

# THÈSE

PRÉSENTÉE À

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Par **Alexandre Pinlou**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

---

### **Arc-coloration et sommet-coloration orientées**

---

**Soutenu le :** 27 octobre 2006

**Après avis des rapporteurs :**

Geña Hahn . . . . . Professeur

Stéphan Thomassé Professeur

**Devant la commission d'examen composée de :**

Geña Hahn . . . . . Professeur Examineur

André Raspaud . . . Professeur Président, Rapporteur

Oriol Serra Albo . Professeur Examineur

Éric Sopena . . . . . Professeur Examineur

Stéphan Thomassé Professeur Examineur



---

## Arc-coloration et sommet-coloration orientées

---

**Résumé :** Dans ce mémoire, nous nous intéressons à trois notions de colorations de graphes orientés : la sommet-coloration orientée, l'arc-coloration orientée et l'étoile-coloration orientée acircuitique.

La notion de sommet-coloration orientée a été introduite en 1994 et étudiée depuis par de nombreux auteurs. Nous apportons de nouveaux résultats concernant le *nombre chromatique orienté* de certaines familles de graphes (graphes planaires extérieurs, 2-arbres partiels et graphes planaires sans cycles de longueurs données).

Cette notion de sommet-coloration orientée peut être étendue de façon naturelle à la notion d'*arc-coloration orientée*. Nous obtenons plusieurs bornes de l'indice chromatique orienté en fonction de certains paramètres déjà étudiés. Nous bornons également l'indice chromatique orienté de certaines familles de graphes.

Différentes variantes de l'*arboricité* de graphes ont été étudiées. Nous proposons et étudions ici une nouvelle variante pour les graphes orientés : l'*étoile arboricité orientée acircuitique*. Nous considérons ce paramètre pour plusieurs familles de graphes telles que les graphes de degré borné, les 2-arbres partiels ou encore les graphes de faible densité. Pour certaines de ces familles, les bornes obtenues sont optimales.

---

**Discipline :** Informatique

---

**Mots-Clefs :**

graphe  
graphe orienté  
coloration  
coloration orientée  
homomorphisme  
graphe planaire extérieur  
graphe planaire  
2-arbre partiel

---

Université Bordeaux 1  
LaBRI  
351 cours de la Libération  
33405 Talence Cedex  
FRANCE

---



## Oriented arc-coloring and oriented vertex-coloring

---

**Abstract :** In this thesis, we are interested in three coloring notions of oriented graphs : oriented vertex-coloring, oriented arc-coloring and acircuitic directed star-coloring.

The notion of oriented vertex-coloring was introduced in 1994 and has been studied by several authors. We give new results on the *oriented chromatic number* of some graph classes such as outerplanar graphs, partial 2-trees and planar graphs without cycles of specific lengths.

This notion of oriented vertex-coloring can be extended in a natural way to the notion of *oriented arc-coloring*. We obtain some bounds on the *oriented chromatic index* in terms of some known parameters. We also bound the oriented chromatic index of some graph classes.

Several variations of graph *arboricity* have been studied. We propose and study in the thesis a new version of this notion for oriented graphs : the *acircuitic directed star arboricity*. We consider this parameter for some graphs classes such as graphs with bounded degree, partial 2-trees or sparse graphs. Moreover, some of the bounds we obtain are tight.

---

**Discipline :** Computer-Science

---

**Keywords :**

graph  
oriented graph  
coloring  
oriented coloring  
homomorphism  
outerplanar graphs  
planar graphs  
partial 2-trees

---

Université Bordeaux 1  
LaBRI  
351 cours de la Libération  
33405 Talence Cedex  
FRANCE

---



# Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier Éric Sopena, mon directeur de thèse. Il a été dans un premier temps mon responsable de DEA, et c'est à cette occasion que j'ai découvert la théorie des graphes. Par la suite, il a accepté de diriger mes travaux de thèse et j'en suis très heureux. Sa rigueur et son souci du détail m'ont beaucoup apporté au cours de ces trois années. Il a toujours été présent, malgré son emploi du temps souvent chargé, pour répondre à mes questions, guider mes recherches avec beaucoup de bienveillance et suivre l'avancement de mes travaux très régulièrement. Je lui dois beaucoup et je lui témoigne ici toute ma gratitude.

Je remercie ensuite Geňa Hahn et Stéphan Thomassé pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs lectures attentives ont permis d'améliorer la qualité et la clarté de ce manuscrit. Leurs commentaires judicieux m'ont été très profitables.

Je souhaite également remercier Oriol Serra pour avoir accepté de participer à mon jury.

J'ai eu la chance de côtoyer André Raspaud au quotidien pendant mes trois années de thèse. Son contact a toujours été très enrichissant grâce à sa grande connaissance du domaine. Il m'a d'autre part permis de partir travailler trois mois à l'Université d'Oxford et je l'en remercie. Pour ces raisons, je suis très touché qu'il ait présidé mon jury.

Je remercie également Colin McDiarmid et Alex Scott pour m'avoir accueilli au sein de leur équipe de combinatoire à l'Université d'Oxford, ainsi que toute l'équipe de doctorants dynamiques et enthousiastes qui ont tout fait pour que je m'intègre très rapidement à leur groupe : Atsushi, Bilyana, Ross, Tobias et Tom.

Je n'oublie bien évidemment pas tous ceux que j'ai eu l'occasion de rencontrer au LaBRI et qui ont parcouru avec moi ce long chemin qui mène jusqu'au doctorat.

Je pense en particulier à Mickaël Montassier que j'ai connu durant mon année de DEA. Au fil du temps, il est devenu un ami et un confident. Nos longues conversations, qu'elles soient devant un tableau « à théorèmes » ou autour d'un verre, ont toujours été fructueuses. Je le remercie pour avoir toujours réussi à me convaincre de l'intérêt de mes travaux dans les moments de doute.

Je pense également à Jérémie Chalopin avec qui j'ai partagé mon bureau pendant ces trois années de thèse. Il a su apporter un peu d'algorithmique distribuée dans mon monde rempli de graphes orientés et de colorations acircuitiques.

L'été 2005 correspond à l'arrivée de Pascal Ochem dans notre bureau. À de nombreuses reprises, il m'a fait profiter de ses grandes connaissances en théorie des graphes. Il n'a jamais compté son temps passé au tableau à m'expliquer ses idées lumineuses. J'ai beaucoup appris à son contact. Je souhaite à tout thésard d'avoir un « Pascal Ochem » dans son bureau.

Je tiens également à remercier mes compagnons de voyages à Barcelone, Grenoble, Orléans, Oxford, Prague, notamment Louis Esperet avec qui j'ai travaillé et passé trois mois très sympathiques à Oxford.

Et merci à tous les autres, en particulier à Pascal Ferraro pour ses cafés revigorants, Fabrice Bazzaro, Julien Bernet, François de Vieilleville, Daniel Gonçalves, Florian Levet, Martin Raspaud, Matthias Robine, qui ont contribué à la mise en place d'une ambiance de travail conviviale et stimulante.

Je n'oublie pas non plus le personnel administratif du LaBRI, en particulier Cathy Roubineau et Philippe Biais, que j'ai sollicité à de nombreuses reprises.

Les trois années de la thèse sont aussi l'occasion d'endosser le rôle d'enseignant. À ce titre, j'ai eu la chance d'intégrer le département informatique de l'IUT Bordeaux 1. Je remercie très chaleureusement toute l'équipe pédagogique pour l'accueil qui m'a été réservé. Merci notamment à Isabelle Dutour, Gwenola Thomas, Serge Dulucq, Jean-Michel Lépine et Michel Marcus : enseigner à vos côtés est un réel plaisir.

Je remercie bien évidemment mes amis et ma famille pour leur soutien sans faille.

En particulier, un grand merci à Émilie Pendants qui m'a toujours encouragé et qui a eu le courage de relire le chapitre 2 de ce manuscrit pour traquer les dernières fautes.

Merci également à mes parents et grands-parents qui n'ont jamais cessé de croire en moi, même s'ils n'ont toujours pas compris l'intérêt de colorier des graphes.

Enfin, la dernière personne, et non la moindre, que je ne remercierai jamais assez, c'est bien sûr Isabelle. Tu as cru en moi depuis le début. Tu as toujours trouvé les bons mots pour me remonter le moral lors des nombreux passages à vide inévitables durant une thèse. Merci pour ton soutien au quotidien sans lequel ce document n'aurait sans doute jamais vu le jour.



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>13</b>
<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>23</b>
1.1 Notions de base . . . . .	23
1.1.1 Adjacence . . . . .	24
1.1.2 Degré d'un sommet, degré d'un graphe . . . . .	24
1.1.3 Chemins, cycles et connexité . . . . .	25
1.1.4 Sous-graphes et composantes connexes . . . . .	26
1.1.5 Graphe représentatif des arêtes / arcs . . . . .	27
1.1.6 Homomorphismes, isomorphismes et automorphismes de graphes . . . . .	28
1.1.7 Graphes mineurs . . . . .	29
1.2 Quelques classes de graphes . . . . .	29
1.2.1 Stables, graphes complets et tournois . . . . .	29
1.2.2 Arbres, forêts . . . . .	31
1.2.3 Les graphes $p$ -partis . . . . .	32
1.2.4 Les graphes planaires et planaires extérieurs . . . . .	32
1.2.5 Les graphes $k$ -dégénérés . . . . .	33
1.2.6 Notations de différentes classes de graphes . . . . .	33
1.3 Quelques notions de coloration . . . . .	34
1.3.1 Colorations de graphes non orientés . . . . .	34
1.3.1.1 Colorations propres . . . . .	34
1.3.1.2 Colorations acycliques . . . . .	35
1.3.2 Colorations de graphes orientés . . . . .	36
1.3.2.1 Sommet-coloration . . . . .	36
1.3.2.2 Arc-coloration . . . . .	37
<b>2 Sommet-coloration orientée</b>	<b>39</b>
2.1 Les graphes planaires extérieurs . . . . .	41

2.1.1	Présentation . . . . .	41
2.1.2	Résultats préliminaires . . . . .	43
2.1.3	Preuve du théorème 2.1 . . . . .	44
2.2	Les 2-arbres partiels . . . . .	46
2.2.1	Présentation . . . . .	46
2.2.2	Résultats préliminaires . . . . .	47
2.2.3	Preuve du théorème 2.6 . . . . .	49
2.3	Les graphes planaires de grande maille . . . . .	53
2.4	Sommet-coloration orientée forte des graphes planaires sans cycles de longueurs données	55
2.4.1	Présentation . . . . .	55
2.4.2	Preuve du lemme 2.19 . . . . .	58
2.4.3	Quelques propriétés des tournois $QR_7$ et $QR_{19}$ . . . . .	62
2.4.4	Preuve du théorème 2.22 . . . . .	67
2.4.4.1	Propriétés structurelles de $H$ . . . . .	67
2.4.4.2	Procédure de déchargement . . . . .	69
2.4.5	Preuve du théorème 2.23 . . . . .	72
2.4.6	Preuve du théorème 2.24 . . . . .	75
2.4.6.1	Propriétés structurelles de $H$ . . . . .	75
2.4.6.2	Procédure de déchargement . . . . .	77
2.4.7	Discussion des résultats . . . . .	80
2.5	Conclusion et perspectives . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Arc-coloration orientée</b>	<b>87</b>
3.1	Complexité . . . . .	89
3.2	Relation entre nombre chromatique orienté et indice chromatique orienté . . . . .	90
3.3	Indice chromatique orienté et nombre chromatique acyclique . . . . .	96
3.4	Les graphes planaires extérieurs . . . . .	99
3.4.1	Résultats préliminaires . . . . .	100
3.4.2	Preuve du théorème 3.14 . . . . .	102
3.5	Les graphes planaires . . . . .	107
3.5.1	Résultats généraux . . . . .	107
3.5.2	Les graphes planaires de grande maille . . . . .	109
3.6	Les graphes de degré borné . . . . .	109
3.6.1	Bornes générales . . . . .	110
3.6.2	Les graphes de degré au plus trois . . . . .	111
3.6.2.1	Preuve du théorème 3.28 . . . . .	114
3.6.2.2	Preuve du théorème 3.24 . . . . .	120
3.7	Conclusion et perspectives . . . . .	122

<b>4</b>	<b>Étoile coloration orientée acircuitique</b>	<b>127</b>
4.1	Motivation initiale : lien avec l'arc-coloration orientée . . . . .	129
4.2	Les graphes de degré au plus trois . . . . .	130
4.3	Les graphes de faible densité . . . . .	134
4.3.1	Preuve du théorème 4.9 . . . . .	135
4.3.2	Preuve du théorème 4.12 . . . . .	137
4.4	Les 2-arbres partiels . . . . .	146
4.5	Conclusion et perspectives . . . . .	152
	<b>Conclusion</b>	<b>155</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>
	<b>Table des symboles</b>	<b>167</b>
	<b>Index</b>	<b>169</b>
	<b>Annexes</b>	<b>173</b>
<b>A</b>	<b>Coloration impropre acyclique par listes des graphes planaires extérieurs</b>	<b>175</b>
<b>B</b>	<b>Coloration impropre acyclique par listes des graphes de degré borné</b>	<b>191</b>



# Table des figures

1.1	Exemples de graphes. . . . .	24
1.2	Exemples de sous-graphes. . . . .	26
1.3	Exemple de graphe représentatif des arêtes. . . . .	27
1.4	Exemple de graphe représentatif des arcs. . . . .	27
1.5	Trois représentations du graphe de Petersen. . . . .	28
1.6	Exemple de graphe contenant un mineur $K_4$ . . . . .	29
1.7	Les quatre tournois à 4 sommets non isomorphes. . . . .	30
1.8	Exemples de tournois de Paley : $QR_3$ et $QR_7$ . . . . .	30
1.9	Exemple d'arbre. . . . .	31
1.10	Exemple de construction d'un 2-arbre. . . . .	31
1.11	Le graphe $G$ admet un homomorphisme vers $K_3$ : $G \rightarrow K_3$ . . . . .	34
2.1	Deux exemples de sommet-colorations orientées du même graphe. . . . .	40
2.2	Une 5-sommet-coloration orientée du circuit à cinq sommets $C_5$ . . . . .	40
2.3	Graphe planaire extérieur $G$ avec $\chi_o(G) = 7$ . . . . .	42
2.4	Une grille $G \in \mathcal{G}(2,4)$ avec $\chi_o(G) = 6$ . . . . .	42
2.5	Un exemple d'arbre épais. . . . .	42
2.6	Deux graphes cibles : $T_5$ et $T_6$ . . . . .	44
2.7	Le tournoi $T_4$ . . . . .	45
2.8	Les cinq configurations possibles du lemme 2.7.3 avec $d_G(v) \geq 3$ et $D_G(v) \leq 2$ . . . . .	48
2.9	Un 2-arbre partiel de maille 4 et de nombre chromatique orienté 7. . . . .	49
2.10	Principe de construction d'un 2-arbre partiel $G$ de maille 6 tel que $\chi_o(G) = 6$ . . . . .	51
2.11	Les cinq tournois non isomorphes à cinq sommets ne contenant ni source ni puits. . . . .	52
2.12	Un graphe planaire $G_k$ sans cycles de longueur 4 tel que $\text{mad}(G_k) > 3 + \frac{9}{7} - \varepsilon(k)$ . . . . .	60
2.13	Un graphe planaire $G_k$ sans cycles de longueurs 4 à $i$ ( $i \geq 5$ ) tel que $\text{mad}(G_k) > 3 + \frac{3}{i-2} - \varepsilon(k)$ . . . . .	61
2.14	$x$ est un $(0, 1, 1)$ -successeur de $(u_1, u_2, u_3)$ . . . . .	63
2.15	Exemple de la propriété $P_{2,1}$ de $QR_7$ . . . . .	63
2.16	Configurations des propriétés 2.33 et 2.37 . . . . .	65
2.17	Configuration de la propriété 2.38. . . . .	66

