Dinámica Simbólica sobre los grupos
Plática I : introducción

Sebastián Barbieri Lemp

University of British Columbia

Escuela de invierno en grupos y dinámica en México

Enero, 2018

¿Que es la dinámica simbólica?

En dinámica simbólica nos interesamos por un tipo especial de sistemas dinámicos

$$G \curvearrowright X$$

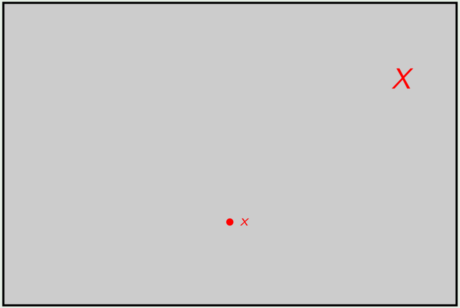
Donde:

- G es un grupo (numerable) que actúa por homeomorfismos (por la izquierda).
- X es un espacio métrico compacto de dimensión cero.
- La acción $G \curvearrowright X$ es expansiva.

¿Que es la dinámica simbólica?

Las acciones que satisfacen lo anterior se pueden representar de manera amigable codificando sus órbitas de acuerdo a una partición.

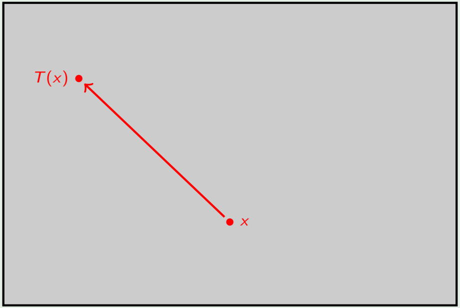
Una acción de $\mathbb{Z}$ generada por un homeo T.



¿Que es la dinámica simbólica?

Las acciones que satisfacen lo anterior se pueden representar de manera amigable codificando sus órbitas de acuerdo a una partición.

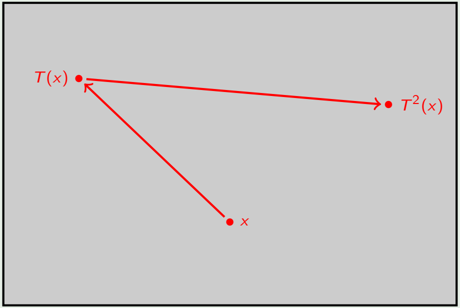
Una acción de $\mathbb{Z}$ generada por un homeo T.



¿Que es la dinámica simbólica?

Las acciones que satisfacen lo anterior se pueden representar de manera amigable codificando sus órbitas de acuerdo a una partición.

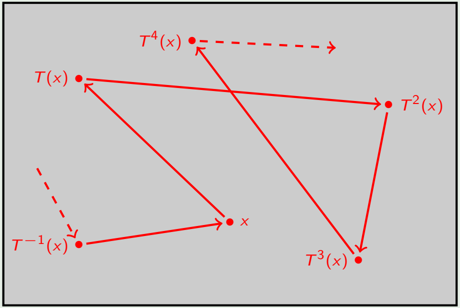
Una acción de $\mathbb{Z}$ generada por un homeo T.



¿Que es la dinámica simbólica?

Las acciones que satisfacen lo anterior se pueden representar de manera amigable codificando sus órbitas de acuerdo a una partición.

Una acción de $\mathbb{Z}$ generada por un homeo T.



¿Que es la dinámica simbólica?

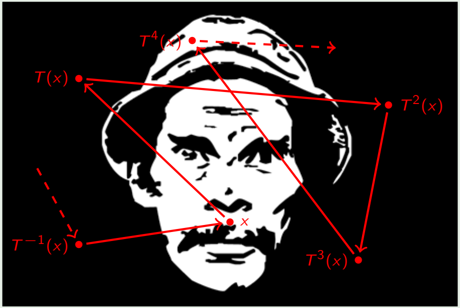
Las acciones que satisfacen lo anterior se pueden representar de manera amigable codificando sus órbitas de acuerdo a una partición.

Una acción de $\mathbb{Z}$ generada por un homeo T.

¿Que es la dinámica simbólica?

Las acciones que satisfacen lo anterior se pueden representar de manera amigable codificando sus órbitas de acuerdo a una partición.

Una acción de $\mathbb{Z}$ generada por un homeo T.



$$\varphi(x) = \quad \cdots \underset{-1}{\blacksquare}\underset{0}{\square}\underset{1}{\blacksquare}\underset{2}{\blacksquare}\underset{3}{\blacksquare}\underset{4}{\square} \cdots \quad \in \{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}}$$

¿Que es la dinámica simbólica?

Formalmente, dada una partición $\alpha = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de X y una acción $T : G \curvearrowright X$ la codificación se define de la manera siguiente:

$$\varphi(x) \in \{1, \ldots, n\}^G$$

$$\varphi(x)_g = i \iff T^{g^{-1}}(x) \in A_i$$

¿Que es la dinámica simbólica?

