Dinámica Simbólica sobre los grupos
Dominós en grupos generales

Sebastián Barbieri Lemp

University of British Columbia

Escuela de invierno en grupos y dinámica en México
Enero, 2018

Recuerdo

Consideremos la clase de los G-SFTs

caso $G = \mathbb{Z}$

- Existe un algoritmo que dada una descripción de un conjunto finito $\mathcal{F}$ de patrones prohibidos determina si $X_{\mathcal{F}} = \emptyset$.
- Todo $\mathbb{Z}$-SFT admite puntos periódicos.

Recuerdo

Consideremos la clase de los G-SFTs

caso $G = \mathbb{Z}$

- Existe un algoritmo que dada una descripción de un conjunto finito $\mathcal{F}$ de patrones prohibidos determina si $X_{\mathcal{F}} = \emptyset$.
- Todo $\mathbb{Z}$-SFT admite puntos periódicos.

caso $G = \mathbb{Z}^2$

- El problema de dominó es indecidible.
- Existen $\mathbb{Z}^2$-SFTs sin puntos periódicos.

Recuerdo

Consideremos la clase de los G-SFTs

caso $G = \mathbb{Z}$

- Existe un algoritmo que dada una descripción de un conjunto finito $\mathcal{F}$ de patrones prohibidos determina si $X_{\mathcal{F}} = \emptyset$.
- Todo $\mathbb{Z}$-SFT admite puntos periódicos.

caso $G = \mathbb{Z}^2$

- El problema de dominó es indecidible.
- Existen $\mathbb{Z}^2$-SFTs sin puntos periódicos.

¿Qué se puede decir en el caso de grupos más generales ?

Reducciones

Antes de atacar ese problema, debemos formalizar un poco más la noción de reducción.

Definición

Una función $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ se dice *total calculable* si existe una máquina de Turing T que en entrada $u \in \Sigma^*$ acepta dejando en la cinta $f(u) \in \Gamma^*$.

Reducciones

Antes de atacar ese problema, debemos formalizar un poco más la noción de reducción.

Definición

Una función $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ se dice *total calculable* si existe una máquina de Turing T que en entrada $u \in \Sigma^*$ acepta dejando en la cinta $f(u) \in \Gamma^*$.

Definición

Sean $L \subset \Sigma^*$ y $L' \subset \Gamma^*$ lenguajes. Decimos que L se *reduce mucho-a-1* a L' (escribimos $L \leq_m L'$) si existe una función total calculable tal que $u \in L \iff f(u) \in L'$.

Reducciones

Antes de atacar ese problema, debemos formalizar un poco más la noción de reducción.

Definición

Una función $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ se dice *total calculable* si existe una máquina de Turing T que en entrada $u \in \Sigma^*$ acepta dejando en la cinta $f(u) \in \Gamma^*$.

Definición

Sean $L \subset \Sigma^*$ y $L' \subset \Gamma^*$ lenguajes. Decimos que L se *reduce mucho-a-1* a L' (escribimos $L \leq_m L'$) si existe una función total calculable tal que $u \in L \iff f(u) \in L'$.

Si $L \leq_m L'$ y $L' \leq_m L$ escribiremos $L \equiv_m L'$.

Problema de dominó

▷ antes de definir el problema de dominó, debemos aprender a codificar patrones definidos en grupos.

Problema de dominó

▷ antes de definir el problema de dominó, debemos aprender a codificar patrones definidos en grupos.

Definición

Un grupo G se dice *finitamente generado* si existe $S \Subset G$ tal que para todo $g \in G$ existe $w \in S^*$ tal que $w = g$.

Por simplicidad, durante esta plática todos los grupos son finitamente generados.

Problema de dominó

▷ antes de definir el problema de dominó, debemos aprender a codificar patrones definidos en grupos.

Definición

Un grupo G se dice *finitamente generado* si existe $S \Subset G$ tal que para todo $g \in G$ existe $w \in S^*$ tal que $w = g$.

Por simplicidad, durante esta plática todos los grupos son finitamente generados.

Definición

Dado un alfabeto $\mathcal{A}$ y $S \Subset G$ una *codificación de patrón* c es una colección finita de tuplas $(w, a) \in S^* \times \mathcal{A}$.

Problema de dominó

Sea G un grupo f.g. y $\langle S\rangle = G$

Definición : intento 1

El *problema del vacío* con respecto a S es el conjunto $\mathtt{EP}(G,S)$ de conjuntos finitos de codificaciones de patrones $\mathcal{C} = \{c_i\}_{i\in I}$ tal que

$$X_{\mathcal{C}} := \mathcal{A}^G \setminus \bigcup_{g\in G, c\in\mathcal{C}} \bigcap_{(w,a)\in c} [a]_{gw} \neq \emptyset$$

Problema de dominó

Sea G un grupo f.g. y $\langle S \rangle = G$

Definición : intento 1

El *problema del vacío* con respecto a S es el conjunto $\mathtt{EP}(G,S)$ de conjuntos finitos de codificaciones de patrones $\mathcal{C} = \{c_i\}_{i \in I}$ tal que

$$X_{\mathcal{C}} := \mathcal{A}^G \setminus \bigcup_{g \in G, c \in \mathcal{C}} \bigcap_{(w,a) \in c} [a]_{gw} \neq \emptyset$$

$\triangleright$ Acotación : Muchas palabras podrían codificar el mismo elemento. Ej $\mathbb{Z} = \langle +3, -2 \rangle$.

$$(+3)(+3)(-2) = 4 = (+3)(-2)(-2)(+3)(+3)(-2)(+3)(-2)$$

Problema de dominó

Sea G un grupo f.g. y $\langle S \rangle = G$.