2.18	Configurations interdites du théorème 2.22. . . . .	67
2.19	Une 3-face légère. . . . .	69
2.20	Règle (R1). . . . .	69
2.21	Règle (R2.1). . . . .	69
2.22	Règle (R2.2). . . . .	70
2.23	Règle (R2.3). . . . .	70
2.24	Un graphe planaire extérieur $H_n$ sans cycles de longueurs 4 à $n$ tel que $\chi_o(H_n) \geq 6$ pour tout $n \not\equiv 4 \pmod{5}$ . . . . .	72
2.25	Le tournoi $T_5$ . . . . .	72
2.26	Un graphe planaire extérieur $H'_n$ sans cycles de longueurs 4 à $n$ . . . . .	73
2.27	Les cinq tournois non isomorphes à six sommets tels que pour tout sommet $u$ , $d^-(u) \geq 2$ et $d^+(u) \geq 2$ . . . . .	73
2.28	Le graphe $H$ . . . . .	74
2.29	Un graphe planaire extérieur $G_n$ sans cycles de longueurs 4 à $n$ tel que $\chi_o(G_n) = 7$ pour tout $n \geq 5$ , $n$ impair et $n \not\equiv 4 \pmod{5}$ . . . . .	74
2.30	Configurations interdites du théorème 2.24. . . . .	76
2.31	Un 4-sommet faible. . . . .	78
2.32	Graphe $G$ de degré au plus trois tel que $G \not\rightarrow QR_7$ . . . . .	83
2.33	Le tournoi $T_7$ à 7 sommets. . . . .	83
2.34	Une grille orientée $G$ à deux dimensions telle que $G \not\rightarrow QR_7$ mais $G \rightarrow T_7$ . . . . .	84
3.1	Exemple d'arc-coloration orientée et de sommet-coloration orientée. . . . .	87
3.2	Principe de construction du graphe orienté $G'$ à partir du graphe non orienté $G$ . . . . .	89
3.3	Les quatre tournois non isomorphes à quatre sommets. . . . .	92
3.4	Un graphe orienté ayant indice chromatique orienté 4 et un nombre chromatique orienté 7. . . . .	93
3.5	Le graphe $H$ du lemme 3.7. . . . .	94
3.6	Le graphe $G^*$ de la preuve du théorème 3.12. . . . .	99
3.7	Trois tournois cibles : $T_4$ , $T_5$ et $T_6$ . . . . .	101
3.8	Automate $\mathcal{A}$ de la proposition 3.16. . . . .	101
3.9	Un graphe planaire extérieur avec un indice chromatique orienté 7. . . . .	103
3.10	Un graphe planaire extérieur de maille 4 et d'indice chromatique orienté 6. . . . .	104
3.11	La configuration $H$ de la preuve du théorème 3.14(3). . . . .	105
3.12	Le graphe planaire $H$ du lemme 3.20. . . . .	108
3.13	Le graphe planaire $H^*$ du théorème 3.19. . . . .	108
3.14	Exemples de cycles spéciaux. . . . .	111
3.15	Exemples de graphes possédant un cycle spécial. . . . .	112
3.16	La graphe $QR_7$ . . . . .	113
3.17	Configurations du lemme 3.35. . . . .	116

---

3.18	Configurations du lemme 3.37. . . . .	118
3.19	Configurations de la preuve du du théorème 3.28. . . . .	119
3.20	Un graphe cubique $G$ avec $\chi'_o(G) = 6$ . . . . .	121
3.21	Configuration $H$ de la preuve du théorème 3.38. . . . .	123
4.1	Configuration du lemme 4.7 . . . . .	132
4.2	L'orientation $\vec{K}_4$ telle que $adst(\vec{K}_4) = 4$ . . . . .	133
4.3	Configurations interdites du théorème 4.9. . . . .	135
4.4	Configuration du lemme 4.16 : arête-coloration acyclique de $H'$ étendue à $H$ . . . . .	136
4.5	Configurations interdites du théorème 4.12. . . . .	138
4.5	Configurations interdites du théorème 4.12 (suite). . . . .	139
4.6	Configurations interdites du lemme 4.39 et leurs réductions. . . . .	148
4.7	Configuration interdite du lemme 4.40 et ses réductions. . . . .	149
4.8	Configurations interdites du lemme 4.42 et leur réduction. . . . .	150
4.9	Configurations interdites du lemme 4.43. . . . .	151





# Introduction

La coloration de graphes est, depuis plusieurs décennies, un domaine très actif de la théorie des graphes du fait de ses nombreuses applications. En effet, un grand nombre de problèmes peuvent se traduire comme une partition d'un ensemble d'objets suivant certaines contraintes.

Supposons par exemple que nous avons  $k$  conteneurs de produits chimiques à répartir dans des entrepôts. Certains produits chimiques ne peuvent être stockés dans le même bâtiment en raison du risque d'explosion en cas de mélange. Nous voulons ainsi connaître le nombre minimum d'entrepôts dont nous avons besoin pour stocker ces conteneurs de façon à minimiser le coût de stockage. Les graphes constituent alors un outil qui permet de modéliser ce genre de problèmes en se ramenant à l'étude de colorations. Nous construisons tout d'abord un graphe non orienté où chaque sommet représente un conteneur de produits chimiques, et nous relient deux sommets si les deux conteneurs correspondants contiennent des produits chimiques qui ne peuvent être stockés dans un même entrepôt. Nous colorions alors les sommets de ce graphe de telle sorte que deux sommets reliés par une arête ont des couleurs différentes. Ainsi, chaque couleur correspond à un entrepôt. Il s'agit dans ce cas d'une *sommet-coloration propre* du graphe. Par conséquent, les conteneurs dont les sommets sont de la même couleur seront stockés dans le même entrepôt. Enfin, en déterminant le nombre minimum de couleurs dont nous avons besoin pour colorier ce graphe, nous connaissons le nombre minimum d'entrepôts dont nous avons besoin pour stocker les  $k$  conteneurs.

Plus précisément, une *sommet-coloration propre* d'un graphe non orienté  $G$  est une application  $f$  des sommets de  $G$  vers un ensemble de couleurs  $C$  telle que deux sommets adjacents obtiennent des couleurs différentes. Si  $|C| = k$ , alors  $f$  est une  *$k$ -sommet-coloration propre* de  $G$ . Le *nombre chromatique* de  $G$ , noté  $\chi(G)$ , est défini comme le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  *$k$ -sommet-coloration propre*.

Un *homomorphisme* d'un graphe  $G$  vers un graphe  $H$  est une application  $f$  de l'ensemble des sommets de  $G$  vers l'ensemble des sommets de  $H$  telle que pour toute arête (ou tout arc)  $uv$  de  $G$ ,  $f(u)f(v)$  est une arête (ou un arc) de  $H$ . L'existence d'un homomorphisme de  $G$  vers  $H$  est notée  $G \rightarrow H$ .

Toute sommet-coloration propre d'un graphe non orienté  $G$  peut être vue comme un homomorphisme de  $G$  vers un graphe non orienté  $H$ . Les sommets de  $H$  sont alors appelés *couleurs*. Le nombre chromatique de  $G$  peut alors être vu comme le plus petit ordre (*i.e.* nombre de sommets) d'un graphe

non orienté  $H$  tel que  $G \rightarrow H$ .

De nombreux chercheurs ont porté un grand intérêt aux problèmes de sommet-colorations propres. Le problème des quatre couleurs est l'un des plus célèbres : "Peut-on colorier une carte avec seulement quatre couleurs de sorte que deux pays ayant une frontière en commun aient des couleurs différentes ?". Appel, Haken et Kock ont donné une première preuve assistée par ordinateur de ce résultat [AH77, AHK77] en 1977. Robertson, Sanders, Seymour et Thomas ont obtenu une preuve plus simple et plus courte [RSST97], mais toujours assistée par ordinateur. Bien que ce problème ait été résolu, il fascine encore de nombreux chercheurs qui tentent d'en obtenir une preuve sans l'aide d'ordinateurs.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à des colorations de graphes orientés *antisymétriques*, que nous appellerons simplement *graphes orientés* dans la suite.

De façon naturelle, il est possible de définir la notion de *sommet-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  comme un homomorphisme de  $G$  vers un graphe orienté  $H$ . De la même manière, le *nombre chromatique orienté* de  $G$ , noté  $\chi_o(G)$ , est défini comme le plus petit ordre d'un graphe orienté  $H$  tel que  $G \rightarrow H$ .

En terme de coloration, une *sommet-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  est alors une application  $f$  qui associe à chaque sommet de  $G$  une couleur d'un ensemble  $C$  de telle sorte que (i) si  $\vec{uv}$  est un arc de  $G$ , alors les deux sommets  $u$  et  $v$  ont des couleurs différentes, et (ii) si  $\vec{uv}$  et  $\vec{xy}$  sont deux arcs de  $G$  tels que  $u$  et  $y$  ont la même couleur, alors les deux sommets  $v$  et  $x$  ont des couleurs différentes. Si  $|C| = k$ , alors  $f$  est une *k-sommet-coloration orientée* de  $G$ . Le nombre chromatique orienté de  $G$  est alors le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une *k-sommet-coloration orientée*.

La notion de *coloration orientée* a été introduite par Courcelle [Cou94] en 1994 comme un outil permettant d'encoder l'orientation d'un graphe grâce aux étiquettes de ses sommets. Depuis, de nombreux chercheurs tels que Borodin, Hell, Ivanova, Kostochka, Nešetřil, Raspaud, Sopena, Zhu, ... se sont intéressés à cette notion. Raspaud et Sopena [RS94] ont montré en 1994 que tout graphe planaire admet une 80-sommet-coloration orientée. Cette borne supérieure paraît éloignée de la borne optimale. Pourtant, malgré de nombreuses tentatives, elle reste pour l'instant la meilleure connue. Un certain nombre de résultats ont été prouvés pour d'autres classes de graphes telles que les graphes planaires de grande maille, les graphes de degré borné, les *k*-arbres partiels, ...

\* \* \*

Le *graphe représentatif des arêtes* d'un graphe non orienté  $G$  (connu dans la littérature sous le nom de *line graph*), noté  $L(G)$ , est défini comme le graphe ayant pour sommets l'ensemble des arêtes de  $G$  et tel que deux sommets de  $L(G)$  sont adjacents si et seulement si les deux arêtes correspondantes dans  $G$  sont adjacentes.

Une *arête-coloration propre* d'un graphe non orienté  $G$  peut être définie comme une sommet-coloration propre de  $L(G)$ . L'*indice chromatique* de  $G$ , noté  $\chi'(G)$ , est alors égal à  $\chi(L(G))$ .

Même si l'étude de l'arête-coloration propre est plus récente que celle de la sommet-coloration propre, de nombreux résultats sont aujourd'hui connus. En particulier, Vizing a montré en 1964 que tout graphe non orienté de degré au plus  $\Delta$  admet une  $(\Delta + 1)$ -arête-coloration propre [Viz64]. Ce résultat montre que l'ensemble des graphes de degré au plus  $\Delta$  peut être partitionné en deux classes : ceux dont l'indice chromatique est  $\Delta$  (graphes de classe 1) et ceux dont l'indice chromatique est  $\Delta + 1$  (graphes de classe 2). Certaines familles de graphes ont pu être classées, mais le problème général de classification des graphes simples est NP-complet.

Dans le cas des graphes orientés, plusieurs colorations d'arcs ont été étudiées. L'*arc-coloration* de graphes orientés introduite par Harner et Entringer [HE72] est définie de telle sorte que toute paire d'arcs consécutifs (*i.e.* deux arcs de la forme  $\vec{uv}$  et  $\vec{vw}$ ) ont des couleurs différentes. L'*étoile coloration dirigée* (*directed star coloring* en anglais) introduite par Algor et Alon [AA89] est définie de sorte que toute paire d'arcs consécutifs ont des couleurs différentes et que toute paire d'arcs ayant leur extrémité terminale en commun ont des couleurs différentes.

Dans cette thèse, nous présentons une nouvelle notion de coloration d'arcs : l'*arc-coloration orientée*.

Le *graphe représentatif des arcs* d'un graphe orienté  $G$  (connu dans la littérature sous le nom de *line digraph*), noté  $LD(G)$ , est défini comme le graphe ayant pour sommets l'ensemble des arcs de  $G$  et tel que  $\vec{ef}$  est un arc de  $LD(G)$  si et seulement l'arc  $f$  est consécutif à l'arc  $e$  dans  $G$ .

De même qu'une arête-coloration propre d'un graphe non orienté  $G$  est une sommet-coloration de  $L(G)$ , il est naturel de définir une *arc-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  comme une sommet-coloration orientée de  $LD(G)$ . Une *k-arc-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  est donc un homomorphisme de  $LD(G)$  vers un graphe orienté  $H$  à  $k$  sommets. L'*indice chromatique orienté* de  $G$ , noté  $\chi'_o(G)$ , est défini comme le plus petit ordre  $k$  d'un graphe orienté  $H$  tel que  $LD(G) \rightarrow H$ .

En terme de coloration, une *arc-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  peut alors être vue comme une application  $f$  de l'ensemble des arcs de  $G$  vers un ensemble de couleurs  $C$  telle que (i) pour tous sommets  $u, v, w$ , si  $\vec{uv}$  et  $\vec{vw}$  sont des arcs de  $G$ , alors ils ont des couleurs différentes, et (ii) pour tous sommets  $u, v, w, x, y, z$ , si  $\vec{uv}, \vec{vw}, \vec{xy}, \vec{yz}$  sont des arcs de  $G$  et  $\vec{uv}$  et  $\vec{yz}$  ont la même couleur, alors  $\vec{vw}$  et  $\vec{xy}$  ont des couleurs différentes. L'*indice chromatique orienté* de  $G$ , est alors défini comme le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une *k-arc-coloration orientée*.

