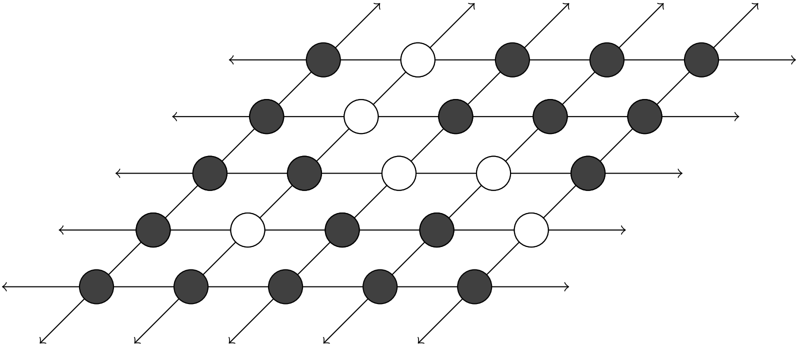
Que pensent les mosaïques de la monotonie ?

Sebastián Barbieri
LIP, ENS de Lyon

2 mars 2016

Le jeu de la vie de Conway

Considérons le système suivant : On a une configuration où chaque position en $\mathbb{Z}^2$ est coloriée soit blanc soit noir.

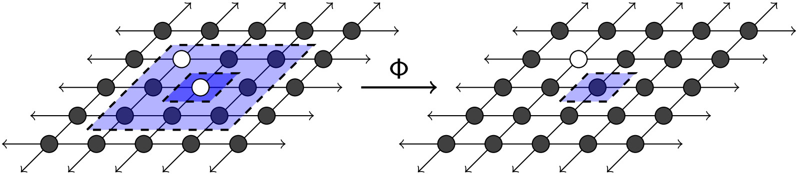


Le jeu de la vie de Conway

À chaque itération le système évoluera de la façon suivante :

Le jeu de la vie de Conway

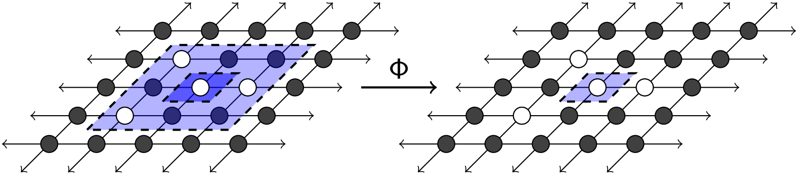
À chaque itération le système évoluera de la façon suivante :



Si une position blanche à moins de deux voisins blancs, elle devient noire.

Le jeu de la vie de Conway

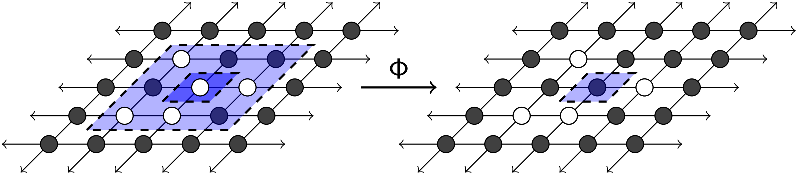
À chaque itération le système évoluera de la façon suivante :



Si une position blanche à entre deux et trois voisins blancs, elle reste blanche

Le jeu de la vie de Conway

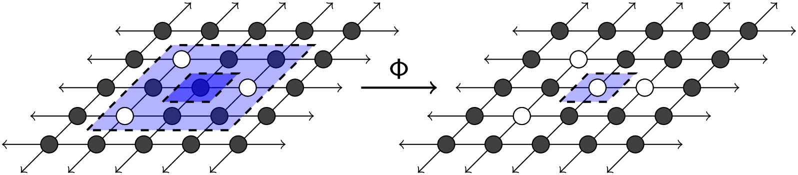
À chaque itération le système évoluera de la façon suivante :



Si une position blanche à plus de trois voisins blancs, elle devient noire

Le jeu de la vie de Conway

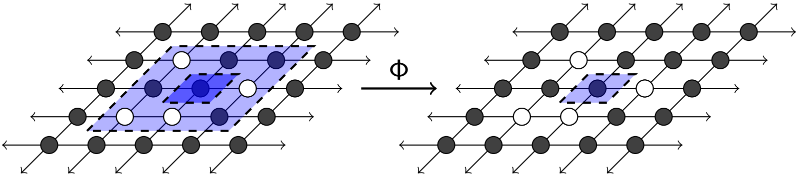
À chaque itération le système évoluera de la façon suivante :



Si une position noire à exactement trois voisins blancs, elle devient blanche.

Le jeu de la vie de Conway

À chaque itération le système évoluera de la façon suivante :



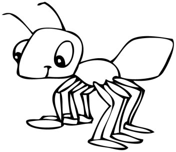
Sinon, elle reste noire.

La fourmi de Langton

Considérons une configuration où chaque position de $\mathbb{Z}^2$ est coloriée soit blanche soit noire. Mais il y a une position qui a une petite fourmi...

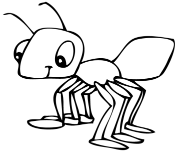
La fourmi de Langton

Considérons une configuration où chaque position de $\mathbb{Z}^2$ est coloriée soit blanche soit noire. Mais il y a une position qui a une petite fourmi...



La fourmi de Langton

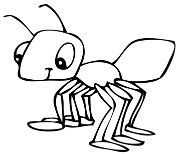
Considérons une configuration où chaque position de $\mathbb{Z}^2$ est coloriée soit blanche soit noire. Mais il y a une position qui a une petite fourmi...



La fourmi a toujours une direction parmi les 4 points cardinaux. Si elle est dans une position blanche, elle tourne 90° à droite, change la position à noir et avance d'une case.

La fourmi de Langton

Considérons une configuration où chaque position de $\mathbb{Z}^2$ est coloriée soit blanche soit noire. Mais il y a une position qui a une petite fourmi...



La fourmi a toujours une direction parmi les 4 points cardinaux. Si elle est dans une position blanche, elle tourne 90° à droite, change la position à noir et avance d'une case. Si elle est dans une position noire, elle tourne 90° à gauche, change la position à blanche et avance d'une case.

Automates cellulaires

Un automate cellulaire est une action $\phi : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \to \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ donnée par une règle locale $\Phi : \Sigma^F \to \Sigma$ où F est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$.

$$\phi(x)_{\vec{v}} = \Phi(x|_{\vec{v}+F})$$

Automates cellulaires

Un automate cellulaire est une action $\phi : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \to \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ donnée par une règle locale $\Phi : \Sigma^F \to \Sigma$ où F est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$.

$$\phi(x)_{\vec{v}} = \Phi(x|_{\vec{v}+F})$$

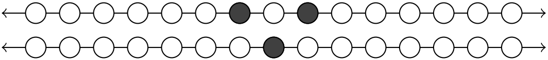
Le jeu de la vie de Conway et la fourmi de Langton sont des automates cellulaires sur $\mathbb{Z}^2$.

Example sur $\mathbb{Z}$: règle 90

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{-1, 1\}$ et $\Phi(p) = p_{-1} + p_1 \mod 2$.

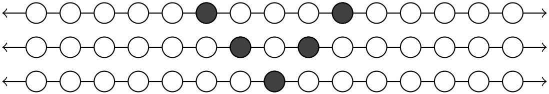
Example sur $\mathbb{Z}$: règle 90

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{-1, 1\}$ et $\Phi(p) = p_{-1} + p_1 \mod 2$.



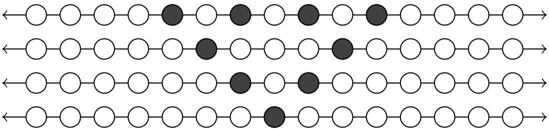
Example sur $\mathbb{Z}$: règle 90

Soit $\Sigma = \{0,1\}$, $F = \{-1,1\}$ et $\Phi(p) = p_{-1} + p_1 \mod 2$.