Definición

Un subshift $X \subset \mathcal{A}^G$ se dice de *vecinos más cercanos* con respecto a S si puede ser definido por un conjunto de patrones prohibidos $\mathcal{F}$ tal que el soporte de cada $p \in \mathcal{F}$ es de la forma $\{1_G, s\}$ para algún $s \in S$.

Definición : intento 2

El *problema de dominó* con respecto a S es el conjunto $\mathtt{DP}(G, S)$ de codifiaciones de subshifts de vecinos más cercanos c/r a S que son no vacíos.

Problema de dominó

Proposición

Sea G un grupo f.g. y $\langle S\rangle = \langle S'\rangle = G$

$$\mathrm{DP}(G,S) =_m \mathrm{EP}(G,S) =_m \mathrm{EP}(G,S') =_m \mathrm{DP}(G,S')$$

[Prueba en la pizarra]

Sin ambigüedad podemos hablar del problema de dominó de un grupo $DP(G)$ en el conjunto de lenguajes módulo la relación de equivalencia $\equiv_m$.

Problema de la palabra

Definición : Problema de la palabra

Sea G un grupo f.g. y $S \Subset G$ un conjunto de generadores. El problema de la palabra de G es el conjunto de palabras $w \in S^*$ que representan la identidad en G.

$$\mathtt{WP}(G) := \{w \in S^* \mid w = 1_G \text{ in } G\}$$

Problema de la palabra

Definición : Problema de la palabra

Sea G un grupo f.g. y $S \Subset G$ un conjunto de generadores. El problema de la palabra de G es el conjunto de palabras $w \in S^*$ que representan la identidad en G.

$$\mathtt{WP}(G) := \{w \in S^* \mid w = 1_G \text{ in } G\}$$

Por el mismo argumento de antes, la elección de S no es relevante (en la clase de lenguajes mod $\equiv_m$)

Ejemplo :

Consideremos $\mathbb{Z}^2$ generado por $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ con $a = (1, 0)$ y $b = (0, 1)$.

$$\mathtt{WP}(\mathbb{Z}^2) = \{w \in S^* \mid |w_a| = |w_{a^{-1}}| \text{ y } |w_b| = |w_{b^{-1}}|\}$$

Problema de la palabra

Definición

Un grupo f.g. G se dice recursivamente presentado si $\mathtt{WP}(G)$ es RE.

▷ Es decir, $G \cong \langle S \mid \mathtt{WP}(G) \rangle$.

Problema de la palabra

Definición

Un grupo f.g. G se dice recursivamente presentado si $\mathtt{WP}(G)$ es RE.

$\triangleright$ Es decir, $G \cong \langle S \mid \mathtt{WP}(G) \rangle$.

Propiedades

- Para todo grupo f.g. G, $\mathtt{WP}(G) \leq_m \overline{\mathtt{DP}(G)}$.
- Si G es recursivamente presentado, $\mathtt{DP}(G)$ es co-RE.

[Pruebas en la pizarra]

¡Más propiedades básicas (o no tanto)!

Propiedades

- Si $H \leq G$ es f.g, entonces $\mathtt{DP}(H) \leq_m \mathtt{DP}(G)$.
- Si $H \trianglelefteq G$ y f.g, entonces $\mathtt{DP}(G/H) \leq_m \mathtt{DP}(G)$
- Si $H \leq G$ y $[G : H] < \infty$, entonces $\mathtt{DP}(G) \leq_m \mathtt{DP}(H)$.

¡Más propiedades básicas (o no tanto)!

Propiedades

- Si $H \leq G$ es f.g, entonces $\mathtt{DP}(H) \leq_m \mathtt{DP}(G)$.
- Si $H \trianglelefteq G$ y f.g, entonces $\mathtt{DP}(G/H) \leq_m \mathtt{DP}(G)$
- Si $H \leq G$ y $[G : H] < \infty$, entonces $\mathtt{DP}(G) \leq_m \mathtt{DP}(H)$.

$\triangleright$ Acotación : La tercera propiedad dice que las extensiones finitas no cambian el problema en nada.

Si H y G son conmensurables, entonces $\mathtt{DP}(G) \equiv_m \mathtt{DP}(H)$.

Panorama de $\mathtt{DP}(G)$

Con estas propiedades podemos dar un tratamiento general a algunas clases de grupos.

Abelianos $\longrightarrow$ Nilpotentes $\longrightarrow$ Policíclicos $\longrightarrow$ Solubles $\longrightarrow$ Promediables $\longrightarrow$

Libres $\longrightarrow$ G. Hyperbólicos $\longrightarrow$

Panorama de $\mathtt{DP}(G)$

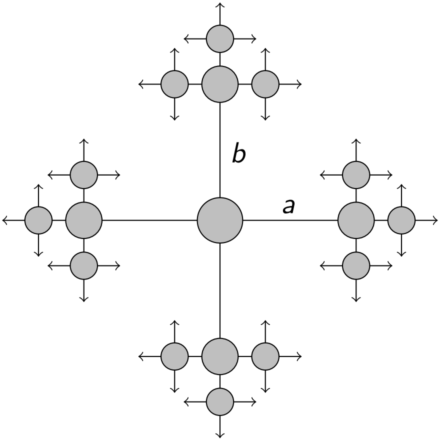
Con estas propiedades podemos dar un tratamiento general a algunas clases de grupos.