L'étude de l'arc-coloration orientée nous a conduit à considérer une extension naturelle de l'étoile arboricité dirigée introduite par Algor et Alon : l'*étoile arboricité orientée acircuitique*. En effet, l'indice chromatique orienté est borné en fonction de l'étoile arboricité orientée acircuitique.

Une *étoile-coloration orientée acircuitique* d'un graphe orienté  $G$  est une application  $f$  de l'ensemble des arcs de  $G$  vers un ensemble de couleurs  $C$  telle que (i) pour tous sommets  $u, v, w$ , si  $\vec{uv}$  et  $\vec{vw}$  sont des arcs de  $G$ , alors ils ont des couleurs différentes, (ii) pour tous sommets  $u, v, w$ , si  $\vec{uv}$  et  $\vec{wv}$  sont des arcs de  $G$ , alors ils ont des couleurs différentes, et (iii) le graphe induit par deux couleurs

ne contient pas de circuit. Si  $|C| = k$ , alors  $f$  est une  $k$ -étoile-coloration orientée acircuitique de  $G$ . L'étoile arboricité orientée acircuitique de  $G$ , notée  $\text{adst}(G)$ , est définie comme le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -étoile-coloration orientée acircuitique.

\* \* \*

Dans ce mémoire, nous étudions trois types de colorations : la *sommet-coloration orientée*, l'*arc-coloration orientée* et l'*étoile-coloration orientée acircuitique*.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous introduisons les notations usuelles de la théorie des graphes qui seront utilisées dans la suite. Nous présentons également la plupart des classes de graphes que nous considérerons. Enfin, nous définissons quelques notions de colorations déjà étudiées dans la littérature ; nous en profitons pour donner un bref état de l'art sur ces différentes colorations.

Nous abordons dans le second chapitre la notion de sommet-coloration orientée et considérons plusieurs familles de graphes. Nous déterminons notamment le nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille  $g$ , pour tout  $g \geq 4$ . Nous considérons également le nombre chromatique orienté des 2-arbres partiels de maille donnée ; nous le caractérisons pour toute maille  $g \leq 6$  et en donnons un encadrement pour toute maille  $g$ ,  $7 \leq g \leq 13$ . Par ailleurs, plusieurs résultats sont actuellement connus pour le nombre chromatique orienté des graphes planaires de grande maille ; nous obtenons une meilleure borne pour les graphes planaires de maille au moins 11. Enfin, de manière à connaître l'impact des triangles dans une sommet-coloration orientée, nous étudions le nombre chromatique orienté des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à  $i$ , pour  $i \geq 5$ .

Dans le troisième chapitre, nous introduisons la notion d'arc-coloration orientée d'un graphe orienté  $G$ . Nous donnons dans un premier temps un résultat de complexité : le problème qui consiste à décider si un graphe orienté  $G$  donné admet une  $k$ -arc-coloration orientée est polynomial si  $k \leq 3$  et est NP-complet si  $k \geq 4$ . Nous bornons ensuite l'indice chromatique orienté en fonction de paramètres déjà étudiés (le nombre chromatique orienté, le nombre chromatique acyclique), puis le nombre chromatique orienté en fonction de l'indice chromatique orienté. Nous déterminons par ailleurs l'indice chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille  $g$ , pour tout  $g \geq 3$ , puis obtenons une borne supérieure, ainsi qu'une borne inférieure, pour la classe des graphes planaires. Nous étudions également la classe des graphes planaires de grande maille. Enfin, nous obtenons une borne supérieure de l'indice chromatique orienté de la classe des graphes de degré au plus  $\Delta$ , que nous améliorons dans le cas particulier des graphes de degré au plus trois.

Nous introduisons pour finir la notion d'étoile-coloration orientée acircuitique dans le quatrième chapitre. Nous montrons dans un premier temps qu'il existe un lien entre cette coloration et l'arc-coloration orientée : pour tout graphe orienté  $G$ ,  $\chi'_o(G) \leq \text{adst}(G) \times 2^{\text{adst}(G)-1}$ . Nous déterminons ensuite l'étoile arboricité orientée acircuitique des graphes de degré au plus trois, puis étudions ce

paramètre pour les graphes de faible densité. Ces derniers résultats nous permettent d'obtenir alors des bornes pour l'étoile arboricité orientée acircuitique de certaines classes de graphes planaires de maille donnée. Enfin, nous considérons les 2-arbres partiels pour lesquels nous obtenons une borne supérieure de l'étoile arboricité orientée acircuitique en fonction du degré maximum et du degré entrant maximum.

\* \* \*

Durant mon séjour pré-doctoral à Oxford, nous avons initié, avec l'équipe de combinatoire du laboratoire de mathématiques, des travaux indépendants des colorations de graphes orientés et portant sur la *coloration impropre acyclique par liste*.

De nombreuses variations et extensions de colorations de graphes ont été considérées dans la littérature. Les colorations *impropres* (également connues sous le nom de colorations *généralisées* ou *relaxées*) sont une généralisation des colorations propres où la contrainte consistant à colorier de façon différente deux sommets adjacents est supprimée. Une *k-coloration t-impropre* d'un graphe non orienté  $G$  est une partition de l'ensemble des sommets de  $G$  en  $k$  classes de couleurs  $V_1, V_2, \dots, V_k$  telles que chaque classe  $V_i$  induit un graphe de degré au plus  $t$ . En d'autres termes, chaque sommet possède au plus  $t$  voisins ayant la même couleur que lui. Le *nombre chromatique t-impropre* d'un graphe  $G$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une *k-coloration t-impropre*. Les colorations *t-impropres* ont été introduites par Cowel, Cowel et Woodall [CCW86]. Durant ces dernières années, cette coloration a été considérée et le problème qui consiste à borner le nombre chromatique *t-impropre* a été étudié pour de nombreuses classes de graphes (voir par exemple [CGJ97, Woo90, Woo04]).

De la même manière, Eaton et Hull [EH99] ont généralisé la notion de coloration par listes à la *coloration impropre par listes* : un graphe non orienté  $G$  admet une *l-liste coloration t-impropre*, si pour toute assignation de listes  $L$  telle que pour tout sommet  $v$  nous avons  $|L(v)| \geq l$ , il existe une coloration *t-impropre* de  $G$  telle que la couleur assignée à  $v$  appartient à la liste de  $v$ .

Enfin, Boiron, Sopena et Vignal [BSV99] ont étendu la notion de coloration acyclique à la notion de *coloration impropre acyclique*. Une *k-coloration t-impropre acyclique* d'un graphe non orienté  $G$  est une *k-coloration t-impropre* qui est acyclique (le graphe ne contient pas de cycles bicolores alternés).

En 2002, Borodin, Fon-Der-Flass, Kostochka, Raspaud et Sopena ont étudié la notion de *coloration acyclique par listes*. Un graphe  $G$  admet une *k-liste coloration acyclique* si pour toute assignation de listes  $L$  telle que pour tout sommet  $v$  nous avons  $|L(v)| \geq l$ , il existe une coloration acyclique de  $G$  telle que la couleur assignée à  $v$  appartient à la liste de  $v$ .

Du fait des travaux précédents, il est naturel de définir la notion de *coloration impropre acyclique par listes* : un graphe non orienté  $G$  admet une *l-liste coloration t-impropre acyclique* si  $G$  admet une *L-coloration acyclique t-impropre* pour toute assignation de listes  $L$  avec, pour tout sommet  $v$ ,  $|L(v)| \geq l$ .

Nous avons considéré cette coloration pour la classe des graphes de degré au plus trois, des graphes de degré borné et des graphes planaires extérieurs. Plus précisément, nous montrons que tout graphe de degré au plus trois admet une 3-liste coloration acyclique 1-impropre (cette borne est optimale). Nous étudions également le comportement du nombre chromatique  $t$ -impropre acyclique des graphes de degré maximum  $k$  et obtenons une borne inférieure asymptotique. Nous construisons enfin un algorithme s'exécutant en temps linéaire permettant d'obtenir, pour tout graphe planaire extérieur, une 2-liste coloration 5-impropre acyclique (cette borne est optimale).

Cette thèse étant uniquement dédiée aux colorations de graphes orientés, ces résultats ne seront pas développés ici, mais uniquement placés en annexes sous la forme de deux rapports de recherche [EP06, EMP06].

\* \* \*

Certains des travaux menés durant de cette thèse ont donné lieu à des publications dans des revues internationales avec comité de lecture ou lors de conférences internationales, ainsi qu'à des rapports de recherches actuellement soumis :

- [EMP06] L. Esperet, C. J. H. McDiarmid, and A. Pinlou. Acyclic improper choosability of graphs with bounded maximum degree. Manuscrit, mai 2006.
- [EP06a] L. Esperet and A. Pinlou. Acyclic improper choosability of graphs. In *Sixth Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications*, Prague, République Tchèque, juillet 2006, *Elect. Notes in Discrete Math.*, À paraître.
- [EP06b] L. Esperet and A. Pinlou. Acyclic improper choosability of outerplanar graphs. Rapport de recherche RR-1405-06, LaBRI, Université Bordeaux 1, mai 2006.
- [MOP06] M. Montassier, P. Ochem, and A. Pinlou. Strong oriented chromatic number of planar graphs without short cycles. Rapport de recherche RR-1380-06, LaBRI, Université Bordeaux 1, janvier 2006.
- [OPS06] P. Ochem, A. Pinlou, and É. Sopena. On the oriented chromatic index of oriented graphs. Rapport de recherche RR-1390-06, LaBRI, Université Bordeaux 1, avril 2006.
- [Pin06] A. Pinlou. On oriented arc-coloring of subcubic graphs. *Elect. J. Comb.*, 13(1), 2006.
- [PS05] A. Pinlou and É. Sopena. The acircuitic directed star arboricity of planar graphs with large girth. Rapport de recherche RR-1371-05, LaBRI, Université Bordeaux 1, octobre 2005.
- [PS06a] A. Pinlou and É. Sopena. The acircuitic directed star arboricity of subcubic graphs is at most four. *Discrete Math.*, À paraître, 2006.
- [PS06b] A. Pinlou and É. Sopena. Oriented vertex and arc colorings of outerplanar graphs. *Inform. Process. Lett.*, 100(3) :97–104, 2006.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Nous introduisons dans une première partie les notations usuelles de la théorie des graphes qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Ces notations sont standards et peuvent être retrouvées dans [Ber87]. Dans une deuxième partie, nous présentons la plupart des classes de graphes que nous considérerons dans la suite. Enfin, dans la dernière partie, nous définissons quelques notions de colorations déjà étudiées dans la littérature ; nous en profitons pour donner un bref état de l'art sur ces différentes colorations.

### 1.1 Notions de base

Un *graphe non orienté* (simple et sans boucle)  $G = (V(G), E(G))$  est constitué d'un ensemble non vide fini de *sommets*, noté  $V(G)$ , et d'un ensemble fini d'*arêtes*, paires de sommets de  $V(G)$ , noté  $E(G)$ . On note  $uv$  ou  $vu$  la paire de sommets  $\{u, v\}$ . Le graphe  $G$  donné en exemple sur la figure 1.1(a) a pour ensemble de sommets  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  et pour ensemble d'arêtes  $E(G) = \{v_2v_3, v_2v_6, v_2v_7, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_6, v_4v_7, v_6v_7\}$ .

Un *graphe orienté*  $H = (V(H), A(H))$  est constitué d'un ensemble non vide fini de *sommets*, noté  $V(H)$ , et d'un ensemble fini d'*arcs*, couples de sommets, noté  $A(H)$ . On note  $\vec{uv}$  le couple de sommets  $(u, v)$ . Le graphe orienté  $H$  donné en exemple sur la figure 1.1(b) a pour ensemble de sommets  $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  et pour ensemble d'arcs  $A(H) = \{\vec{v_2v_3}, \vec{v_2v_7}, \vec{v_3v_4}, \vec{v_5v_4}, \vec{v_6v_2}, \vec{v_6v_4}, \vec{v_6v_7}, \vec{v_7v_4}\}$ .

Un graphe orienté est dit *symétrique* si pour tout arc  $\vec{uv}$ , le graphe contient également l'arc  $\vec{vu}$ . À l'inverse, un graphe orienté est *antisymétrique* si pour tout arc  $\vec{uv}$  existant dans le graphe, l'arc  $\vec{vu}$  n'existe pas.

**Remarque.** Dans la suite, la majorité des graphes considérés seront des graphes orientés *antisymétriques*, que nous appellerons simplement *graphes orientés*. Pour éviter toute confusion, lorsque le graphe considéré ne sera pas nécessairement antisymétrique, nous parlerons de *digraphes*.

Ainsi, un graphe orienté est obtenu à partir d'un graphe non orienté en donnant l'une des deux orientations possibles à chacune des arêtes. Le graphe orienté  $H$  de la figure 1.1(b) est obtenu à partir

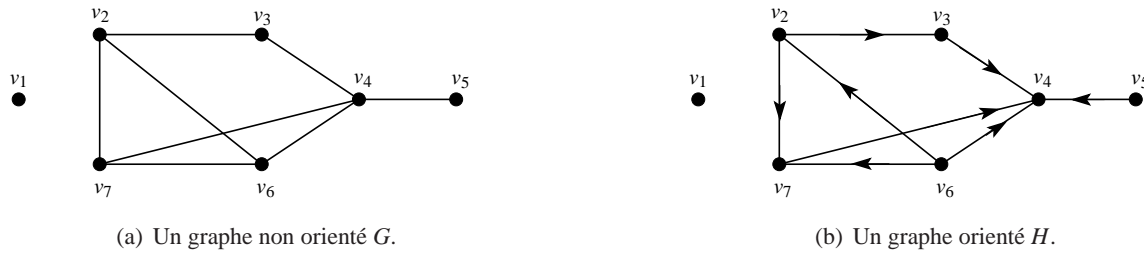


FIG. 1.1 – Exemples de graphes.

du graphe  $G$  de la figure 1.1(a). Nous dirons que  $H$  est une *orientation* de  $G$  et que  $G$  est le *graphe sous-jacent* de  $H$ .

Étant donné un arc  $\vec{uv}$ , un graphe orienté  $H$  est obtenu à partir d'un graphe orienté  $G$  par *inversion* de l'arc  $\vec{uv}$  si nous supprimons cet arc et le remplaçons par l'arc de  $\vec{vu}$ . Ainsi, le *graphe inverse* d'un graphe orienté  $G$  est obtenu en inversant tous les arcs de  $G$ ; il est noté  $G^{-1}$ .

L'*ordre* d'un graphe (resp. la *taille*) est le nombre de sommets (resp. d'*arêtes* ou d'*arcs*) du graphe. Le graphe  $G$  de la figure 1.1(a) est d'ordre 7 et de taille 8.

