last access : 1^{er} février 2005).



J.R. Stallings.

On torsion-free groups with infinitely many ends.

Annals of Maths, 88 :312–334, 1968.



J. Stillwell.

Geometry of surfaces.

Universitext. Springer Verlag, 1992.



H.C. Wilkie.

On non-euclidean crystallographic groups.

Mathematische Zeitschrift, 91 :87–102, 1966.



H. Zieschang, E. Vogt, and H.D. Coldewey.

Surfaces and planar discontinuous groups.

Number 835 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1980.