Formalmente, dada una partición $\alpha = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de X y una acción $T : G \curvearrowright X$ la codificación se define de la manera siguiente:

$$\varphi(x) \in \{1, \ldots, n\}^G$$

$$\varphi(x)_g = i \iff T^{g^{-1}}(x) \in A_i$$

Sobre el espacio $Y = \{1, \ldots, n\}^G$ podemos definir una acción de traslación $\sigma : G \curvearrowright Y$ tal que $\sigma^g(y)_h = y_{g^{-1}h}$. Esta acción cumple que

$$\varphi \circ T^g = \sigma^g \circ \varphi.$$

¿Que es la dinámica simbólica?

Supongamos que en el ejercicio anterior elegimos la partición $\alpha = \{A_1, \ldots, A_n\}$ tal que:

- El diametro de cada átomo en la partición es menor a la constante de expansividad. $diam(A_i) < C$. [expansividad]
- Los A_i son abiertos-cerrados. [dim. cero]

¿Que es la dinámica simbólica?

Supongamos que en el ejercicio anterior elegimos la partición $\alpha = \{A_1, \ldots, A_n\}$ tal que:

- El diametro de cada átomo en la partición es menor a la constante de expansividad. $diam(A_i) < C$. [expansividad]
- Los A_i son abiertos-cerrados. [dim. cero]

$\triangleright$ Entonces φ define una conjugación topológica. Es decir, la acción $G \curvearrowright X$ puede reinterpretarse como una traslación sobre un subconjunto cerrado e invariante bajo traslaciones de $\{1, \ldots, n\}^G$.

Definición de espacio de shift

Tomemos:

- G un grupo infinito numerable.
- $\mathcal{A}$ un conjunto (alfabeto) finito. Ej: $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.
- $\mathcal{A}^G$ el espacio de configuraciones $x : G \to \mathcal{A}$
- $\sigma : G \curvearrowright \mathcal{A}^G$ es la acción izquierda de traslación dada por:

$$\sigma^g(x)_h = x_{g^{-1}h}.$$

Definición de espacio de shift

Tomemos:

- G un grupo infinito numerable.
- $\mathcal{A}$ un conjunto (alfabeto) finito. Ej: $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.
- $\mathcal{A}^G$ el espacio de configuraciones $x : G \to \mathcal{A}$
- $\sigma : G \curvearrowright \mathcal{A}^G$ es la acción izquierda de traslación dada por:

$$\sigma^g(x)_h = x_{g^{-1}h}.$$

Definición: full G-shift

La pareja $(\mathcal{A}^G, \sigma)$ se denomina *full G-shift*.

Definición: subshift (dislocación)

Un subconjunto $X \subset \mathcal{A}^G$ cerrado para la topología producto y shift-invariante se denomina *subshift* o *espacio de shift*.

Ejemplo de la acción de shift

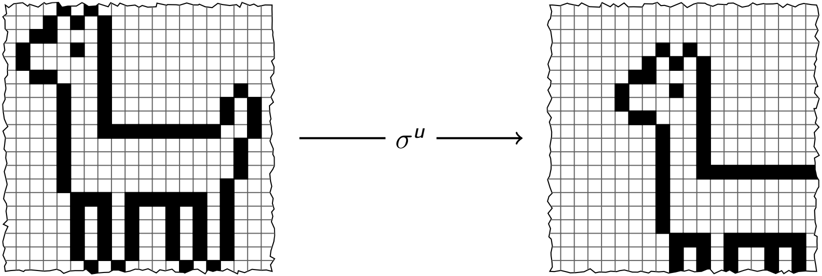


Figura: Una configuración $x \in \{\blacksquare, \square\}^{\mathbb{Z}^2}$ siendo trasladada por un vector $u \in \mathbb{Z}^2$.

¿Por qué usar este modelo?

- La acción $G \curvearrowright X$ se reinterpreta como una traslación, la complejidad de la acción original se traspasa a la topología.

¿Por qué usar este modelo?

- La acción $G \curvearrowright X$ se reinterpreta como una traslación, la complejidad de la acción original se traspasa a la topología.
- La topología de un espacio de shift es muy simple:
  1. Noción de convergencia sencilla:

  $$x_n \to x \iff \forall F \Subset G, \exists N, \forall n \geq N, x_n|_F = x|_F.$$

  Es decir, la convergencia es coordenada por coordenada.

¿Por qué usar este modelo?

- La acción $G \curvearrowright X$ se reinterpreta como una traslación, la complejidad de la acción original se traspasa a la topología.
- La topología de un espacio de shift es muy simple:
  1. Noción de convergencia sencilla:
  $$x_n \to x \iff \forall F \Subset G, \exists N, \forall n \geq N, x_n|_F = x|_F.$$
  Es decir, la convergencia es coordenada por coordenada.
  2. La topología es generada por ultramétricas. $G = \{g_0, g_1, \dots\}$,
  $$d(x, y) = 2^{-\inf\{n \in \mathbb{N} | x_{g_n} \neq y_{g_n}\}}$$

¿Por qué usar este modelo?