Les définitions qui sont données dans la suite sont, pour la plupart, applicables au cas des graphes orientés comme au cas des graphes non orientés. Dans le cas contraire, nous le précisons.

### 1.1.1 Adjacence

Pour un graphe non orienté et une arête  $uv$ , les sommets  $u$  et  $v$  sont appelés *extrémités* de l'arête  $uv$ . Les sommets  $u$  et  $v$  sont *adjacents* et l'arête  $uv$  est *incidente* aux sommets  $u$  et  $v$ . Deux arêtes sont *adjacentes* si elles possèdent une extrémité commune.

Pour un graphe orienté et un arc  $\vec{uv}$ , le sommet  $u$  est appelé *extrémité initiale* de l'arc  $\vec{uv}$  et le sommet  $v$  est appelé *extrémité terminale* de l'arc  $\vec{uv}$ . De plus,  $u$  est un *prédécesseur* de  $v$  et  $v$  est un *successeur* de  $u$ . Cependant, lorsque nous considérerons indifféremment l'une ou l'autre des deux orientations, l'arc reliant  $u$  à  $v$  sera simplement noté  $uv$  (par conséquent  $uv = \vec{uv}$  ou  $uv = \vec{vu}$ ). Un arc  $\vec{uv}$  est un *arc sortant* du sommet  $u$  et un *arc entrant* du sommet  $v$ . Deux arcs sont *adjacents* s'ils possèdent une extrémité commune. Deux arcs sont *consécutifs* si l'extrémité initiale de l'un est l'extrémité terminale de l'autre. Par exemple, les arcs  $\vec{uv}$  et  $\vec{vw}$  sont consécutifs. De plus, nous dirons que  $\vec{vw}$  est *consécutif* à  $\vec{uv}$  (attention,  $\vec{uv}$  n'est pas consécutif à  $\vec{vw}$ ). Si nous considérons le graphe  $H$  de la figure 1.1(b), les arcs  $\vec{v_2v_3}$  et  $\vec{v_3v_4}$  sont consécutifs (plus précisément,  $\vec{v_3v_4}$  est consécutif à  $\vec{v_2v_3}$ ), alors que les arcs  $\vec{v_2v_3}$  et  $\vec{v_2v_7}$ , ou encore  $\vec{v_3v_4}$  et  $\vec{v_5v_4}$ , sont adjacents mais pas consécutifs.

### 1.1.2 Degré d'un sommet, degré d'un graphe

L'ensemble des *voisins* d'un sommet  $v$  d'un graphe  $G$  est noté  $\Gamma_G(v)$ , ou plus simplement  $\Gamma(v)$  si le contexte fait référence au graphe considéré de façon claire. Le *degré* d'un sommet  $v$  de  $G$ , noté



$d_G(v)$  (ou  $d(v)$ ), est égal au nombre de ses voisins, soit  $d_G(v) = |\Gamma_G(v)|$ . Un sommet de degré  $k$  (resp. au moins  $k$ , au plus  $k$ ) est un  $k$ -sommet (resp.  $\geq k$ -sommet,  $\leq k$ -sommet). De même, un  $k$ -voisin de  $u$  (resp.  $\geq k$ -voisin,  $\leq k$ -voisin) est un sommet de degré  $k$  (resp. au moins  $k$ , au plus  $k$ ) adjacent à  $u$ .

Lorsque l'on considère un graphe orienté, il est possible de diviser l'ensemble des voisins d'un sommets en deux sous-ensembles. Pour tout sommet  $v$  d'un graphe orienté  $G$ ,  $\Gamma_G(v) = \Gamma_G^+(v) \uplus \Gamma_G^-(v)$  (union disjointe) où  $\Gamma_G^+(v)$  et  $\Gamma_G^-(v)$  sont respectivement l'ensemble des extrémités terminales des arcs sortants du sommet  $v$  ( $\Gamma_G^+(v) = \{u \in V(G) \mid \vec{vu} \in A(G)\}$ ) et l'ensemble des extrémités initiales des arcs entrants du sommet  $v$  ( $\Gamma_G^-(v) = \{u \in V(G) \mid \vec{uv} \in A(G)\}$ ). De même,  $d_G(v) = d_G^+(v) + d_G^-(v)$  où  $d_G^+(v)$  et  $d_G^-(v)$  sont respectivement le *degré sortant* du sommet  $v$  ( $d_G^+(v) = |\Gamma_G^+(v)|$ ) et le *degré entrant* du sommet  $v$  ( $d_G^-(v) = |\Gamma_G^-(v)|$ ).

Un sommet  $v$  tel que  $d_G^+(v) = 0$  est appelé *sommet puits* (ou simplement *puits*). Inversement, un sommet  $v$  tel que  $d_G^-(v) = 0$  est appelé *sommet source* (ou simplement *source*). Finalement, un sommet de degré zéro est dit *sommet isolé*; un sommet isolé est donc à la fois un source et un puits. Dans le graphe  $G$  de la figure 1.1(b), le sommet  $v_6$  est un sommet source, le sommet  $v_4$  un sommet puits et le sommet  $v_1$  un sommet isolé.

Le *degré maximum* d'un graphe  $G$ , noté  $\Delta(G)$ , est le maximum de l'ensemble des degrés de tous les sommets de  $G$ . De même, le *degré minimum* de  $G$ , noté  $\delta(G)$ , est le minimum de l'ensemble des degrés de tous les sommets de  $G$ . Pour le graphe  $G$  de la figure 1.1, nous avons  $\Delta(G) = 4$  et  $\delta(G) = 0$ .

Un graphe dont tous les sommets ont même degré est un *graphe régulier*. Un graphe est *k-régulier* si tous ses sommets sont de degré  $k$ .

### 1.1.3 Chemins, cycles et connexité

Pour un graphe orienté, une *chaîne*  $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une séquence de sommets telle que  $\overrightarrow{u_i u_{i+1}}$  ou  $\overrightarrow{u_{i+1} u_i}$  est un arc pour tout  $i \in [1, n-1]$ . Une chaîne qui ne rencontre pas deux fois le même sommet (à l'exception éventuelle de ses extrémités) est dite *élémentaire*. Un *chemin*  $\beta = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  est une chaîne particulière où  $\overrightarrow{u_i u_{i+1}}$  est un arc pour tout  $i \in [1, n-1]$ . Dans le cas non orienté, seule la notion de chaîne est définie.

La *longueur* d'une chaîne ou d'un chemin est le nombre d'arcs qui la ou le constituent. Une *k-chaîne* (resp.  $\leq k$ -chaîne,  $\geq k$ -chaîne) est une chaîne de longueur  $k$  (resp. au plus  $k$ , au moins  $k$ ). De même, un *k-chemin* (resp.  $\leq k$ -chemin,  $\geq k$ -chemin) est un chemin de longueur  $k$  (resp. au plus  $k$ , au moins  $k$ ).

La *distance* entre deux sommets  $u$  et  $v$  est la longueur de la plus courte chaîne reliant  $u$  et  $v$ .

Une *chaîne alternée*  $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une séquence de sommets telle que  $\overrightarrow{u_{2i+\zeta} u_{2i+1+\zeta}}$  et  $\overrightarrow{u_{2i+2-\zeta} u_{2i+1-\zeta}}$  sont des arcs pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\}$  et  $\zeta \in \{0, 1\}$  fixé.

Un *cycle* est une chaîne élémentaire  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  où  $u_1 = u_n$ . De la même manière, un *circuit* est un chemin élémentaire  $[u_1, u_2, \dots, u_n]$  où  $u_1 = u_n$ . Dans le cas non orienté, seule la notion de cycle est définie.

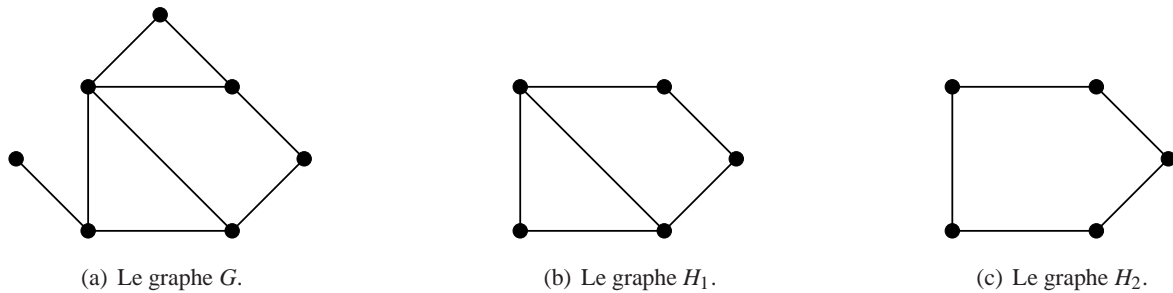


FIG. 1.2 – Exemples de sous-graphes.

Une arête ou un arc reliant deux sommets d'un cycle à distance au moins deux sur ce cycle est appelé *corde*.

La *maille* d'un graphe  $G$  est la longueur minimale d'un cycle contenu dans ce graphe. Elle est notée  $g(G)$ . La maille peut être infinie si le graphe considéré est sans cycle.

Un graphe est dit *connexe* (resp. *fortement connexe*) si toute paire de sommets de ce graphe est reliée par une chaîne (resp. un chemin).

#### 1.1.4 Sous-graphes et composantes connexes

Un graphe  $H$  est un *sous-graphe partiel* (ou plus simplement sous-graphe) d'un graphe  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  et toutes les arêtes de  $E(H)$  ont leurs extrémités dans  $V(H)$ ; nous le notons  $H \subseteq G$ . Par exemple, si nous considérons les trois graphes  $G$ ,  $H_1$  et  $H_2$  de la figure 1.2, nous avons  $H_1 \subseteq G$  et  $H_2 \subseteq G$ .

Un sous-graphe  $H$  de  $G$  est dit *propre* s'il est non vide et différent du graphe  $G$ ; on le note alors  $H \subset G$ .

Si toutes les arêtes de  $E(G)$  ayant leurs deux extrémités dans  $V(H)$  sont également dans  $E(H)$ , alors le graphe  $H$  est le sous-graphe de  $G$  induit par  $V(H)$ . Dans ce cas, nous le notons  $H = G[V(H)]$ . Par exemple, si nous considérons les trois graphes  $G$ ,  $H_1$  et  $H_2$  de la figure 1.2, le graphe  $H_1$  est un sous-graphe induit de  $G$ , alors que  $H_2$  n'est pas un sous-graphe induit de  $G$ .

Le sous-graphe de  $G$  obtenu en supprimant un sommet  $v$  et tous les arcs ou arêtes incidents à ce dernier est noté  $G \setminus \{v\}$  (ou plus simplement  $G \setminus v$ ). De même, le sous-graphe de  $G$  obtenu en supprimant l'arête ou l'arc  $uv$  est noté  $G \setminus \{uv\}$  (ou  $G \setminus uv$ ) (notons dans ce cas que supprimer l'arête  $uv$  n'implique pas la suppression des sommets  $u$  et  $v$ ). Ces notions s'étendent de manière naturelle aux ensembles de sommets, d'arêtes ou d'arcs. Si  $W$  est un sous-ensemble de  $V(G)$ , le graphe obtenu après suppression de tous les sommets de  $W$  est noté  $G \setminus W$ . De même, si  $F$  est un sous-ensemble d'arêtes de  $G$ , le graphe obtenu après suppression des arêtes de  $F$  est noté  $G \setminus F$ .

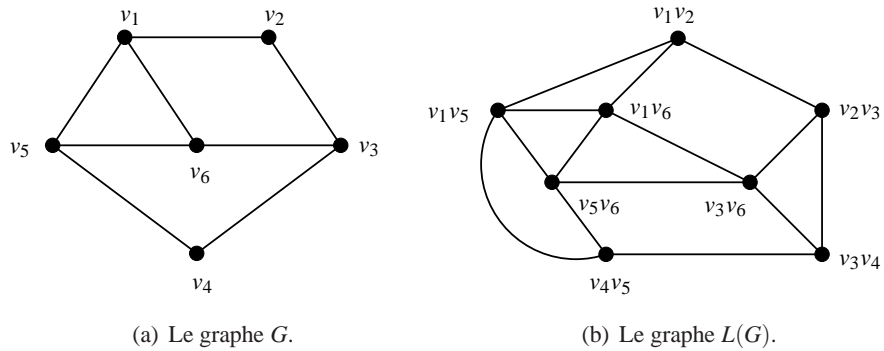


FIG. 1.3 – Exemple de graphe représentatif des arêtes.

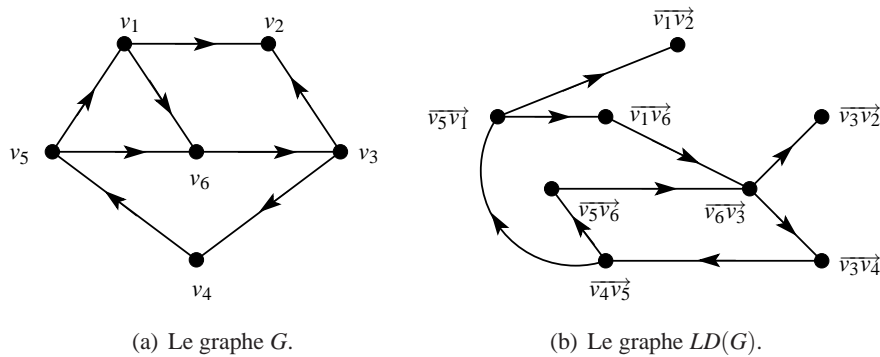


FIG. 1.4 – Exemple de graphe représentatif des arcs.

Une *composante connexe* (resp. *composante fortement connexe*) d'un graphe  $G$  est sous-graphe connexe maximal (resp. sous-graphe fortement connexe maximal), c'est-à-dire un sous-graphe tel que tout sous-graphe de  $G$  le contenant strictement n'est pas connexe (resp. fortement connexe).

Un graphe  $G$  est *k*-connexe (resp. *k*-arête-connexe, *k*-arc-connexe) si le nombre minimum de sommets (resp. arêtes, arcs) dont l'élimination rend  $G$  non connexe ou le réduit à un sommet unique est au moins  $k$ . Il est facile de voir que si un graphe est *k*-connexe, alors il est *k*-arête-connexe.

### 1.1.5 Graphe représentatif des arêtes / arcs

Le *graphe représentatif des arêtes* d'un graphe non orienté  $G$  (connu dans la littérature sous le nom de *line graph*), noté  $L(G)$ , est défini comme le graphe ayant pour sommets l'ensemble des arêtes de  $G$  et tel que deux sommets sont adjacents si et seulement si les deux arêtes correspondantes dans  $G$  sont adjacentes. La figure 1.3 montre un exemple de graphe représentatif des arêtes.

