Formalismo termodinámico en grupos sóficos

Sebastián **Barbieri Lemp**

Trabajo en en colaboración con Tom **Meyerovitch**

Universidad de Santiago de Chile

Seminario de sistemas dinámicos de Santiago

Mayo, 2022

Sean n bolitas con pesos en $\mathbb{R}$ dados por una función f

1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	n
$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$		$f(n)$

Sean n bolitas con pesos en $\mathbb{R}$ dados por una función f

1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	n
$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$		$f(n)$

¿Cual es la distribución de probabilidad $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ en $\{1, \ldots, n\}$ que maximiza la entropía más la integral del peso?

$$\max_{\mu} \left(H(\mu) + \int f \mathrm{d}\mu \right) = \max_{\mu} \sum_{i=1}^{n} \left(-\mu_i \log(\mu_i) + f(i)\mu_i \right).$$

Sean n bolitas con pesos en $\mathbb{R}$ dados por una función f

$$\begin{array}{ccccccccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \cdots & \textcircled{n} \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & & f(n) \end{array}$$

¿Cual es la distribución de probabilidad $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ en $\{1, \ldots, n\}$ que maximiza la entropía más la integral del peso?

$$\max_{\mu} \left(H(\mu) + \int f \mathrm{d}\mu \right) = \max_{\mu} \sum_{i=1}^{n} (-\mu_i \log(\mu_i) + f(i)\mu_i) \,.$$

Respuesta: la distribución de Boltzmann.

$$\mu_k = \frac{\exp(f(k))}{\sum_{i=1}^{n} \exp(f(i))}.$$

Consideremos ahora un subshift. Dado un grupo numerable Γ y un alfabeto finito A, consideramos el espacio de configuraciones

$$A^{\Gamma} = \{x \colon \Gamma \to A\}.$$

Consideremos ahora un subshift. Dado un grupo numerable Γ y un alfabeto finito A, consideramos el espacio de configuraciones

$$A^{\Gamma} = \{x \colon \Gamma \to A\}.$$

Un **subshift** en Γ es un subconjunto $X \subset A^{\Gamma}$ que es cerrado e invariante bajo la acción $\Gamma \curvearrowright A^{\Gamma}$ dada por

$$(gx)(h) = x(g^{-1}h) \text{ para todo } g, h \in \Gamma.$$

Consideremos ahora un subshift. Dado un grupo numerable Γ y un alfabeto finito A, consideramos el espacio de configuraciones

$$A^\Gamma = \{x \colon \Gamma \to A\}.$$

Un **subshift** en Γ es un subconjunto $X \subset A^\Gamma$ que es cerrado e invariante bajo la acción $\Gamma \curvearrowright A^\Gamma$ dada por

$$(gx)(h) = x(g^{-1}h) \text{ para todo } g, h \in \Gamma.$$

Dado $F \Subset \Gamma$ y $p \in A^F$, definimos $[p] = \{x \in A^\Gamma : x|_F = p\}$.

Consideremos ahora un subshift. Dado un grupo numerable Γ y un alfabeto finito A, consideramos el espacio de configuraciones

$$A^{\Gamma} = \{x \colon \Gamma \to A\}.$$

Un **subshift** en Γ es un subconjunto $X \subset A^{\Gamma}$ que es cerrado e invariante bajo la acción $\Gamma \curvearrowright A^{\Gamma}$ dada por

$$(gx)(h) = x(g^{-1}h) \text{ para todo } g, h \in \Gamma.$$

Dado $F \Subset \Gamma$ y $p \in A^F$, definimos $[p] = \{x \in A^{\Gamma} : x|_F = p\}$.

Un subshift $X \subset A^{\Gamma}$ se dice de **tipo finito** si existe $F \Subset \Gamma$ y $L \subset A^F$ tal que $x \in X$ si y solamente si $gx \in \bigcup_{p \in L}[p]$ para todo $g \in \Gamma$.

¿Cómo extender la distribución de Boltzmann a subshifts?

¿Cómo extender la distribución de Boltzmann a subshifts?

Local

↓

Medida de Gibbs

↓

Para $F \Subset \Gamma$, pediremos que la probabilidad de ver un patrón $p \in A^F$ condicionado a la sigma álgebra en $\Gamma \setminus F$ siga la distribución de Boltzmann

¿Cómo extender la distribución de Boltzmann a subshifts?

Local

↓

Medida de Gibbs

↓

Para $F \Subset \Gamma$, pediremos que la probabilidad de ver un patrón $p \in A^F$ condicionado a la sigma álgebra en $\Gamma \setminus F$ siga la distribución de Boltzmann

Global

↓

Medida de equilibrio

↓

Maximizaremos la expresión

$$h_\mu(\Gamma \curvearrowright X) + \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Donde $h_\mu(\Gamma \curvearrowright X)$ es la entropía de medida

¿Cómo se relacionan éstas nociones?

Consideremos el grupo $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ y

1. Un subshift $X \subset A^{\mathbb{Z}^d}$.
2. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ suficientemente regular.
3. Una medida μ sobre X invariante bajo traslaciones.

¿Cómo se relacionan éstas nociones?

Consideremos el grupo $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ y

1. Un subshift $X \subset A^{\mathbb{Z}^d}$.
2. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ suficientemente regular.
3. Una medida μ sobre X invariante bajo traslaciones.

Teorema: Lanford, Ruelle, 1969

Si X es un subshift de tipo finito.
μ es medida de equilibrio $\implies$ μ es medida de Gibbs.

¿Cómo se relacionan éstas nociones?

Consideremos el grupo $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ y

1. Un subshift $X \subset A^{\mathbb{Z}^d}$.
2. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ suficientemente regular.
3. Una medida μ sobre X invariante bajo traslaciones.

Teorema: Lanford, Ruelle, 1969

Si X es un subshift de tipo finito.
μ es medida de equilibrio $\implies$ μ es medida de Gibbs.

Teorema: Dobrushin, 1968

Si X es D-mezclador.
μ es medida de Gibbs $\implies$ μ es medida de equilibrio.

En esta charla veremos una versión en esteroides del teorema de Lanford y Ruelle.

- $\mathbb{Z}^d \to \Gamma$ grupo sófico arbitrario.
- $\mathbb{Z}^d$-SFT $X \to \Gamma$-subshift X que satisface TMP.

En esta charla veremos una versión en esteroides del teorema de Lanford y Ruelle.

- $\mathbb{Z}^d \to \Gamma$ grupo sófico arbitrario.
- $\mathbb{Z}^d$-SFT $X \to \Gamma$-subshift X que satisface TMP.

Teorema: B., Meyerovitch, 2021

Sea Γ un grupo sófico y Σ una aproximación sófica de Γ. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ suficientemente regular. Para todo Γ-subshift con TMP tal que $h_{\Sigma}(\Gamma \curvearrowright X) \geq 0$, se cumple que toda medida μ de probabilidad, Borel, invariante y de equilibrio es una medida de Gibbs.

Motivación

Un **endomorfismo** o **autómata celular** en $\Gamma \curvearrowright A^\Gamma$ es una transformación $\varphi \colon A^\Gamma \to A^\Gamma$ que es continua y Γ-equivariante ($\varphi(gx) = g\varphi(x)$ para todo $g \in \Gamma$, $x \in A^\Gamma$).

Motivación

Un **endomorfismo** o **autómata celular** en $\Gamma \curvearrowright A^\Gamma$ es una transformación $\varphi\colon A^\Gamma \to A^\Gamma$ que es continua y Γ-equivariante ($\varphi(gx) = g\varphi(x)$ para todo $g \in \Gamma$, $x \in A^\Gamma$).

Conjetura de Gottschalk

Todo endomorfismo inyectivo $\varphi\colon A^\Gamma \to A^\Gamma$ es sobreyectivo.

