IUP MIAGE
IUP3 Recherche Opérationnelle 1
TD1: le 2/10/2001
Les calculs asymptotiques

Pour trois exemples donnés en cours (une chaîne ergodique, une avec deux classes finales et une avec deux états transitoires et deux classes finales dont une périodique de période 3), un calcul asymptotique donne les valeurs constatées pour les probabilités de transition dans la 100-ième puissance de la matrice P de probabilités de transition. En chaque cas, on donne P et P^{100} et vous devez expliquer le calcul direct des valeurs soulignées.

1. Ergodique

```
.1 .2 .3 .4 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 .1 .2 .3 .4
0 .5 0 .5 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 .5 0 .5
0 0 0 0 .6 .4 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 .9 .1
.9 .1 0 0 0 0 0 0 0 0
.1 .1 .1 .1 .1 .1 .1 .1 .1 .1
0 0 0 0 .2 .2 .2 .2 .2 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Apres temps 100
.17886 .08373 .06474 .11500 .09153 .07322 .04498 .11086 .12763 .10940
****** ****** ****** ****** ****** ****** ****** ****** ****** ******
.17886 .08373 .06474 .11500 .09153 .07322 .04498 .11086 .12763 .10940
.17886 .08373 .06474 .11500 .09153 .07322 .04498 .11086 .12763 .10940
.17886 .08373 .06474 .11500 .09153 .07322 .04498 .11086 .12763 .10940
.17886 .08373 .06474 .11500 .09153 .07322 .04498 .11086 .12763 .10940
.17886 .08373 .06474 .11500 .09153 .07322 .04498 .11086 .12763 .10940
.17886 .08373 .06474 .11500 .09153 .07322 .04498 .11086 .12763 .10940
.17886 .08373 .06474 .11500 .09153 .07322 .04498 .11086 .12763 .10940
.17886 .08373 .06474 .11500 .09153 .07322 .04498 .11086 .12763 .10940
.17886 .08373 .06474 .11500 .09153 .07322 .04498 .11086 .12763 .10940
```

Il s'agit d'une application simple de l'algorithme du cours (une équation par colonne; donc, il faut prendre le transposé de la matrice). Le système d'équations:

$$-0.900p_1 + 0.200p_2 + 0.300p_3 + 0.400p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 0.000$$
$$0.000p_1 - 1.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.100p_7 + 0.200p_8 + 0.300p_9 + 0.400p_{10} = 0.000$$
$$0.000p_1 + 0.500p_2 - 1.000p_3 + 0.500p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 0.000$$
$$0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 - 1.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.500p_8 + 0.000p_9 + 0.500p_{10} = 0.000$$
$$0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 - 0.400p_5 + 0.400p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 0.000$$
$$0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 - 1.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.900p_9 + 0.100p_{10} = 0.000$$
$$0.900p_1 + 0.100p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 - 1.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 0.000$$
$$0.100p_1 + 0.100p_2 + 0.100p_3 + 0.100p_4 + 0.100p_5 + 0.100p_6 - 0.900p_7 + 0.100p_8 + 0.100p_9 + 0.100p_{10} = 0.000$$
$$0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.200p_5 + 0.200p_6 + 0.200p_7 + 0.200p_8 - 0.800p_9 + 0.000p_{10} = 0.000$$
$$1.000p_1 + 1.000p_2 + 1.000p_3 + 1.000p_4 + 1.000p_5 + 1.000p_6 + 1.000p_7 + 1.000p_8 + 1.000p_9 + 1.000p_{10} = 1.000$$

donne le résultat suivant:
Variable 1=0.178865 Variable 2=0.083731 Variable 3=0.064746
Variable 4=0.115005 Variable 5=0.091535 Variable 6=0.073228
Variable 7=0.044987 Variable 8=0.110863 Variable 9=0.127638
Variable 10=0.109404