Le *graphe représentatif des arcs* d'un graphe orienté  $G$  (connu dans la littérature sous le nom de *line digraph*), noté  $LD(G)$ , est défini comme le graphe ayant pour sommets l'ensemble des arcs de  $G$  et tel que  $\vec{ef} \in LD(G)$  si et seulement si l'arc  $f$  est consécutif à l'arc  $e$  dans  $G$ . Ainsi, si deux arcs de  $G$  ont la même extrémité initiale ou la même extrémité terminale, les deux sommets correspondants

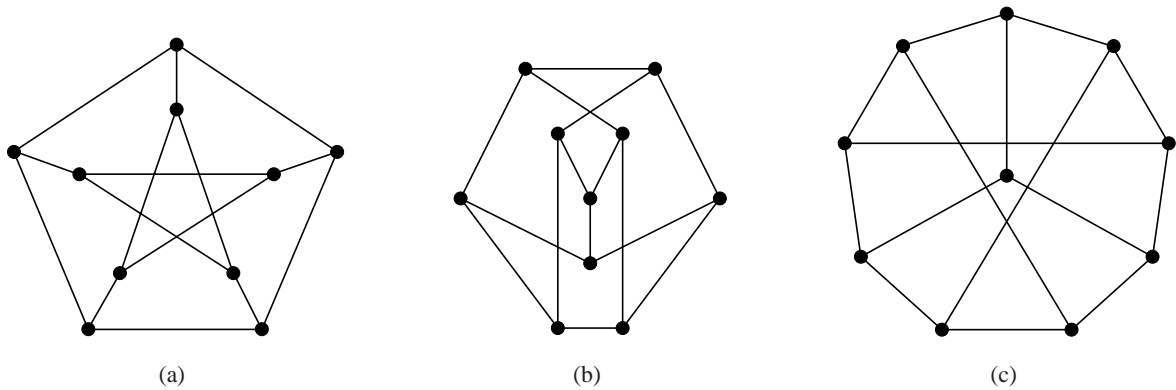


FIG. 1.5 – Trois représentations du graphe de Petersen.

du graphe représentatif des arcs ne seront pas adjacents. La figure 1.4 montre un exemple de graphe représentatif des arcs.

La notion de graphe représentatif des arêtes ou des arcs est une notion qui a été largement étudiée dans la littérature. Nous pouvons notamment nous référer à l'article de Hemminger et Beineke [HB78] pour plus de détails.

### 1.1.6 Homomorphismes, isomorphismes et automorphismes de graphes

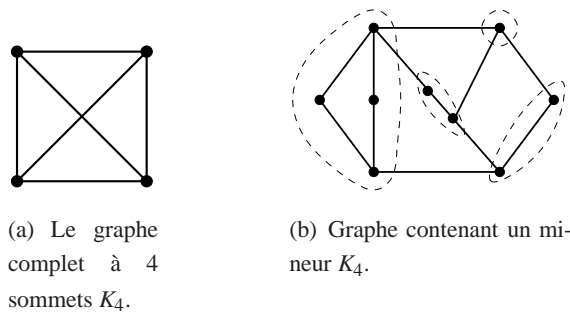
Un *homomorphisme* d'un graphe non orienté (resp. orienté)  $G$  vers un graphe non orienté (resp. orienté)  $H$  est une application  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$  telle que  $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$  (resp.  $\overrightarrow{\varphi(u)\varphi(v)} \in A(H)$ ) si  $uv \in E(G)$  (resp.  $\overrightarrow{uv} \in A(G)$ ). L'existence d'un homomorphisme d'un graphe  $G$  vers un graphe  $H$  est notée  $G \rightarrow H$ , et nous noterons  $G \not\rightarrow H$  le fait qu'il n'existe pas d'homomorphisme de  $G$  vers  $H$ . Ainsi, dans le cas non orienté, un homomorphisme préserve l'adjacence, alors que dans le cas orienté, il préserve également l'orientation des arcs.

Nous verrons dans la dernière partie de ce chapitre que la notion d'homomorphisme est étroitement liée à la notion de coloration.

Pour de plus amples détails, il est possible de se référer au livre de Hell et Nešetřil sur les homomorphismes de graphes [HN04].

Un *isomorphisme* de  $G$  vers  $H$  est une application  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$  telle que  $uv$  est une arête (resp.  $\overrightarrow{uv}$  est un arc) de  $G$  si et seulement si  $\varphi(u)\varphi(v)$  est une arête (resp.  $\overrightarrow{\varphi(u)\varphi(v)}$  est un arc) de  $H$ . Nous disons alors que  $G$  et  $H$  sont isomorphes et nous le notons  $G \cong H$ . Par exemple, les trois graphes de la figure 1.5 sont isomorphes et représentent le graphe de Petersen.

Un isomorphisme de  $G$  vers  $G$  est un *automorphisme*.

FIG. 1.6 – Exemple de graphe contenant un mineur  $K_4$ .

### 1.1.7 Graphes mineurs

La *contraction* d'une arête  $uv$  d'un graphe  $G$  est l'opération qui consiste à remplacer les deux sommets  $u$  et  $v$  par un unique sommet  $w$  et à relier ce dernier à l'ensemble des voisins de  $u$  et de  $v$ .

Un graphe  $H$  est un *mineur* d'un graphe  $G$  si  $H$  est isomorphe à un graphe qui peut être obtenu à partir de  $G$  par une série de suppression de sommets, de suppressions d'arêtes et de contractions d'arêtes.

Par exemple, le graphe de la figure 1.6(b) contient comme mineur le graphe  $K_4$  de la figure 1.6(a). En effet, les quatre composantes identifiées à l'aide des régions en pointillées correspondent aux sommets du graphe  $K_4$ , chacune d'entre elles étant adjacente aux trois autres.

Remarquons que si  $I$  est un mineur de  $H$  et  $H$  un mineur de  $G$ , alors  $I$  est un mineur de  $G$ .

Un certain nombre de classes de graphes peuvent être caractérisées par mineurs exclus. Nous verrons dans la partie suivante, décrivant certaines classes de graphes, quelques caractérisations par mineurs exclus.

## 1.2 Quelques classes de graphes

Nous décrivons dans cette partie différentes classes de graphes que nous aurons l'occasion de rencontrer dans la suite de ce mémoire.

### 1.2.1 Stables, graphes complets et tournois

Un *stable* est un ensemble de sommets indépendants (*i.e.* pour tous  $u, v$  deux sommets de cet ensemble,  $u$  et  $v$  ne sont pas adjacents).

À l'inverse, un *graphe complet* à  $n$  sommets, noté  $K_n$ , est un graphe non orienté tel que toute paire de sommets est reliée par une arête. Ce graphe est aussi appelé une *k-clique*. Par exemple, le graphe complet à 4 sommets, noté  $K_4$ , est représenté sur la figure 1.6(a).

Dans le cas orienté, un *tournoi* est un graphe orienté tel que toute paire de sommets distincts  $u$  et  $v$  sont voisins. Un tournoi est donc une orientation d'un graphe complet. Les quatre orientations non

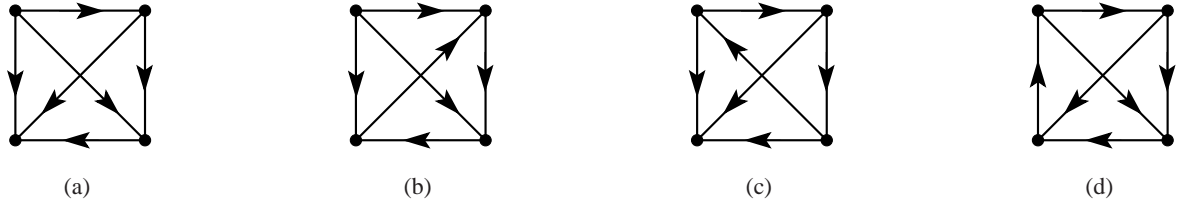


FIG. 1.7 – Les quatre tournois à 4 sommets non isomorphes.

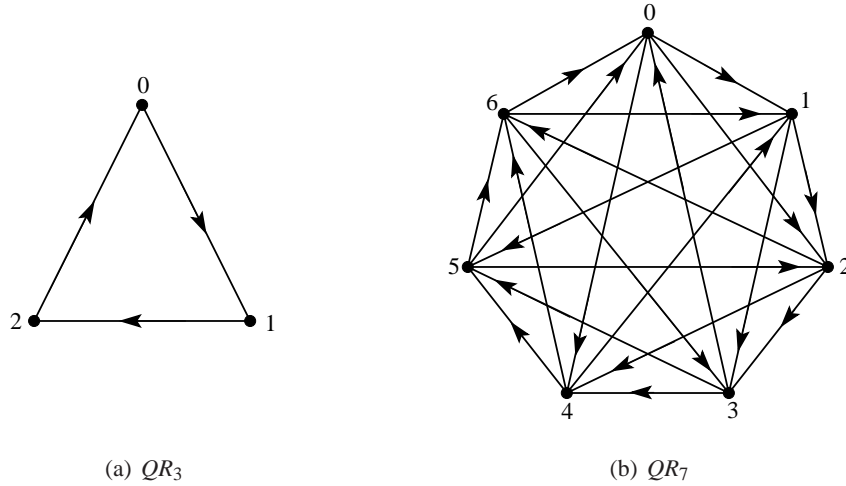


FIG. 1.8 – Exemples de tournois de Paley.

isomorphes du graphe complet à 4 sommets sont données sur la figure 1.7.

Le tournoi *transitif* à  $n$  sommets, noté  $TT_n$ , est le tournoi défini par  $V(TT_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  et  $\overrightarrow{v_i v_j} \in A(TT_n)$  si et seulement si  $i < j$ .

Enfin, nous introduisons un dernier type de tournois : *les tournois construits à partir de résidus quadratiques non nuls*. Ces derniers ont un certain nombre de propriétés qui seront développées plus loin. L'ensemble des résidus quadratiques d'un entier  $n$  est l'ensemble des entiers  $QR = \{p^2 \pmod{n}, p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ . Les tournois que nous considérons ici sont construits à partir des résidus quadratiques non nuls,  $QR \setminus \{0\}$ . Soit  $p$  un entier premier et  $q = p^i$  une puissance de  $p$ . Si  $q$  est de la forme  $4k+3$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , le graphe  $QR_q$  construit à partir des résidus quadratiques non nuls de  $q$  se définit par :

- $V(QR_q) = \{0, 1, \dots, q-1\}$  ;
- $E(QR_q) = \{\overrightarrow{ij} / j-i \pmod{q} \text{ est un résidu quadratique non nul de } q\}$ .

Nous pouvons vérifier que le graphe  $QR_q$  ainsi obtenu est un tournoi (*i.e.*  $QR_q$  ne contient pas d'arcs opposés et chaque paire de sommets est adjacente). Ces tournois sont connus sous le nom de *tournois de Paley*. Ces tournois ont de nombreuses propriétés intéressantes et ont été fréquemment étudiés (voir e.g. [AS92],[GS71],[Moo68],[RB78]).

Nous pouvons voir sur la figure 1.8 deux exemples de tournois de Paley. Il n'existe qu'un seul

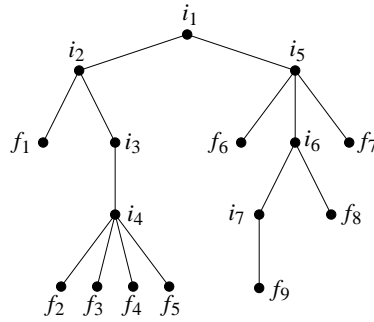


FIG. 1.9 – Exemple d'arbre.

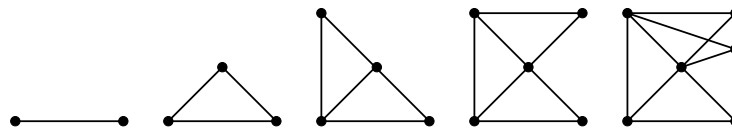


FIG. 1.10 – Exemple de construction d'un 2-arbre.

résidu quadratique non nul de 3 : l'entier 1 (figure 1.8(a)). En revanche, il existe trois résidus quadratiques non nuls de 7 : les entiers 1, 2 et 4 (figure 1.8(b)).

Un tournoi  $T$  est *arc-transitif* si, pour toute paire d'arcs  $\vec{uv}$  et  $\vec{xy}$ , il existe un automorphisme  $\varphi$  de  $T$  tel que  $\varphi(u) = x$  et  $\varphi(v) = y$ . Fried [Fri70] a observé que les tournois de Paley sont arc-transitifs. En effet, si  $\vec{ij}$  et  $\vec{hk}$  sont des arcs de  $QR_q$ , alors l'application  $\pi(x) = \left(\frac{k-h}{j-i}\right)x + \left(h - \frac{k-h}{j-i}i\right)$  est une permutation envoyant le sommet  $i$  sur  $h$  et le sommet  $j$  sur  $k$ . De plus, Berggren [Ber72] a établi qu'un tournoi est arc-transitif si et seulement s'il est un tournoi de Paley.

### 1.2.2 Arbres, forêts

Un graphe ne contenant aucun cycle est une *forêt*. Chaque composante connexe d'une forêt est un *arbre*. Les sommets de degré 1 sont appelés *feuilles*, les autres sont les sommets *internes*. Un exemple d'arbre est donné sur la figure 1.9 : les sommets  $i_1, i_2, \dots, i_8$  sont les sommets internes alors que les sommets  $f_1, f_2, \dots, f_9$  sont les feuilles.

La notion d'arbre peut se généraliser à la notion de *k-arbre*. Un *k-arbre* est un graphe construit de façon récursive comme suit :

- le graphe complet à  $k$  sommets est un *k-arbre* ;
- si  $G$  est un *k-arbre*, le graphe  $G'$  obtenu en ajoutant un sommet à  $G$  relié à tous les sommets d'une  $k$ -clique est un *k-arbre*.

Il est alors clair qu'un 1-arbre est un arbre. Sur la figure 1.10, nous pouvons trouver un exemple de construction d'un 2-arbre.

Enfin, un *k-arbre partiel* est un sous-graphe d'un *k-arbre*. Nous pouvons noter que la classe des

2-arbres est une classe équivalente à la classe des graphes séries-parallèles [Duf65] ou encore à la classe des graphes sans mineur  $K_4$ .

### 1.2.3 Les graphes $p$ -partis

Un graphe  $G$  est dit  $p$ -parti s'il existe une partition de  $V(G)$  en  $p$  parties  $V_1, V_2, \dots, V_p$  (i.e.,  $V(G) = V_1 \uplus V_2 \uplus \dots \uplus V_p$ ) telle que chaque arête ou arc de  $G$  a ses extrémités dans deux ensembles  $V_i$  et  $V_j$  différents.