Motivación

Un **endomorfismo** o **autómata celular** en $\Gamma \curvearrowright A^\Gamma$ es una transformación $\varphi\colon A^\Gamma \to A^\Gamma$ que es continua y Γ-equivariante ($\varphi(gx) = g\varphi(x)$ para todo $g \in \Gamma$, $x \in A^\Gamma$).

Conjetura de Gottschalk

Todo endomorfismo inyectivo $\varphi\colon A^\Gamma \to A^\Gamma$ es sobreyectivo.

- Ya se sabe que todo grupo sófico satisface la conjectura de Gottschalk.
- No se sabe si todos los grupos son sóficos. La conjetura sigue abierta.

Motivación

Una teoría de entropía sobre subshifts en A^Γ es una asignación

$$(X,\mu) \mapsto h(\Gamma \curvearrowright X, \mu) \in [-\infty, \infty],$$

tal que h es invariante bajo isomorfismo de acciones medibles.

- $X \subset A^\Gamma$ es un subshift.
- μ es una medida Borel de probabilidad invariante en A^Γ con soporte en X.

Una teoría de entropía satisface el teorema de Lanford Ruelle para $f = 0$ si toda medida μ tal que

$$h(\Gamma \curvearrowright X, \mu) = \sup_{\nu} h(\Gamma \curvearrowright X, \nu),$$

Es una medida de Gibbs (para $f = 0$).

Teorema

Si Γ admite una teoría de entropía sobre subshifts que satisface el teorema de Lanford Ruelle para $f = 0$, entonces la conjetura de Gottschalk es cierta sobre Γ.

Teorema

Si Γ admite una teoría de entropía sobre subshifts que satisface el teorema de Lanford Ruelle para $f = 0$, entonces la conjetura de Gottschalk es cierta sobre Γ.

Demostración:

- La única medida de Gibbs en A^Γ es la medida de Bernoulli uniforme, que tiene soporte completo.

Teorema

Si Γ admite una teoría de entropía sobre subshifts que satisface el teorema de Lanford Ruelle para $f = 0$, entonces la conjetura de Gottschalk es cierta sobre Γ.

Demostración:

- La única medida de Gibbs en A^Γ es la medida de Bernoulli uniforme, que tiene soporte completo.
- Para todo subshift $X \subsetneq A^\Gamma$,
  $\sup_\nu h(\Gamma \curvearrowright X, \nu) < \sup_\mu h(\Gamma \curvearrowright A^\Gamma, \mu)$.

Teorema

Si Γ admite una teoría de entropía sobre subshifts que satisface el teorema de Lanford Ruelle para $f = 0$, entonces la conjetura de Gottschalk es cierta sobre Γ.

Demostración:

- La única medida de Gibbs en A^Γ es la medida de Bernoulli uniforme, que tiene soporte completo.
- Para todo subshift $X \subsetneq A^\Gamma$,
  $\sup_\nu h(\Gamma \curvearrowright X, \nu) < \sup_\mu h(\Gamma \curvearrowright A^\Gamma, \mu)$.
- Si φ es un endomorfismo inyectivo, entonces para toda medida μ en A^Γ, $\Gamma \curvearrowright (A^\Gamma, \mu) \cong \Gamma \curvearrowright (\varphi(A^\Gamma), \varphi_*(\mu))$.

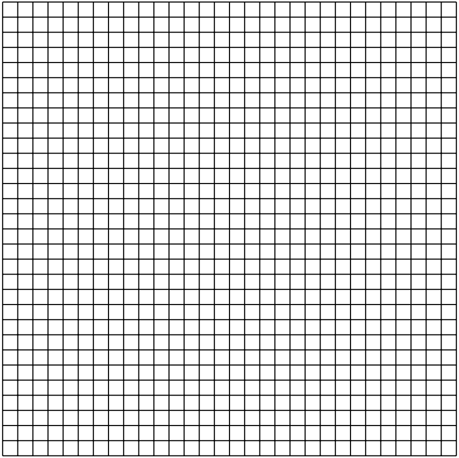
Teorema

Si Γ admite una teoría de entropía sobre subshifts que satisface el teorema de Lanford Ruelle para $f = 0$, entonces la conjetura de Gottschalk es cierta sobre Γ.

Demostración:

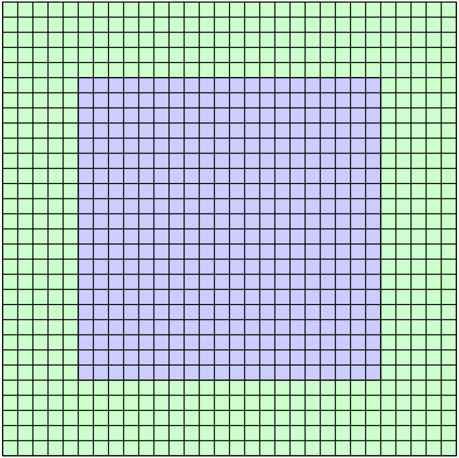
- La única medida de Gibbs en A^Γ es la medida de Bernoulli uniforme, que tiene soporte completo.
- Para todo subshift $X \subsetneq A^\Gamma$, $\sup_\nu h(\Gamma \curvearrowright X, \nu) < \sup_\mu h(\Gamma \curvearrowright A^\Gamma, \mu)$.
- Si φ es un endomorfismo inyectivo, entonces para toda medida μ en A^Γ, $\Gamma \curvearrowright (A^\Gamma, \mu) \cong \Gamma \curvearrowright (\varphi(A^\Gamma), \varphi_*(\mu))$.
- Si μ es Bernoulli uniforme, luego $h(\Gamma \curvearrowright A^\Gamma, \mu) = h(\Gamma \curvearrowright \varphi(A^\Gamma), \varphi_*(\mu))$ y por lo tanto $\varphi(A^\Gamma) = A^\Gamma$.

Medida de Gibbs



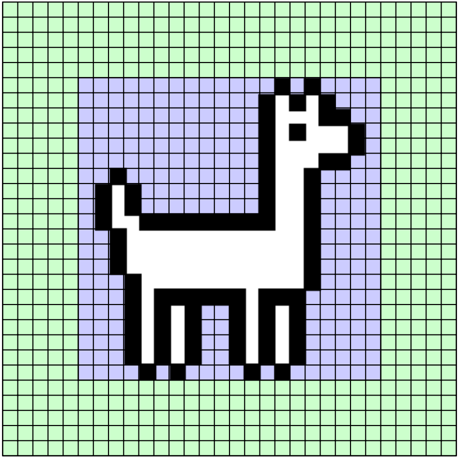
Una medida es Gibbs si localmente sigue la distribución de Boltzmann

Medida de Gibbs



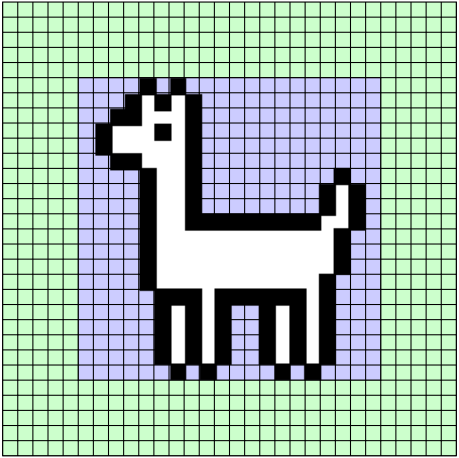
Una medida es Gibbs si localmente sigue la distribución de Boltzmann

Medida de Gibbs



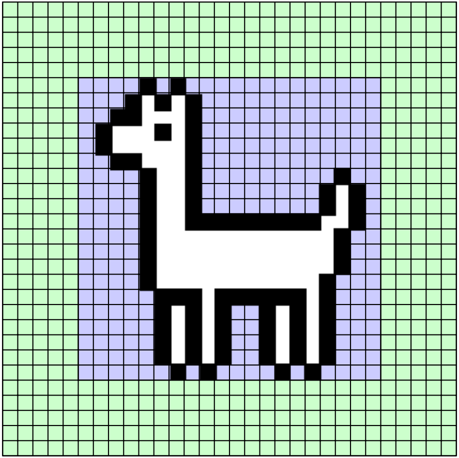
Una medida es Gibbs si localmente sigue la distribución de Boltzmann

Medida de Gibbs



Una medida es Gibbs si localmente sigue la distribución de Boltzmann

Medida de Gibbs



$\mu(\ |\square)$ y $\mu(\ |\square)$ siguen la distribución de Boltzmann

Medida de Gibbs

$x, y \in A^\Gamma$ son **asintóticos** si existe $F \Subset \Gamma$ tal que

$$x|_{\Gamma \setminus F} = y|_{\Gamma \setminus F}.$$

La relación de equivalencia de pares asintóticos en un subshift $X \subset A^\Gamma$ se escribe $\mathcal{T}(X)$.

