PROGRAMMATION LINEAIRE

(sujet des prochaines 3-4 semaines)

Maximiser (ou minimiser) une valeur qui dépendent de plusieurs variables étant donné des contraintes sur ces variables

Quelques exemples:

- stocks+entrepôts : il faut avoir assez de chaque produit pour pouvoir satisfaire aux demandes prévisibles; les entrepôts ont une capacité finie; on veut minimiser le coût.

- produits+matières de base : chaque produit nécessite certaines quantités des plusieurs matières de base; on ne peut pas en utiliser plus que l'on a; on veut maximiser le profit.

- réseaux : le flux dans chaque arête ne peut pas être supérieur à sa capacité; ce qui arrive à un noeud doit en partir; on veut minimiser le coût d'un ensemble de flux qui effectue les transferts souhaités.

Définition générale

Un ensemble de variables: $x_1, \ x_2, \ \cdots \ x_n$

Une fonction objective linéaire à maximiser (ou minimiser):

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Un ensemble de contraintes linéaires: $l_1 \leq l_2$, $l_1 = l_2$, $l_1 \geq l_2$ (chaque l_i de la forme de z) il suffit de considérer des contraintes du premier type avec l_2 une constante: $\sum A_{i,j} x_j \ \leq \ b_i$

(Chaque i donne une contrainte; par convention $1 \ \leq \ i \ \leq \ m$
on écrit aussi *maximiser* $\mathbf{cx}$ *avec* $\mathbf{Ax} \ \leq \ \mathbf{b}$
chaque contrainte correspond à une ligne de la matrice $\mathbf{A}$)

Forme canonique

- Chaque variable est astreinte à être supérieure ou égale à 0

- Une restriction qui ne change rien quant à la difficulté du problème

- Mais souvent utile

Quelques définitions et cas spéciaux

- solution réalisable; un ensemble de valeurs des variables vérifiant toutes les contraintes

- problème faisable; un problème qui possède au moins une solution réalisable

- problèmes sans borne finie sur la fonction objective: c'est-à-dire le maximum de la fonction objective (sur les solutions réalisables) n'existe pas.

- problème possédant plusieurs solutions optimales; (plusieurs ensembles de valeurs des variables donnant la même valeur optimale de la fonction objective).

Exemple de solution sans borne

$$-4x_1 + 1x_2 \;\leq\; -10$$

$$1x_1 - 2x_2 \;\leq\; -30$$

maximiser $z = 5x_1 - 2x_2$

parmi les solutions sont: $(10, 20)$, $(100, 200)$, $(1000, 2000)\cdots$ avec valeurs de z: 10, 100, 1000 et ainsi de suite.

Exemple de plusieurs solutions optimales

$$1x_1 + 1x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$1x_1 + 5x_2 \leq 18$$

maximiser $z = 3x_1 + 3x_2$

parmi les solutions sont: $(10, 0)$, $(8, 2)$ avec valeur de z: 30.

S'il existe 2 solutions optimales, il en existe un nombre infini:
par exemple $(9, 1)$, $(9.5, 0.5)$

Exemple sans aucune solution réalisable

$$1x_1 + 1x_2 \ \leq \ 20$$

$$-1x_1 - 3x_2 \ \leq \ -50$$

$$-1x_1 + 1x_2 \ \leq \ 5$$

(En effet, on voit que la somme des deux dernières contraintes divisée par 2 est $-x_1 - x_2 \ \leq \ -22.5$ en contradiction avec la première.

Interprétation géométrique

- Les valeurs des n variables sont interprétées comme coordonnées d'un point en n dimensions

- Chaque contrainte définit un hyperplan dans cet espace tel que chaque solution réalisable doit être à la même coté (ou sur) l'hyperplan

- polytope (+intérieur) de solutions réalisables (peut-être de dimension inférieure à n);

- convexité: La ligne droite reliant deux solutions réalisables consiste en d'autres solutions réalisables

- si le polytope est fini, la fonction objective est bornée

Solutions de base

Une solution donnée par la solution de n des équations correspondant aux contraintes (c'est-à-dire les équations obtenues en remplacant $\leq$ par $=$)
(à noter que si les n équations ne sont pas indépendantes la solution n'existe pas et elles ne donnent pas de solution de base)

Un sommet du polytope

théorème : si la fonction objective est bornée, elle prend sa valeur optimale à une solution de base

Donc un algorithme possible:
calculer chaque solution de base;
vérifier qu'elle est réalisable;
si oui calculer la fonction objective;
prendre le maximum des valeurs calculées.

Mais ca serait très très lent ...

Limitations:

Des contraintes réelles qu'on ne peut pas exprimer (directement) par des contraintes linéaires.

- impossible de contraindre les variables à des valeurs entières;
  la "programmation linéaire en nombres entiers" a ses propres méthodes

- valeurs négatives: pas de problème (équivalence des formes canonique et générale); [valeurs négatives; contraintes $\geq$, $=$; contraintes $lin \leq lin$]

- contraintes non-linéaires: impossible! (p.ex $x_1 \geq 5$ **ou** $x_2 \geq 10$, $x_1 * x_2 \leq 20$ ...)

- contraintes avec $<$ ou $>$ (donc interdisant l'égalité): pas mal de différence théoriquement, très peu pour nous.