En particulier, si  $p = 2$ ,  $G$  est un graphe *biparti*, et si  $V(G) = X \uplus Y$ , nous le notons  $G = (X, Y; E)$ . Enfin,  $G$  est un graphe  $p$ -parti *complet* si pour toute paire de parties  $V_i$  et  $V_j$  ( $i \neq j$ ), tout sommet de  $V_i$  est adjacent à tout sommet de  $V_j$ . Le graphe *biparti complet*  $G = (X, Y; E)$  où  $|X| = s$  et  $|Y| = t$  est généralement noté  $K_{s,t}$ .

### 1.2.4 Les graphes planaires et planaires extérieurs

Un graphe *planaire* est un graphe ayant une représentation dans le plan sans croisement d'arêtes (ou d'arc pour un graphe orienté). Par exemple, le graphe  $K_4$  est un graphe planaire car il est possible de le représenter dans le plan sans croisement. Une *face* est une région du plan délimitée par un ensemble d'arêtes et telle que deux points arbitraires de cette région peuvent être reliés par un trait ne rencontrant ni sommets, ni arêtes. La seule face dont la surface est infinie est la face *externe*. Le *rang* d'une face  $f$ , noté  $r(f)$ , est la longueur de  $f$ , en d'autres termes le nombre d'arêtes délimitant  $f$ . Une face de rang  $k$  (resp. au moins  $k$ , au plus  $k$ ) est une  $k$ -face (resp.  $\geq k$ -face,  $\leq k$ -face). L'ensemble des faces d'un graphe  $G$  est noté  $F(G)$ .

Euler a prouvé la relation suivante :

**Théorème 1.1 (Formule d'Euler).** *Si  $G$  est un graphe planaire,  $n$  son nombre de sommets,  $m$  son nombre d'arêtes et  $f$  son nombre de faces, alors*

$$n - m + f = 2.$$

Les graphes  $K_5$  et  $K_{3,3}$  sont les deux plus petits graphes non planaires. De plus, Kuratowski [Kur30] a établi la caractérisation suivante des graphes planaires :

**Théorème 1.2.** [Kur30] *Un graphe fini est planaire si et seulement s'il est sans mineur  $K_5$  et sans mineur  $K_{3,3}$ .*

Le *degré moyen maximum* d'un graphe  $G$ , noté  $\text{mad}(G)$ , est le maximum du degré moyen de tous les sous-graphes de  $G$  :

$$\text{mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$$

Dans le cas des graphes planaires, le degré maximum moyen est un paramètre lié à la maille comme suit :



**Observation 1.3.** Soit  $G$  un graphe planaire de maille  $g$ . Alors  $\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$ .

**Preuve.** Si  $G$  est de maille  $g$ , alors  $g|F(G)| \leq 2|E(G)|$ . Par la formule d'Euler, nous obtenons

$$2g - g|V(G)| + g|A(G)| = g|F(G)| \leq 2|A(G)|$$

et par conséquent

$$2g + (g-2)|A(G)| \leq g|V(G)|$$

$$2|A(G)|(2g + (g-2)|A(G)|) \leq 2|A(G)|g|V(G)|$$

$$\frac{2|A(G)|}{|V(G)|} \leq \frac{2g|A(G)|}{2g + (g-2)|A(G)|} < \frac{2g}{g-2}$$

□

Un graphe planaire *extérieur* est un graphe ayant une représentation planaire telle que tous les sommets du graphe se trouvent sur la même face. La classe des graphes planaires extérieurs est une sous classe de la classe des 2-arbres partiels.

### 1.2.5 Les graphes $k$ -dégénérés

Un graphe  $G$  est  $k$ -dégénéré si tout sous-graphe  $H$  de  $G$  contient un sommet de degré au plus  $k$ . Par exemple, une forêt est 1-dégénérée, un  $k$ -arbre est  $k$ -dégénéré ou encore un graphe planaire extérieur est 2-dégénéré. De même, en utilisant la formule d'Euler, nous pouvons vérifier que tout graphe planaire est 5-dégénéré.

### 1.2.6 Notations de différentes classes de graphes

Dans la suite de ce mémoire, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathcal{D}_k$  : la classe des graphes de degré maximum au plus  $k$ ,
- $\mathcal{T}^k$  : la classe des  $k$ -arbres partiels,
- $\mathcal{T}_g^k$  : la classe des  $k$ -arbres partiels de maille au moins  $g$ ,
- $\mathcal{P}$  : la classe des graphes planaires,
- $\mathcal{P}_g$  : la classe des graphes planaires de maille au moins  $g$ ,
- $\mathcal{O}$  : la classe des graphes planaires extérieurs,
- $\mathcal{O}_g$  : la classe des graphes planaires extérieurs de maille au moins  $g$ .

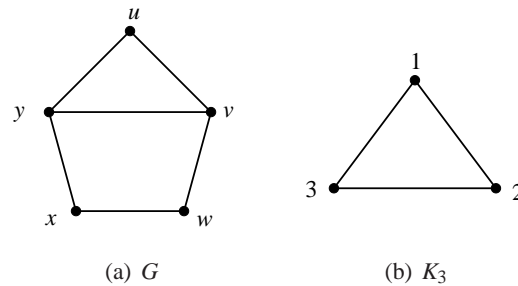


FIG. 1.11 – Le graphe  $G$  admet un homomorphisme vers  $K_3$  :  $G \rightarrow K_3$ .

### 1.3 Quelques notions de coloration

Dans cette dernière partie, nous considérons un certain nombre de colorations connues dans la littérature. Nous donnons leurs définitions ainsi que certains résultats fondamentaux.

Notons qu'il existe de nombreux types de colorations de graphes que nous n'aborderons pas dans cette thèse. Nous pouvons cependant nous référer à l'ouvrage de Jensen et Toft [JT95] qui rassemble une grande majorité de résultats de coloration ainsi que de nombreux problèmes ouverts.

Dans la suite,  $C = \{0, 1, \dots, k-1\}$  désigne un ensemble de  $k$  couleurs.

#### 1.3.1 Colorations de graphes non orientés

##### 1.3.1.1 Colorations propres

Une *sommet-coloration propre* d'un graphe non orienté  $G$  est une application  $f$  définie sur  $V(G)$  telle que pour toute arête  $uv$ ,  $f(u) \neq f(v)$ . Si  $f : V(G) \rightarrow C$ , alors  $f$  une  $k$ -*sommet-coloration propre* de  $G$ . Le nombre minimum de couleurs nécessaires pour toute sommet-coloration d'un graphe  $G$  est le *nombre chromatique* de  $G$ , noté  $\chi(G)$ .

Il est assez facile de voir que tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta(G)$  est tel que  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Cependant, Brooks a amélioré cette borne :

**Théorème 1.4.** [Bro41] *Soit  $G$  un graphe connexe. Si  $G$  n'est ni un cycle d'ordre impair, ni un graphe complet, alors  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

La borne obtenue par le théorème précédent peut être améliorée en considérant le degré minimum des sous-graphes induits :

**Théorème 1.5 (Halin, 1967).** *Soit  $G$  un graphe  $k$ -dégénéré. Alors  $\chi(G) \leq k + 1$ .*

Une sommet-coloration de  $G$  peut être vue comme un homomorphisme de  $G$  dans un graphe complet. En particulier, si  $G \rightarrow K_n$ , alors  $\chi(G) \leq n$ . De plus, si  $G \not\rightarrow K_{n-1}$ , alors  $\chi(G) = n$ . Par exemple, le graphe de la figure 1.11(a) admet un homomorphisme vers  $K_3$ . En effet, l'application  $f : V(G) \rightarrow$

$V(K_3)$  définie comme  $f(u) = 1, f(v) = 2, f(w) = 1, f(x) = 2$  et  $f(y) = 3$  est bien un homomorphisme de  $G$  vers  $K_3$ .

Le nombre chromatique a été largement étudié et de nombreux résultats le concernant peuvent être trouvés dans la littérature. Nous pouvons notamment citer le célèbre résultat de Appel, Haken et Kock obtenu en 1977 qui affirme que le nombre chromatique de tout graphe planaire est au plus 4 [AH77, AHK77].

Une *arête-coloration propre* d'un graphe non orienté  $G$  est une application  $f$  définie sur  $E(G)$  telle que pour tous  $u, v, w \in V(G)$  tels que  $uv, vw \in E(G)$ ,  $f(uv) \neq f(vw)$ . Si  $f : E(G) \rightarrow C$ , alors  $f$  est une *k-arête-coloration* de  $G$ . Le nombre minimum de couleurs nécessaire pour toute arête coloration d'un graphe  $G$  est l'*indice chromatique* de  $G$ , noté  $\chi'(G)$ . Il apparaît clairement qu'une arête-coloration propre d'un graphe  $G$  est une sommet-coloration propre du graphe représentatif des arêtes  $L(G)$  de  $G$ . Nous avons donc  $\chi'(G) = \chi(L(G))$ .

Le plus important résultat portant sur ce paramètre est dû à Vizing en 1964 :

**Théorème 1.6.** [Viz64] *Pour tout graphe  $G$ , nous avons  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

Le théorème de Vizing permet donc de classer les graphes en deux classes : les graphes  $G$  ayant un indice chromatique  $\Delta(G)$  sont de *classe 1*, alors que les graphes  $G$  ayant un indice chromatique  $\Delta(G) + 1$  sont de *classe 2*. Le problème qui consiste à déterminer si un graphe simple est de classe 1 ou 2 est un problème NP-complet.

### 1.3.1.2 Colorations acycliques

Une *sommet-coloration acyclique* d'un graphe non orienté  $G$  est une sommet coloration propre de  $G$  telle qu'aucun cycle de  $G$  ne soit bicolore. En d'autres termes, une sommet coloration de  $G$  est acyclique si le sous-graphe induit par n'importe quelle paire de couleurs est une forêt (*i.e.* sans cycle). Le nombre minimum de couleurs nécessaires pour toute sommet coloration acyclique d'un graphe  $G$  est le *nombre chromatique acyclique* de  $G$ , noté  $\chi_a(G)$ .

Ce paramètre fut introduit et étudié pour la première fois par Grünbaum dans [Grü73]. De nombreux auteurs, tels que Grünbaum, Mitchem, Albertson, Berman, Kostochka ou encore Borodin, ont essayé de déterminer le nombre chromatique acyclique des graphes planaires. La borne optimale fut obtenue par Borodin en 1979 :

**Théorème 1.7.** [Bor79] *Tout graphe planaire est acycliquement 5-coloriable.*

Concernant les graphes de faible degré, il est relativement facile de montrer que tout graphe de degré maximum au plus 3 est acycliquement 4-coloriable. D'autre part, Burnstein a caractérisé le nombre chromatique acyclique des graphes de degré au plus quatre :

**Théorème 1.8.** [Bur79] *Tout graphe de degré maximum au plus 4 est acycliquement 5-coloriable.*

Pour le cas général, Alon, McDiarmid et Reed ont utilisé une approche probabiliste :

**Théorème 1.9.** [AMR91] Si  $G$  est un graphe de degré maximum  $\Delta$ , alors  $\chi_a(G) = O(\Delta^{4/3})$  lorsque  $\Delta \rightarrow \infty$ .

Une *arête-coloration acyclique* d'un graphe non orienté  $G$  est une arête coloration propre telle que le graphe induit par deux classes de couleurs est une forêt. Le nombre minimum de couleurs nécessaires pour toute arête coloration acyclique de  $G$  est appelé l'*indice chromatique acyclique* de  $G$ , noté  $\chi'_a(G)$ .

Actuellement, dans le cas général, la meilleure borne connue pour l'indice chromatique acyclique des graphes de degré au plus  $\Delta$  est due à Alon, McDiarmid, et Reed :

**Théorème 1.10.** [AMR91] Tout graphe de degré maximum d'au plus  $\Delta$  est acycliquement  $(16\Delta)$ -arête coloriable.

Cette borne supérieure semble particulièrement éloignée de la borne optimale, mais aussi très difficile à améliorer. Alon, Sudakov et Zaks ont d'ailleurs émis la conjecture suivante :

**Conjecture 1.11.** [ASZ01] Soit  $G$  un graphe  $\Delta$ -régulier. Alors

$$\chi'_a(G) \leq \begin{cases} \Delta + 2 & \text{si } G \cong K_{2n}, \\ \Delta + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Récemment, Muthu, Narayanan et Subramanian ont étudié ce paramètre pour les graphes de grande maille et ont alors obtenu de meilleures bornes.

**Théorème 1.12.** [MNS05] Tout graphe de degré maximum au plus  $\Delta$  et de maille  $g \geq 9$  est acycliquement  $(6\Delta)$ -arête coloriable.

Finalement, Nešetřil et Wormald ont étudié l'indice chromatique acyclique des graphes  $\Delta$ -réguliers :

**Théorème 1.13.** [NW05] Un graphe aléatoire  $\Delta$ -régulier est asymptotiquement presque sûrement acycliquement  $(\Delta + 1)$ -arête coloriable.

Dans le chapitre 4, nous étudions l'indice chromatique acyclique des graphes de faible densité (plus précisément des graphes de degré moyen maximum au plus  $\frac{7}{3}$ ) et obtenons sa valeur optimale.

## 1.3.2 Colorations de graphes orientés

### 1.3.2.1 Sommet-coloration

La notion de coloration orientée fut introduite en 1994 par Courcelle [Cou94]. Une *sommet-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  est une application  $f$  définie sur  $V(G)$  telle que

- (i)  $f(u) \neq f(v)$  si  $\vec{uv}$  est un arc de  $G$ ,
- (ii)  $f(v) \neq f(x)$  si  $\vec{uv}$  et  $\vec{xy}$  sont deux arcs de  $G$  tels que  $f(u) = f(y)$ .

Si  $f : V(G) \rightarrow C$ , alors  $f$  est une  $k$ -sommets-coloration orientée. Le nombre minimum de couleurs nécessaires pour toute sommets-coloration orientée d'un graphe  $G$  est le *nombre chromatique orienté* de  $G$ , noté  $\chi_o(G)$ . Si  $\mathcal{F}$  est une classe de graphes, alors nous définissons  $\chi_o(\mathcal{F})$  comme le maximum des nombres chromatiques orientés pris sur tous les graphes de la classe  $\mathcal{F}$ .

De même que dans le cas non orienté, une coloration orientée d'un graphe orienté  $G$  peut être vue comme un homomorphisme de  $G$  vers un graphe orienté  $H$ . Si  $G \rightarrow H$ , alors nous dirons que  $G$  admet une  $H$ -sommets-coloration. Le nombre chromatique orienté peut alors être défini comme la taille du plus petit graphe orienté  $H$  tel que  $G \rightarrow H$ . Il apparaît donc d'après la définition d'une sommets-coloration orientée que tous les arcs reliant un sommet colorié  $i$  et un sommet colorié  $j$  seront orientés dans la même direction : soit tous de  $i$  vers  $j$ , soit tous de  $j$  vers  $i$ . En effet, le graphe cible  $H$ , qui est un graphe orienté, ne contient pas d'arcs opposés.