2. Deux classes

```
.1 .2 .3 .4 0 0 0 0 0 0
.3 .3 .2 .1 .1 0 0 0 0 0
0 .5 0 .5 0 0 0 0 0 0
.4 .6 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 .6 .4 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 .9 .1
0 0 0 0 0 0 0 0 .3 .7
0 0 0 0 0 .2 .4 .1 .2 .1
0 0 0 0 0 .2 .2 .2 .2 .2
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
```

```
Apres temps 100
.21897 .36496 .16058 .21897 .03649 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000
****** ****** ****** ****** ******
.21897 .36496 .16058 .21897 .03649 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000
.21897 .36496 .16058 .21897 .03649 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000
.21897 .36496 .16058 .21897 .03649 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000
.21897 .36496 .16058 .21897 .03649 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000
.00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .10600 .16200 .28000 .25000 .20200
.00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .10600 .16200 .28000 .25000 .20200
.00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .10600 .16200 .28000 .25000 .20200
.00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .10600 .16200 .28000 .25000 .20200
.00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .10600 .16200 .28000 .25000 .20200
```

On applique le même algorithme à la chaîne restreinte à la première classe. Les équations et la solution sont:

$-0.900p_1 + 0.300p_2 + 0.000p_3 + 0.400p_4 + 0.000p_5 = 0.000$
$0.200p_1 - 0.700p_2 + 0.500p_3 + 0.600p_4 + 0.000p_5 = 0.000$
$0.300p_1 + 0.200p_2 - 1.000p_3 + 0.000p_4 + 0.600p_5 = 0.000$
$0.400p_1 + 0.100p_2 + 0.500p_3 - 1.000p_4 + 0.400p_5 = 0.000$
$1.000p_1 + 1.000p_2 + 1.000p_3 + 1.000p_4 + 1.000p_5 = 1.000$

Variable 1=0.218978 Variable 2=0.364964 Variable 3=0.160584
Variable 4=0.218978 Variable 5=0.036496

3. Périodique (3 calculs)

```
0 0 .4 .6 0 0 0 0 0 0
0 0 .1 .9 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 .6 .4 0 0 0 0
0 0 0 0 .4 .6 0 0 0 0
.2 .8 0 0 0 0 0 0 0 0
.75 .25 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 .4 .6 0 0
0 0 0 0 0 0 .7 .3 0 0
.1 .1 .1 .1 .1 .1 .1 .1 .1 .1
.1 0 0 0 0 0 0 0 .1 .8
```

```
Apres temps 100
.00000 .00000 .25072 .74927 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000
              ******  ******
.00000 .00000 .25072 .74927 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000
.00000 .00000 .00000 .00000 .45014 .54985 .00000 .00000 .00000 .00000
.00000 .00000 .00000 .00000 .45014 .54985 .00000 .00000 .00000 .00000
.50242 .49758 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000
.50242 .49758 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000
.00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .53846 .46153 .00000 .00000
.00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .00000 .53846 .46153 .00000 .00000
.12629 .12507 .06392 .19102 .11631 .14207 .12669 .10859 .00000 .00000
.16704 .16543 .06487 .19386 .13104 .16007 .06334 .05429 .00000 .00000
              ****** ******               ****** ******
```

Premier calcul: les éléments $_{10,7}$ et $_{10,8}$; Ces valeurs sont données par le produit de celles de la distribution limite sur cette classe $\{7, 8\}$ qui est calculée de la même façon que dans l'exercice précédente .53846, .46153 et la probabilité de finir dans la classe $\{7, 8\}$ si on commence en l'état 10. Cette dernière probabilité est calculée par l'algorithme du cours (une équation par ligne). Donc, les équations sont:

$$
\begin{aligned}
1.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} &= 0.000\\
0.000p_1 + 1.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} &= 0.000\\
0.000p_1 + 0.000p_2 + 1.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} &= 0.000\\
0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 1.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} &= 0.000\\
0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 1.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} &= 0.000\\
0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 1.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} &= 0.000\\
0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 1.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} &= 1.000\\
0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 1.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} &= 1.000\\
0.100p_1 + 0.100p_2 + 0.100p_3 + 0.100p_4 + 0.100p_5 + 0.100p_6 + 0.100p_7 + 0.100p_8 - 0.900p_9 + 0.100p_{10} &= 0.000\\
0.100p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.100p_9 - 0.200p_{10} &= 0.000
\end{aligned}
$$

avec solution: Variable 1=0.000000 Variable 2=0.000000 Variable 3=0.000000 Variable 4=0.000000 Variable 5=0.000000 Variable 6=0.000000 Variable 7=1.000000 Variable 8=1.000000 Variable 9=0.235294 Variable 10=0.117647

Et les valeurs soulignées sont 0.117647×0.53846 et 0.117647×046153.