Abelianos $\longrightarrow$ Nilpotentes $\longrightarrow$ Policíclicos $\longrightarrow$ Solubles $\longrightarrow$ Promediables $\longrightarrow$

Libres $\longrightarrow$ G. Hyperbólicos $\longrightarrow$

Grupos libres.

F_S es el grupo de todas las palabras reducidas sobre $S \cup S^{-1}$



Grupos virtualmente libres.

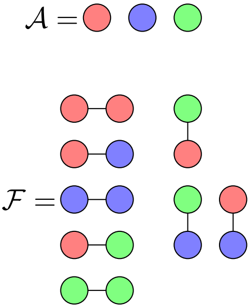
Teorema

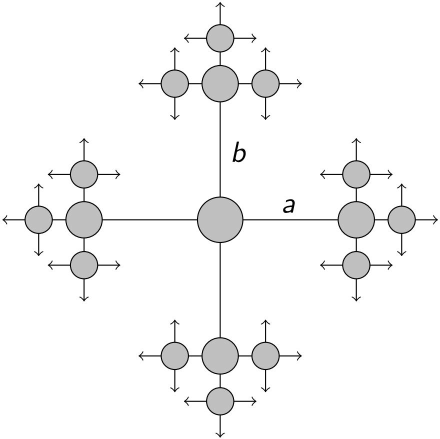
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.

Grupos virtualmente libres.

Teorema

Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.

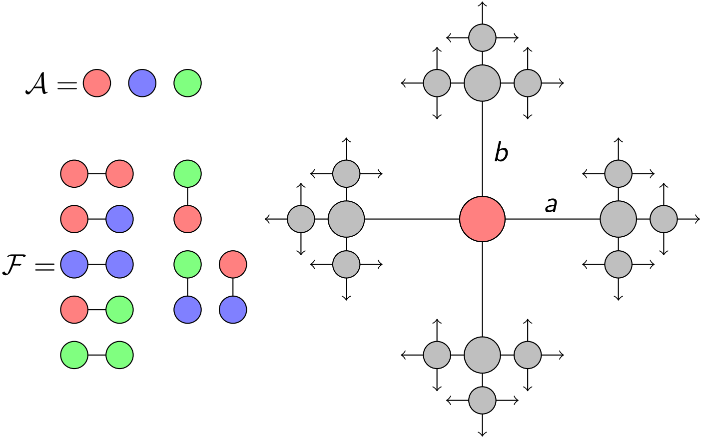




Grupos virtualmente libres.

Teorema

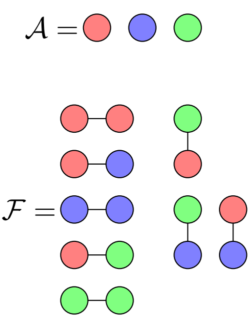
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.

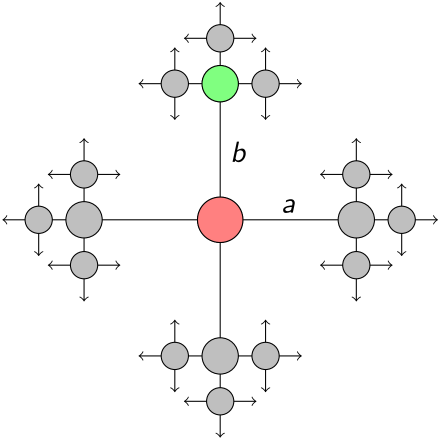


Grupos virtualmente libres.

Teorema

Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.

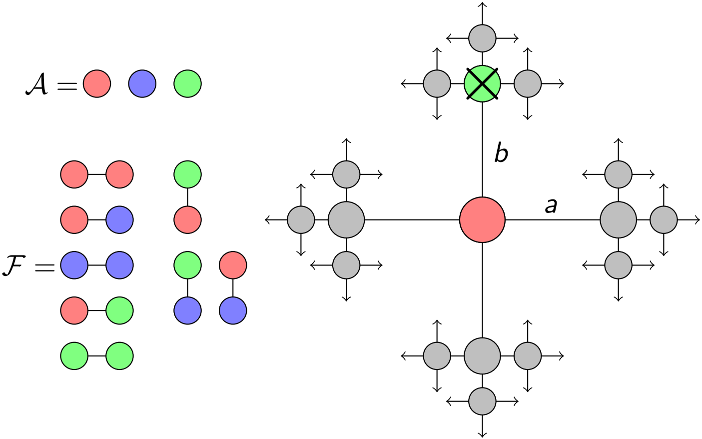




Grupos virtualmente libres.

Teorema

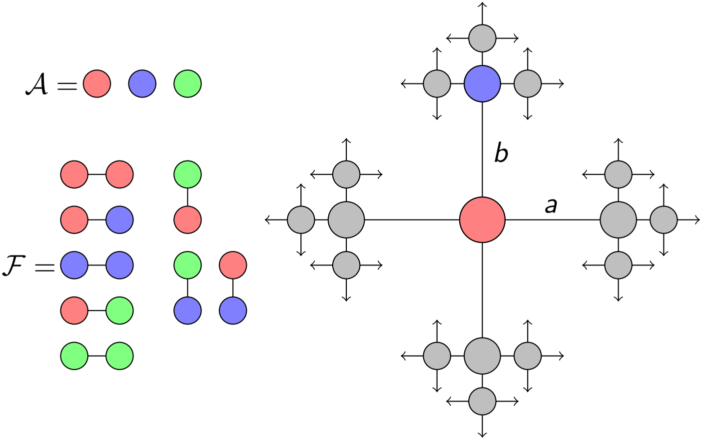
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