- La acción $G \curvearrowright X$ se reinterpreta como una traslación, la complejidad de la acción original se traspasa a la topología.
- La topología de un espacio de shift es muy simple:
  1. Noción de convergencia sencilla:
  $$x_n \to x \iff \forall F \Subset G, \exists N, \forall n \geq N, x_n|_F = x|_F.$$
  Es decir, la convergencia es coordenada por coordenada.
  2. La topología es generada por ultramétricas. $G = \{g_0, g_1, \dots\}$,
  $$d(x, y) = 2^{-\inf\{n \in \mathbb{N} | x_{g_n} \neq y_{g_n}\}}$$
- Los espacios de shift se pueden reinterpretar combinatorialmente.

Descripción combinatorial

Tomemos $F \Subset G$ y un alfabeto $\mathcal{A}$.

$\triangleright$ Una función $p : F \to \mathcal{A}$ se denomina un *patrón*. a F se le denomina el soporte de p.

Descripción combinatorial

Tomemos $F \Subset G$ y un alfabeto $\mathcal{A}$.
$\triangleright$ Una función $p : F \to \mathcal{A}$ se denomina un *patrón*. a F se le denomina el soporte de p.
$\triangleright$ El cilindro definido por $p \in \mathcal{A}^F$ es el conjunto:

$$[p] := \{x \in \mathcal{A}^G \mid x|_F = p\}$$

Descripción combinatorial

Tomemos $F \Subset G$ y un alfabeto $\mathcal{A}$.

▷ Una función $p : F \to \mathcal{A}$ se denomina un *patrón*. a F se le denomina el soporte de p.

▷ El cilindro definido por $p \in \mathcal{A}^F$ es el conjunto:

$$[p] := \{x \in \mathcal{A}^G \mid x|_F = p\}$$

Proposición

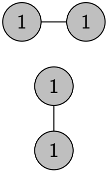
$X \subset \mathcal{A}^G$ es un subshift si y solamente si existe un conjunto de patrones prohibidos $\mathcal{F}$ tal que:

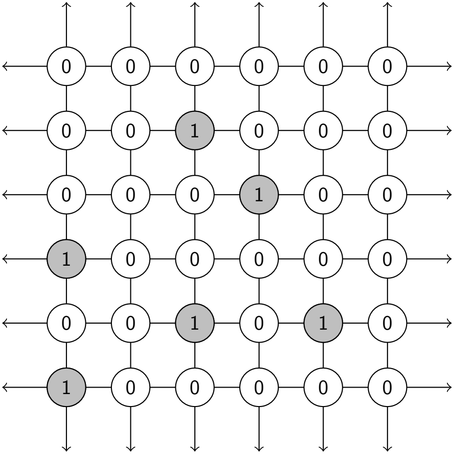
$$X = X_{\mathcal{F}} := \mathcal{A}^G \setminus \bigcup_{g \in G, p \in \mathcal{F}} \sigma^g([p])$$

Es decir, un subshift es un conjunto de coloraciones de G por $\mathcal{A}$ que evitan la aparición de una lista de patrones.

Ejemplo en $\mathbb{Z}^2$: Hard-square shift

Ejemplo: Hard-square shift. X es el conjunto de configuraciones $x : \mathbb{Z}^2 \to \{0,1\}$ tal que no hay dos 1s adjacentes.

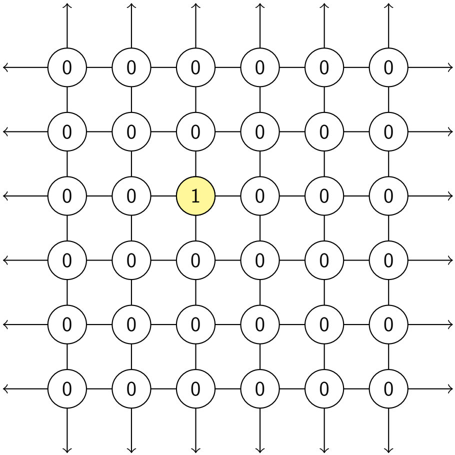
$\mathcal{F} =$ 



Ejemplo: Subshift del huevo frito (sunny side up)

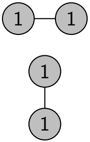
Ejemplo: huevo frito.

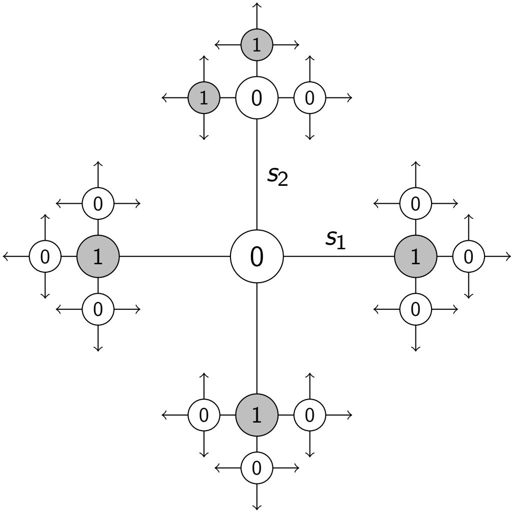
$$X_{\leq 1} := \{x \in \{0,1\}^G \mid 0 \notin \{x_u, x_v\} \implies u = v\}.$$



Ejemplo: Hard-square en F_2.