Medida de Gibbs

$x, y \in A^\Gamma$ son **asintóticos** si existe $F \Subset \Gamma$ tal que

$$x|_{\Gamma \setminus F} = y|_{\Gamma \setminus F}.$$

La relación de equivalencia de pares asintóticos en un subshift $X \subset A^\Gamma$ se escribe $\mathcal{T}(X)$.

Vamos a restringirnos a las funciones $f \colon X \to \mathbb{R}$ tales que para todo $(x, y) \in \mathcal{T}(X)$

$$\Psi_f(x, y) = \sum_{g \in \Gamma} f(gy) - f(gx) \text{ converge absolutamente.}$$

Medida de Gibbs

$x, y \in A^\Gamma$ son **asintóticos** si existe $F \Subset \Gamma$ tal que

$$x|_{\Gamma \setminus F} = y|_{\Gamma \setminus F}.$$

La relación de equivalencia de pares asintóticos en un subshift $X \subset A^\Gamma$ se escribe $\mathcal{T}(X)$.

Vamos a restringirnos a las funciones $f \colon X \to \mathbb{R}$ tales que para todo $(x, y) \in \mathcal{T}(X)$

$$\Psi_f(x,y) = \sum_{g \in \Gamma} f(gy) - f(gx) \text{ converge absolutamente.}$$

Ejemplo: las funciones f locales satisfacen lo anterior (existe $F \Subset \Gamma$ tal que $f(x) = f(y)$ cuando $x|_F = y|_F$).

Medida de Gibbs

Fijemos un subshift X. Para $x \in A^{\Gamma}$ y $F \Subset \Gamma$, denotamos por $L_F(x)$ el conjunto de patrones $p \in A^F$ que al concatenarse con $x|_{\Gamma \setminus F}$ dan un elemento de X.

Medida de Gibbs

Fijemos un subshift X. Para $x \in A^\Gamma$ y $F \Subset \Gamma$, denotamos por $L_F(x)$ el conjunto de patrones $p \in A^F$ que al concatenarse con $x|_{\Gamma\setminus F}$ dan un elemento de X.

Una medida Borel de probabilidad μ en un subshift X se dice **medida de Gibbs** con respecto a $f\colon X \to \mathbb{R}$ si para todo $F \Subset \Gamma$ y $p \in A^F$ se tiene que $\mu -$ ctp

$$\mathbb{E}_\mu(1_{[p]} \mid \sigma(A^{\Gamma\setminus F}))(x) = \begin{cases} \frac{\exp(\Psi_f(x, p\vee x|_{\Gamma\setminus F}))}{\sum_{q\in L_F(X)} \exp(\Psi_f(x, q\vee x|_{\Gamma\setminus F}))} & \text{si } p \in L_F(x) \\ 0 & \text{si } p \notin L_F(x) \end{cases}.$$

Medida de Gibbs

Ejemplo: $X = A^{\Gamma}$ y $f = 0$.

$$\mathbb{E}_{\mu}(1_{[p]} \mid \sigma(A^{\Gamma \setminus F}))(x) = \begin{cases} \frac{\exp(\Psi_f(x, p \vee x|_{\Gamma \setminus F}))}{\sum_{q \in L_F(X)} \exp(\Psi_f(x, q \vee x|_{\Gamma \setminus F}))} & \text{si } p \in L_F(x) \\ 0 & \text{si } p \notin L_F(x) \end{cases}.$$

Medida de Gibbs

Ejemplo: $X = A^{\Gamma}$ y $f = 0$.

$$\mathbb{E}_{\mu}(1_{[p]} \mid \sigma(A^{\Gamma \setminus F}))(x) = \frac{\exp(\Psi_f(x, p \vee x|_{\Gamma \setminus F}))}{\sum_{q \in A^F} \exp(\Psi_f(x, q \vee x|_{\Gamma \setminus F}))}$$

Medida de Gibbs

Ejemplo: $X = A^{\Gamma}$ y $f = 0$.

$$\mathbb{E}_{\mu}(1_{[p]} \mid \sigma(A^{\Gamma \setminus F}))(x) = \frac{1}{|A^F|}$$

Medida de Gibbs

Ejemplo: $X = A^\Gamma$ y $f = 0$.

$$\mathbb{E}_\mu(1_{[p]} \mid \sigma(A^{\Gamma\setminus F}))(x) = \frac{1}{|A^F|}$$

Ejemplo: $X = \{0,1\}^\Gamma$ y f es la proyección a la coordenada de la identidad. Dado $F = \{a,b\}$ con $a \neq b$,

$$\mathbb{E}_\mu(1_{[p]} \mid \sigma(A^{\Gamma\setminus F}))(x) = \begin{cases} \frac{e^2}{e^2+2e+1} & \text{si } p_a = p_b = 1 \\ \frac{e}{e^2+2e+1} & \text{si } \{p_a, p_b\} = \{0,1\} \\ \frac{1}{e^2+2e+1} & \text{si } p_a = p_b = 0 \end{cases}.$$

Medida de equilibrio

Para $F \Subset \Gamma$ y $X \subset A^{\Gamma}$ un subshift, sea $L_F(X)$ el conjunto de $p \in A^F$ tales que $[p] \cap X \neq \varnothing$.

Medida de equilibrio

Para $F \Subset \Gamma$ y $X \subset A^{\Gamma}$ un subshift, sea $L_F(X)$ el conjunto de $p \in A^F$ tales que $[p] \cap X \neq \varnothing$.

Caso sencillo $\Gamma = \mathbb{Z}^d$.

$$h_{\mu}(\mathbb{Z}^d \curvearrowright X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)^d} \sum_{p \in L_{[-n,n]^d}(X)} -\mu([p]) \log(\mu([p])).$$

Medida de equilibrio

Para $F \Subset \Gamma$ y $X \subset A^{\Gamma}$ un subshift, sea $L_F(X)$ el conjunto de $p \in A^F$ tales que $[p] \cap X \neq \varnothing$.

Caso sencillo $\Gamma = \mathbb{Z}^d$.

$$h_{\mu}(\mathbb{Z}^d \curvearrowright X) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2n+1)^d} \sum_{p \in L_{[-n,n]^d}(X)} -\mu([p]) \log(\mu([p])).$$

Medida de equilibrio en $\mathbb{Z}^d$

Una medida en un $\mathbb{Z}^d$-subshift es de equilibrio si maximiza la expresión

$$h_{\mu}(\Gamma \curvearrowright X) + \int f \mathrm{d}\mu.$$

En el espacio de medidas invariantes de probabilidad Borealianas sobre X.

Medida de equilibrio

Ejemplo: sean $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ y $X = A^\Gamma$, $f = 0$.

Medida de equilibrio

Ejemplo: sean $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ y $X = A^\Gamma$, $f = 0$.
La expresión $-\sum_{p \in A^{[-n,n]^d}} \mu([p]) \log(\mu([p]))$ se maximiza al tomar

$$\mu([p]) = \frac{1}{\left|A^{[-n,n]^d}\right|}.$$

Medida de equilibrio

Ejemplo: sean $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ y $X = A^{\Gamma}$, $f = 0$.
La expresión $-\sum_{p \in A^{[-n,n]^d}} \mu([p]) \log(\mu([p]))$ se maximiza al tomar

$$\mu([p]) = \frac{1}{\left|A^{[-n,n]^d}\right|}.$$

Luego la única medida de equilibrio para $f = 0$ es la medida de Bernoulli uniforme en $A^{\mathbb{Z}^d}$.