Le nombre chromatique orienté de nombreuses classes de graphes a été considéré dans la littérature et un grand nombre de résultats sont actuellement connus. Nous en citerons certains dans le chapitre 2, avant d'étudier le nombre chromatique orienté de certaines classes de graphes telles que les graphes planaires extérieurs, les 2-arbres partiels ou encore les graphes planaires de maille donnée.

### 1.3.2.2 Arc-coloration

En parcourant la littérature, nous pouvons rencontrer différents types de colorations d'arcs de graphes orientés. Nous donnons ici la définition de quelques-unes d'entre elles.

En 1972, Harner et Entringer [HE72] introduisent l'arc-coloration d'un graphe orienté  $G$  comme étant une application  $f$  définie sur  $A(G)$  vérifiant que pour tous  $u, v, w \in V(G)$  tels que  $\vec{uv}, \vec{vw} \in A(G)$ ,  $f(\vec{uv}) \neq f(\vec{vw})$ . Il est facile de voir que l'arc-coloration d'un graphe orienté  $G$  est une sommets-coloration (non orientée) du graphe sous-jacent de  $LD(G)$ .

Harner et Entringer ont notamment étudié cette arc-coloration pour les tournois. Depuis, d'autres auteurs se sont intéressés à cette coloration. En particulier, Poljak et Rödl [PR81] ont amélioré certains résultats de Harner et Entringer. Récemment, Bessy, Havet et Birmelé [BHB06] ont considéré cette arc-coloration et ont obtenu des bornes en fonction du degré entrant maximum et du degré sortant maximum du graphe.

En 1989, Algor et Alon [AA89] ont introduit la notion d'*étoile arboricité dirigée* (*directed star arboricity* en anglais) d'un graphe orienté  $G$ , définie comme le nombre minimum de forêts d'*étoiles sources* arc-disjointes nécessaires pour couvrir  $A(G)$  (une *forêt d'étoiles sources* est une forêt dont toutes les composantes connexes sont des étoiles sources, c'est-à-dire des étoiles dont les arcs sont orientés du centre vers les feuilles). Cette notion d'arboricité peut être définie en terme de partition des arcs ou d'arc-coloration. Une  $k$ -*étoile-coloration dirigée* d'un graphe  $G$  est une partition de  $A(G)$  en  $k$  forêts d'étoiles sources  $F_1, F_2, \dots, F_k$ . De façon équivalente, une  $k$ -*étoile coloration dirigée* est une  $k$ -coloration de  $A(G)$  telle que

- (i) pour tous  $u, v, w \in V(G)$  tels que  $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vw} \in A(G)$ ,  $f(\overrightarrow{uv}) \neq f(\overrightarrow{vw})$ ,
- (ii) pour tous  $u, v, w \in V(G)$  tels que  $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{wv} \in A(G)$ ,  $f(\overrightarrow{uv}) \neq f(\overrightarrow{wv})$ .

Dans le chapitre 3 de ce mémoire, nous introduisons un nouveau type d'arc-coloration : l'*arc-coloration orientée*. Dans le cas non orienté, une arête-coloration d'un graphe non orienté  $G$  est une sommet-coloration de  $L(G)$ . Dans le cas orienté, nous pouvons, de la même manière, définir une *arc-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  comme une sommet-coloration orientée de  $LD(G)$ .

En d'autres termes, une *arc-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  est une application  $f$  définie sur  $A(G)$  telle que

- (i) pour tous  $u, v, w \in V(G)$  tels que  $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vw} \in A(G)$ ,  $f(\overrightarrow{uv}) \neq f(\overrightarrow{vw})$ ,
- (ii) pour tous  $u, v, w, x, y, z \in V(G)$  tels que  $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vw}, \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \in A(G)$  et  $f(\overrightarrow{uv}) = f(\overrightarrow{yz})$ ,  $f(\overrightarrow{vw}) \neq f(\overrightarrow{xy})$ .

Si  $f : A(G) \rightarrow C$ , alors  $f$  est une *k-arc-coloration orientée* de  $G$ . L'*indice chromatique orienté* de  $G$ , noté  $\chi'_o(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une *k-arc-coloration orientée*.

En termes d'homomorphismes, une *k-arc-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  est un homomorphisme de  $LD(G)$  vers un graphe orienté  $H$  à  $k$  sommets. Si  $LD(G) \rightarrow H$ , alors nous dirons que  $G$  admet une *H-arc-coloration*.

Nous pouvons remarquer que l'arc-coloration définie par Harner et Entringer (voir ci-dessus) est une version faible de notre arc-coloration où la condition (ii) n'est pas nécessairement vérifiée.

Nous considérerons dans le chapitre 4 également une nouvelle notion de partition d'arcs de graphes orientés : l'*étoile arboricité orientée acircuitique*. Cette notion découle de la notion d'étoile arboricité dirigée introduite par Algor et Alon [AA89] à laquelle nous ajoutons une contrainte supplémentaire (l'acircuitité). L'*étoile arboricité orientée acircuitique* d'un graphe orienté  $G$ , notée  $\text{adst}(G)$ , est définie comme le nombre minimum de forêts d'étoiles sources arc-disjointes nécessaires pour couvrir  $A(G)$  de telle sorte que l'union de deux telles forêts ne contienne pas de circuit. Nous dirons qu'un graphe orienté  $G$  admet une *k-étoile-coloration orientée acircuitique*, ou plus simplement une *k-adst-coloration*, si  $\text{adst}(G) \leq k$ .

Notre motivation principale lorsque nous avons introduit l'étoile arboricité orientée acircuitique était l'obtention de bornes pour l'indice chromatique orienté. Nous développons ce point dans le chapitre 4 avant d'étudier l'étoile arboricité orientée acircuitique de certaines classes de graphes.

## Chapitre 2

# Sommet-coloration orientée

Une sommet-coloration propre d'un graphe non orienté  $G$  est une application  $f : V(G) \rightarrow C$  (où  $C$  est un ensemble de couleurs) telle que  $f(u) \neq f(v)$  si  $uv \in E(G)$ . Si  $|C| = k$ , alors  $f$  est une  $k$ -sommet-coloration propre de  $G$ . Cette coloration peut être également vue comme un homomorphisme de  $G$  vers le graphe complet  $K_k$  à  $k$  sommets. Le nombre chromatique est alors le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -sommet coloration propre. Il correspond également au plus petit entier  $k$  tel que  $G \rightarrow K_k$ .

Cette notion de sommet-coloration peut être étendue au cas orienté. Elle a été considérée pour la première fois par Courcelle en 1994 dans [Cou94]. Une *sommet-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  est un homomorphisme de  $G$  vers un graphe  $H$ . Le *nombre chromatique orienté* du graphe orienté  $G$ , noté  $\chi_o(G)$ , est défini comme le plus petit entier  $k$  tel qu'il existe un graphe orienté  $H$  à  $k$  sommets tel que  $G \rightarrow H$ . Un tel graphe orienté  $H$  est alors appelé *graphe cible* et ses sommets sont appelés *couleurs*. on dit alors que  $G$  est  $H$ -sommet-coloriable.

Une sommet-coloration orientée  $f$  de  $G$  doit alors satisfaire les deux conditions suivantes :

- (i)  $f(u) \neq f(v)$  si  $uv \in A(G)$ ,
- (ii)  $f(v) \neq f(x)$  si  $\vec{uv}, \vec{xy} \in A(G)$  et  $f(u) = f(y)$ .

Observons par exemple le graphe de la figure 2.1(a) : ce graphe admet une 7-sommet-coloration orientée. Nous pouvons en effet vérifier que la sommet-coloration orientée proposée sur la figure satisfait bien le fait que deux sommets adjacents obtiennent des couleurs distinctes et que s'il existe un arc reliant un sommet colorié  $a$  à un sommet colorié  $b$ , alors il n'existe pas d'arc reliant un sommet colorié  $b$  à un sommet colorié  $a$ . Cette sommet-coloration orientée n'est cependant pas optimale ; nous pouvons effectivement remarquer que ce graphe admet 5-sommet-coloration orientée (voir la figure 2.1(b)). Cette 5-sommet-coloration orientée est en l'occurrence optimale en nombre de couleurs : il n'est pas très difficile de vérifier que quatre couleurs ne suffisent pas pour satisfaire les deux conditions (i) et (ii) ci-dessus.

Une  $k$ -sommet-coloration orientée de  $G$  est donc une partition des sommets de  $G$  en  $k$  ensembles  $V_1, V_2, \dots, V_k$  indépendants tels que pour toute paire  $i, j$  d'entiers,  $i \neq j$ , les arcs présents entre  $V_i$  et  $V_j$

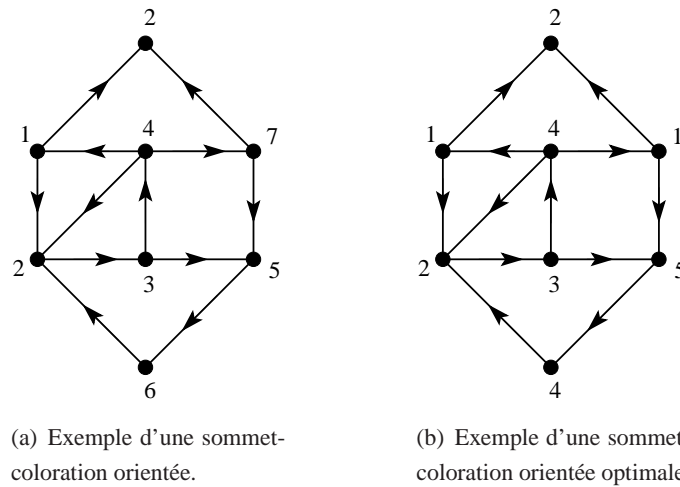
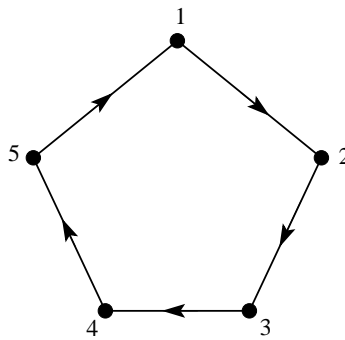


FIG. 2.1 – Deux exemples de sommet-colorations orientées du même graphe.

FIG. 2.2 – Une 5-sommet-coloration orientée du circuit à cinq sommets  $C_5$ .

sont orientés dans la même direction (*i.e.* soit tous les arcs vont de  $V_i$  vers  $V_j$ , soit tous les arcs vont de  $V_j$  vers  $V_i$ ).

Le *nombre chromatique orienté* d'un graphe orienté  $G$ , noté  $\chi_o(G)$ , est donc le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -sommet-coloration orientée. Pour le graphe  $G$  de la figure 2.1(b), nous avons  $\chi_o(G) = 5$ . Pour un graphe non orienté  $H$ ,  $\chi_o(H)$  est défini comme le maximum des nombres chromatiques orientés pris sur toutes les orientations de  $G$ . De plus, si  $\mathcal{F}$  est une classe de graphes, le nombre chromatique orienté  $\chi_o(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$  est défini comme le maximum des nombres chromatiques orientés pris sur tous les graphes de  $\mathcal{F}$ .

Notons que d'après la condition (i), une sommet-coloration orientée est une sommet-coloration propre :  $\chi(G) \leq \chi_o(G)$  pour tout graphe orienté  $G$ . De plus, il est clair que, d'après la condition (ii), les trois sommets constituant un 2-chemin nécessitent chacun une couleur différente. Ainsi, si nous considérons le circuit à cinq sommets  $C_5$  (voir la figure 2.2), toute paire de sommets appartient à un 2-chemin ; les couleurs des sommets de  $C_5$  doivent donc être deux à deux distinctes et toute sommet-



coloration orientée nécessite cinq couleurs.

L'étude de la sommet-coloration orientée est souvent plus complexe que celle de la sommet-coloration propre (non orientée). En effet, dans le cas non orienté, les contraintes de coloration sont locales : il suffit de considérer le voisinage d'un sommet pour savoir s'il est possible d'utiliser une couleur donnée pour le colorier. À l'inverse, dans le cas orienté, les contraintes sont globales : lorsque nous voulons colorier un sommet avec une couleur donnée, il ne suffit pas de vérifier les couleurs présentes dans le voisinage du sommet, nous devons considérer les couleurs de chacun des sommets du graphe pour être sûr de ne pas contredire la condition (ii).

Le nombre chromatique orienté de nombreuses classes de graphes a été considéré dans la littérature. En particulier, certaines bornes (supérieures et/ou inférieures) sont connues pour le nombre chromatique orienté des graphes de degré borné [KSZ97, Vig97, Woo04], des  $k$ -arbres partiels [Sop97], des graphes planaires de maille donnée [BI05a, BI05b, BKN<sup>+</sup>99, Och04, RS94, Sop02], des graphes planaires extérieurs [HD05, NRS97, Sop97], des grilles à deux dimensions [FRR03, ST04], des graphes de Halin [HDS06] ou encore des graphes de subdivision [Woo05]. Nous pouvons retrouver dans [Sop01] un recueil des résultats les plus importants sur la sommet-coloration orientée.

Certains de ces résultats seront présentés dans la suite de chapitre.

Les trois premières parties de ce chapitre sont consacrées à la sommet-coloration orientée. Plus précisément, nous considérerons le nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille donnée, des 2-arbres partiels de maille donnée et des graphes planaires de grande maille. Finalement, la dernière partie est consacrée à la notion de sommet-coloration orientée *forte* : nous définirons cette notion et donnerons quelques résultats obtenus pour la classe des graphes planaires sans cycles de longueurs données.

Les résultats concernant la sommet-coloration orientée forte des graphes planaires sans cycles de longueurs données sont sous forme d'un rapport de recherche [MOP06], alors que ceux portant sur le nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs sont publiés dans *Information Processing Letters* [PS06b].

## 2.1 Les graphes planaires extérieurs

### 2.1.1 Présentation

Rappelons que  $\mathcal{O}$  désigne la classe des graphes planaires extérieurs et que  $\mathcal{O}_g$  désigne la classe des graphes planaires extérieurs de maille au moins  $g$ .

