Como decorar una cocina con matemáticas

Sebastián **Barbieri Lemp**
Universidad de Santiago de Chile

Fundapromat

Abril, 2024

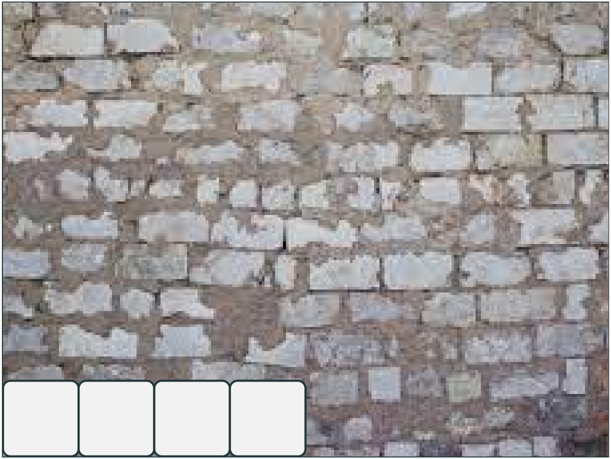
Consideremos una pared rectangular fea en una cocina

Consideremos una pared rectangular fea en una cocina

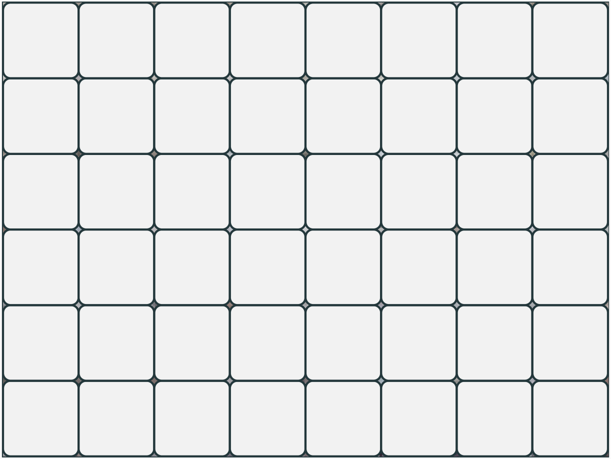
Consideremos una pared rectangular fea en una cocina

Consideremos una pared rectangular fea en una cocina

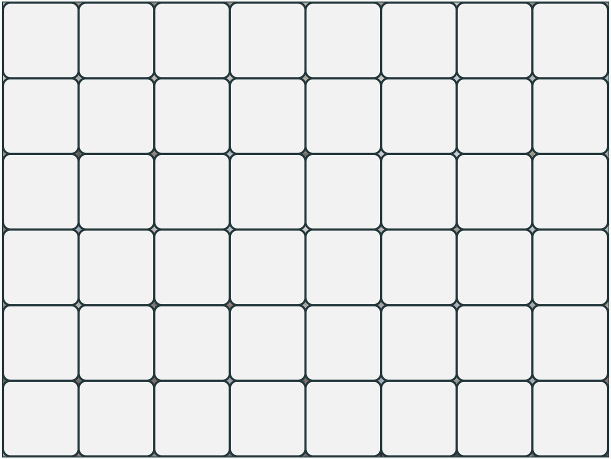
Consideremos una pared rectangular fea en una cocina



Consideremos una pared rectangular fea en una cocina

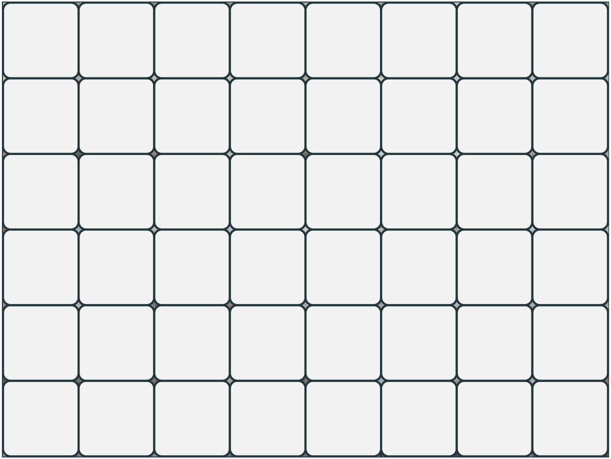


Consideremos una pared rectangular fea en una cocina



¡La cubrimos con baldosas!

Consideremos una pared rectangular fea en una cocina



¡La cubrimos con baldosas!

(y queda más bonita)

¡Vamos a considerar baldosas más interesantes!

Baldosas de Wang

¡Vamos a considerar baldosas más interesantes!

Baldosas de Wang

1. Cada baldosa tiene cuatro lados coloreados.

¡Vamos a considerar baldosas más interesantes!

Baldosas de Wang

1. Cada baldosa tiene cuatro lados coloreados.
2. Dispongo de ilimitadas baldosas de cada tipo.

¡Vamos a considerar baldosas más interesantes!