Medida de equilibrio

Ejemplo: sean $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ y $X = A^\Gamma$, $f = 0$.
La expresión $-\sum_{p \in A^{[-n,n]^d}} \mu([p]) \log(\mu([p]))$ se maximiza al tomar

$$\mu([p]) = \frac{1}{|A^{[-n,n]^d}|}.$$

Luego la única medida de equilibrio para $f = 0$ es la medida de Bernoulli uniforme en $A^{\mathbb{Z}^d}$.

En el caso de $A^{\mathbb{Z}^d}$ y $f = 0$, existe una única medida de equilibrio y una única medida de Gibbs y éstas coinciden.

Medida de equilibrio

¿ Y cómo se hace si el grupo no es $\mathbb{Z}^d$?

Medida de equilibrio

¿ Y cómo se hace si el grupo no es $\mathbb{Z}^d$?

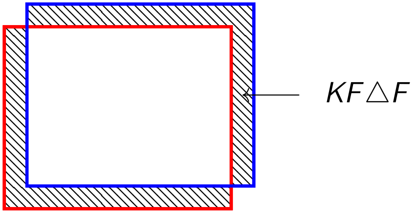
Dado $K \Subset \Gamma$ y $\delta > 0$, decimos que un conjunto $F \Subset \Gamma$ es (K, δ)-invariante si
$$|KF \Delta F| \leq \delta |F|.$$

Medida de equilibrio

¿ Y cómo se hace si el grupo no es $\mathbb{Z}^d$?

Dado $K \Subset \Gamma$ y $\delta > 0$, decimos que un conjunto $F \Subset \Gamma$ es (K, δ)-invariante si
$$|KF \Delta F| \leq \delta |F|.$$

$$\Gamma = \mathbb{Z}^2$$
$$K = \{(1,1)\}$$
$$F = [\![-n, n]\!]^2$$



Medida de equilibrio

Grupo promediable

Un grupo Γ es **promediable** si para todo $K \Subset \Gamma$ y $\delta > 0$ existe $F \Subset \Gamma$ que es (K, δ)-invariante.

Una secuencia $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de Γ es Følner si es eventualmente (K, δ)-invariante para todo $K \Subset \Gamma$ y $\delta > 0$.

Medida de equilibrio

Grupo promediable

Un grupo Γ es **promediable** si para todo $K \Subset \Gamma$ y $\delta > 0$ existe $F \Subset \Gamma$ que es (K, δ)-invariante.

Una secuencia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de Γ es Følner si es eventualmente (K, δ)-invariante para todo $K \Subset \Gamma$ y $\delta > 0$.

$$h_\mu(\Gamma \curvearrowright X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{p\in L_{F_n}(X)} -\mu([p]) \log(\mu([p])).$$

Donde $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier secuencia de Følner.

Obs: no depende de la secuencia, de hecho, el límite es un ínfimo sobre $F \Subset \Gamma$.

¿Y qué hacemos si Γ no es promediable?

¿Y qué hacemos si Γ no es promediable?

La entropía en grupos promediables satisface:

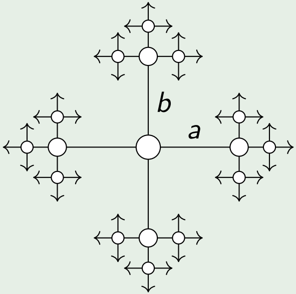
- La entropía no aumenta bajo factores.
- La entropía de la medida de Bernoulli en A^{Γ} es $\log(|A|)$.

¿Y qué hacemos si Γ no es promediable?

La entropía en grupos promediables satisface:

- La entropía no aumenta bajo factores.
- La entropía de la medida de Bernoulli en A^{Γ} es $\log(|A|)$.

Ejemplo: (Ornstein y Weiss 87)
Sea F_2 el grupo libre en dos generadores a, b



¿Y qué hacemos si Γ no es promediable?

La entropía en grupos promediables satisface:

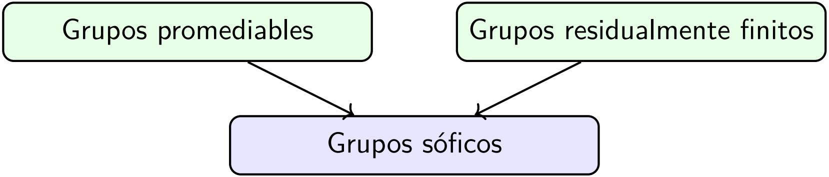
- La entropía no aumenta bajo factores.
- La entropía de la medida de Bernoulli en A^Γ es $\log(|A|)$.

Ejemplo: (Ornstein y Weiss 87)
Sea F_2 el grupo libre en dos generadores a, b

Sea $\varphi\colon (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{F_2} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{F_2}$ dada por

$$\varphi(x)(g) = (x(g) + x(ga), x(g) + x(gb)).$$

Una de las propiedades anteriores debe fallar en F_2 puesto que φ es un factor.


Grupos promediables
Grupos residualmente finitos
Grupos sóficos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{Grupos promediables} \arrow[dr] & & \text{Grupos residualmente finitos} \arrow[dl] \\
& \text{Grupos sóficos} &
\end{tikzcd}$$

Un grupo Γ es **sófico** si existe una secuencia $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos finitos tal que $|V_i| \to \infty$ y una colección $\Sigma = \{\sigma_i \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(V_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ que es:

- Asintóticamente una acción: para todo $s, t \in \Gamma$,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{|V_i|} |\{v \in V_i : \sigma_i(st)v = \sigma_i(s)\sigma_i(t)v\}| = 1.$$

- Asintóticamente libre: para todo $s \neq t \in \Gamma$,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{|V_i|} |\{v \in V_i : \sigma_i(s)v \neq \sigma_i(t)v\}| = 1.$$

Ejemplo: Si Γ es residualmente finito, entonces existen subgrupos normales $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $[\Gamma : H_n] < \infty$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = 1$.

Ejemplo: Si Γ es residualmente finito, entonces existen subgrupos normales $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $[\Gamma : H_n] < \infty$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = 1$.

Tomamos $V_n = \Gamma/H_n$ y $\sigma_n\colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(\Gamma/H_n)$ dado por

$$\sigma_n(g)(xH_n) = gxH_n \text{ para todo } g \in \Gamma.$$

Ejemplo: Si Γ es residualmente finito, entonces existen subgrupos normales $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $[\Gamma : H_n] < \infty$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = 1$.

Tomamos $V_n = \Gamma/H_n$ y $\sigma_n \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(\Gamma/H_n)$ dado por

$$\sigma_n(g)(xH_n) = gxH_n \text{ para todo } g \in \Gamma.$$

La colección $\Sigma = \{\sigma_n \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(\Gamma/H_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es

- ~~Asintóticamente~~ una acción.
- Asintóticamente libre, pues $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = 1$.

Ejemplo: Si Γ es residualmente finito, entonces existen subgrupos normales $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $[\Gamma : H_n] < \infty$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = 1$.

Tomamos $V_n = \Gamma/H_n$ y $\sigma_n \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(\Gamma/H_n)$ dado por

$$\sigma_n(g)(xH_n) = gxH_n \text{ para todo } g \in \Gamma.$$

La colección $\Sigma = \{\sigma_n \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(\Gamma/H_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es

- ~~Asintóticamente~~ una acción.
- Asintóticamente libre, pues $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = 1$.

Todo grupo residualmente finito es sófico.

Ejemplo: Si Γ es promediable, consideramos una secuencia de Følner $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $1_\Gamma \in F_n \nearrow \Gamma$.