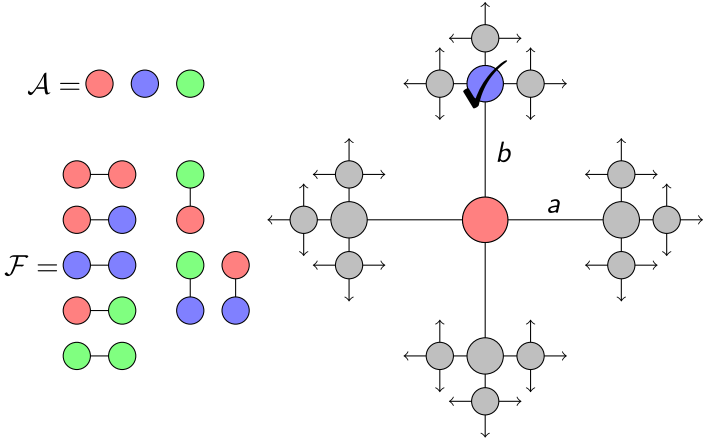
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

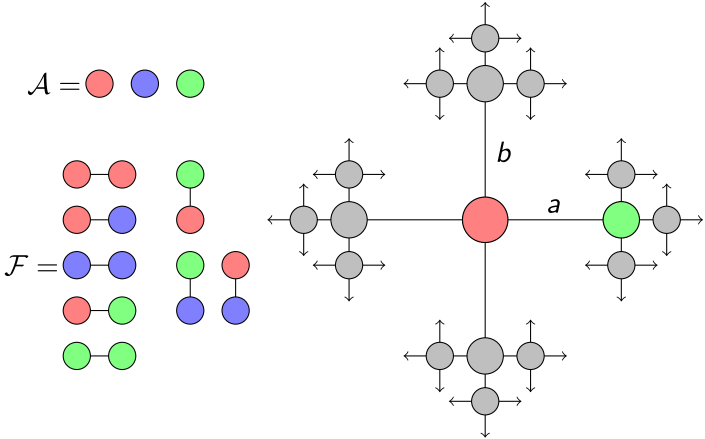
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

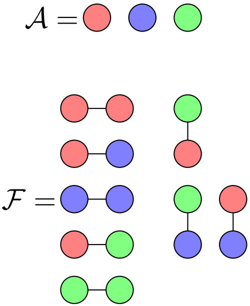
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.

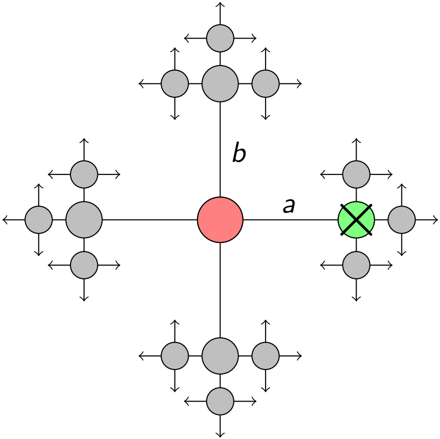


Grupos virtualmente libres.

Teorema

Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.

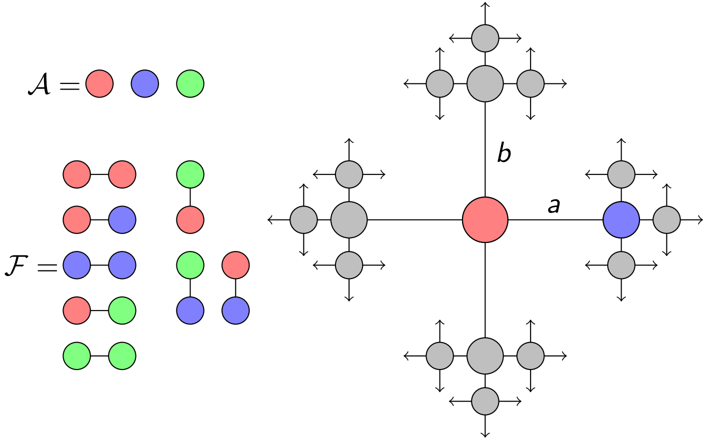




Grupos virtualmente libres.

Teorema

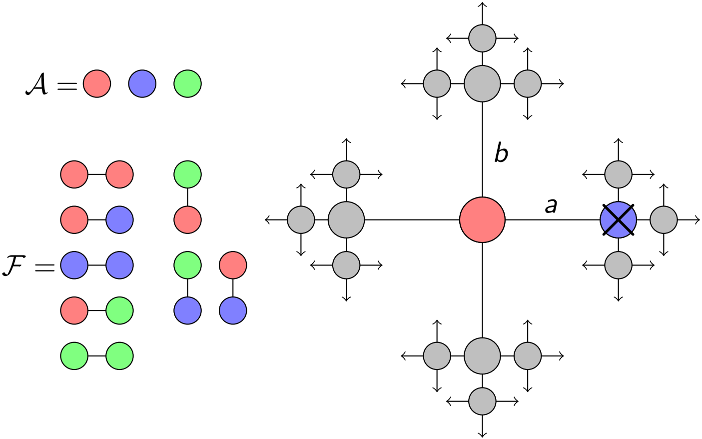
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