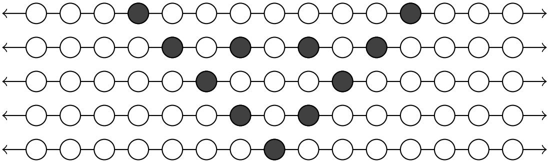
Example sur $\mathbb{Z}$: règle 90

Soit $\Sigma = \{0,1\}$, $F = \{-1,1\}$ et $\Phi(p) = p_{-1} + p_1 \mod 2$.



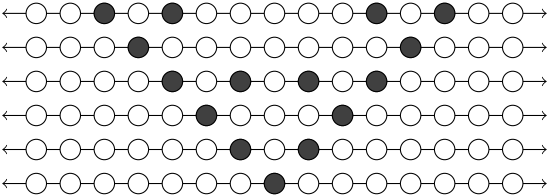
Example sur $\mathbb{Z}$: règle 90

Soit $\Sigma = \{0,1\}$, $F = \{-1,1\}$ et $\Phi(p) = p_{-1} + p_1 \mod 2$.



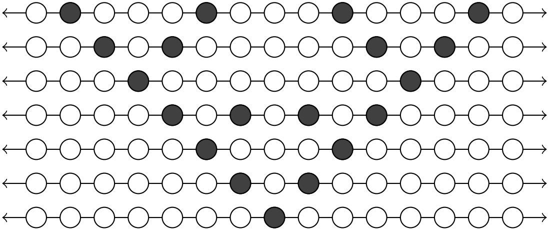
Example sur $\mathbb{Z}$: règle 90

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{-1, 1\}$ et $\Phi(p) = p_{-1} + p_1 \mod 2$.



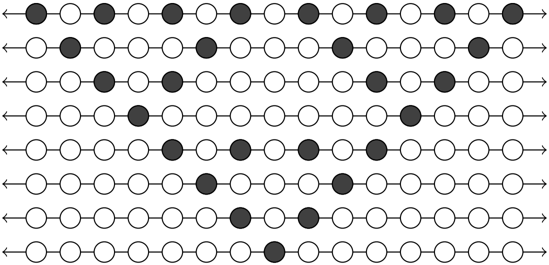
Example sur $\mathbb{Z}$: règle 90

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{-1, 1\}$ et $\Phi(p) = p_{-1} + p_1 \mod 2$.



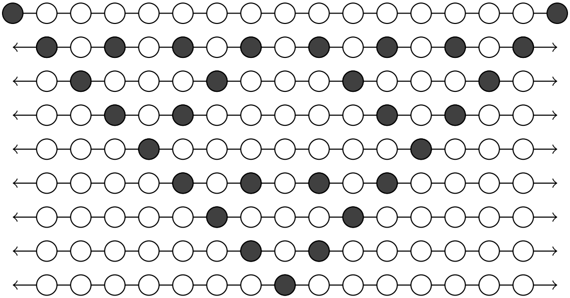
Example sur $\mathbb{Z}$: règle 90

Soit $\Sigma = \{0,1\}$, $F = \{-1,1\}$ et $\Phi(p) = p_{-1} + p_1 \mod 2$.



Example sur $\mathbb{Z}$: règle 90

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{-1, 1\}$ et $\Phi(p) = p_{-1} + p_1 \mod 2$.



Example sur $\mathbb{Z}$: règle 22

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{-1, 0, 1\}$ et

$$\Phi(p) = \begin{cases} 1 \text{ S'il y a exactement deux 1s} \\ 0 \text{ Sinon.} \end{cases}$$

Ensemble limite

Soit $\phi : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \to \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ un automate, alors :

$$\ldots \phi^{n+1}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \phi^n(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \cdots \subset \phi^2(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \phi(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$$

Ensemble limite

Soit $\phi : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \to \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ un automate, alors :

$$\dots \phi^{n+1}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \phi^n(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \cdots \subset \phi^2(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \phi(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$$

On peut définir $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi^n(\Sigma^{\mathbb{Z}^d})$.

Ensemble limite

Soit $\phi : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \to \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ un automate, alors :

$$\dots \phi^{n+1}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \phi^n(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \dots \subset \phi^2(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \phi(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$$

On peut définir $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \phi^n(\Sigma^{\mathbb{Z}^d})$.

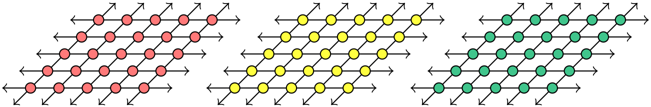
Question

Qu'est-ce qu'on peut dire sur Ω ?

Ensemble limite

Considérons l'ensemble des configurations constantes :

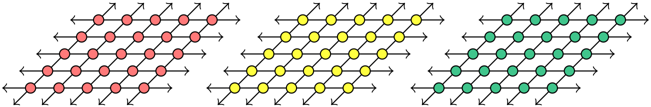
$$C = \{x : \mathbb{Z}^d \to \Sigma \mid \forall \vec{v} \in \mathbb{Z}^d, x_{\vec{v}} = x_{\vec{0}}\}$$



Ensemble limite

Considérons l'ensemble des configurations constantes :

$$C = \{x : \mathbb{Z}^d \to \Sigma \mid \forall \vec{v} \in \mathbb{Z}^d, x_{\vec{v}} = x_{\vec{0}}\}$$



Clairement $\phi(C) \subset C$. Comme C est fini, on a $\forall k \geq 0$:

$$\phi^{|C|+k}(C) = \phi^{|C|}(C) \subset \Omega$$

Alors $\Omega \neq \emptyset$ et contient toujours une configuration constante. La monotonie est toujours présente dans cet ensemble...

Nilpotence

Un automate ϕ est dit nilpotent si $|\Omega| = 1$.

Nilpotence

Un automate ϕ est dit nilpotent si $|\Omega| = 1$.

- Le jeu de la vie n'est pas nilpotent.

Nilpotence

Un automate ϕ est dit nilpotent si $|\Omega| = 1$.

- Le jeu de la vie n'est pas nilpotent.
- Ni la fourmi de Langton, ni les deux règles vues ne sont nilpotentes.

Nilpotence

Un automate ϕ est dit nilpotent si $|\Omega| = 1$.

- Le jeu de la vie n'est pas nilpotent.
- Ni la fourmi de Langton, ni les deux règles vues ne sont nilpotentes.
- L'automate qui envoie toute configuration à 0 est nilpotent.

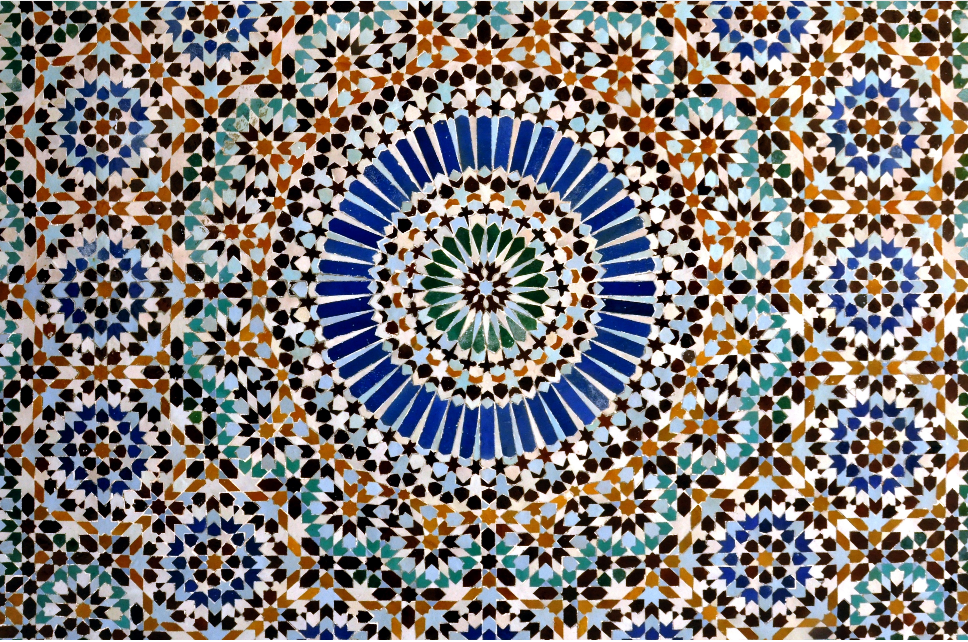
Nilpotence

Un automate ϕ est dit nilpotent si $|\Omega| = 1$.