Ejemplo: Si Γ es promediable, consideramos una secuencia de Følner $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $1_\Gamma \in F_n \nearrow \Gamma$.

Tomamos $V_n = F_n$ y $\sigma_n \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(F_n)$ dado por

$$\sigma_n(g)(f) = \begin{cases} gf & \text{si } gf \in F_n \\ \tau_g(f) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $\tau_g \colon F_n \setminus g^{-1}F_n$ es una permutación arbitraria.

Ejemplo: Si Γ es promediable, consideramos una secuencia de Følner $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $1_\Gamma \in F_n \nearrow \Gamma$.

Tomamos $V_n = F_n$ y $\sigma_n \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(F_n)$ dado por

$$\sigma_n(g)(f) = \begin{cases} gf & \text{si } gf \in F_n \\ \tau_g(f) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $\tau_g \colon F_n \setminus g^{-1}F_n$ es una permutación arbitraria.
La colección $\Sigma = \{\sigma_n \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(F_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es

- Asintóticamente una acción. Para todo $g, h \in \Gamma$ tomamos $K = \{g, h, gh\}$ y $\varepsilon > 0$, luego existe F_n tal que $|KF\Delta F| < \varepsilon|F|$. Por lo cual la cantidad de valores para los cuales $\sigma_n(g)\sigma_n(h)f = \sigma_n(gh)f$ es $(1-\varepsilon)|F|$.
- Asintóticamente libre, pues $F_n \nearrow \Gamma$.

Ejemplo: Si Γ es promediable, consideramos una secuencia de Følner $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $1_\Gamma \in F_n \nearrow \Gamma$.

Tomamos $V_n = F_n$ y $\sigma_n \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(F_n)$ dado por

$$\sigma_n(g)(f) = \begin{cases} gf & \text{si } gf \in F_n \\ \tau_g(f) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $\tau_g \colon F_n \setminus g^{-1}F_n$ es una permutación arbitraria.
La colección $\Sigma = \{\sigma_n \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(F_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es

- Asintóticamente una acción. Para todo $g, h \in \Gamma$ tomamos $K = \{g, h, gh\}$ y $\varepsilon > 0$, luego existe F_n tal que $|KF\Delta F| < \varepsilon|F|$. Por lo cual la cantidad de valores para los cuales $\sigma_n(g)\sigma_n(h)f = \sigma_n(gh)f$ es $(1-\varepsilon)|F|$.
- Asintóticamente libre, pues $F_n \nearrow \Gamma$.

Todo grupo promediable es sófico.

¿Cómo se define la entropía sófica de una acción?

¿Cómo se define la entropía sófica de una acción?

Fijamos una aproximación sófica $\Sigma = \{\sigma_i \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(V_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de Γ y una pseudométrica generadora d en X.

$$h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X, \mu) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{L\in C(X)} \inf_{F\Subset\Gamma} \inf_{\delta>0} \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{|V_i|} \log(M^{\varepsilon}_{\Sigma,\mu}(\Gamma \curvearrowright X, F, \delta, L, \sigma_i))$$

Donde $M^{\varepsilon}_{\Sigma,\mu}(\Gamma \curvearrowright X, F, \delta, L, \sigma_i)$ es el número más grande de funciones $\varphi\colon V_n \to X$ tales que

1. son ε-separadas, $\max_{v\in V_i} d(\varphi(v), \varphi'(v)) > \varepsilon$.
2. son (F,δ)-cercanas a una órbita

$$\max_{s\in F} \frac{1}{|V_i|} \left(\sum_{v\in V_i} d(s\varphi(v), \varphi(\sigma_i(s)v))^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \delta.$$

3. Casi cumplen el teorema de Birkhoff

$$\left| \frac{1}{|V_i|} \sum_{v\in V_i} h(\varphi(v)) - \int_X h \mathrm{d}\mu \right| \leq \delta, \text{ para toda } h \in L.$$

¿Cómo se define la entropía sófica de un subshift?

¿Cómo se define la entropía sófica de un subshift?

La acción es expansiva, así que el ε puede eliminarse.

$$h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X, \mu) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{L \in C(X)} \inf_{F \Subset \Gamma} \inf_{\delta>0} \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{|V_i|} \log(M^{\varepsilon}_{\Sigma,\mu}(\Gamma \curvearrowright X, F, \delta, L, \sigma_i))$$

¿Cómo se define la entropía sófica de un subshift?

La acción es expansiva, así que el ε puede eliminarse.

$$h_{\Sigma}(\Gamma \curvearrowright X, \mu) = \inf_{L \Subset C(X)} \inf_{F \Subset \Gamma} \inf_{\delta > 0} \limsup_{i \to \infty} \frac{1}{|V_i|} \log(M^{C}_{\Sigma,\mu}(\Gamma \curvearrowright X, F, \delta, L, \sigma_i))$$

¿Cómo se define la entropía sófica de un subshift X?

¿Cómo se define la entropía sófica de un subshift X?

Fijamos una aproximación sófica $\Sigma = \{\sigma_i \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(V_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de Γ. Tomamos la pseudométrica

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x(1_\Gamma) = y(1_\Gamma), \\ 1 & \text{if } x(1_\Gamma) \neq y(1_\Gamma). \end{cases}$$

Para $w \in A^{V_i}$, defino $\varphi_w(v) \in A^\Gamma$ mediante

$$\varphi_w(v)(g) = w(\sigma_i(g^{-1})v).$$

¿Cómo se define la entropía sófica de un subshift X?

Fijamos una aproximación sófica $\Sigma = \{\sigma_i \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(V_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de Γ. Tomamos la pseudométrica

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x(1_\Gamma) = y(1_\Gamma), \\ 1 & \text{if } x(1_\Gamma) \neq y(1_\Gamma). \end{cases}$$

Para $w \in A^{V_i}$, defino $\varphi_w(v) \in A^\Gamma$ mediante

$$\varphi_w(v)(g) = w(\sigma_i(g^{-1})v).$$

Cada $w \in A^{V_i}$ induce una medida de probabilidad en A^Γ dada por

$$\mu_w = \frac{1}{|V_i|} \sum_{v \in V_i} \delta_{\varphi_w(v)}.$$

¿Cómo se define la entropía sófica de un subshift X?

¿Cómo se define la entropía sófica de un subshift X?

Fijamos una aproximación sófica $\Sigma = \{\sigma_i \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(V_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de Γ. Sea d una métrica en $\mathrm{Prob}(A^\Gamma)$.

Para $\mu \in \mathrm{Prob}_\Gamma(X)$, defino

$$N_\delta(\mu) = \{\nu \in \mathrm{Prob}(A^\Gamma) : d(\nu, \mu) < \delta\}.$$

¿Cómo se define la entropía sófica de un subshift X?

Fijamos una aproximación sófica $\Sigma = \{\sigma_i \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(V_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de Γ. Sea d una métrica en $\mathrm{Prob}(A^\Gamma)$.

Para $\mu \in \mathrm{Prob}_\Gamma(X)$, defino

$$N_\delta(\mu) = \{\nu \in \mathrm{Prob}(A^\Gamma) : d(\nu,\mu) < \delta\}.$$

La entropía sófica de medida de un subshift (X,μ) con respecto a una secuencia de aproximaciones sóficas Σ está dada por:

$$h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X, \mu) = \inf_{\delta>0} \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{|V_i|} \log \left| \{w \in A^{V_i} : \mu_w \in N_\delta(\mu)\} \right|.$$

¿Cómo se define la entropía sófica de un subshift X?

Fijamos una aproximación sófica $\Sigma = \{\sigma_i \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(V_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de Γ. Sea d una métrica en $\mathrm{Prob}(A^\Gamma)$.