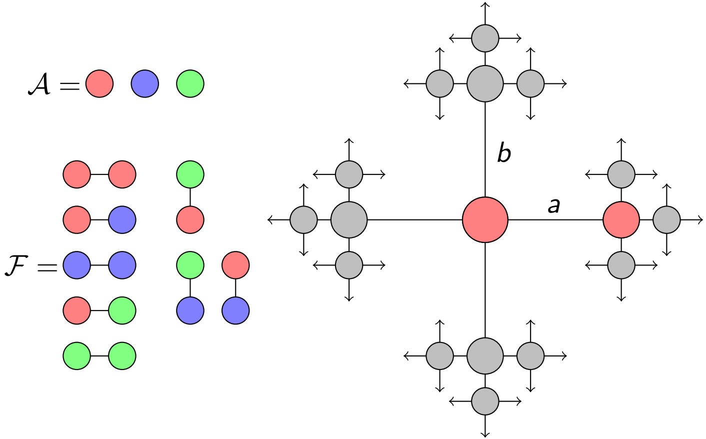
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

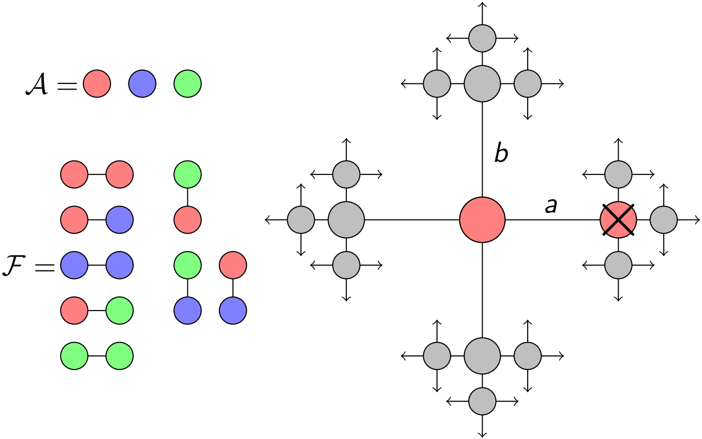
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

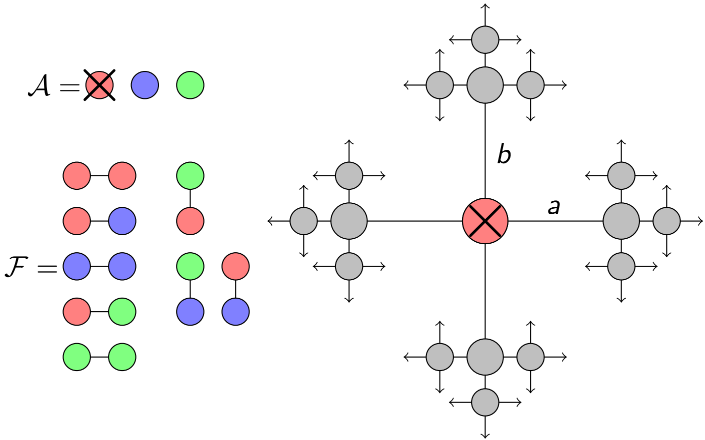
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

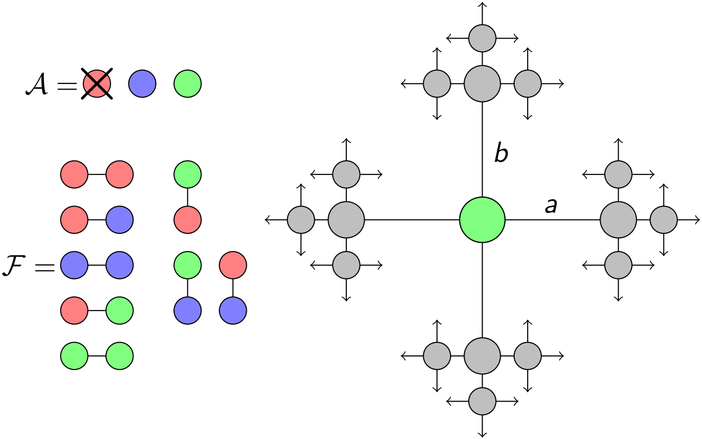
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

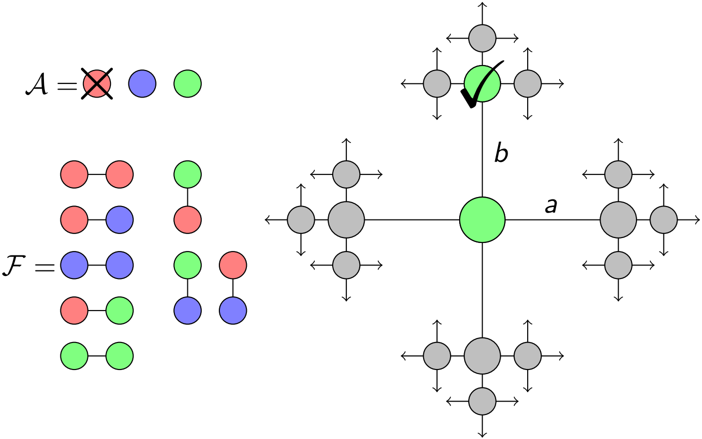
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

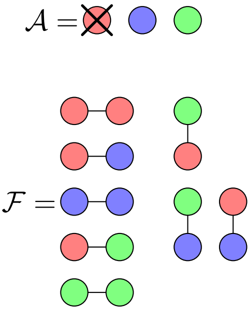
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.

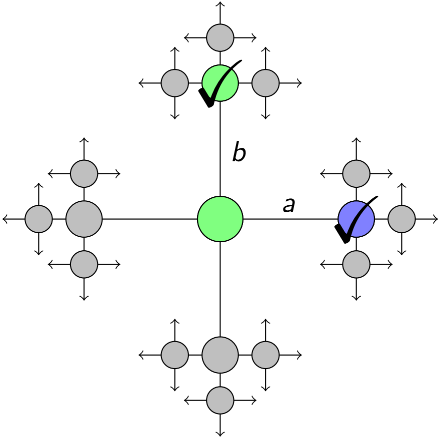


Grupos virtualmente libres.