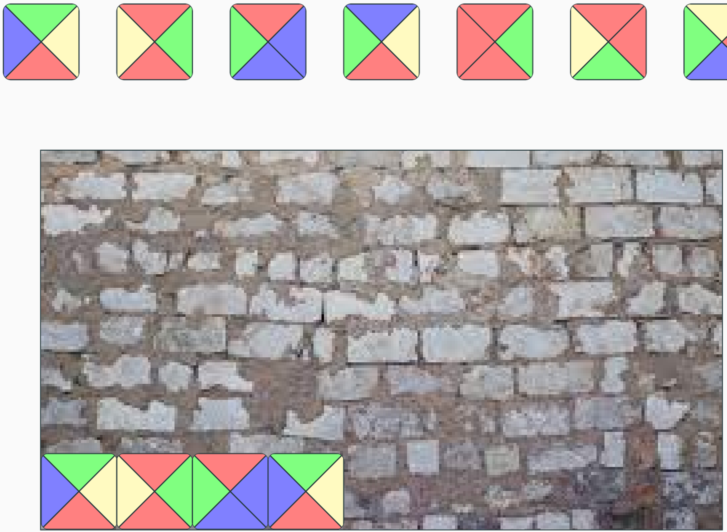
Baldosas de Wang

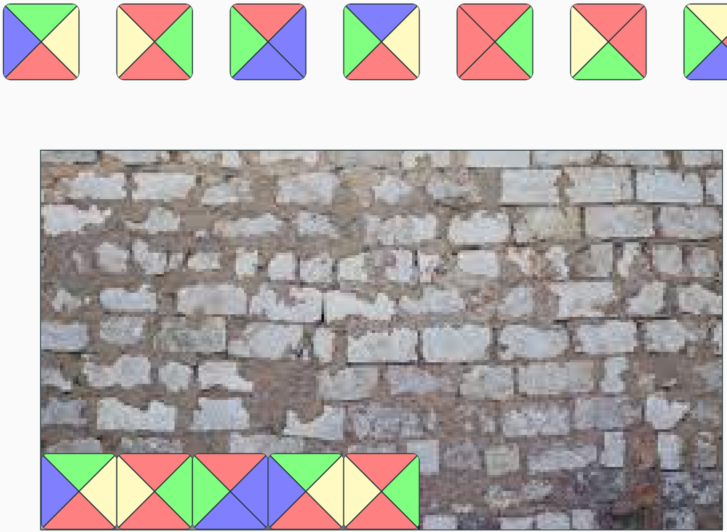
1. Cada baldosa tiene cuatro lados coloreados.
2. Dispongo de ilimitadas baldosas de cada tipo.
3. Solo puedo poner dos baldosas adyacentes si comparten el mismo color en ese lado.

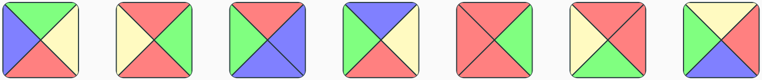
¡Vamos a considerar baldosas más interesantes!

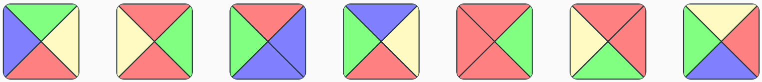
Baldosas de Wang

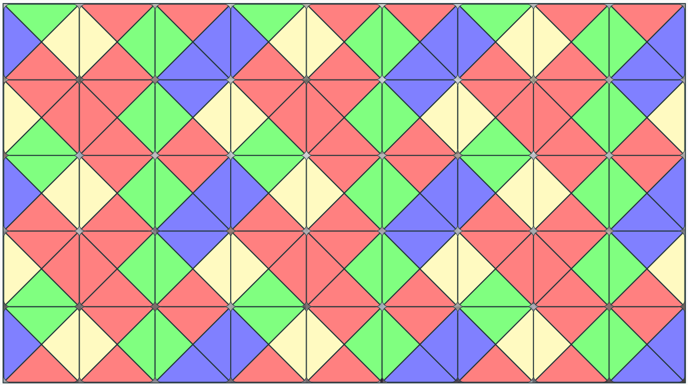
1. Cada baldosa tiene cuatro lados coloreados.
2. Dispongo de ilimitadas baldosas de cada tipo.
3. Solo puedo poner dos baldosas adyacentes si comparten el mismo color en ese lado.
4. No se permite rotar las baldosas.

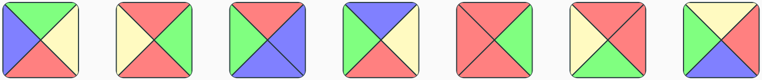


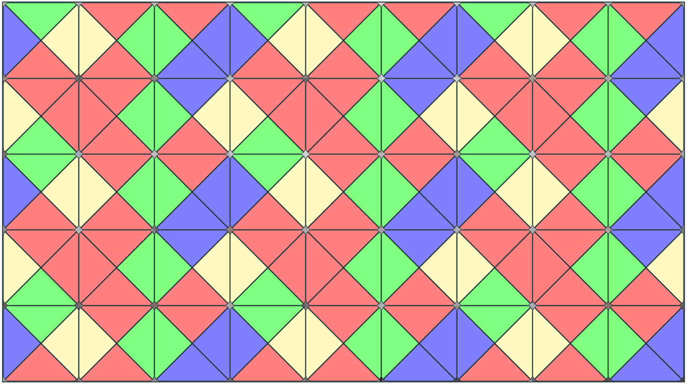












¡Quedó mucho más interesante!

Observación #1

No se puede partir con cualquier baldosa

Observación #1

No se puede partir con cualquier baldosa

Observación #1

No se puede partir con cualquier baldosa

Observación #1

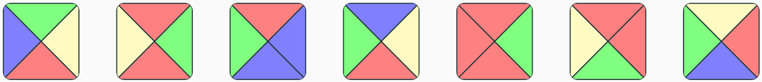
No se puede partir con cualquier baldosa

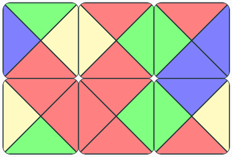
Observación #1

No se puede partir con cualquier baldosa

Observación #2

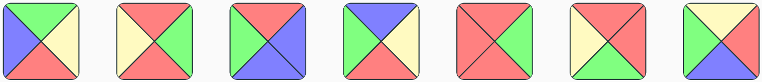
Si se puede armar un rectángulo con lados opuestos coloreados del mismo modo, se puede embaldosar cualquier cocina, independiente de su tamaño.