Para $\mu \in \mathrm{Prob}_\Gamma(X)$, defino

$$N_\delta(\mu) = \{\nu \in \mathrm{Prob}(A^\Gamma) : d(\nu,\mu) < \delta\}.$$

La entropía sófica de medida de un subshift (X,μ) con respecto a una secuencia de aproximaciones sóficas Σ está dada por:

$$h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X, \mu) = \inf_{\delta>0} \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{|V_i|} \log \left| \{w \in A^{V_i} : \mu_w \in N_\delta(\mu)\} \right|.$$

Una medida Borel invariante de probabilidad μ es de **equilibrio** para un subshift $X \subset A^\Gamma$ con respecto a Σ si maximiza la expresión

$$h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X, \mu) + \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Teorema: B., Meyerovitch, 2021

Sea Γ un grupo sófico y Σ una aproximación sófica de Γ. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ suficientemente regular. Para todo Γ-subshift con TMP tal que $h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X) \geq 0$, se cumple que toda medida μ de probabilidad, Borel, invariante y de equilibrio es una medida de Gibbs.

Teorema: B., Meyerovitch, 2021

Sea Γ un grupo sófico y Σ una aproximación sófica de Γ. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ suficientemente regular. Para todo Γ-subshift con TMP tal que $h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X) \geq 0$, se cumple que toda medida μ de probabilidad, Borel, invariante y de equilibrio es una medida de Gibbs.

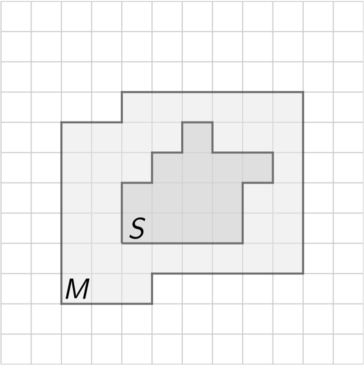
Teorema: B., Meyerovitch, 2021

Sea Γ un grupo sófico y Σ una aproximación sófica de Γ. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ suficientemente regular. Para todo Γ-subshift con TMP tal que $h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X) \geq 0$, se cumple que toda medida μ de probabilidad, Borel, invariante y de equilibrio es una medida de Gibbs.

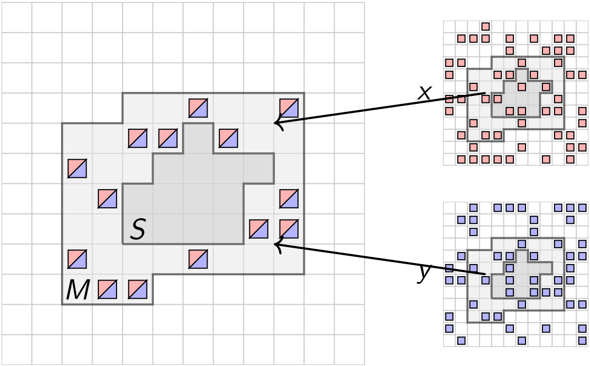
$h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X) \geq 0$ si y solamente si existe μ Borel de probabilidad e invariante tal que $h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X, \mu) \geq 0$.

Un conjunto cerrado $X \subseteq A^{\Gamma}$ satisface la **propiedad topológica de Markov (TMP)** si

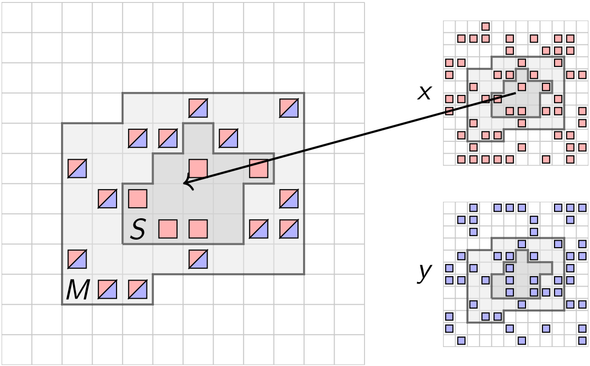
Un conjunto cerrado $X \subseteq A^{\Gamma}$ satisface la **propiedad topológica de Markov (TMP)** si para todo $S \Subset \Gamma$ existe un conjunto de **memoria** finito $M \supseteq S$



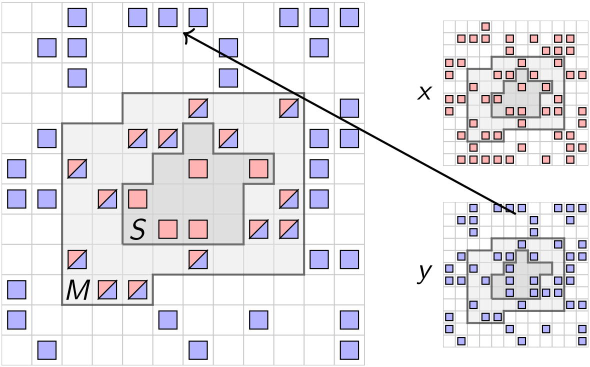
Un conjunto cerrado $X \subseteq A^{\Gamma}$ satisface la **propiedad topológica de Markov (TMP)** si para todo $S \Subset \Gamma$ existe un conjunto de **memoria** finito $M \supseteq S$ tal que cada vez que $x, y \in X$ satisfagan $x_{M \setminus S} = y_{M \setminus S}$



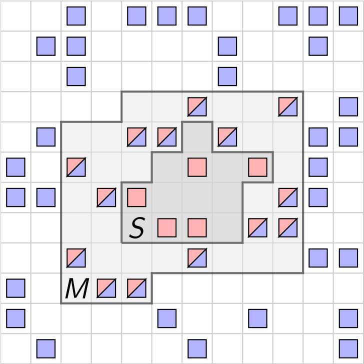
Un conjunto cerrado $X \subseteq A^{\Gamma}$ satisface la **propiedad topológica de Markov (TMP)** si para todo $S \Subset \Gamma$ existe un conjunto de **memoria** finito $M \supseteq S$ tal que cada vez que $x, y \in X$ satisfagan $x_{M \setminus S} = y_{M \setminus S}$, entonces $x|_S \vee y_{\Gamma \setminus S} \in X$.

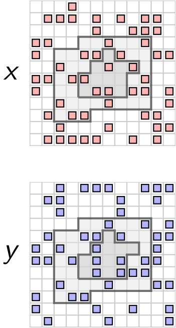


Un conjunto cerrado $X \subseteq A^{\Gamma}$ satisface la **propiedad topológica de Markov (TMP)** si para todo $S \Subset \Gamma$ existe un conjunto de **memoria** finito $M \supseteq S$ tal que cada vez que $x, y \in X$ satisfagan $x_{M \setminus S} = y_{M \setminus S}$, entonces $x|_S \vee y_{\Gamma \setminus S} \in X$.

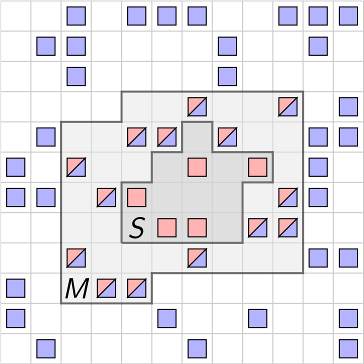


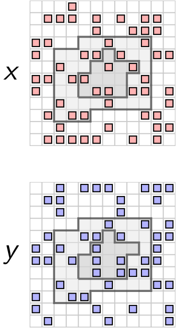
Un conjunto cerrado $X \subseteq A^{\Gamma}$ satisface la **propiedad topológica de Markov (TMP)** si para todo $S \Subset \Gamma$ existe un conjunto de **memoria** finito $M \supseteq S$ tal que cada vez que $x, y \in X$ satisfagan $x_{M \setminus S} = y_{M \setminus S}$, entonces $x|_S \vee y_{\Gamma \setminus S} \in X$.

