Deux problèmes avec la méthode du simplexe

- **Comment commencer?**
  Il faut commencer à une solution de base réalisable;
  (ou trouver qu'il n'y en a pas)
  mais la réussite de la méthode dépend du fait qu'on peut éviter de regarder toutes les solutions de bases potentielles.

- **Terminaison prématurée ou boucle infinie**
  Dans un cas la méthode "supprimer une équation et en ajouter une nouvelle" ne trouve aucune solution meilleur quand on n'est pas à la solution optimale.

Trouver une solution de base pour commencer

- Modifier le problème de sorte que le nouveau problème aie une solution de base triviale et une solution optimale du nouveau problème soit forcément une solution réalisable (de base) de l'ancien;

- Résoudre ce nouveau problème par l'algorithme du simplexe!

- Enfin commencer a résoudre le vrai problème

- Pour construire le nouveau problème:
  - Ajouter une nouvelle variable, disons y (avec $y \geq 0$)
  - Remplacer toute contrainte $lin \leq const$ par $lin - y \leq const$ (et transformer dans la forme canonique)
  - Il existe une solution réalisable de base avec $n+1$ équations vérifiées
  - Minimiser y (maximiser $-y$); si le résultat est nul, on a trouvé une solution réalisable de base de l'ancien problème; sinon il n'y en a pas.

Un petit exemple

Les contraintes: $x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1 - 3x_2 \leq -5$, $-5x_1 + x_2 \leq -3$ deviennent $x_1 + x_2 \leq 10 + y$, $x_1 - 3x_2 \leq -5 + y$, $-5x_1 + x_2 \leq -3 + y$

et le problème avec ces contraintes et la fonction objective $z = -y$ a la solution réalisable de base $x_1 = x_2 = 0$, $x_1 - 3x_2 = -5 + y$

Une solution optimale est $x_1 = 1,\ x_2 = 2$, $y = 0,\ x_1 - 3x_2 = -5 + y,\ -5x_1 + x_2 = -3 + y$

Donc $x_1 = 1,\ x_2 = 2,,\ x_1 - 3x_2 = -5$, $5x_1 + x_2 = -3$ est une solution réalisable de base du vrai problème.

Et les équations vérifiées à cette solution du vrai problème se trouve en supprimant le $y = 0$ dans les équations de la solution optimale du problème auxiliaire!

Amélioration nulle

Comment? Si le nombre d'équations des contraintes vérifiées à une solution est supérieure à n.
Une itération jette une contrainte et en ajoute une autre; ça peut donner la même solution.
Et l'algorithme pourrait boucler (même point; ensembles différents d'équations).

Mais il existe au moins un bon ensemble d'équations qui permet à l'algorithme de continuer (vraie amélioration de z s'il y en a). Donc deux possibilités,

1. choisir les équations à supprimer et à rajouter comme normale avec un choix aléatoire quand plus d'un candidat
   peut marcher de façon acceptable quand il existe une meilleur solution mais risque de ne peut pas trouver qu'il n'y en a pas.

2. ajouter (virtuellement) une petite quantité ϵ_i à la constante b_i de la contrainte i;
   Agir comme si $1 >> \epsilon_1 >> \epsilon_2 >> \epsilon_3 \cdots$;
   Impossibilité d'avoir plus de n équations vérifiées!!
   Et on résout un programme indistinguable de l'initial!

Pourquoi ne pas jeter les contraintes inutiles?
Trop difficile de les trouver!

Le dual d'un programme linéaire

Motivation

Une solution réalisable d'un programme (de maximisation) donne un z possible, donc un minorant du z optimal.

Je peux aussi déduire des majorants de z par manipulation directe des inéquations:

$$\begin{array}{rrrrrrrccr}
10 & 10 & 20 & 50 & 0 & 40 & 25 & x & \leq & 100 \\
50 & 60 & 40 & 0 & 0 & 0 & 15 & & & 100 \\
30 & 50 & 40 & 5 & 5 & 20 & 10 & & & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 30 & 0 & & & 100
\end{array}$$

Si je calcule $2/5\times$ (1) + $2/3\times$ (2), j'obtiens $37.33x_1 + 44x_2 + 34.67x_3 + 20x_4 + 16x_6 + 20x_7 \leq 106.67$
Donc $z = 30x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 10x_4 + 15x_6 + 20x_7 \leq 106.67$

Quel est le meilleur majorant que je peux trouver de cette façon?

Le problème de base: maximiser $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

avec m contraintes $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i$

et $x_j \geq 0$

En essayant de trouver un majorant de la solution, j'ai cherché des multiplicateurs y_i pour les contraintes avec les propriétés:

$y_i \geq 0$

$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \geq c_j$

Et je veux trouver un ensemble de tels multiplicateurs qui me donne la valeur la plus petite possible de $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Un nouveau programme linéaire!
appelé le dual.

Propriété évidente: chaque solution réalisable du dual est supérieure ou égale à chaque solution réalisable du problème de base.

Le dual du dual

Le dual, à savoir *minimiser* $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ avec les contraintes $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \geq c_j$ équivaut à *maximiser* $\sum_{i=1}^{m} -b_i y_i$ avec les contraintes $\sum_{i=1}^{m} -a_{i,j} y_i \leq -c_j$. (pour l'exprimer en forme canonique)

On a multiplié les deux vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ et la matrice $\mathbf{a}$ par -1, échangé les 2 vecteurs et transposé la matrice.

Donc, si on le fait une deuxième fois pour obtenir le dual du dual, on trouve le problème de base.

Les deux problèmes ont la même solution!
(c'est-à-dire la même valeur optimale de la fonction objective)

Le théorème le plus important de la programmation linéaire.

Démonstration compliquée.

Mais, il n'est pas difficile de voir que l'algorithme du simplexe calcule (dans le cas d'un programme faisable et borné) une valeur qui est une solution réalisable des deux problèmes;
donc, forcément la solution optimale des deux.

L'interprétation économique de la solution du dual

La solution du problème dual (c'est-à-dire les y_i) nous dit par combien la solution optimale (z) va changer si la contrainte (numéro i) est modifiée.
(parce que la valeur trouvée pour z est $\sum_i b_i y_i$)

Si z est mon profit, y_i est le maximum que je devrait payer (par unité) pour lâcher la contrainte (acheter plus d'une matière de base ...)

Les méthodes plus récentes

Depuis une vingtaine d'années de nouveaux algorithmes existent avec des différences importantes par rapport à celui du simplexe:

- parcourir un chemin de solutions strictement à l'intérieur du polytope de solutions réalisables

- garantie de converger sur la solution optimale en temps raisonnable (borné par un poynôme)

- un peu moins vite en moyenne en pratique

- choisir une bonne direction (améliorer la fonction objective sans s'approcher trop des contraintes) et avancer tout en restant strictement à l'intérieur

Novembre 2002

Un prof aux E.U. annonce un algorithme fortement polynomial (nombre d'opérations arithmétiques borné par un polynôme indépendant du nombre de chiffres dans les coefficients).
Est-il vrai? L'algorithme reste secret pour le moment.