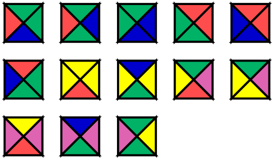
$\mathcal{F} =$

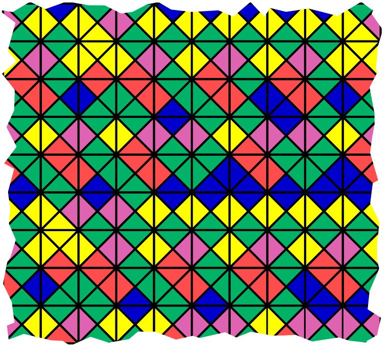




Ejemplo: Teselado de Wang

Los espacios de shift pueden modelar casos interesantes: el espacio de teselados de Wang.





Plan del minicurso

- **Plática I**: Definiciones básicas y ejemplos en sistemas dinámicos generales.
- **Plática II**: El problema de dominó y de aperiodicidad clásicos: $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^2$.
- **Plática III**: El problema de dominó en grupos generales.
- **Plática IV**: Teselados aperiódicos en grupos.
- **(Si me sobra tiempo):** Entropía en grupos promediables y más allá: isomorfismos entre shifts de Bernoulli.

Aplicaciones

Tenemos que:

$$\begin{array}{r} G \curvearrowright X \text{ es expansiva} \\ X \text{ es tot. disconexo} \end{array} \iff G \curvearrowright X \text{ es conj. a un subshift}$$

Aplicaciones

Tenemos que:

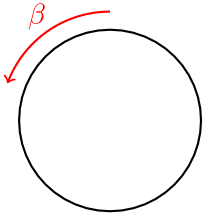
$$\begin{array}{r} G \curvearrowright X \text{ es expansiva} \\ X \text{ es tot. disconexo} \end{array} \iff G \curvearrowright X \text{ es conj. a un subshift}$$

Sin embargo, podemos usar espacios de shift para codificar acciones que no satisfacen estas propiedades.

- En el caso de dinámica medible, se pueden obtener isomorfismos a sistemas simbólicos.
- En el caso topológico no se puede obtener una conjugación, pero se pueden obtener extensiones simbólicas "pequeñas" (ej: factor finito-a-1).

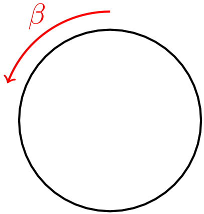
Ejemplo: rotación irracional

Sea $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y consideremos $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dada por R_β tal que $x \mapsto x + \beta$.



Ejemplo: rotación irracional

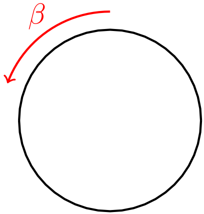
Sea $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y consideremos $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dada por R_β tal que $x \mapsto x + \beta$.



- ▷ La acción está lejos de ser expansiva, es una isometría.
- ▷ $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no admite una partición en abiertos-cerrados.

Ejemplo: rotación irracional

Sea $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y consideremos $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dada por R_β tal que $x \mapsto x + \beta$.

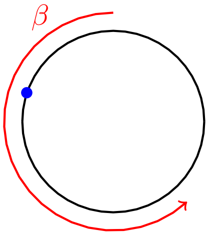


- ▷ La acción está lejos de ser expansiva, es una isometría.
- ▷ $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no admite una partición en abiertos-cerrados.

Consideremos la partición $\alpha = \{[0, \beta), [\beta, 1)\}$

Ejemplo: rotación irracional

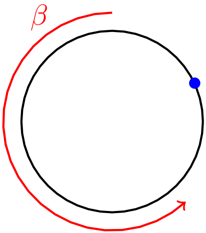
Ej: $\alpha = \{[0, \beta), [\beta, 1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \dots 0 \dots$

Ejemplo: rotación irracional

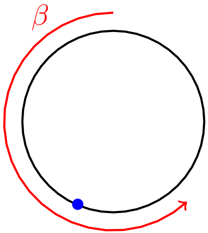
Ej: $\alpha = \{[0, \beta), [\beta, 1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 01 \ldots$

Ejemplo: rotación irracional

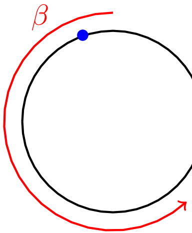
Ej: $\alpha = \{[0, \beta), [\beta, 1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 010 \ldots$

Ejemplo: rotación irracional

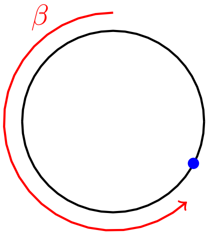
Ej: $\alpha = \{[0,\beta),[\beta,1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 0100 \ldots$