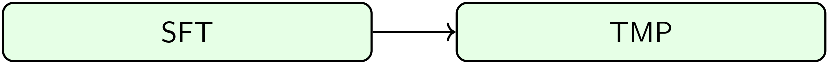




Un conjunto cerrado $X \subseteq A^{\Gamma}$ satisface la **propiedad topológica de Markov (TMP)** si para todo $S \Subset \Gamma$ existe un conjunto de **memoria** finito $M \supseteq S$ tal que cada vez que $x, y \in X$ satisfagan $x_{M \setminus S} = y_{M \setminus S}$, entonces $x|_S \vee y_{\Gamma \setminus S} \in X$.






SFT
TMP

$$\boxed{\text{SFT}} \longrightarrow \boxed{\text{TMP}}$$

Dos patrones $p, q \in A^F$ son intercambiables en un subshift $X \Subset A^\Gamma$ si para todo $x \in X$

$$x|_{\Gamma \setminus F} \vee p \in X \text{ si y solamente si } x|_{\Gamma \setminus F} \vee q.$$

$$\boxed{\text{SFT}} \longrightarrow \boxed{\text{TMP}}$$

Dos patrones $p, q \in A^F$ son intercambiables en un subshift $X \Subset A^\Gamma$ si para todo $x \in X$

$$x|_{\Gamma \setminus F} \vee p \in X \text{ si y solamente si } x|_{\Gamma \setminus F} \vee q.$$

Observación: Si X tiene TMP y $M \supset F$ es conjunto de memoria para $F \Subset \Gamma$, entonces para todo x, y tales que $x|_{\Gamma \setminus F} = y|_{\Gamma \setminus F}$ se tiene que $x|_M, y|_M$ son intercambiables.

Denotamos $\mathcal{T}(X)$ la relación de equivalencia de pares asintóticos.

Denotamos $\mathcal{T}(X)$ la relación de equivalencia de pares asintóticos.

Denotamos $\mathcal{T}^0(X)$ la subrelación de equivalencia de pares asintóticos generada por patrones intercambiables. La denominaremos la **relación asintótica étale**

Denotamos $\mathcal{T}(X)$ la relación de equivalencia de pares asintóticos.

Denotamos $\mathcal{T}^0(X)$ la subrelación de equivalencia de pares asintóticos generada por patrones intercambiables. La denominaremos la **relación asintótica étale**

Teorema

$\mathcal{T}(X) = \mathcal{T}^0(X)$ si y solamente si X tiene TMP.

Una medida Borel de probabilidad μ en un subshift X se dice **medida de Gibbs** con respecto a $f\colon X \to \mathbb{R}$ si para todo $F \Subset \Gamma$ y $p \in A^F$ se tiene que $\mu -$ ctp

$$\mathbb{E}_{\mu}(1_{[p]} \mid \sigma(A^{\Gamma \setminus F}))(x) = \begin{cases} \frac{\exp(\Psi_f(x, p \vee x|_{\Gamma\setminus F}))}{\sum_{q \in L_F(X)} \exp(\Psi_f(x, q \vee x|_{\Gamma \setminus F}))} & \text{si } p \in L_F(x) \\ 0 & \text{si } p \notin L_F(x) \end{cases}.$$

Una medida Borel de probabilidad μ en un subshift X se dice **medida de Gibbs** con respecto a $f\colon X \to \mathbb{R}$ si para todo $F \Subset \Gamma$ y $p \in A^F$ se tiene que $\mu-$ctp

$$\mathbb{E}_\mu(1_{[p]} \mid \sigma(A^{\Gamma\setminus F}))(x) = \begin{cases} \frac{\exp(\Psi_f(x, p\vee x|_{\Gamma\setminus F}))}{\sum_{q\in L_F(X)} \exp(\Psi_f(x, q\vee x|_{\Gamma\setminus F}))} & \text{si } p \in L_F(x) \\ 0 & \text{si } p \notin L_F(x) \end{cases}.$$

Para $p, q \in L_F(x)$

$$\frac{\mathbb{E}_\mu(1_{[p]} \mid \sigma(A^{\Gamma\setminus F}))(x)}{\mathbb{E}_\mu(1_{[q]} \mid \sigma(A^{\Gamma\setminus F}))(x)} = \exp(\Psi_f(p \vee x|_{\Gamma\setminus F}, q \vee x|_{\Gamma\setminus F})).$$

Notemos que el logaritmo de la expresión anterior forma un cociclo sobre $\mathcal{T}(X)$.

Supongamos que μ no es singular con respecto a una relación de equivalencia Borel contable $\mathcal{R}$.

$$\left(\text{si } \mu(A) = 0 \implies \mu\left(\bigcup_{x \in A} \{y \in X : (x, y) \in \mathcal{R}\} \right) = 0 \right).$$

Supongamos que μ no es singular con respecto a una relación de equivalencia Borel contable $\mathcal{R}$.

$$\left(\text{si } \mu(A) = 0 \implies \mu\left(\bigcup_{x \in A} \{y \in X : (x,y) \in \mathcal{R}\} \right) = 0 \right).$$

Luego existe un grupo contable G que genera $\mathcal{R}$ y función $\mathcal{D}_{\mu,\mathcal{R}} \colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que para todo $\phi \in G$,

$$\frac{\mathrm{d}\mu \circ \phi}{\mathrm{d}\mu}(x) = \mathcal{D}_{\mu,\mathcal{R}}(x, \phi(x)) \ \mu - \text{cs.}$$

Supongamos que μ no es singular con respecto a una relación de equivalencia Borel contable $\mathcal{R}$.

$$\left(\text{si } \mu(A) = 0 \implies \mu\left(\bigcup_{x\in A}\{y \in X : (x,y) \in \mathcal{R}\}\right) = 0\right).$$

Luego existe un grupo contable G que genera $\mathcal{R}$ y función $\mathcal{D}_{\mu,\mathcal{R}} \colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que para todo $\phi \in G$,

$$\frac{\mathrm{d}\mu \circ \phi}{\mathrm{d}\mu}(x) = \mathcal{D}_{\mu,\mathcal{R}}(x,\phi(x)) \ \mu - \text{cs}.$$

Sea $f \colon X \to \mathbb{R}$ tal que Ψ_f está bien definido. Una medida Borel de probabilidad μ en un subshift X se dice:

1. **medida de Gibbs** con respecto a f si no es singular con respecto a $\mathcal{T}(X)$ y además $\mathcal{D}_{\mu,\mathcal{T}(X)} = \exp(\Psi_f)$ μ-cs.
2. **medida de Gibbs étale** con respecto a f si no es singular con respecto a $\mathcal{T}^0(X)$ y además $\mathcal{D}_{\mu,\mathcal{T}^0(X)} = \exp(\Psi_f)$ μ-cs.

Si X es un subshift con TMP, entonces

$$\text{Gibbs} = \text{étale Gibbs}.$$

Si X es un subshift con TMP, entonces

$$\text{Gibbs} = \text{étale Gibbs}.$$

Teorema: B., Meyerovitch, 2021

Sea Γ un grupo sófico y Σ una aproximación sófica de Γ. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ suficientemente regular. Para todo Γ-subshift ~~**con TMP**~~ tal que $h_\Sigma(\Gamma \curvearrowright X) \geq 0$, se cumple que toda medida μ de probabilidad, Borel, invariante y de equilibrio es una medida **étale** Gibbs.

Ejemplo: Consideremos el subshift del huevo frito

$$X_{\leq 1} = \{x \in \{0,1\}^{\Gamma} : |x^{-1}(1)| \leq 1\}.$$

Ejemplo: Consideremos el subshift del huevo frito

$$X_{\leq 1} = \{x \in \{0,1\}^{\Gamma} : |x^{-1}(1)| \leq 1\}.$$

$X_{\leq 1}$ admite como única medida invariante la delta δ_0 de Dirac en 0^{Γ}, y es de equilibrio en cualquier grupo sófico y aproximación Σ (con entropía 0).

Ejemplo: Consideremos el subshift del huevo frito

$$X_{\leq 1} = \{x \in \{0,1\}^{\Gamma} : |x^{-1}(1)| \leq 1\}.$$

$X_{\leq 1}$ admite como única medida invariante la delta δ_0 de Dirac en 0^{Γ}, y es de equilibrio en cualquier grupo sófico y aproximación Σ (con entropía 0).