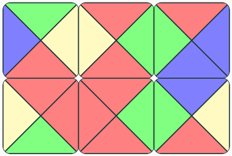




Observación #2

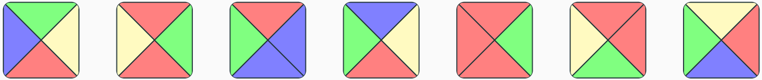
Si se puede armar un rectángulo con lados opuestos coloreados del mismo modo, se puede embaldosar cualquier cocina, independiente de su tamaño.

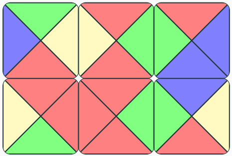


$\Rightarrow$  $\Leftarrow$

Observación #2

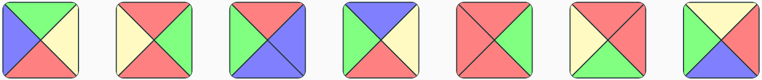
Si se puede armar un rectángulo con lados opuestos coloreados del mismo modo, se puede embaldosar cualquier cocina, independiente de su tamaño.



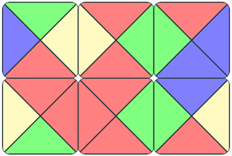
$\Rightarrow$  $\Leftarrow$

Observación #2

Si se puede armar un rectángulo con lados opuestos coloreados del mismo modo, se puede embaldosar cualquier cocina, independiente de su tamaño.



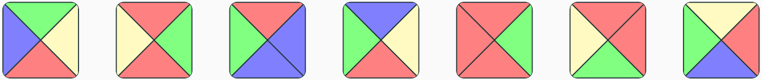
$\Downarrow$



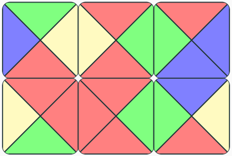
$\Uparrow$

Observación #2

Si se puede armar un rectángulo con lados opuestos coloreados del mismo modo, se puede embaldosar cualquier cocina, independiente de su tamaño.



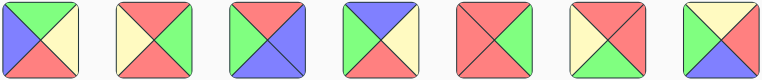
$\Downarrow$



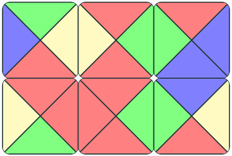
$\Uparrow$

Observación #2

Si se puede armar un rectángulo con lados opuestos coloreados del mismo modo, se puede embaldosar cualquier cocina, independiente de su tamaño.



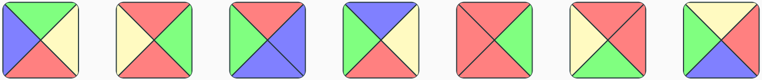
$\Downarrow$

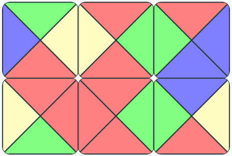


$\Uparrow$

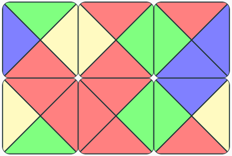
Observación #2

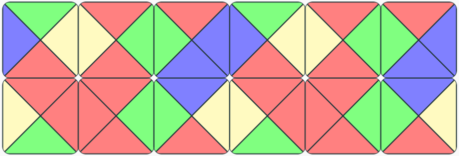
Si se puede armar un rectángulo con lados opuestos coloreados del mismo modo, se puede embaldosar cualquier cocina, independiente de su tamaño.

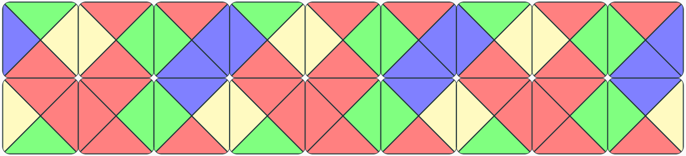


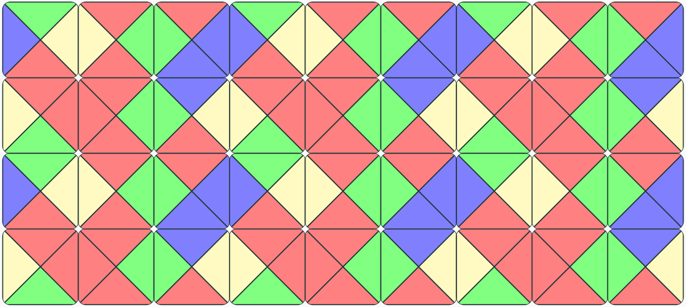


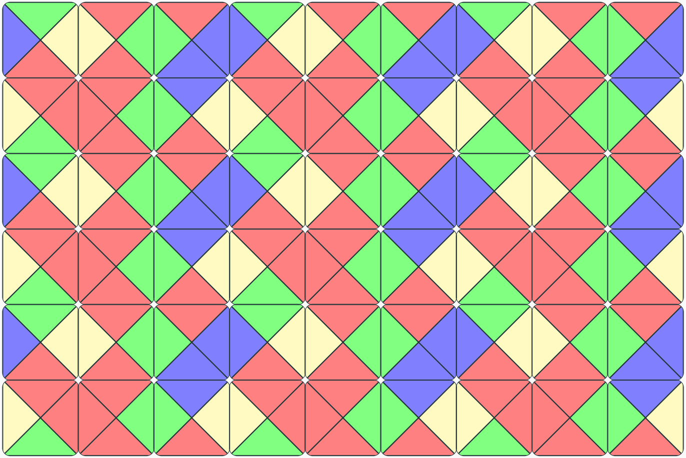
Rectángulo **periódico**











El problema del dominó

Dado un conjunto de baldosas de Wang determinado

¿es posible embaldosar cocinas arbitrariamente grandes?