Ejemplo: rotación irracional

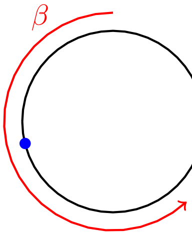
Ej: $\alpha = \{[0,\beta),[\beta,1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 01001 \ldots$

Ejemplo: rotación irracional

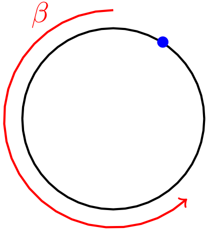
Ej: $\alpha = \{[0,\beta),[\beta,1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 010010 \ldots$

Ejemplo: rotación irracional

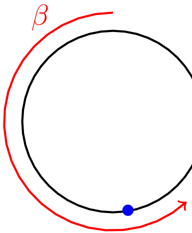
Ej: $\alpha = \{[0, \beta), [\beta, 1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 0100101 \ldots$

Ejemplo: rotación irracional

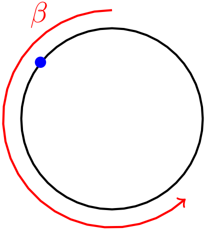
Ej: $\alpha = \{[0,\beta),[\beta,1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 01001010 \ldots$

Ejemplo: rotación irracional

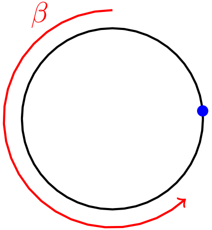
Ej: $\alpha = \{[0, \beta), [\beta, 1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 010010100 \ldots$

Ejemplo: rotación irracional

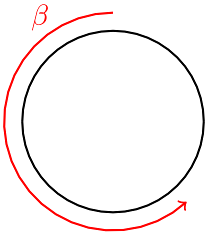
Ej: $\alpha = \{[0,\beta),[\beta,1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 0100101001 \ldots$

Ejemplo: rotación irracional

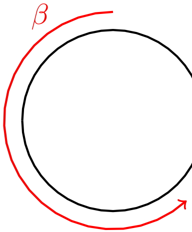
Ej: $\alpha = \{[0,\beta),[\beta,1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)}-1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 0100101001010010010100100101001010010010\ \ldots$

Ejemplo: rotación irracional

Ej: $\alpha = \{[0, \beta), [\beta, 1)\}$, $\beta = \frac{\sqrt{(5)} - 1}{2}$ y $x = 0{,}2$.



$\varphi(x) = \ldots 0100101001010010010100100101001010010010 \; \ldots$
El subshift X obtenido al cerrar el conjunto de todas estas codificaciones se denomina Sturmiano de pendiente β. Define un factor natural:

$$(X, \sigma) \twoheadrightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, R_\beta).$$

Subshifts de tipo finito (SFTs)

Subshift de tipo finito (SFT)

Un *subshift de tipo finito* es un subshift que puede ser definido por un conjunto **finito** de patrones prohibidos

Subshifts de tipo finito (SFTs)

Subshift de tipo finito (SFT)

Un *subshift de tipo finito* es un subshift que puede ser definido por un conjunto **finito** de patrones prohibidos

- Ejemplo: el hard-square shift.

Subshifts de tipo finito (SFTs)

Subshift de tipo finito (SFT)

Un *subshift de tipo finito* es un subshift que puede ser definido por un conjunto **finito** de patrones prohibidos

- Ejemplo: el hard-square shift.
- No-ejemplo: el subshift del huevo frito.

Subshifts de tipo finito (SFTs)

Subshift de tipo finito (SFT)

Un *subshift de tipo finito* es un subshift que puede ser definido por un conjunto **finito** de patrones prohibidos

- Ejemplo: el hard-square shift.
- No-ejemplo: el subshift del huevo frito.

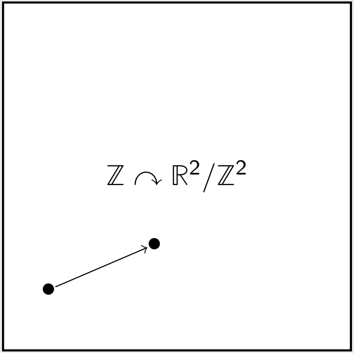
Ventajas:

- Teoría muy bien comprendida en el caso de acciones de $\mathbb{Z}$.
- Se pueden analizar desde la teoría de lenguajes.
- Modelan una gran variedad de sistemas dinámicos.

Ejemplo: El mapa del gatito de Arnold

Una acción de $\mathbb{Z}$ dada por un automorfismo del toro.

$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dada por $x \mapsto Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.



Ejemplo: El mapa del gatito de Arnold

Una acción de $\mathbb{Z}$ dada por un automorfismo del toro.

$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dada por $x \mapsto Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[a]

[a] The hermitage court outrunner cat, by Eldar Zakirov

Ejemplo: El mapa del gatito de Arnold

Una acción de $\mathbb{Z}$ dada por un automorfismo del toro.