- Le jeu de la vie n'est pas nilpotent.
- Ni la fourmi de Langton, ni les deux règles vues ne sont nilpotentes.
- L'automate qui envoie toute configuration à 0 est nilpotent.

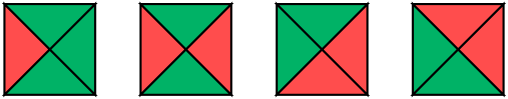
Question

Est-il facile de savoir si un automate est nilpotent ?



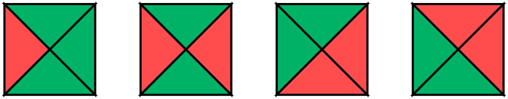
Tuiles de Wang

Les tuiles de Wang sont des carrés avec les arêtes coloriées.



Tuiles de Wang

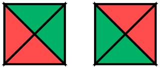
Les tuiles de Wang sont des carrés avec les arêtes coloriées.



Le but c'est de paver le plan avec un ensemble fini de carrés donnés de façon à ce que deux carrés qui sont à côté possèdent la même couleur sur l'arête adjacente.

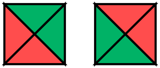
Exemple tuiles de Wang

L'ensemble des tuiles suivant :

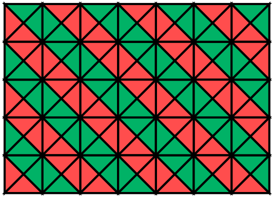


Exemple tuiles de Wang

L'ensemble des tuiles suivant :

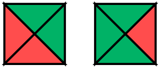


Pave le plan...



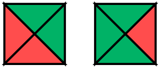
Exemple tuiles de Wang

L'ensemble des tuiles suivant :



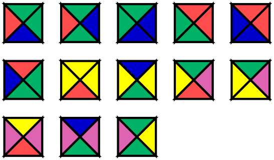
Exemple tuiles de Wang

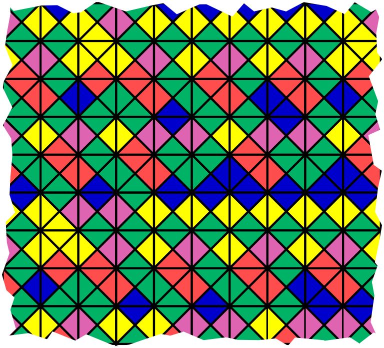
L'ensemble des tuiles suivant :



Ne pave pas le plan !

Un exemple un peu plus complexe...





La question

Question : Étant donné un ensemble de tuiles de Wang, peut on donner une procédure finie qui décide si on peut paver le plan ou non ?

La question

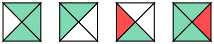
Question : Étant donné un ensemble de tuiles de Wang, peut on donner une procédure finie qui décide si on peut paver le plan ou non ?

Plus précisément : Problème de domino

Existe-il une machine de Turing qui accepte un codage des tuiles de Wang si elles pavent le plan et rejette le même codage si elles ne le pavent pas ?

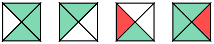
Question réliée : La périodicité

Soit τ un ensemble fini de tuiles de Wang

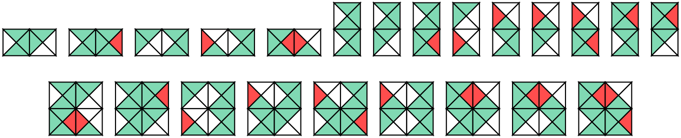


Question réliée : La périodicité

Soit τ un ensemble fini de tuiles de Wang

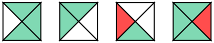


C'est facile de générer tous les motifs locaux qui satisfont les contraintes :

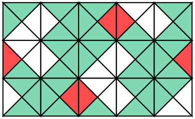


Question réliée : La périodicité

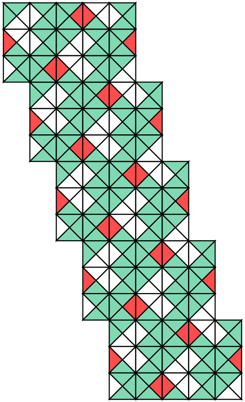
Soit τ un ensemble fini de tuiles de Wang



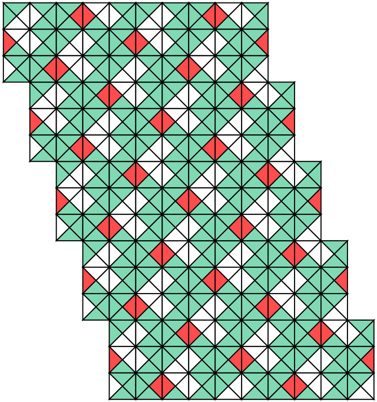
Si à un moment donné on trouve un motif tel que ses arêtes sont les mêmes en haut et en bas, et à gauche et à droite (rotation près), alors τ pave le plan périodiquement.



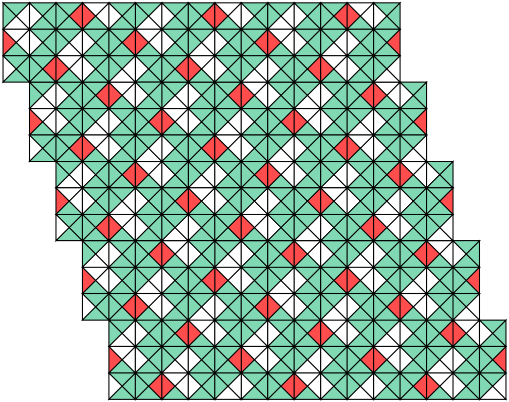
Question réliée : La périodicité



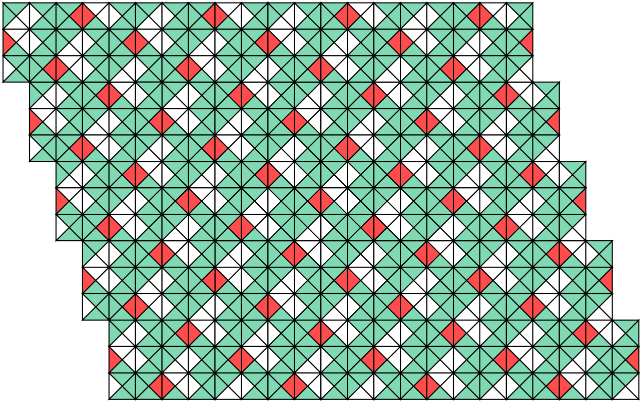
Question réliée : La périodicité



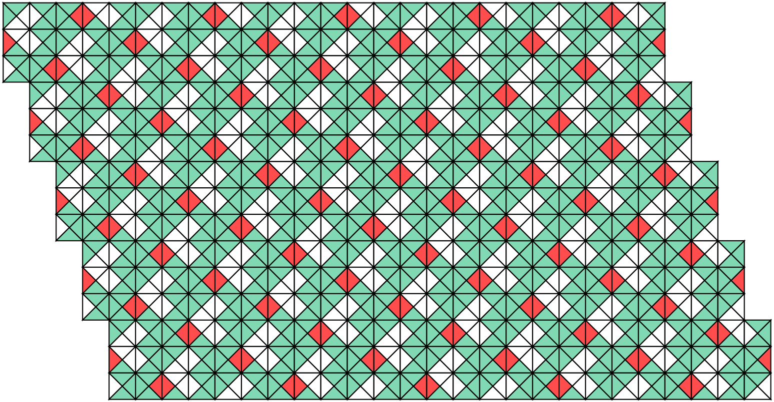
Question réliée : La périodicité



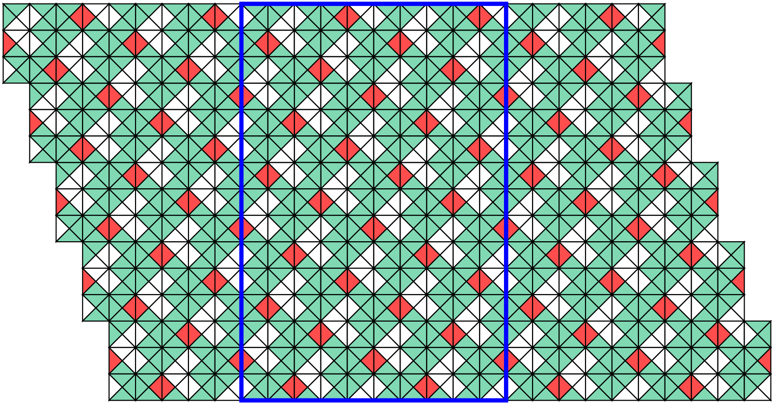
Question réliée : La périodicité



Question réliée : La périodicité



Question réliée : La périodicité



La conjecture de Wang

La conjecture de Wang (1961)