Deuxième calcul: les éléments $_{1,3}$ et $_{1,4}$; ce sont les probabilités conditionnelles (dans la limite) d'être dans les états 3 et 4 étant donné qu'on est dans la sous-classe $\{3, 4\}$. On prend la puissance λ (en l'occurrence la troisième puissance) de la matrice P, à savoir:

```
0.4860  0.5140  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
0.5190  0.4810  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
0.0000  0.0000  0.2260  0.7740  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
0.0000  0.0000  0.2590  0.7410  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.4320  0.5680  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.4650  0.5350  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.5260  0.4740  0.0000  0.0000
0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.5530  0.4470  0.0000  0.0000
0.1155  0.1175  0.0595  0.1745  0.1020  0.1220  0.1200  0.1040  0.0110  0.0740
0.0835  0.0195  0.0460  0.0720  0.0670  0.0710  0.0200  0.0180  0.0740  0.5290
```

et on calcule la distribution limite dans la classe $\{3, 4\}$ dans la chaîne qui a cette matrice comme sa matrice de probabilités de transitions (même algorithme que pour le cas précédent de deux classes).

les équations et leur solution sont:

$-0.774p_1 + 0.259p_2 = 0.000$
$1.000p_1 + 1.000p_2 = 1.000$

Variable 1=0.250726 Variable 2=0.749274

Troisième calcul: les éléments $_{10,3}$ et $_{10,4}$; ce sont les probabilités (dans la limite pour un nombre de transitions de la forme $3m+1$) d'être dans les états 3 et 4 étant donné qu'on a commencé dans l'état 10. Il faut multiplier les probabilités de la distribution limite de la sous-classe $\{3,4\}$ que nous venons de calculer par la probabilité (pour un nombre de transitions de la forme $3m+1$) d'être dans la sous-classe. Cette probabilité est la probabilité (pour un nombre de transitions de la forme $3m$) d'être dans la sous-classe précédente $\{1,2\}$ que nous calculons en appliquant le même algorithme que ans le premier calcul de cette exercice mais à la classe $\{1,2\}$ dans la matrice P^3 déjà calculée.

les équations et leur solution sont:

$$
\begin{aligned}
&1.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 1.000\\
&0.000p_1 + 1.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 1.000\\
&0.000p_1 + 0.000p_2 + 1.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 0.000\\
&0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 1.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 0.000\\
&0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 1.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 0.000\\
&0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 1.000p_6 + 0.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 0.000\\
&0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 1.000p_7 + 0.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 0.000\\
&0.000p_1 + 0.000p_2 + 0.000p_3 + 0.000p_4 + 0.000p_5 + 0.000p_6 + 0.000p_7 + 1.000p_8 + 0.000p_9 + 0.000p_{10} = 0.000\\
&0.116p_1 + 0.117p_2 + 0.059p_3 + 0.174p_4 + 0.102p_5 + 0.122p_6 + 0.120p_7 + 0.104p_8 - 0.989p_9 + 0.074p_{10} = 0.000\\
&0.084p_1 + 0.019p_2 + 0.046p_3 + 0.072p_4 + 0.067p_5 + 0.071p_6 + 0.020p_7 + 0.018p_8 + 0.074p_9 - 0.471p_{10} = 0.000
\end{aligned}
$$

Variable 1=1.000000 Variable 2=1.000000 Variable 3=0.000000 Variable 4=0.000000 Variable 5=0.000000 Variable 6=0.000000 Variable 7=0.000000 Variable 8=0.000000 Variable 9=0.254951 Variable 10=0.258740

Les probabilités cherchées sont, donc, 0.25874×0.250726 et 0.25874×0.749274.