$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dada por $x \mapsto Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo: El mapa del gatito de Arnold

Una acción de $\mathbb{Z}$ dada por un automorfismo del toro.

$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dada por $x \mapsto Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo: El mapa del gatito de Arnold

Una acción de $\mathbb{Z}$ dada por un automorfismo del toro.

$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dada por $x \mapsto Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

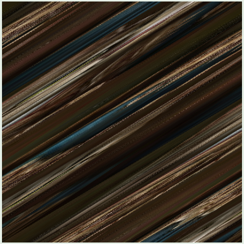
$$\xrightarrow{\quad A \quad}$$

Ejemplo: El mapa del gatito de Arnold

Una acción de $\mathbb{Z}$ dada por un automorfismo del toro.

$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dada por $x \mapsto Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\xrightarrow{\quad A^2 \quad}$

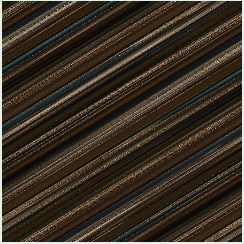


Ejemplo: El mapa del gatito de Arnold

Una acción de $\mathbb{Z}$ dada por un automorfismo del toro.

$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dada por $x \mapsto Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\xrightarrow{\quad A^3 \quad}$$



- El Mapeo del gatito forma parte de una familia importante de diffeos sobre variedades lisas: Axioma A.
- (R. Bowen, 70) Mostró que un G_δ de puntos no errantes de un diffeo axioma A admite una partición de Markov. Esto permite mostrar que existe una extensión SFT (X, σ) que captura bien la dinámica del mapeo del gatito (finita-a-1).

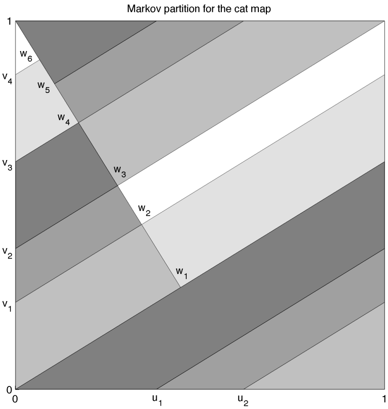


Figura: Una partición de Markov para el mapa del gatito de Arnold[1]

[1] imagen sacada de https://mathoverflow.net/questions/8916/a-regularity-property-of-transition-matrices-for-the-cat-map

Factores entre espacios de shift

Sean $T : G \curvearrowright X$ y $S : G \curvearrowright Y$ dos SD. Una función $\phi : X \to Y$ es un factor si:

- ϕ es una función continua sobreyectiva.
- ϕ es G-equivariante: $\forall g \in G, \phi \circ T^g = S^g \circ \phi$.

Si ϕ es un homeomorfismo, decimos que es una conjugación.

Factores entre espacios de shift

Sean $T : G \curvearrowright X$ y $S : G \curvearrowright Y$ dos SD. Una función $\phi : X \to Y$ es un factor si:

- ϕ es una función continua sobreyectiva.
- ϕ es G-equivariante: $\forall g \in G, \phi \circ T^g = S^g \circ \phi$.

Si ϕ es un homeomorfismo, decimos que es una conjugación.

En el caso en que X e Y son subshifts, los homeomorfismos G-equivariantes se pueden caracterizar como códigos de la ventana deslizante.

Factores entre espacios de shift

Tomemos alfabetos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, un soporte $F \Subset G$ y una función $\Phi : \mathcal{A}^F \to \mathcal{B}$.

Definición: CVD

Una función ϕ entre dos subshifts X e Y se denomina *código de la ventana deslizante (CVD)* si existe una función local Φ tal que

$$\forall g \in G, \phi(x)_g = \Phi(\sigma^{g^{-1}}(x)|_F).$$

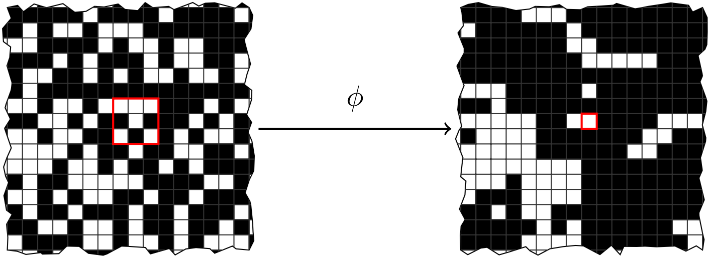
Factores entre espacios de shift

Tomemos alfabetos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, un soporte $F \Subset G$ y una función $\Phi : \mathcal{A}^F \to \mathcal{B}$.

Definición: CVD

Una función ϕ entre dos subshifts X e Y se denomina *código de la ventana deslizante (CVD)* si existe una función local Φ tal que

$$\forall g \in G, \phi(x)_g = \Phi(\sigma^{g^{-1}}(x)|_F).$$



Factores entre espacios de shift

Proposición

Una función $\phi : X \to Y$ entre dos espacios de shift es un CVD si y solamente si ϕ es continua y G-equivariante.