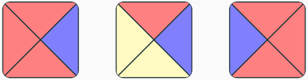
El problema del dominó

Dado un conjunto de baldosas de Wang determinado

¿es posible embaldosar cocinas arbitrariamente grandes?

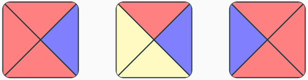
En este caso, ¡la respuesta es **sí**!

Ejercicio 1



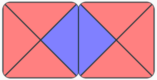
¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

Ejercicio 1



¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

SÍ



Se puede usar para embaldosar de manera periódica.

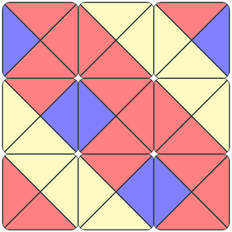
Ejercicio 2

¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

Ejercicio 2

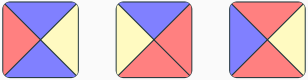
¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

SÍ



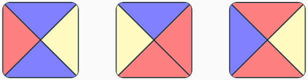
Se puede usar para embaldosar de manera periódica.

Ejercicio 3

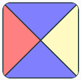


¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

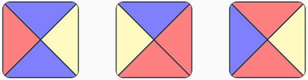
Ejercicio 3



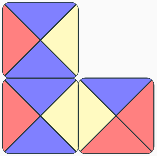
¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?



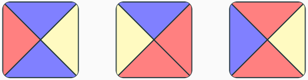
Ejercicio 3



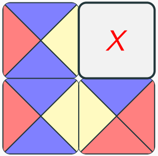
¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?



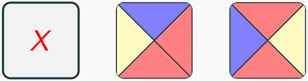
Ejercicio 3



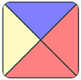
¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?



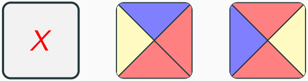
Ejercicio 3



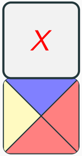
¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?



Ejercicio 3

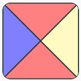


¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?



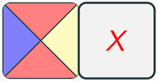
Ejercicio 3

¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?



Ejercicio 3

¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

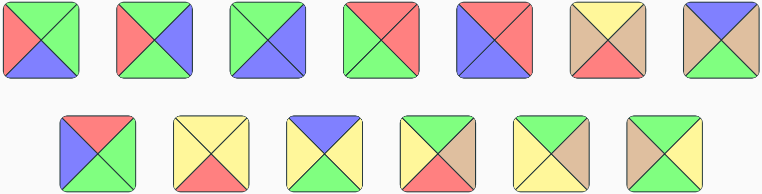


Ejercicio 3

¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

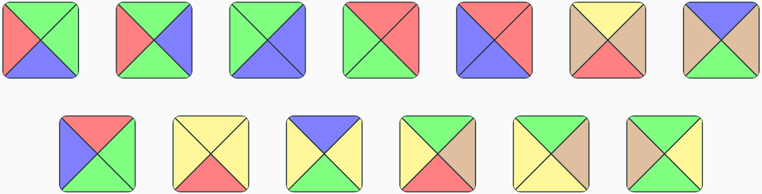
No

Ejercicio 4



¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

Ejercicio 4



¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

¿Existe alguna “receta de cocina” que permita determinar si un conjunto de baldosas puede embaldosar cocinas tan grandes como uno quiera?

¿Existe alguna "receta de cocina" que permita determinar si un conjunto de baldosas puede embaldosar cocinas tan grandes como uno quiera?

Ejemplo de receta (que no funciona):

1. Contamos cuantas veces aparece cada color
2. Calculamos la suma de los valores anteriores.
3. Dividimos el resultado por 4
   - Si da par, respondemos que sí embaldosa.
   - Si da impar, respondemos que no embaldosa.

¿Existe alguna "receta de cocina" que permita determinar si un conjunto de baldosas puede embaldosar cocinas tan grandes como uno quiera?

Ejemplo de receta (que no funciona):

1. Contamos cuantas veces aparece cada color
2. Calculamos la suma de los valores anteriores.
3. Dividimos el resultado por 4
    - Si da par, respondemos que sí embaldosa.
    - Si da impar, respondemos que no embaldosa.

En matemáticas, la noción de "receta de cocina" se conoce como **algoritmo**.

La pregunta de Wang

¿Existe algun **algoritmo** que permita determinar si un conjunto de baldosas puede embaldosar cocinas tan grandes como uno quiera?

La pregunta de Wang

¿Existe algun **algoritmo** que permita determinar si un conjunto de baldosas puede embaldosar cocinas tan grandes como uno quiera?

Observación [Wang]: Supongamos que cada vez que existe un embaldosado arbitrariamente grande, entonces existe un rectángulo periódico. Entonces existiría un algoritmo que hace lo pedido:

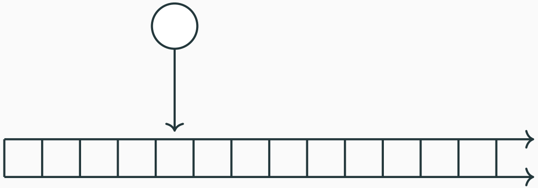
La pregunta de Wang

¿Existe algun **algoritmo** que permita determinar si un conjunto de baldosas puede embaldosar cocinas tan grandes como uno quiera?