Teorema

Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathrm{DP}(G)$ es decidible.

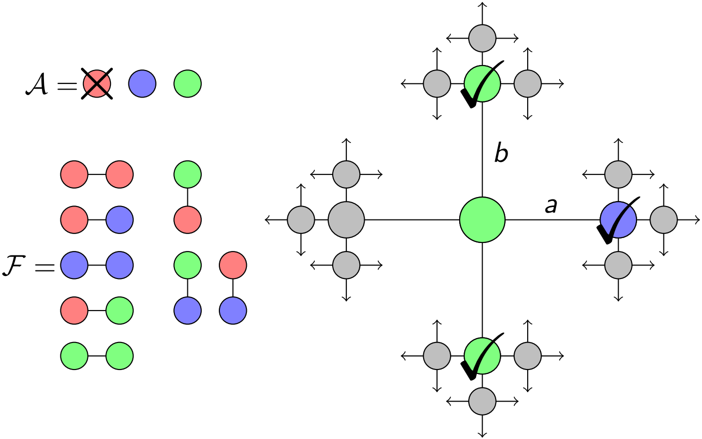




Grupos virtualmente libres.

Teorema

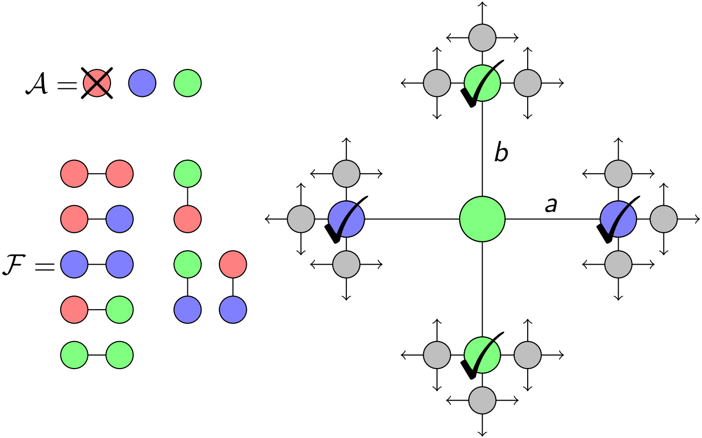
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathrm{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

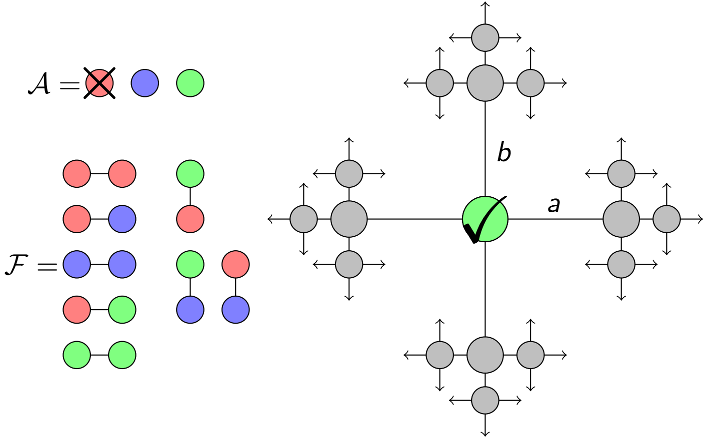
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

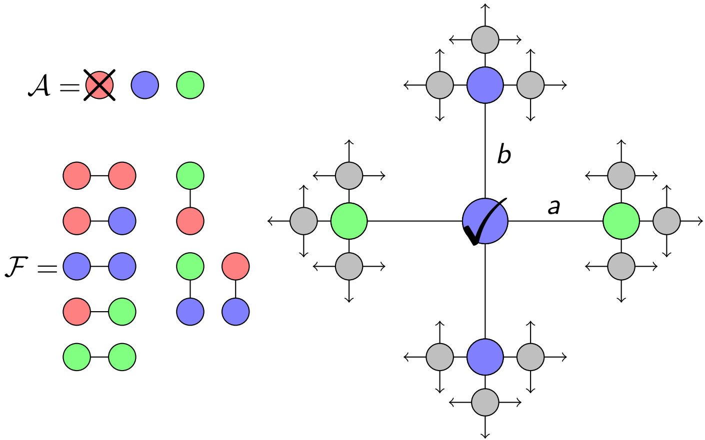
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

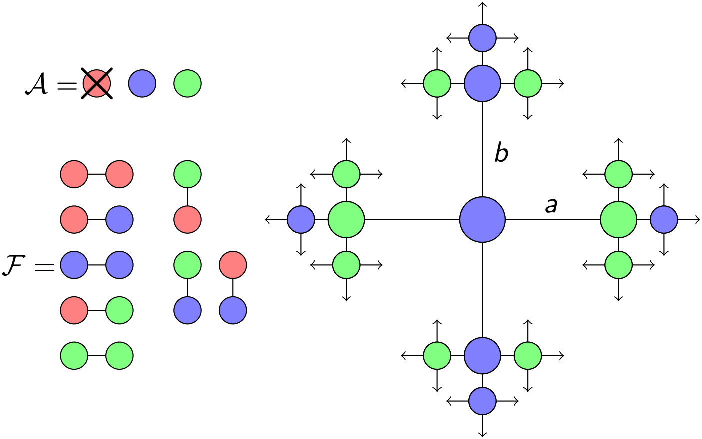
Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathrm{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.