Si un ensemble de tuiles de Wang peut paver le plan, alors elles peuvent le paver de façon périodique.

La conjecture de Wang

La conjecture de Wang (1961)

Si un ensemble de tuiles de Wang peut paver le plan, alors elles peuvent le paver de façon périodique.

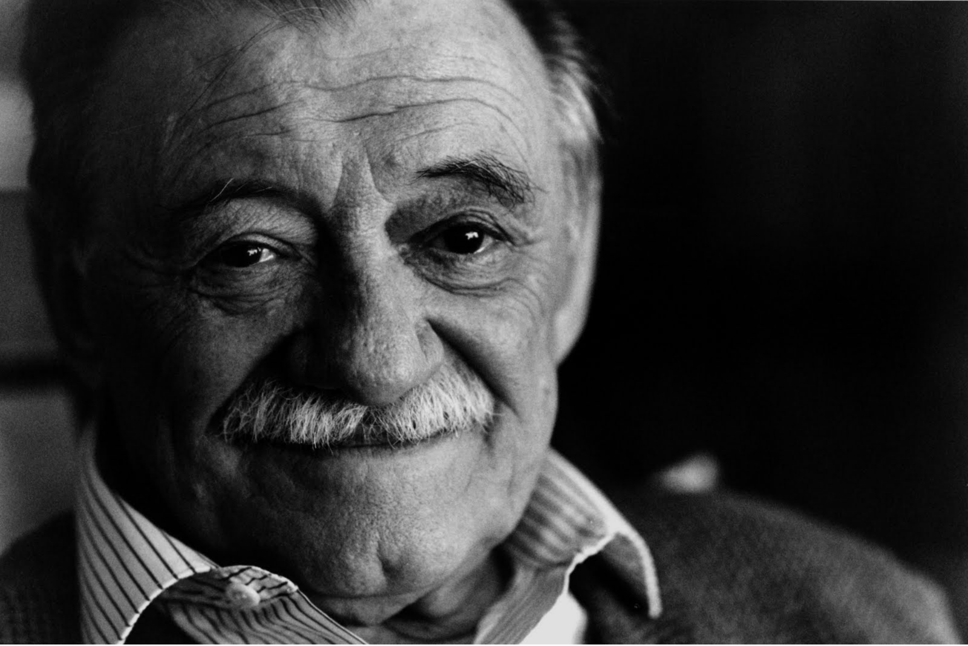
Si cette conjecture est vraie, on pourrait décider si un ensemble de tuiles pave le plan !

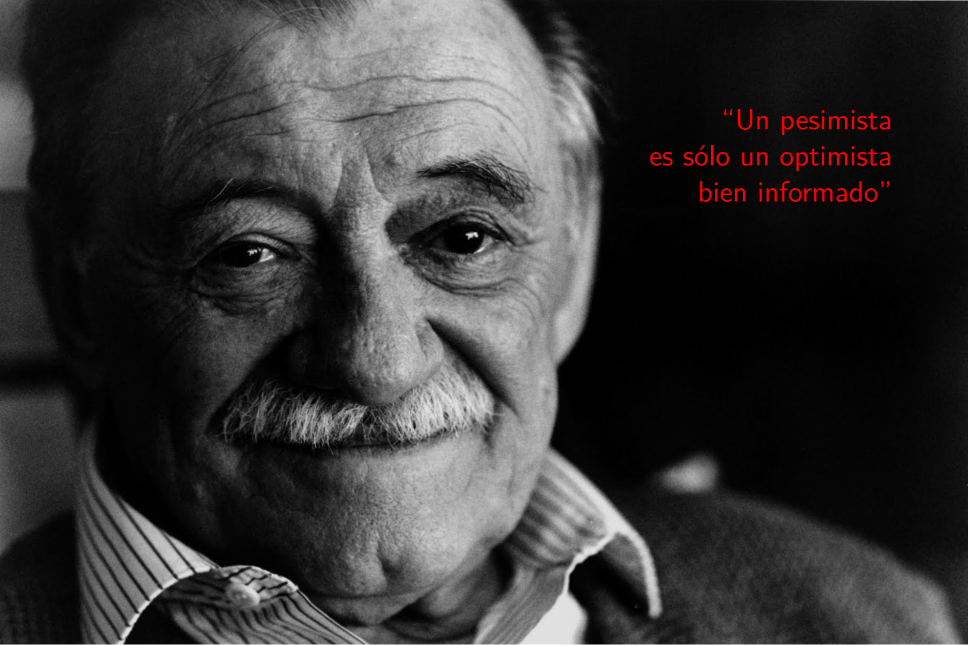
Semi-algorithme 1 :

1. Accepter si une configuration périodique est trouvée.
2. Itérer.

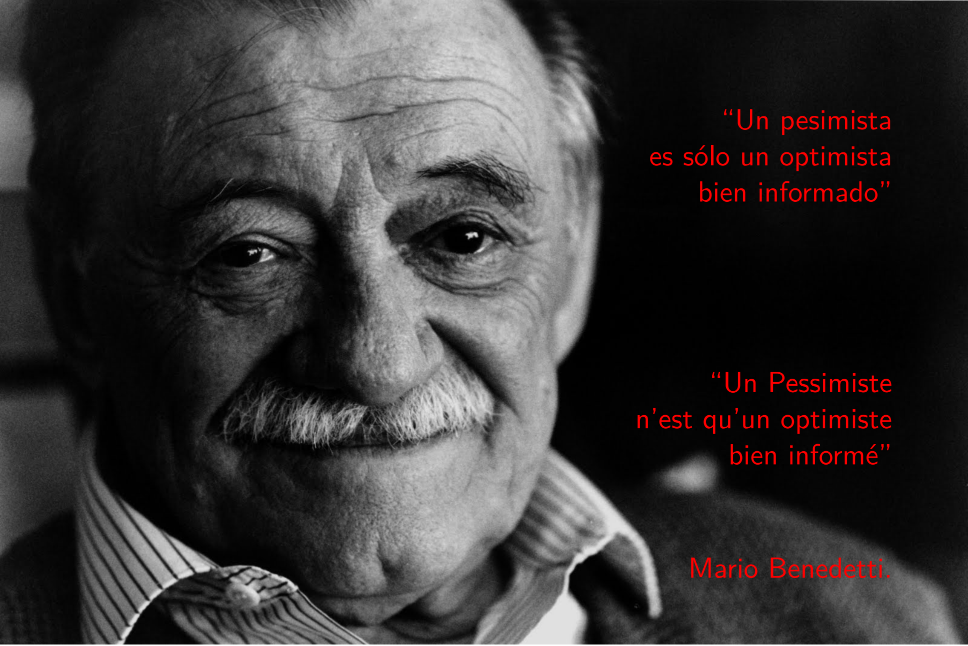
Semi-algorithme 2 :

1. Accepter si un support $[0, n]^2$ ne peut pas être pavé par les tuiles.
2. Itérer





“Un pesimista
es sólo un optimista
bien informado”



"Un pesimista
es sólo un optimista
bien informado"

"Un Pessimiste
n'est qu'un optimiste
bien informé"

Mario Benedetti.