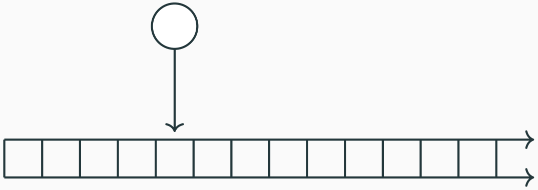
Observación [Wang]: Supongamos que cada vez que existe un embaldosado arbitrariamente grande, entonces existe un rectángulo periódico. Entonces existiría un algoritmo que hace lo pedido:

1. Declaro $n = 1$
2. Calculo todos los embaldosados de tamaño $n \times n$.
   - Si no hay ninguno, respondo **No**.
   - Si alguno contiene un rectángulo periódico, respondo **Sí**.
3. Si no se ha respondido, incrementamos el valor de n en 1 y recomenzamos desde la instrucción 2.

Un modelo formal de algoritmo: **máquina de Turing**

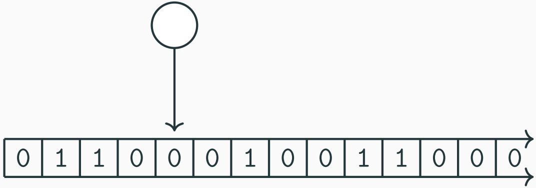


Un modelo formal de algoritmo: **máquina de Turing**



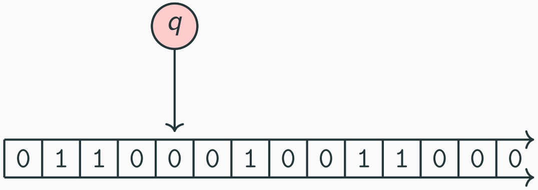
- Una cinta infinita y un cabezal sobre una posición.

Un modelo formal de algoritmo: **máquina de Turing**



- Una cinta infinita y un cabezal sobre una posición.
- Un alfabeto de **símbolos** que van en la cinta.

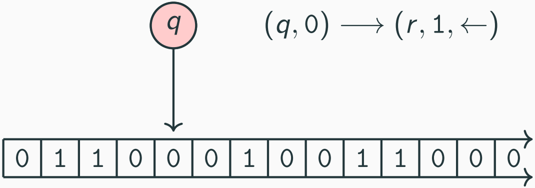
Un modelo formal de algoritmo: **máquina de Turing**



- Una cinta infinita y un cabezal sobre una posición.
- Un alfabeto de **símbolos** que van en la cinta.
- Un alfabeto de **estados** en los que puede estar el cabezal.

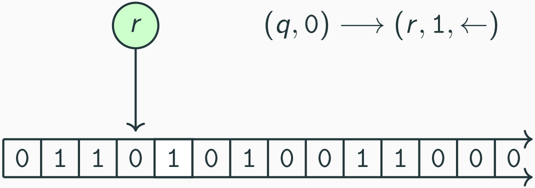
Un modelo formal de algoritmo: **máquina de Turing**

$$(q, 0) \longrightarrow (r, 1, \leftarrow)$$



- Una cinta infinita y un cabezal sobre una posición.
- Un alfabeto de **símbolos** que van en la cinta.
- Un alfabeto de **estados** en los que puede estar el cabezal.
- Un conjunto finito de **reglas de transición**

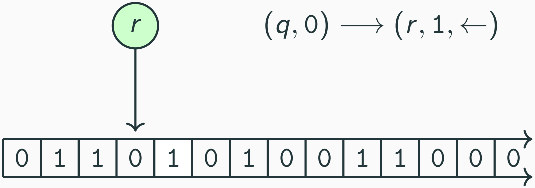
Un modelo formal de algoritmo: **máquina de Turing**



$$(q, 0) \longrightarrow (r, 1, \leftarrow)$$

- Una cinta infinita y un cabezal sobre una posición.
- Un alfabeto de **símbolos** que van en la cinta.
- Un alfabeto de **estados** en los que puede estar el cabezal.
- Un conjunto finito de **reglas de transición**

Un modelo formal de algoritmo: **máquina de Turing**



$$(q, 0) \longrightarrow (r, 1, \leftarrow)$$

- Una cinta infinita y un cabezal sobre una posición.
- Un alfabeto de **símbolos** que van en la cinta.
- Un alfabeto de **estados** en los que puede estar el cabezal.
- Un conjunto finito de **reglas de transición**
- Un estado inicial q_0 y un estado final q_F.

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(q_0, 0) = (r, 1, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(q_0, 0) = (r, 1, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(r, 1) = (s, 1, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(r, 1) = (s, 1, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(s, 1) = (r, 0, \leftarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\sqcup$	$(s, \sqcup, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(s, 1) = (r, 0, \leftarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(r, 1) = (s, 1, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(r, 1) = (s, 1, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(s, 0) = (s, 0, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(s, 0) = (s, 0, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

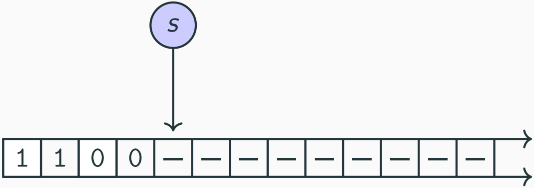
Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

$$\delta(s, 0) = (s, 0, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

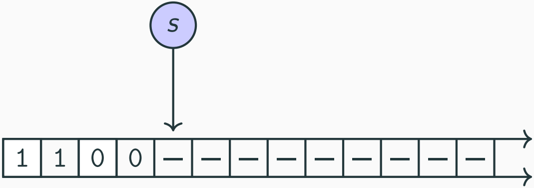


$$\delta(s, 0) = (s, 0, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

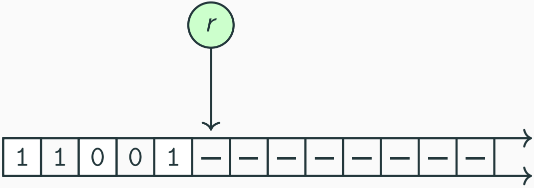


$$\delta(s, \_) = (r, 1, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

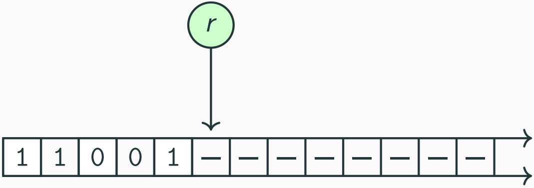


$$\delta(s, \_) = (r, 1, \rightarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