[Prueba en la pizarra]

Subshifts sóficos

Definición: subshift sófico

Un subshift Y se dice sófico si es la imagen de un SFT por un CVD.

Subshifts sóficos

Definición: subshift sófico

Un subshift Y se dice sófico si es la imagen de un SFT por un CVD.

Ejemplos

- Todo SFT es sófico.

Subshifts sóficos

Definición: subshift sófico

Un subshift Y se dice sófico si es la imagen de un SFT por un CVD.

Ejemplos

- Todo SFT es sófico.
- El subshift del huevo frito es sófico para $G = \mathbb{Z}^d$ o $G = F_k$. Nunca es un SFT.

Subshifts sóficos

Definición: subshift sófico

Un subshift Y se dice sófico si es la imagen de un SFT por un CVD.

Ejemplos

- Todo SFT es sófico.
- El subshift del huevo frito es sófico para $G = \mathbb{Z}^d$ o $G = F_k$. Nunca es un SFT.
- El subshift $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ tal que cada componente conexa maximal y finita de 1s tiene tamaño par es sófico.

Ejemplo: huevo frito en F_2

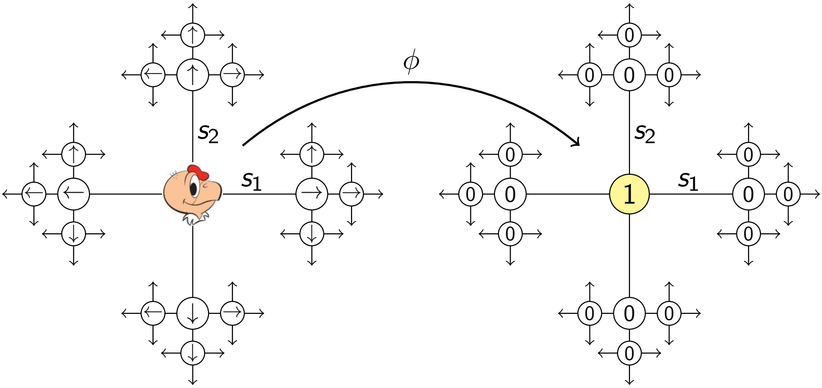
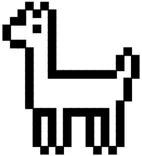


Figura: Extensión SFT para $X_{\leq 1}$ en el caso de F_2

Retener para las siguientes pláticas

- Definición de espacio de shift.
- Caracterización por patrones prohibidos.
- Definición de SFT.
- Factores simbólicos como códigos de ventana deslizante.
- Definición de subshift sófico.

¡Gracias por su atención!



Ejemplo: El shift de componentes pares (even shift)

Diapositivas originalmente producidas por N. Aubrun

$\mathcal{A} = \{ \square$,  ,  $\} +$ rotaciones

Definamos el factor CVD:

$\Phi(\square) = 0$ $\phi($$) = \phi($$) = 1$

Ejemplo: El shift de componentes pares (even shift)

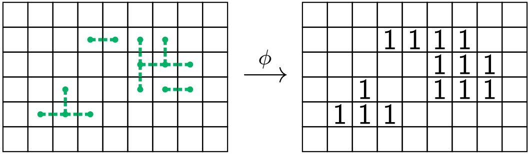
Diapositivas originalmente producidas por N. Aubrun

$\mathcal{A} = \{$  ,  ,  $\}$ + rotaciones

Definamos el factor CVD:

$\Phi($  $) = 0$ $\phi($  $) = \phi($  $) = 1$

Las componentes conexas tienen tamaño par (Lema de los saludos)$\Rightarrow \phi(X_k) \subseteq X_{\texttt{even}}$



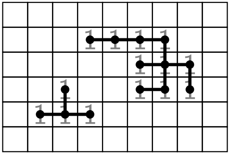
Ejemplo: El shift de componentes pares (even shift)

Diapositivas originalmente producidas por N. Aubrun

Conversamente, sea $x \in X_{\texttt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.

			1	1	1	1		
					1	1	1	
		1			1	1	1	
	1	1	1					

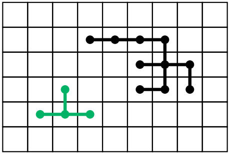
Conversamente, sea $x \in X_{\texttt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.



- Elijamos un árbol cobertor $\mathcal{T}$ de $\mathcal{C}$.

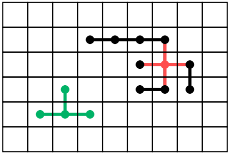
Ejemplo: El shift de componentes pares (even shift)
Diapositivas originalmente producidas por N. Aubrun

Conversamente, sea $x \in X_{\texttt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.



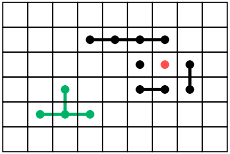
- Elijamos un árbol cobertor $\mathcal{T}$ de $\mathcal{C}$.
- Si todos los vértices tienen grado impar en $\mathcal{T}$, podemos cantar victoria.