La conjecture de Wang

Théorème [Berger 1966]

La conjecture de Wang est FAUSSE !

La conjecture de Wang

Théorème [Berger 1966]

La conjecture de Wang est FAUSSE !

La construction de Berger codifie une machine de Turing avec 20426 tuiles de Wang. Cette construction pave le plan mais n'admet pas de pavages périodiques.

La conjecture de Wang

Théorème [Berger 1966]

La conjecture de Wang est FAUSSE !

La construction de Berger codifie une machine de Turing avec 20426 tuiles de Wang. Cette construction pave le plan mais n'admet pas de pavages périodiques.

Une petite modification de cette construction, permet de montrer que le problème de domino est indécidable ! Il se réduit au problème de l'arrêt des machines de Turing.

La conjecture de Wang

Théorème [Berger 1966]

La conjecture de Wang est FAUSSE !

La construction de Berger codifie une machine de Turing avec 20426 tuiles de Wang. Cette construction pave le plan mais n'admet pas de pavages périodiques.

Une petite modification de cette construction, permet de montrer que le problème de domino est indécidable ! Il se réduit au problème de l'arrêt des machines de Turing.

Heureusement pour nous, sa preuve a été simplifiée après par Robinson[1971].

Un peu de la pub...

Un peu d'histoire des pavages apériodiques

- [Berger, 1966] 20426 tuiles.

Un peu de la pub...

Un peu d'histoire des pavages apériodiques

- [Berger, 1966] 20426 tuiles.
- [Robinson, 1971] 52 tuiles.

Un peu de la pub...

Un peu d'histoire des pavages apériodiques

- [Berger, 1966] 20426 tuiles.
- [Robinson, 1971] 52 tuiles.
- [Penrose, 1986] 32 tuiles.

Un peu de la pub...

Un peu d'histoire des pavages apériodiques

- [Berger, 1966] 20426 tuiles.
- [Robinson, 1971] 52 tuiles.
- [Penrose, 1986] 32 tuiles.
- [Ammann, 1986] 16 tuiles.

Un peu de la pub...

Un peu d'histoire des pavages apériodiques

- [Berger, 1966] 20426 tuiles.
- [Robinson, 1971] 52 tuiles.
- [Penrose, 1986] 32 tuiles.
- [Ammann, 1986] 16 tuiles.
- [Kari, 1996] 14 tuiles.

Un peu de la pub...

Un peu d'histoire des pavages apériodiques

- [Berger, 1966] 20426 tuiles.
- [Robinson, 1971] 52 tuiles.
- [Penrose, 1986] 32 tuiles.
- [Ammann, 1986] 16 tuiles.
- [Kari, 1996] 14 tuiles.
- [Culik et Kari, 1996] 13 tuiles.

Un peu de la pub...

Un peu d'histoire des pavages apériodiques

- [Berger, 1966] 20426 tuiles.
- [Robinson, 1971] 52 tuiles.
- [Penrose, 1986] 32 tuiles.
- [Ammann, 1986] 16 tuiles.
- [Kari, 1996] 14 tuiles.
- [Culik et Kari, 1996] 13 tuiles.
- [Jeandel et Rao, 2015] 11 tuiles.

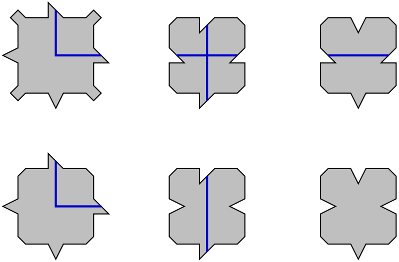
Un peu de la pub...

Un peu d'histoire des pavages apériodiques

- [Berger, 1966] 20426 tuiles.
- [Robinson, 1971] 52 tuiles.
- [Penrose, 1986] 32 tuiles.
- [Ammann, 1986] 16 tuiles.
- [Kari, 1996] 14 tuiles.
- [Culik et Kari, 1996] 13 tuiles.
- [Jeandel et Rao, 2015] 11 tuiles.
- [Jeandel et Rao, 2015] Pas de pavage avec 10 tuiles.

Le pavage de Robinson

Les tuiles du pavage de Robinson, où les tuiles peuvent être tournées (version avec triche)

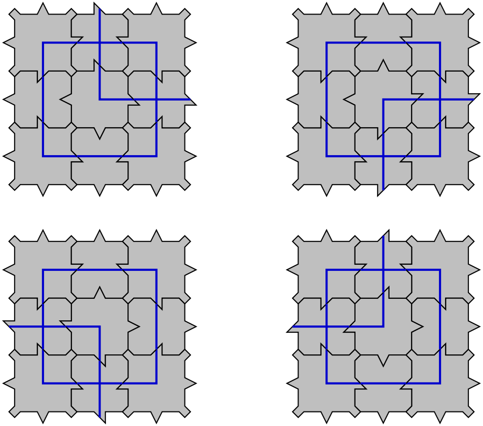


Existence d'un pavage

Proposition

Les tuiles de Robinson pavent le plan.

Macro-tuiles de niveau 1.

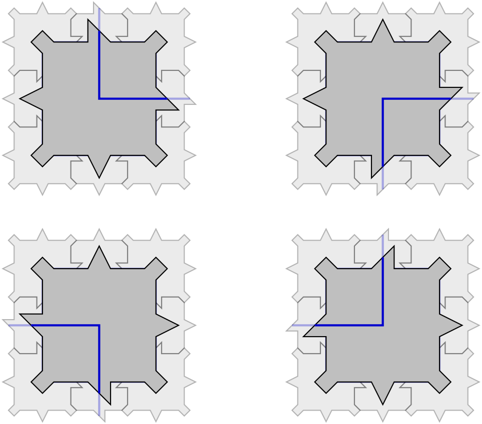


Existence d'un pavage

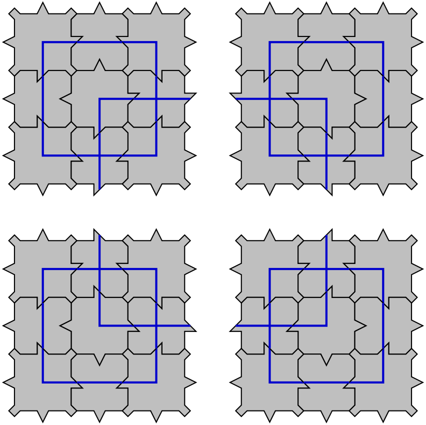
Proposition

Les tuiles de Robinson pavent le plan.

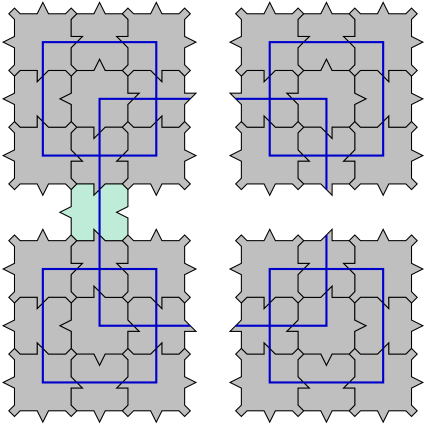
Macro-tuiles de niveau 1.