Grupos virtualmente libres.

Teorema

Si G es un grupo f.g. virtualmente libre entonces $\mathtt{DP}(G)$ es decidible.

Prueba

Spg, consideramos una instancia de $\mathtt{DP}(F_k, S)$ con $S = \{a_1, \ldots, a_k, a_1^{-1}, \ldots, a_k^{-1}\}$. Sea $\mathcal{A}$ el alfabeto.

1. Asignamos $\Pi \leftarrow \alpha$.
2. Para todo $s \in S$ y todo $a \in \Pi$:
   - Si para todo $b \in \Pi$ el patrón p de soporte $\{1_G, s\}$ tal que $p_{1_G} = a$ y $p_s = b$ está en $\mathcal{F}$, actualizar $\Pi \leftarrow \Pi \setminus \{a\}$ y recomenzar el paso 2.
3. Aceptar si $\Pi \neq \emptyset$.

Corolario

Si $G = \langle S \mid R \rangle$ y $\mathtt{DP}(G)$ es indecidible, entonces la clausura normal de R en F_S tiene índice infinito.

En el caso particular de $\mathbb{Z}^2 \cong F_2/[F_2, F_2]$, cómo $\mathtt{DP}(\mathbb{Z}^k)$ es indecidible se deduce que el conmutador de F_2 tiene índice infinito.

El otro lado.

Abelianos $\longrightarrow$ Nilpotentes $\longrightarrow$ Policíclicos $\longrightarrow$

acotaciones

- Si G es abeliano, $G \cong \mathbb{Z}^d \oplus F$ para un grupo finito abeliano F. Luego G es virtualmente $\mathbb{Z}^d$. Si $d > 1$ entonces $\mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \mathbb{Z}^d$ y $\mathtt{DP}(G)$ es indecidible. En lo contrario es virtualmente $\mathbb{Z}$ y es decidible.

El otro lado.

Abelianos $\longrightarrow$ Nilpotentes $\longrightarrow$ Policíclicos $\longrightarrow$

acotaciones

- Si G es abeliano, $G \cong \mathbb{Z}^d \oplus F$ para un grupo finito abeliano F. Luego G es virtualmente $\mathbb{Z}^d$. Si $d > 1$ entonces $\mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \mathbb{Z}^d$ y $\mathtt{DP}(G)$ es indecidible. En lo contrario es virtualmente $\mathbb{Z}$ y es decidible.
- Un grupo G es nilpotente si existen grupos $G_0, \ldots, G_n$ tal que

$$G = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = 1 \text{ y además } [G, G_i] = G_{i+1}$$

  En este caso $\mathtt{DP}(G)$ es decidible ssi G es virt. $\mathbb{Z}$. Esto fue probado por Ballier y Stein el '13.

El otro lado.

Definición

Un grupo G es Policíclico si

$$G = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = 1 \text{ y además } G_i/G_{i+1} \text{ es cíclico}$$

El número más pequeño de factores infinitos en una cadena se denomina número de Hirsch $h(G)$.

El otro lado.

Definición

Un grupo G es Policíclico si

$$G = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = 1 \text{ y además } G_i/G_{i+1} \text{ es cíclico}$$

El número más pequeño de factores infinitos en una cadena se denomina número de Hirsch $h(G)$.

Teorema [Jeandel 15]

Sea G un grupo virtualmente policíclico. Entonces $\texttt{DP}(G)$ es decidible ssi G es virtualmente $\mathbb{Z}$.

Prueba

Necesitamos algunas propiedades de grupos policíclicos. La referencia es "Polycyclic groups" de Segal.

Propiedades

Sea G un grupo policíclico.

- Si $H \leq G$, $h(H) \leq h(G)$.
- Si $H \trianglelefteq G$, $h(G) = h(H) + h(G/H)$.
- G es virtualmente trivial ssi $h(G) = 0$.
- G es virtualmente $\mathbb{Z}$ ssi $h(G) = 1$.
- G es virtualmente $\mathbb{Z}^2$ ssi $h(G) = 2$.
- si $h(G) > 0$ entonces G admite un subgrupo abeliano libre no trivial.

Prueba

Necesitamos algunas propiedades de grupos policíclicos. La referencia es "Polycyclic groups" de Segal.

Propiedades

Sea G un grupo policíclico.

- Si $H \leq G$, $h(H) \leq h(G)$.
- Si $H \trianglelefteq G$, $h(G) = h(H) + h(G/H)$.
- G es virtualmente trivial ssi $h(G) = 0$.
- G es virtualmente $\mathbb{Z}$ ssi $h(G) = 1$.
- G es virtualmente $\mathbb{Z}^2$ ssi $h(G) = 2$.
- si $h(G) > 0$ entonces G admite un subgrupo abeliano libre no trivial.

[prueba en la pizarra (de la caracterización)]

La conjetura

Conjetura

Un grupo f.g. G tiene problema de dominó decidible si y solamente si G es virtualmente libre.

La conjetura

Conjetura

Un grupo f.g. G tiene problema de dominó decidible si y solamente si G es virtualmente libre.

Evidencia

- Es verdad en grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n) = \{a, b \mid a^m b = ba^n\}$ [Aubrun-Kari 13]

La conjetura

Conjetura

Un grupo f.g. G tiene problema de dominó decidible si y solamente si G es virtualmente libre.

Evidencia

- Es verdad en grupos de Baumslag-Solitar $BS(m,n) = \{a, b \mid a^m b = ba^n\}$ [Aubrun-Kari 13]
- Si H, G son infinitos y f.g. entonces $\mathtt{DP}(G \times H)$ es indecidible [Jeandel 15]

La conjetura

Conjetura

Un grupo f.g. G tiene problema de dominó decidible si y solamente si G es virtualmente libre.