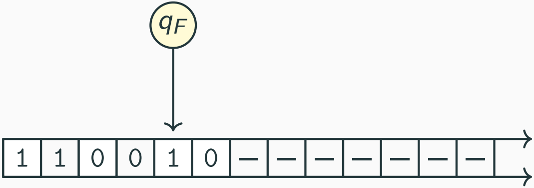


$$\delta(r, \_) = (q_F, 0, \leftarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

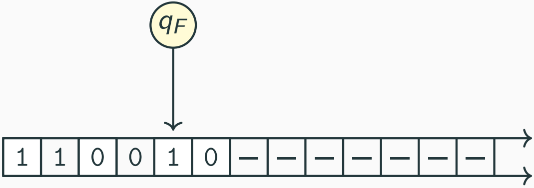


$$\delta(r, \_) = (q_F, 0, \leftarrow)$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Cálculo de una máquina de Turing M

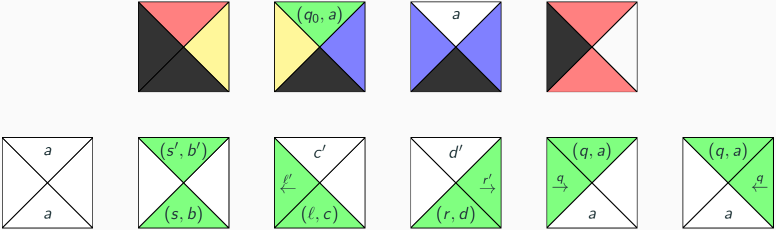
Considere una palabra en el alfabeto, por ej. $w = 0110$.

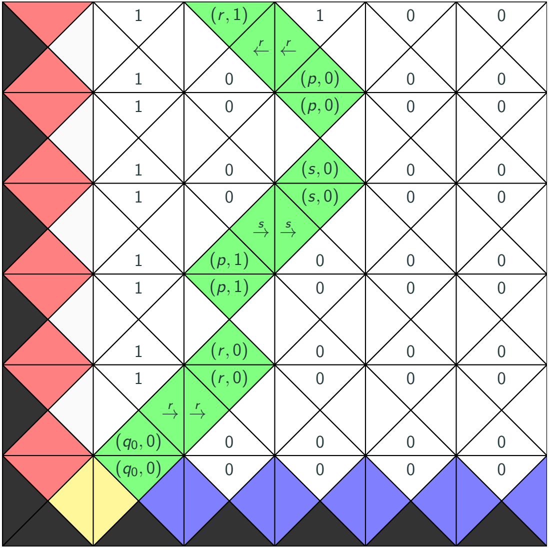


$$M(0110) = 110010.$$

δ	q_0	r	s	q_F
0	$(r, 1, \rightarrow)$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$(s, 0, \rightarrow)$	-
1	$(s, 1, \leftarrow)$	$(s, 1, \rightarrow)$	$(r, 0, \leftarrow)$	-
$\_$	$(s, \_, \rightarrow)$	$(q_F, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \rightarrow)$	-

Un algoritmo se puede representar mediante baldosas!





$$(p, 0) \longrightarrow (r, 1, -1)$$

$$(s, 0) \longrightarrow (p, 0, 0)$$

$$(p, 1) \longrightarrow (s, 0, +1)$$

$$(r, 0) \longrightarrow (p, 1, 0)$$

$$(q_0, 0) \longrightarrow (r, 1, +1)$$

El embaldosado representa un diagrama espacio-tiempo de la máquina de Turing

Observaciones

1. Toda máquina de Turing (MT) puede representarse por baldosas.

[1] Partiendo con una baldosa fija en el origen.

Observaciones

1. Toda máquina de Turing (MT) puede representarse por baldosas.
2. Si quito las baldosas donde aparece q_F, entonces los únicos cálculos que representados son los que no se detienen.

[1] Partiendo con una baldosa fija en el origen.

Observaciones

1. Toda máquina de Turing (MT) puede representarse por baldosas.
2. Si quito las baldosas donde aparece q_F, entonces los únicos cálculos que representados son los que no se detienen.
3. Se puede embaldosar una cocina arbitrariamente grande[1] con baldosas de una MT si y solamente si la MT no se detiene.

[1] Partiendo con una baldosa fija en el origen.

Observaciones

1. Toda máquina de Turing (MT) puede representarse por baldosas.
2. Si quito las baldosas donde aparece q_F, entonces los únicos cálculos que representados son los que no se detienen.
3. Se puede embaldosar una cocina arbitrariamente grande[1] con baldosas de una MT si y solamente si la MT no se detiene.

Si existiese un algoritmo que determina si un conjunto de baldosas[1] cubre cocinas arbitrariamente grandes, entonces existiría un algoritmo que decide si una máquina de Turing se detiene.

[1] Partiendo con una baldosa fija en el origen.

Teorema [Turing 37'] No existe un algoritmo que determina si una máquina de Turing se detiene en la palabra vacía.