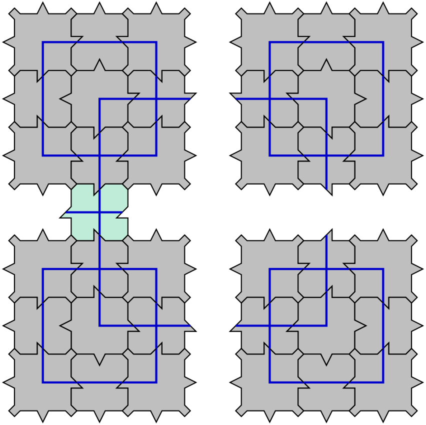
De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



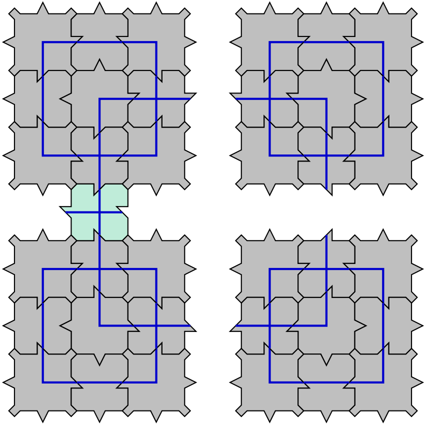
De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



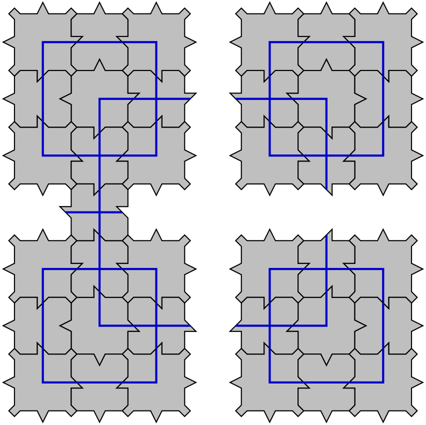
De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



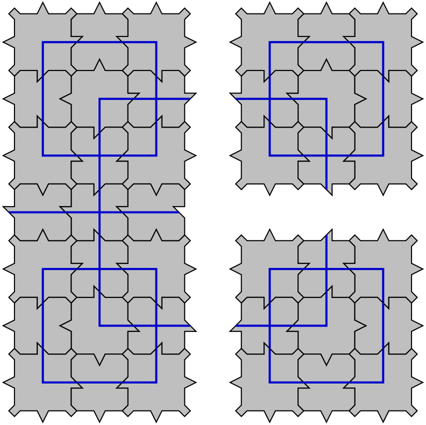
De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



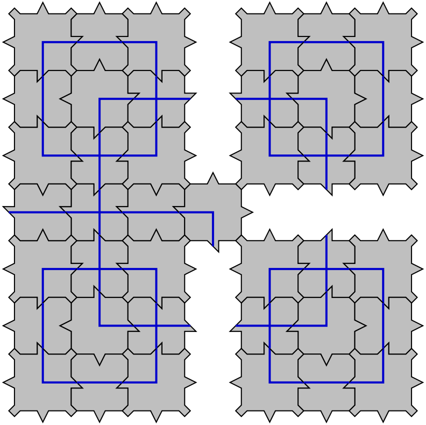
De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



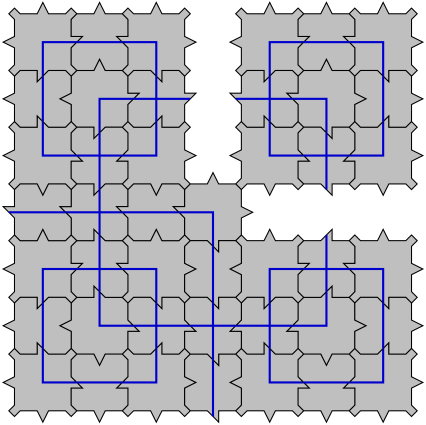
De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



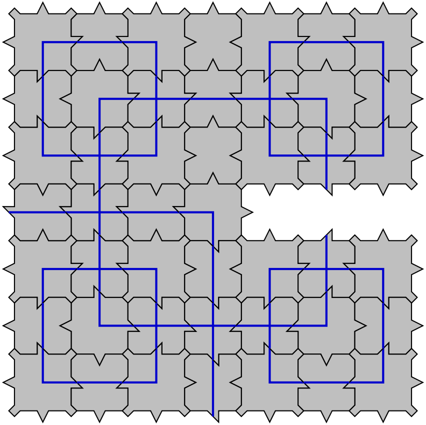
De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



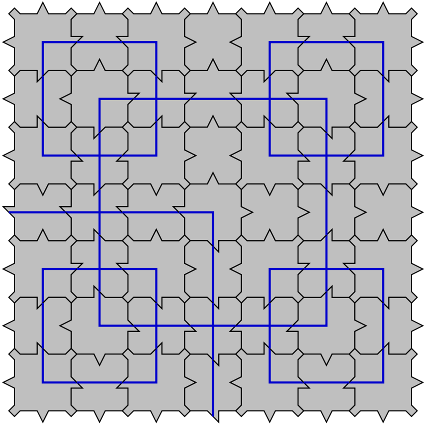
De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



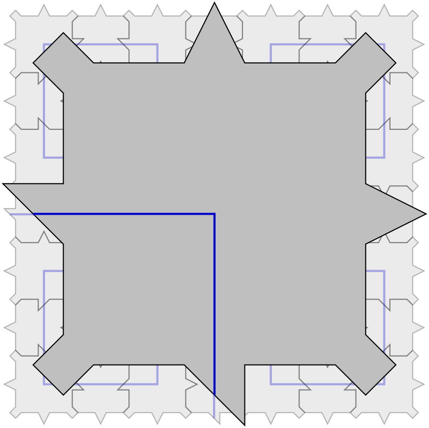
De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



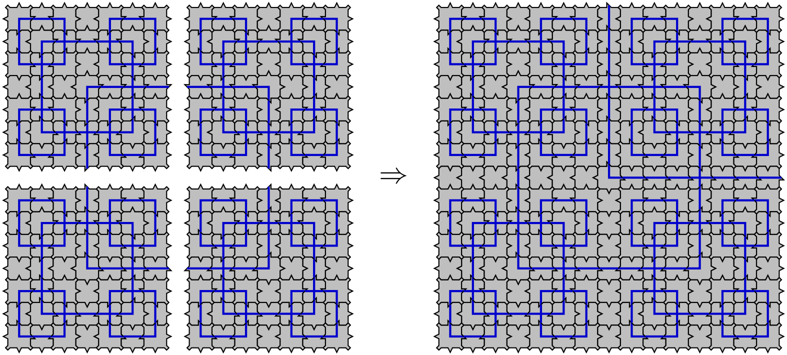
De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



De macro-tuiles de niveau 1 à macro-tuiles de niveau 2



De macro-tuiles de niveau n à macro-tuiles de niveau $n+1$



On peut alors construire un pavage valide par un argument de compacité.

Le pavage obtenu est apériodique

Proposition

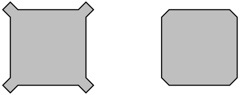
Le pavage obtenu est apériodique.

Preuve :

- Les centres des macro-tuiles de niveau n sont dans un réseau $2^{n+1}\mathbb{Z} \times 2^{n+1}\mathbb{Z}$.
- Supposons que le pavage admet une direction de périodicité $\overrightarrow{u} \neq (0,0)$.
- Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{n+1} > \|\overrightarrow{u}\|$.
- Donc, une macro-tuile de niveau n (et son centre) doit coïncider avec la translation d'elle même.
- $\Rightarrow$ contradiction.

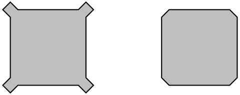
Toutes les pavages sont apériodiques (I)

Il y a deux formes dans ce pavage, les croix (bumpy corners) et les bras (dented corners).

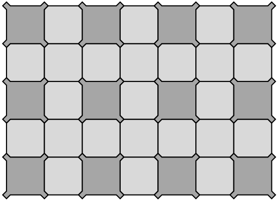


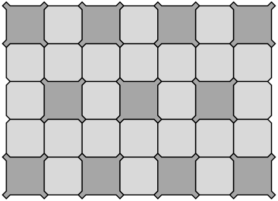
Toutes les pavages sont apériodiques (I)

Il y a deux formes dans ce pavage, les croix (bumpy corners) et les bras (dented corners).