Conversamente, sea $x \in X_{\texttt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.



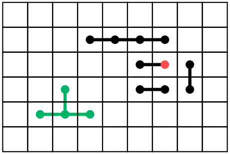
- Elijamos un árbol cobertor $\mathcal{T}$ de $\mathcal{C}$.
- Si todos los vértices tienen grado impar en $\mathcal{T}$, podemos cantar victoria.
- Si no, borremos un vértice con grado par.

Conversamente, sea $x \in X_{\mathtt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.



- Elijamos un árbol cobertor $\mathcal{T}$ de $\mathcal{C}$.
- Si todos los vértices tienen grado impar en $\mathcal{T}$, podemos cantar victoria.
- Si no, borremos un vértice con grado par.

Conversamente, sea $x \in X_{\texttt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.

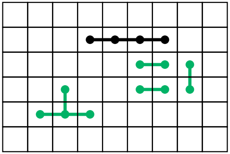


- Elijamos un árbol cobertor $\mathcal{T}$ de $\mathcal{C}$.
- Si todos los vértices tienen grado impar en $\mathcal{T}$, podemos cantar victoria.
- Si no, borremos un vértice con grado par.
- En $\mathcal{T} \setminus \{v\}$, Hay una cantidad impar de árboles de cardinalidad impar: conectar v a ellos.

Ejemplo: El shift de componentes pares (even shift)

Diapositivas originalmente producidas por N. Aubrun

Conversamente, sea $x \in X_{\texttt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.

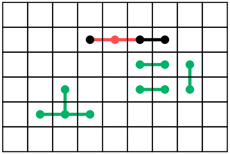


- Elijamos un árbol cobertor $\mathcal{T}$ de $\mathcal{C}$.
- Si todos los vértices tienen grado impar en $\mathcal{T}$, podemos cantar victoria.
- Si no, borremos un vértice con grado par.
- En $\mathcal{T} \setminus \{v\}$, Hay una cantidad impar de árboles de cardinalidad impar: conectar v a ellos.
- Iterar hasta eliminar todos los vértices impares y concluir por compacidad.

Ejemplo: El shift de componentes pares (even shift)

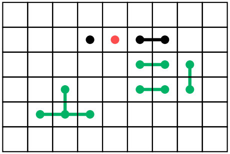
Diapositivas originalmente producidas por N. Aubrun

Conversamente, sea $x \in X_{\texttt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.



- Elijamos un árbol cobertor $\mathcal{T}$ de $\mathcal{C}$.
- Si todos los vértices tienen grado impar en $\mathcal{T}$, podemos cantar victoria.
- Si no, borremos un vértice con grado par.
- En $\mathcal{T} \setminus \{v\}$, Hay una cantidad impar de árboles de cardinalidad impar: conectar v a ellos.
- Iterar hasta eliminar todos los vértices impares y concluir por compacidad.

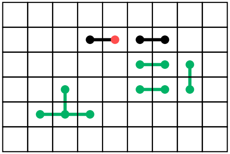
Conversamente, sea $x \in X_{\mathtt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.



- Elijamos un árbol cobertor $\mathcal{T}$ de $\mathcal{C}$.
- Si todos los vértices tienen grado impar en $\mathcal{T}$, podemos cantar victoria.
- Si no, borremos un vértice con grado par.
- En $\mathcal{T} \setminus \{v\}$, Hay una cantidad impar de árboles de cardinalidad impar: conectar v a ellos.
- Iterar hasta eliminar todos los vértices impares y concluir por compacidad.

Ejemplo: El shift de componentes pares (even shift)
Diapositivas originalmente producidas por N. Aubrun

Conversamente, sea $x \in X_{\texttt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.

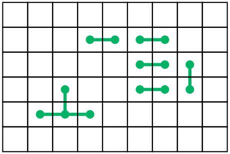


- Elijamos un árbol cobertor $\mathcal{T}$ de $\mathcal{C}$.
- Si todos los vértices tienen grado impar en $\mathcal{T}$, podemos cantar victoria.
- Si no, borremos un vértice con grado par.
- En $\mathcal{T} \setminus \{v\}$, Hay una cantidad impar de árboles de cardinalidad impar: conectar v a ellos.
- Iterar hasta eliminar todos los vértices impares y concluir por compacidad.

Ejemplo: El shift de componentes pares (even shift)

Diapositivas originalmente producidas por N. Aubrun

Conversamente, sea $x \in X_{\texttt{even}}$ y consideremos $\mathcal{C}$ una componente maximal finita de 1s.



- Elijamos un árbol cobertor $\mathcal{T}$ de $\mathcal{C}$.
- Si todos los vértices tienen grado impar en $\mathcal{T}$, podemos cantar victoria.
- Si no, borremos un vértice con grado par.
- En $\mathcal{T} \setminus \{v\}$, Hay una cantidad impar de árboles de cardinalidad impar: conectar v a ellos.
- Iterar hasta eliminar todos los vértices impares y concluir por compacidad.

¡Gracias por su atención!