Teorema [Turing 37'] No existe un algoritmo que determina si una máquina de Turing se detiene en la palabra vacía.

Teorema [Berger 66'] No existe un algoritmo que determina si un conjunto de baldosas puede cubrir cocinas arbitrariamente grandes.

El problema de dominó es **indecidible**.

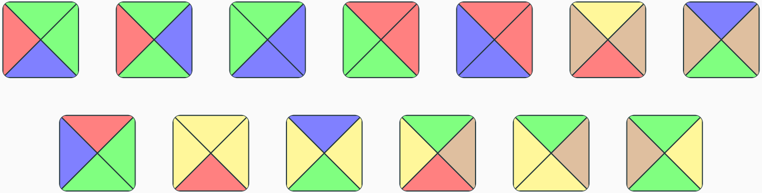
Teorema [Turing 37'] No existe un algoritmo que determina si una máquina de Turing se detiene en la palabra vacía.

Teorema [Berger 66'] No existe un algoritmo que determina si un conjunto de baldosas puede cubrir cocinas arbitrariamente grandes.

El problema de dominó es **indecidible**.

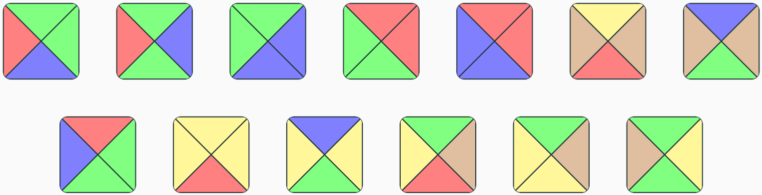
Corolario: Existen conjuntos de baldosas que cubren el plano, pero no lo hacen periodicamente.

Ejercicio 4



¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

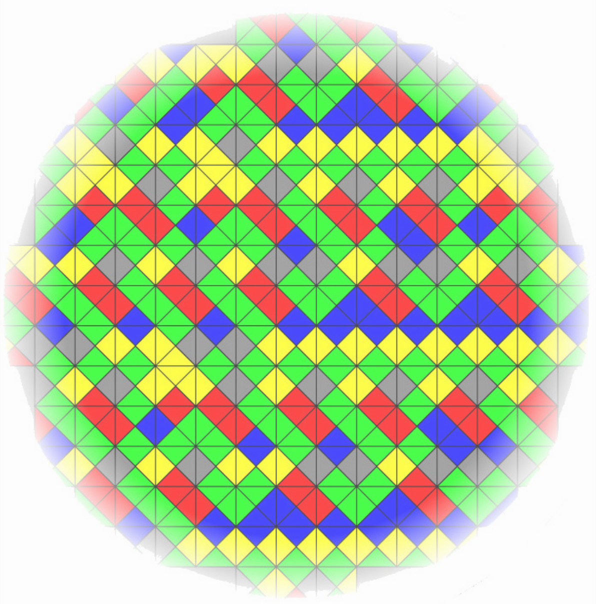
Ejercicio 4



¿puedo embaldosar una cocina arbitrariamente grande?

Este es un embaldosado famoso de Kari (del año 1996).

Efectivamente cubre cocinas arbitrariamente grandes, pero no lo puede hacer de manera periódica.



¿Cuales embaldosados aperiódicos se conocen hoy?

1. Berger (1966) $\longrightarrow$ 20426 baldosas.

[2] Originalmente 14, Culik se dio cuenta que una de ellas era innecesaria.

¿Cuales embaldosados aperiódicos se conocen hoy?

1. Berger (1966) $\longrightarrow$ 20426 baldosas.
2. Berger (no publicado) $\longrightarrow$ 104 baldosas.

[2] Originalmente 14, Culik se dio cuenta que una de ellas era innecesaria.

¿Cuales embaldosados aperiódicos se conocen hoy?

1. Berger (1966) $\longrightarrow$ 20426 baldosas.
2. Berger (no publicado) $\longrightarrow$ 104 baldosas.
3. Robinson (1972) $\longrightarrow$ 56 baldosas.

[2] Originalmente 14, Culik se dio cuenta que una de ellas era innecesaria.

¿Cuales embaldosados aperiódicos se conocen hoy?

1. Berger (1966) $\longrightarrow$ 20426 baldosas.
2. Berger (no publicado) $\longrightarrow$ 104 baldosas.
3. Robinson (1972) $\longrightarrow$ 56 baldosas.
4. Kari (1996) $\longrightarrow$ 13 baldosas[2].

[2] Originalmente 14, Culik se dio cuenta que una de ellas era innecesaria.

¿Cuales embaldosados aperiódicos se conocen hoy?

1. Berger (1966) $\longrightarrow$ 20426 baldosas.
2. Berger (no publicado) $\longrightarrow$ 104 baldosas.
3. Robinson (1972) $\longrightarrow$ 56 baldosas.
4. Kari (1996) $\longrightarrow$ 13 baldosas[2].
5. Jeandel-Rao (2017) $\longrightarrow$ 11 baldosas.

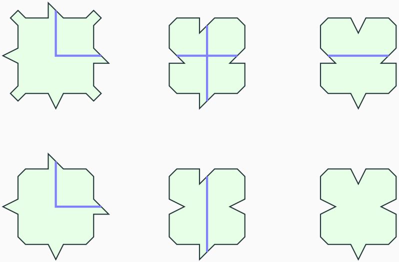
[2] Originalmente 14, Culik se dio cuenta que una de ellas era innecesaria.

¿Cuales embaldosados aperiódicos se conocen hoy?