- δ_0 no es Gibbs para ninguna función f, pues es singular con respecto a $\mathcal{T}(X_{\leq 1}) = X_{\leq 1} \times X_{\leq 1}$.

Ejemplo: Consideremos el subshift del huevo frito

$$X_{\leq 1} = \{x \in \{0,1\}^{\Gamma} : |x^{-1}(1)| \leq 1\}.$$

$X_{\leq 1}$ admite como única medida invariante la delta δ_0 de Dirac en 0^{Γ}, y es de equilibrio en cualquier grupo sófico y aproximación Σ (con entropía 0).

- δ_0 no es Gibbs para ninguna función f, pues es singular con respecto a $\mathcal{T}(X_{\leq 1}) = X_{\leq 1} \times X_{\leq 1}$.
- δ_0 es étale Gibbs puesto que $\mathcal{T}^0(X_{\leq 1}) = \{(x,x) : x \in X_{\leq 1}\}$.

Esquema de la prueba

Esquema de la prueba

1. Primero se asume que f es una función local.

Esquema de la prueba

1. Primero se asume que f es una función local.
2. Dados dos patrones intercambiables que no se solapan, el máximo de la presión de medida se alcanza cuando la proporción de ambos patrones es exactamente la Gibbsiana.

Esquema de la prueba

1. Primero se asume que f es una función local.
2. Dados dos patrones intercambiables que no se solapan, el máximo de la presión de medida se alcanza cuando la proporción de ambos patrones es exactamente la Gibbsiana.
3. Se toma un producto directo con un full-shift para forzar las condiciones de no solaparse y se separa la medida para obtener el resultado para funciones locales.

Esquema de la prueba

1. Primero se asume que f es una función local.
2. Dados dos patrones intercambiables que no se solapan, el máximo de la presión de medida se alcanza cuando la proporción de ambos patrones es exactamente la Gibbsiana.
3. Se toma un producto directo con un full-shift para forzar las condiciones de no solaparse y se separa la medida para obtener el resultado para funciones locales.
4. Finalmente, se usan argumentos de análisis convexo/funcional para extender el resultado a espacios de funciones adecuados.

Esquema de la prueba

1. Primero se asume que f es una función local.
2. Dados dos patrones intercambiables que no se solapan, el máximo de la presión de medida se alcanza cuando la proporción de ambos patrones es exactamente la Gibbsiana.
3. Se toma un producto directo con un full-shift para forzar las condiciones de no solaparse y se separa la medida para obtener el resultado para funciones locales.
4. Finalmente, se usan argumentos de análisis convexo/funcional para extender el resultado a espacios de funciones adecuados.

Un espacio vectorial topológico $V \subset C(X)$ es **LR-bueno** si

- Las funciones locales son densas.
- La norma uniforme es continua en V.
- $f \mapsto \Psi_f$ define una función continua entre V y los cociclos $\mathcal{T}^0(X)$ continuos.

Espacios LR-buenos

Una función $\Phi\colon L(X) \to \mathbb{R}$ invariante bajo translaciones se llama una **interacción**, decimos que es **absolutamente sumable** si

$$\sum_{1_G \in F \Subset \Gamma} \sup_{p \in L_F(X)} |\Phi(p)| < \infty.$$

Sea $f_\phi\colon X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_\Phi(x) = \sum_{1_G \in F \Subset \Gamma} \frac{1}{|F|} \Phi(x|_F).$$

Consideremos el espacio de funciones

$$\mathtt{NS}(X) = \{ f_\Phi : \Phi \text{ es una interacción absolutamente sumable } \}.$$

Espacios LR-buenos

Una función $\Phi\colon L(X) \to \mathbb{R}$ invariante bajo translaciones se llama una **interacción**, decimos que es **absolutamente sumable** si

$$\sum_{1_G \in F \Subset \Gamma} \sup_{p \in L_F(X)} |\Phi(p)| < \infty.$$

Sea $f_\phi\colon X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_\Phi(x) = \sum_{1_G \in F \Subset \Gamma} \frac{1}{|F|} \Phi(x|_F).$$

Consideremos el espacio de funciones

$$\mathtt{NS}(X) = \{f_\Phi : \Phi \text{ es una interacción absolutamente sumable } \}.$$

El espacio $\mathtt{NS}(X)$ es LR-bueno y por lo tanto sus funciones satisfacen el teorema de Lanford Ruelle.

Espacios LR-buenos

Sea $\mathbb{F} = (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de subconjuntos finitos de Γ tal que $F_n \nearrow \Gamma$. Dada $f : X \to \mathbb{R}$ y $S \Subset \Gamma$

$$\mathrm{Var}_S(f) = \sup\{|f(x) = f(y)| : x, y \in X, x|_S = y|_S\}.$$

Espacios LR-buenos

Sea $\mathbb{F} = (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de subconjuntos finitos de Γ tal que $F_n \nearrow \Gamma$. Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ y $S \Subset \Gamma$

$$\mathrm{Var}_S(f) = \sup\{|f(x) = f(y)| : x, y \in X, x|_S = y|_S\}.$$

Sea

$$[\![f]\!]_{\mathtt{SV}(\mathbb{F}),S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |F_{n+1}S \setminus F_nS| \,\mathrm{Var}_{F_n}(f).$$

Espacios LR-buenos

Sea $\mathbb{F} = (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de subconjuntos finitos de Γ tal que $F_n \nearrow \Gamma$. Dada $f : X \to \mathbb{R}$ y $S \Subset \Gamma$

$$\mathrm{Var}_S(f) = \sup\{|f(x) = f(y)| : x, y \in X, x|_S = y|_S\}.$$

Sea

$$[\![f]\!]_{\mathtt{SV}(\mathbb{F}),S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |F_{n+1}S \setminus F_nS| \, \mathrm{Var}_{F_n}(f).$$

Decimos que una función tiene **variación $\mathbb{F}$-sumable** si $[\![f]\!]_{\mathtt{SV}(\mathbb{F}),S} < \infty$ para todo $S \Subset \Gamma$.

Espacios LR-buenos

Sea $\mathbb{F} = (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de subconjuntos finitos de Γ tal que $F_n \nearrow \Gamma$. Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ y $S \Subset \Gamma$

$$\mathrm{Var}_S(f) = \sup\{|f(x) = f(y)| : x, y \in X, x|_S = y|_S\}.$$

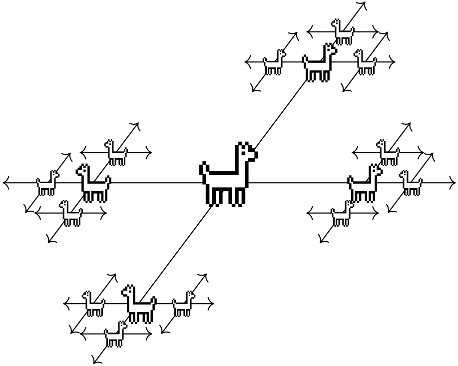
Sea

$$[\![f]\!]_{\mathtt{SV}(\mathbb{F}),S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |F_{n+1}S \setminus F_nS| \,\mathrm{Var}_{F_n}(f).$$

Decimos que una función tiene **variación $\mathbb{F}$-sumable** si $[\![f]\!]_{\mathtt{SV}(\mathbb{F}),S} < \infty$ para todo $S \Subset \Gamma$.

Para toda $\mathbb{F}$, el espacio $\mathtt{SV}(\mathbb{F})$ de funciones con variación $\mathbb{F}$-sumable es LR-bueno y por lo tanto sus funciones satisfacen el teorema de Lanford Ruelle.

¡Muchas gracias por su atención!



The Lanford–Ruelle theorem for actions of sofic groups
S. Barbieri, T. Meyerovitch
https://arxiv.org/abs/2112.02334