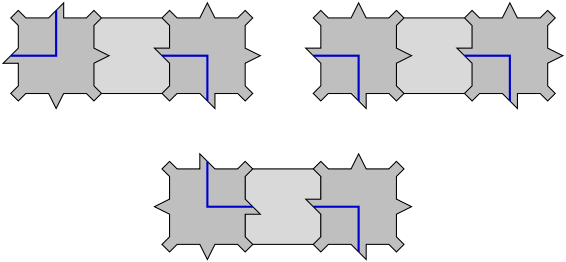
Clairement, deux croix ne peuvent pas être en contact (ni par une arête ni par un sommet), alors une croix doit être au milieu de huit bras.





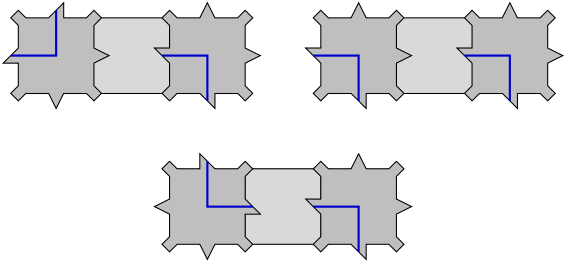
Toutes les pavages sont apériodiques (II)

On ne peut pas avoir des choses comme :

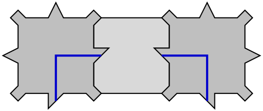


Toutes les pavages sont apériodiques (II)

On ne peut pas avoir des choses comme :

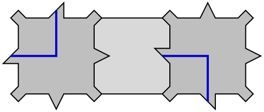


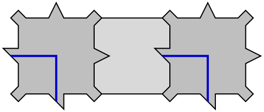
Les seules possibilités sont :

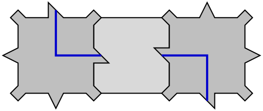


Toutes les pavages sont apériodiques (II)

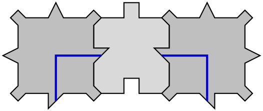
On ne peut pas avoir des choses comme :





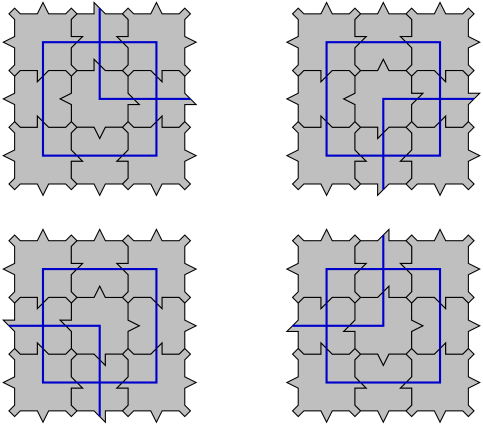


Les seules possibilités sont :



Toutes les pavages sont apériodiques (III)

Donc, chaque  appartient à une macro tuile de niveau 1.



Cette macro tuile est comme un grand . On peut itérer l'argument ...

Apériodicité du pavage de Robinson

Theorem

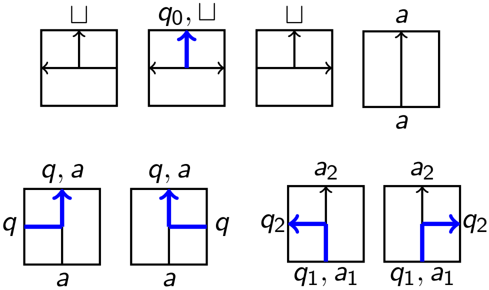
La conjecture de Wang est fausse.

Apériodicité du pavage de Robinson

Theorem

La conjecture de Wang est fausse.

En modifiant la construction, on peut codifier la démarche d'une Machine de Turing dans les macro tuiles du pavage de Robinson.

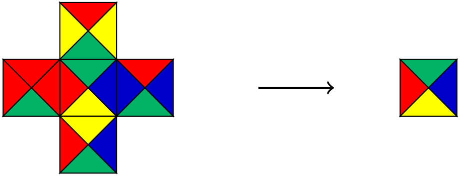


Alors, que disent les mosaïques ?

Supposons que le problème de la nilpotence est décidable sur $\mathbb{Z}^2$.

Alors, que disent les mosaïques ?

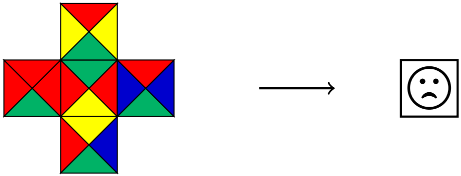
Supposons que le problème de la nilpotence est décidable sur $\mathbb{Z}^2$.
Soit τ un ensemble de tuiles de Wang et soit
$\phi : (\tau \cup \{☹\})^{\mathbb{Z}^2} \to (\tau \cup \{☹\})^{\mathbb{Z}^2}$ Défini par les règles :



S'il n'y a que des tuiles bien assemblées, ne rien changer.

Alors, que disent les mosaïques ?

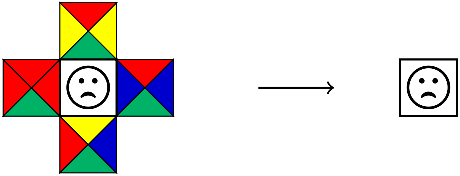
Supposons que le problème de la nilpotence est décidable sur $\mathbb{Z}^2$.
Soit τ un ensemble de tuiles de Wang et soit
$\phi : (\tau \cup \{☹\})^{\mathbb{Z}^2} \to (\tau \cup \{☹\})^{\mathbb{Z}^2}$ Défini par les règles :



S'il y a un erreur d'assemblage, devenir ☹.

Alors, que disent les mosaïques ?

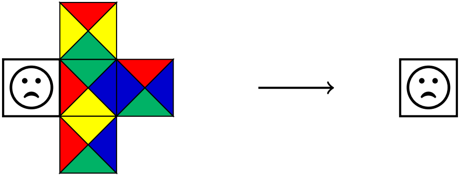
Supposons que le problème de la nilpotence est décidable sur $\mathbb{Z}^2$.
Soit τ un ensemble de tuiles de Wang et soit
$\phi : (\tau \cup \{\frownie\})^{\mathbb{Z}^2} \to (\tau \cup \{\frownie\})^{\mathbb{Z}^2}$ Défini par les règles :



Si il y a un $\frownie$ quelque part, devenir $\frownie$.

Alors, que disent les mosaïques ?

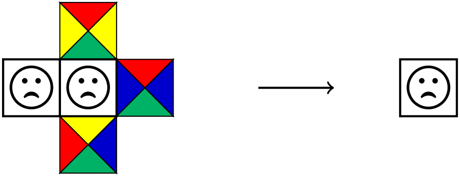
Supposons que le problème de la nilpotence est décidable sur $\mathbb{Z}^2$.
Soit τ un ensemble de tuiles de Wang et soit
$\phi : (\tau \cup \{☹\})^{\mathbb{Z}^2} \to (\tau \cup \{☹\})^{\mathbb{Z}^2}$ Défini par les règles :



Si il y a un ☹ quelque part, devenir ☹.

Alors, que disent les mosaïques ?

Supposons que le problème de la nilpotence est décidable sur $\mathbb{Z}^2$.
Soit τ un ensemble de tuiles de Wang et soit
$\phi : (\tau \cup \{\frownie\})^{\mathbb{Z}^2} \to (\tau \cup \{\frownie\})^{\mathbb{Z}^2}$ Défini par les règles :



Si il y a un ☹ quelque part, devenir ☹.

Alors, que dissent les mosaïques ?

Clairement $\phi(☹^{\mathbb{Z}^2}) = ☹^{\mathbb{Z}^2}$ et si x est un pavage par tuiles de τ alors $\phi(x) = x$.

Alors, que dissent les mosaïques ?

Clairement $\phi(☹^{\mathbb{Z}^2}) = ☹^{\mathbb{Z}^2}$ et si x est un pavage par tuiles de τ alors $\phi(x) = x$.

Alors,

- Si τ pave le plan, ϕ n'est pas nilpotent.

Alors, que dissent les mosaïques ?