Evidencia

- Es verdad en grupos de Baumslag-Solitar $BS(m,n) = \{a, b \mid a^m b = b a^n\}$ [Aubrun-Kari 13]
- Si H, G son infinitos y f.g. entonces $\mathtt{DP}(G \times H)$ es indecidible [Jeandel 15]
- Si H, G son finitamente presentados y quasi-isométricos entonces $\mathtt{DP}(G) \equiv_m \mathtt{DP}(H)$ [Cohen 15].

La conjetura

Conjetura

Un grupo f.g. G tiene problema de dominó decidible si y solamente si G es virtualmente libre.

Evidencia

- Es verdad en grupos de Baumslag-Solitar $BS(m,n) = \{a, b \mid a^m b = ba^n\}$ [Aubrun-Kari 13]
- Si H, G son infinitos y f.g. entonces $\mathtt{DP}(G \times H)$ es indecidible [Jeandel 15]
- Si H, G son finitamente presentados y quasi-isométricos entonces $\mathtt{DP}(G) \equiv_m \mathtt{DP}(H)$ [Cohen 15].
- Teorema de Müller y Schupp.

La conjetura

Conjetura

Un grupo f.g. G tiene problema de dominó decidible si y solamente si G es virtualmente libre.

Evidencia

- Es verdad en grupos de Baumslag-Solitar $BS(m,n) = \{a, b \mid a^m b = ba^n\}$ [Aubrun-Kari 13]
- Si H, G son infinitos y f.g. entonces $\texttt{DP}(G \times H)$ es indecidible [Jeandel 15]
- Si H, G son finitamente presentados y quasi-isométricos entonces $\texttt{DP}(G) \equiv_m \texttt{DP}(H)$ [Cohen 15].
- Teorema de Müller y Schupp.
- Hay trabajo en curso que verificaría la conjetura para grupos Gromov hiperbólicos [preguntarme con una cerveza].

El caso $G_1 \times G_2$

[Whyte] Pseudo-traslación (translation-like action)

Una acción $G \curvearrowright (X, d)$ es una *pseudo-traslación* si :

- G actúa libremente
- Para cada $g \in G$, $\sup_{x \in X} d(x, gx) < \infty$.

El caso $G_1 \times G_2$

[Whyte] Pseudo-traslación (translation-like action)

Una acción $G \curvearrowright (X, d)$ es una *pseudo-traslación* si :

- G actúa libremente
- Para cada $g \in G$, $\sup_{x \in X} d(x, gx) < \infty$.

Teorema : Jeandel, 13

Si H es finitamente presentado, G es f.g, $H \curvearrowright G$ como pseudo-traslación entonces $\mathtt{DP}(H) \leq_m \mathtt{DP}(G)$.

El caso $G_1 \times G_2$

Teorema : Seward, 13

Todo grupo infinito y finitamente generado admite una pseudo-traslación por $\mathbb{Z}$.

El caso $G_1 \times G_2$

Teorema : Seward, 13

Todo grupo infinito y finitamente generado admite una pseudo-traslación por $\mathbb{Z}$.

Otra forma de verlo : cada grupo f.g. e infinito admite un grafo de Cayley que puede ser particionado en caminos bi-infinitos disjuntos.

El caso $G_1 \times G_2$

Teorema : Seward, 13

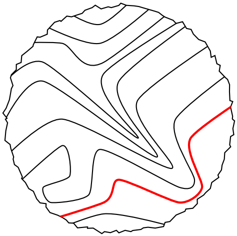
Todo grupo infinito y finitamente generado admite una pseudo-traslación por $\mathbb{Z}$.

Otra forma de verlo : cada grupo f.g. e infinito admite un grafo de Cayley que puede ser particionado en caminos bi-infinitos disjuntos.

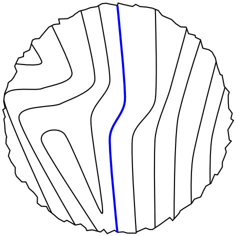
$\triangleright$ Si S es un conjunto de generadores para el teorema anterior, podemos definir un subshift de vecinos cercanos $X \subset (S \times S)^G$ tal que si $x_g = (s_1, s_2)$ entonces $x_{gs_1} = (\cdot, s_1^{-1})$ y $x_{gs_2} = (s_2^{-1}, \cdot)$.

El caso $G_1 \times G_2$

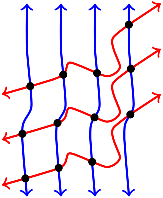
Los generadores del grafo de Cayley permiten definir un SFT que codifica la acción de traslación.



G_1

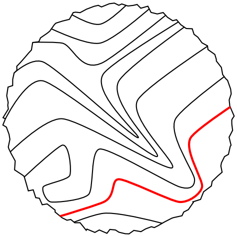


G_2

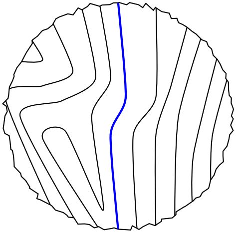


El caso $G_1 \times G_2$

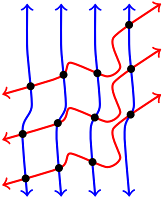
Los generadores del grafo de Cayley permiten definir un SFT que codifica la acción de traslación.



G_1



G_2



Corolario

El problema de dominó es indecidible en el grupo de Grigorchuk.

¡Gracias por su atención!