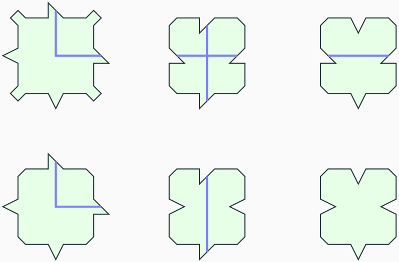
1. Berger (1966) $\longrightarrow$ 20426 baldosas.
2. Berger (no publicado) $\longrightarrow$ 104 baldosas.
3. Robinson (1972) $\longrightarrow$ 56 baldosas.
4. Kari (1996) $\longrightarrow$ 13 baldosas[2].
5. Jeandel-Rao (2017) $\longrightarrow$ 11 baldosas.
6. Jeandel-Rao (2017) No existen embaldosados aperiódicos de 10 baldosas.

[2] Originalmente 14, Culik se dio cuenta que una de ellas era innecesaria.

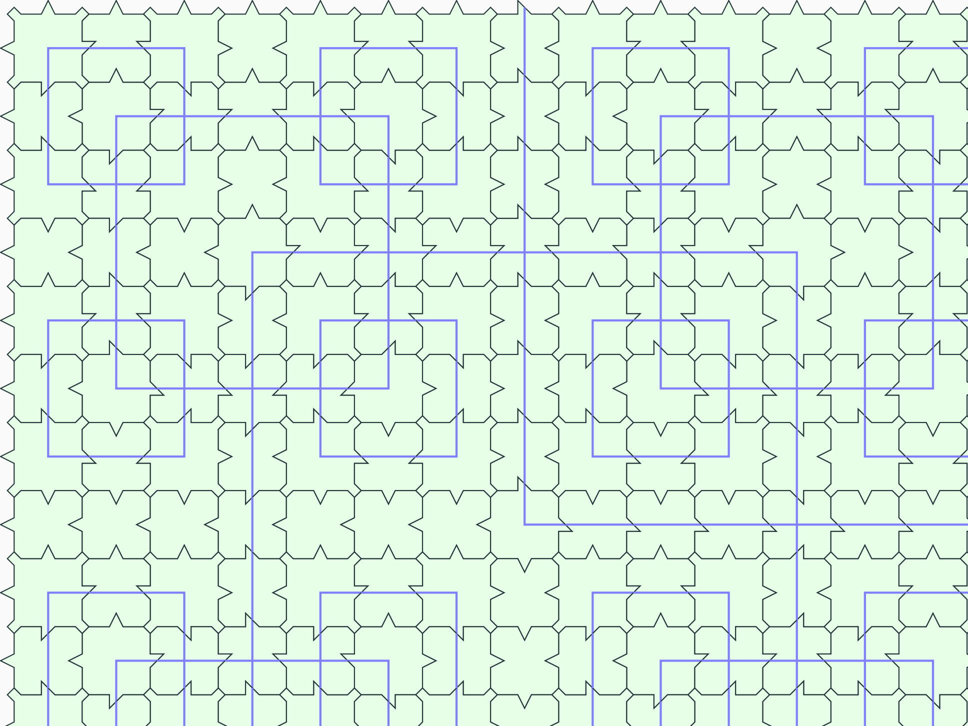
El teseado de Robinson



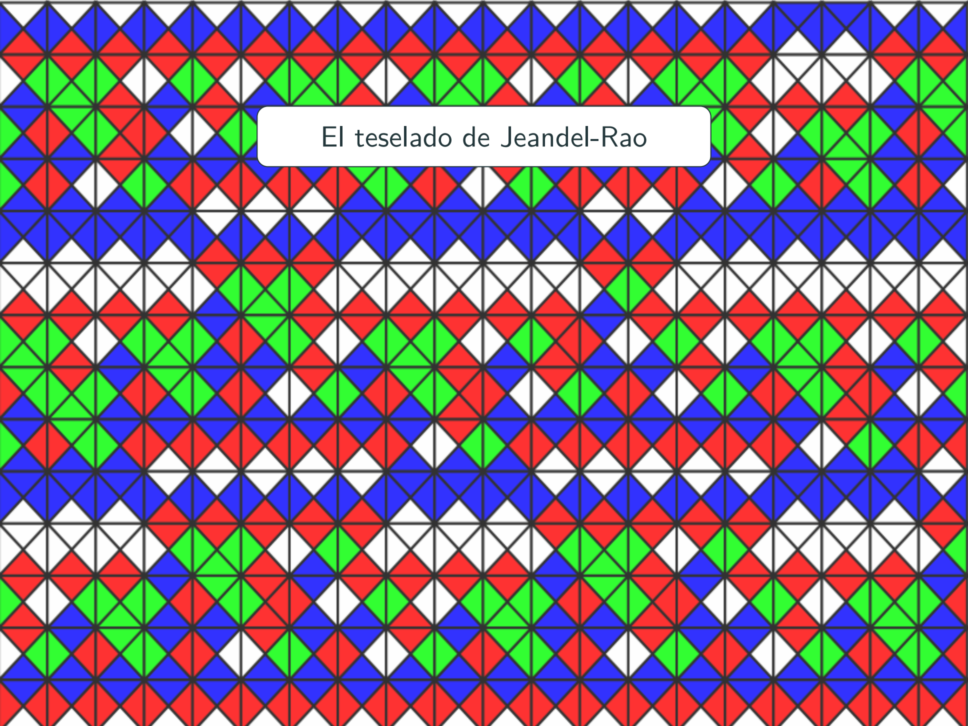
El teseado de Robinson



El alfabeto consiste en las rotaciones por múltiplos de 90 grados y reflexiones de esas baldosas



El teselado de Jeandel-Rao



¡Muchas gracias por su atención!