Clairement $\phi(☹^{\mathbb{Z}^2}) = ☹^{\mathbb{Z}^2}$ et si x est un pavage par tuiles de τ alors $\phi(x) = x$.

Alors,

- Si τ pave le plan, ϕ n'est pas nilpotent.
- Si τ ne pave pas le plan, chaque configuration soit contient une erreur d'assemblage, soit contient un ☹.

Alors, que dissent les mosaïques ?

Clairement $\phi(\frown^{\mathbb{Z}^2}) = \frown^{\mathbb{Z}^2}$ et si x est un pavage par tuiles de τ alors $\phi(x) = x$.

Alors,

- Si τ pave le plan, ϕ n'est pas nilpotent.
- Si τ ne pave pas le plan, chaque configuration soit contient une erreur d'assemblage, soit contient un $\frown$.
- Soit $x \in \Omega$. Si $x \neq \frown^{\mathbb{Z}^2}$ il existe $\vec{v} \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x_{\vec{v}} \neq \frown$. Cela implique que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe x_n tel que $\phi^n(x_n) = x$. Alors $(x_n)|_{B_1(\vec{v},n)}$ ne contient que des tuiles bien assemblées.

Alors, que dissent les mosaïques ?

Clairement $\phi(☹^{\mathbb{Z}^2}) = ☹^{\mathbb{Z}^2}$ et si x est un pavage par tuiles de τ alors $\phi(x) = x$.
Alors,

- Si τ pave le plan, ϕ n'est pas nilpotent.
- Si τ ne pave pas le plan, chaque configuration soit contient une erreur d'assemblage, soit contient un ☹.
- Soit $x \in \Omega$. Si $x \neq ☹^{\mathbb{Z}^2}$ il existe $\vec{v} \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x_{\vec{v}} \neq ☹$. Cela implique que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe x_n tel que $\phi^n(x_n) = x$. Alors $(x_n)|_{B_1(\vec{v},n)}$ ne contient que des tuiles bien assemblées.
- Par compacité, on pourrait extraire $x_{n_\alpha} \to \bar{x}$ tel que $\bar{x}$ est un pavage de $\mathbb{Z}^2$ par τ. Contradiction.

Alors, que dissent les mosaïques ?

Clairement $\phi(☹^{\mathbb{Z}^2}) = ☹^{\mathbb{Z}^2}$ et si x est un pavage par tuiles de τ alors $\phi(x) = x$.
Alors,

- Si τ pave le plan, ϕ n'est pas nilpotent.
- Si τ ne pave pas le plan, chaque configuration soit contient une erreur d'assemblage, soit contient un ☹.
- Soit $x \in \Omega$. Si $x \neq ☹^{\mathbb{Z}^2}$ il existe $\vec{v} \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x_{\vec{v}} \neq ☹$. Cela implique que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe x_n tel que $\phi^n(x_n) = x$. Alors $(x_n)|_{B_1(\vec{v},n)}$ ne contient que des tuiles bien assemblées.
- Par compacité, on pourrait extraire $x_{n_\alpha} \to \bar{x}$ tel que $\bar{x}$ est un pavage de $\mathbb{Z}^2$ par τ. Contradiction.

Theorem

Le problème de nilpotence des automates cellulaires est indécidable sur $\mathbb{Z}^2$.

Et sur la droite ?

Theorème

Le problème de domino sur $\mathbb{Z}$ (paver la droite) est décidable.

Et sur la droite ?

Theorème

Le problème de domino sur $\mathbb{Z}$ (paver la droite) est décidable.

Pour chaque jeu de tuiles τ, On construit le graphe dirigé avec boucles $G = (\tau, E)$ ou $(a, b) \in E \subset \tau \times \tau$ si b peut être mis à droite de a.
τ pave la droite si et seulement si G admet un cycle.

Et sur la droite ?

Theorème

Le problème de domino sur $\mathbb{Z}$ (paver la droite) est décidable.

Pour chaque jeu de tuiles τ, On construit le graphe dirigé avec boucles $G = (\tau, E)$ ou $(a, b) \in E \subset \tau \times \tau$ si b peut être mis à droite de a.
τ pave la droite si et seulement si G admet un cycle.

Néanmoins, la nilpotence sur $\mathbb{Z}$ est indécidable !

NE determinisme

On dit qu'un jeu de tuiles τ est NE-déterministe si pour chaque paire des tuiles $a, b \in \tau$ il existe au plus une tuile c tel que :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & b \\ \cline{2-2}\end{array}$$

est bien assemblé.

NE determinisme

On dit qu'un jeu de tuiles τ est NE-déterministe si pour chaque paire des tuiles $a, b \in \tau$ il existe au plus une tuile c tel que :

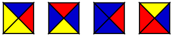
$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & b \\ \cline{2-2}\end{array}$$

est bien assemblé.

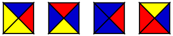
Théorème [Kari 1992]

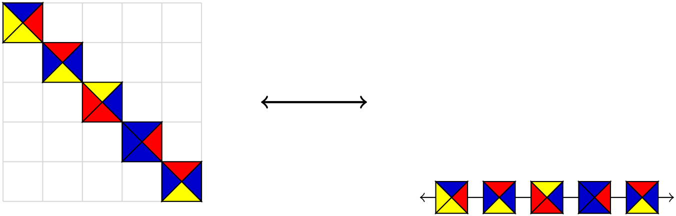
Le problème de domino restreint au jeu de tuiles NE-déterministes est indécidable.

Idée de la preuve

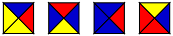
Prenons le jeu de tuiles : 

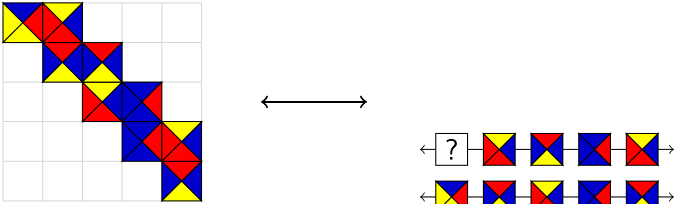
Idée de la preuve

Prenons le jeu de tuiles : 

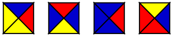


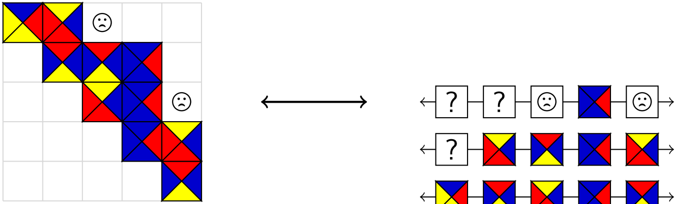
Idée de la preuve

Prenons le jeu de tuiles : 

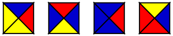


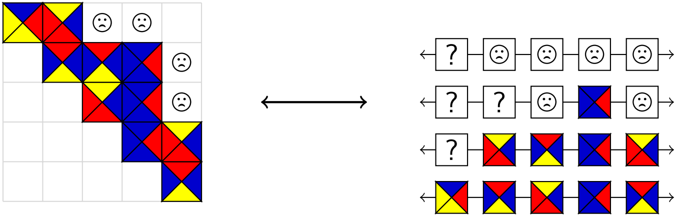
Idée de la preuve

Prenons le jeu de tuiles : 

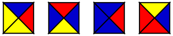


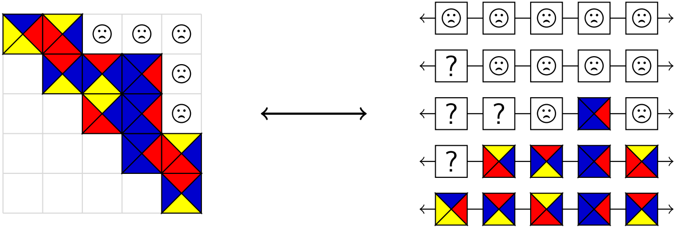
Idée de la preuve

Prenons le jeu de tuiles : 



Idée de la preuve

Prenons le jeu de tuiles : 




Merci beaucoup pour votre attention !