Sopena a montré en 1997 que les 2-arbres partiels, classe de graphes contenant les graphes planaires extérieurs, ont un nombre chromatique orienté d'au plus 7 [Sop97]. De plus, cette borne est optimale puisqu'il a exhibé le graphe planaire extérieur  $G$  de la figure 2.3 nécessitant exactement 7

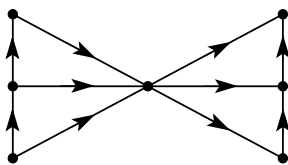
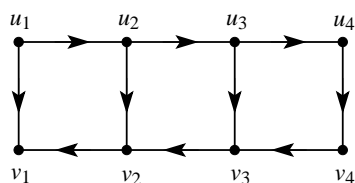
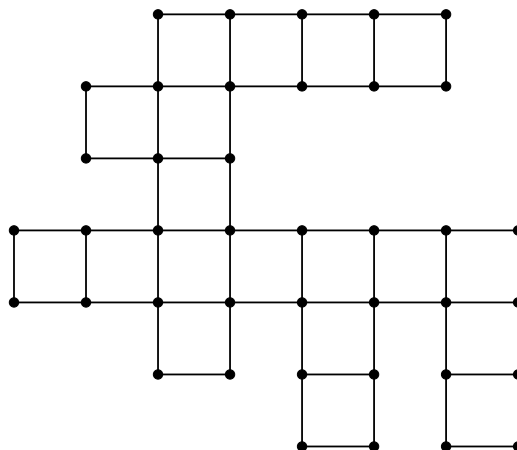
FIG. 2.3 – Graphe planaire extérieur  $G$  avec  $\chi_o(G) = 7$ .FIG. 2.4 – Une grille  $G \in \mathcal{G}(2,4)$  avec  $\chi_o(G) = 6$ .

FIG. 2.5 – Un exemple d'arbre épais.

couleurs pour toute sommet-coloration orientée. En effet, toute paire de sommets de ce graphe appartient à un 2-chemin, ce qui implique que tout sommet doit avoir des couleurs distinctes de celles des autres sommets.

L'ensemble des grilles orientées à  $i$  lignes et  $j$  colonnes est noté  $\mathcal{G}(i, j)$ . Une *échelle* est une grille à deux lignes ou deux colonnes (le graphe de la figure 2.4 est un exemple d'échelle). Un *arbre épais* est un graphe obtenu par intersection de plusieurs échelles horizontales et verticales de telle sorte qu'il n'existe pas deux échelles horizontales  $H_1$  et  $H_2$  qui croisent chacune deux échelles verticales  $V_1$  et  $V_2$  (un exemple d'arbre épais est donné sur la figure 2.5). Notons de plus que, pour tout  $n \geq 1$ , la classe des grilles  $\mathcal{G}(2, n)$  est une sous-classe de  $\mathcal{O}_4$ , de même que la classe des arbres épais est également une sous-classe de  $\mathcal{O}_4$ .

Fertin, Raspaud et Roychowdhury [FRR03] se sont intéressés au nombre chromatique orienté de la classe des arbres épais. Ils ont montré que tout graphe de cette classe admet une 6-sommet-coloration orientée ; de plus, ce résultat est optimal puisqu'ils ont prouvé que la grille  $G \in \mathcal{G}(2, 4)$  de la figure 2.4 (qui est un arbre épais) est telle que  $\chi_o(G) = 6$ . Il en découle alors que  $6 \leq \chi_o(\mathcal{O}_4) \leq 7$ .

Finalement, pour toute maille  $g \geq 3$ , Nešetřil, Raspaud et Sopena [NRS97] ont construit des graphes planaires extérieurs  $O_g$  de maille  $g$  tels que  $\chi_o(O_g) \geq 5$ .

Nous avons regroupé les bornes inférieures et supérieures connues pour les graphes planaires extérieurs de maille donnée dans le tableau 2.1.

Maille	Borne inférieure	Borne supérieure
3	$\chi_o(\mathcal{O}) \geq 7$	$\chi_o(\mathcal{O}) \leq 7$
4	$\chi_o(\mathcal{O}_4) \geq 6$	$\chi_o(\mathcal{O}_4) \leq 7$
$g \geq 5$	$\chi_o(\mathcal{O}_g) \geq 5$	$\chi_o(\mathcal{O}_g) \leq 7$

TAB. 2.1 – Résultats connus pour le nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille donnée.

Le résultat suivant nous donne une caractérisation complète du nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille donnée :

**Théorème 2.1.**

1.  $\chi_o(\mathcal{O}_4) = 6$ ;
2.  $\chi_o(\mathcal{O}_g) = 5$  pour tout  $g, g \geq 5$ .

La borne que nous obtenons pour les graphes planaires extérieur de maille 4 généralise donc le résultat de Fertin *et al.* [FRR03] concernant les arbres épais.

### 2.1.2 Résultats préliminaires

Pour obtenir les bornes supérieures du théorème 2.1, nous allons prouver que les graphes planaires extérieurs correspondants sont  $T$ -sommet-coloriables pour un certain tournoi  $T$ . En l'occurrence, les deux tournois qui seront utilisés sont dessinés sur la figure 2.6.

Notons que le tournoi  $T_5$  est un tournoi circulant et que, par conséquent, il est sommet-transitif. De plus, Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud et Sopena ont montré que ce tournoi possède la propriété suivante :

**Proposition 2.2.** [BKN<sup>+</sup>99] *Pour toute paire de sommets  $u, v \in V(T_5)$  (non nécessairement distincts), il existe une 4-chaîne reliant  $u$  et  $v$  pour chacune des 16 orientations possibles d'une telle 4-chaîne.*

Notons que le résultat de Fertin *et al.* [FRR03], à savoir tout arbre épais admet une 6-sommet-coloration orientée, est obtenu en montrant que tout graphe  $G$  de cette classe admet un homomorphisme vers  $T_6$  en s'appuyant sur la propriété suivante :

**Proposition 2.3.** [FRR03] *Pour toute paire de sommets  $u, v \in V(T_6)$  distincts, il existe une 3-chaîne reliant  $u$  et  $v$  pour chacune des 8 orientations possibles d'une telle 3-chaîne.*

Cette propriété n'est pas suffisante pour nous permettre de prouver notre résultat. Grâce à une analyse au cas par cas, nous pouvons obtenir une propriété plus forte de  $T_6$  :

**Proposition 2.4.** *Pour toute paire de sommets  $u, v \in V(T_6)$  (non nécessairement distincts), il existe une 3-chaîne reliant  $u$  et  $v$  pour chacune des 8 orientations possibles d'une telle 3-chaîne.*

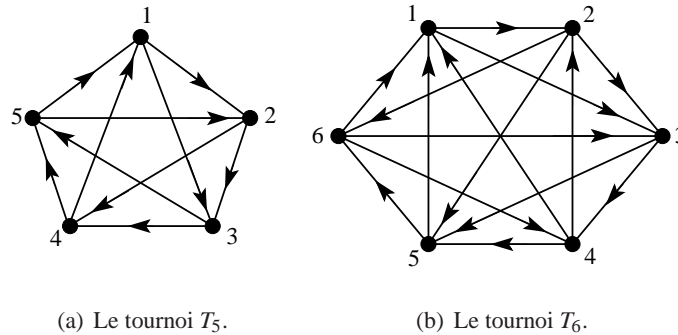


FIG. 2.6 – Deux graphes cibles.

Finalement, nous nous appuyerons sur la propriété suivante des graphes planaires extérieurs de grande maille :

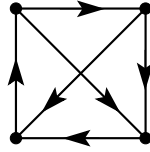
**Proposition 2.5.** *Tout graphe planaire extérieur  $G$  de maille au moins  $g$  avec  $\delta(G) \geq 2$  contient une  $(g - 1)$ -chaîne dont les sommets internes sont des 2-sommets.*

**Preuve.** Tout graphe planaire extérieur contient au moins une face  $F$  adjacente à au plus une face interne. Sachant que  $G$  est un graphe planaire extérieur, deux faces adjacentes de  $G$  ne peuvent avoir au maximum qu'une seule arête en commun. Soit  $l = |F| \geq g$  et soit  $uv_1, v_1v_2, \dots, v_{l-2}v_{l-1}$  les  $l - 1$  arêtes délimitant  $F$  qui sont incidentes à la face externe. Le graphe  $G$  contient donc une  $(g - 1)$ -chaîne constituée de 2-sommets.  $\square$

### 2.1.3 Preuve du théorème 2.1

Dans chacune des deux preuves suivantes, nous supposons qu'il existe un contre-exemple minimal  $H$  au théorème considéré (*i.e.* le graphe  $H$  n'est pas  $T$ -sommets-coloriable pour un certain tournoi  $T$ ). Nous réduisons alors  $H$  à un graphe plus petit  $H'$  (*i.e.*  $|V(H)| + |A(H)| > |V(H')| + |A(H')|$ ). Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H'$  admet une  $T$ -sommets-coloration  $f$  qui est aussi une  $T$ -sommets-coloration partielle de  $H$ , c'est-à-dire une sommets-coloration uniquement définie sur un sous-ensemble de sommets  $V'$  de  $V(H)$ . Nous étendons alors  $f$  au graphe  $H$  : les sommets  $u \in V(H')$  (*i.e.* les sommets déjà coloriés) conservent leurs couleurs dans  $H$  et nous expliquons comment définir  $f(u)$  pour tout sommet  $u \in V(H) \setminus V(H')$  dans manière à ce que  $f$  soit une  $T$ -sommets-coloration du graphe  $H$ . L'existence d'une telle  $T$ -sommets-coloration  $f$  prouve que  $H$  ne contient pas certaines configurations spécifiques. Cet ensemble de configurations nous conduira finalement à une contradiction.

**Preuve du théorème 2.1(1).** Nous prouvons dans un premier temps que  $\chi_o(\mathcal{O}_4) \leq 6$ . Pour cela, nous montrons que tout graphe planaire extérieur de maille au moins 4 admet un homomorphisme vers le

FIG. 2.7 – Le tournoi  $T_4$ .

tournoi  $T_6$  de la figure 2.6(b). Soit  $H$  un contre-exemple planaire extérieur minimal (en terme d'inclusion comme sous-graphe) de maille au moins 4 n'admettant pas d'homomorphisme vers  $T_6$ . Nous montrons que  $H$  ne contient pas de 1-sommet ni deux 2-sommets adjacents.

1. Supposons que  $H$  contienne un 1-sommet  $u$ . Alors, par minimalité de  $H$ , le graphe planaire extérieur  $H' = H \setminus u$  de maille au moins 4 admet une  $T_6$ -sommet-coloration  $f$ . Puisque tout sommet de  $T_6$  possède au moins deux prédécesseurs et au moins deux successeurs,  $f$  peut facilement être étendue à  $H$ .
2. Supposons maintenant que  $H$  contienne une 3-chaîne  $(u, v, w, x)$  telle que  $d(v) = d(w) = 2$ . Alors, par minimalité de  $H$ , le graphe planaire extérieur  $H' = H \setminus \{v, w\}$  de maille au moins 4 admet une  $T_6$ -sommet-coloration  $f$ . D'après la proposition 2.4, pour tout couple de couleurs  $(f(u), f(x))$  et pour toute orientation de la 3-chaîne  $(u, v, w, x)$ , il existe au moins une couleur  $f(v)$  pour  $v$  et au moins une couleur  $f(w)$  pour  $w$ . La coloration  $f$  peut donc être étendue à  $H$ .

D'après la proposition 2.5, tout graphe planaire extérieur de maille au moins 4 et de degré minimum 2 contient deux 2-sommets adjacents : nous obtenons une contradiction, ce qui permet de conclure pour la borne supérieure.

Pour compléter notre preuve, nous redonnons ici la preuve de Fertin, Raspaud et Roychowdhury dans [FRR03] montrant que la grille orientée  $G \in \mathcal{G}(2, 4)$  de la figure 2.4 est telle que  $\chi_o(G) \geq 6$ . Supposons que  $G$  admet une 5-sommet-coloration orientée  $f$ . Nous pouvons voir aisément que les quatre sommets  $u_1, u_2, v_1$  et  $v_2$  nécessitent des couleurs distinctes : sans perte de généralité, nous posons  $f(u_1) = 1, f(u_2) = 2, f(v_1) = 3$  et  $f(v_2) = 4$ . À présent, le sommet  $u_3$  peut-être colorié avec les couleurs 3 ou 5. Supposons que  $f(u_3) = 3$ . Dans ce cas, nous avons nécessairement  $f(v_3) = 5$  et nous n'avons plus de couleur disponible pour  $u_4$ . Donc  $f(u_3) = 5$ . Dans ce cas, nous avons nécessairement  $f(v_3) = 1$  et nous n'avons plus de couleur disponible pour  $v_4$ . Ainsi,  $\chi_o(G) \geq 6$ .

□

**Preuve du théorème 2.1(2).** Nous commençons par prouver que  $\chi_o(\mathcal{O}_g) \leq 5$  pour tout  $g, g \geq 5$ . Notons qu'il suffit de considérer le cas  $g = 5$  puisque  $\mathcal{O}_g \subseteq \mathcal{O}_5$  pour tout  $g \geq 5$ . Plus précisément, nous prouvons que tout graphe planaire extérieur de maille au moins 5 admet un homomorphisme vers le tournoi  $T_5$  de la figure 2.6(a).

Soit  $H$  un contre-exemple planaire extérieur minimal (en terme d'inclusion comme sous-graphe) de maille au moins 5 n'admettant pas d'homomorphisme vers  $T_5$ . Nous montrons que  $H$  ne contient pas de 1-sommet ni de 4-chaîne constituée de 2-sommets.

1. Supposons que  $H$  contienne un 1-sommet  $u$ . Alors, par minimalité de  $H$ , le graphe planaire extérieur  $H' = H \setminus u$  de maille au moins 5 admet une  $T_5$ -sommet-coloration  $f$ . Puisque tout sommet de  $T_5$  possède deux prédécesseurs et deux successeurs,  $f$  peut facilement être étendue à  $H$ .
2. Supposons maintenant que  $H$  contienne une 4-chaîne dont les sommets internes  $u, v$  et  $w$  sont des 2-sommets. Alors, par minimalité de  $H$ , le graphe planaire extérieur  $H' = H \setminus \{u, v, w\}$  de maille au moins 5 admet une  $T_5$ -sommet-coloration  $f$ . D'après la proposition 2.2,  $f$  peut être étendue à  $H$ .

Nous obtenons donc une contradiction grâce à la proposition 2.5.

Dans [NRS97], Nešetřil, Raspaud et Sopena ont construit, pour toute maille  $g, g \geq 3$ , un graphe planaire extérieur  $G_g$  de maille au moins  $g$  tel que  $\chi_o(G_g) \geq 5$ . Pour compléter notre preuve, nous redonnons ici cette construction.

Soit  $P_g$  une chaîne alternée à  $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor$  sommets et, soient  $u$  et  $v$  les deux extrémités de  $P_g$ . Le graphe  $G_g$  est alors construit comme suit : soit  $[x_1, x_2, \dots, x_p, x_1]$  un circuit à  $p \geq g$  sommets, tel que  $p \not\equiv 0 \pmod{3}$ . À chaque sommet  $x_i$ , nous attachons deux copies de  $P_g$  en identifiant les deux sommets  $u$  avec  $x_i$  et en ajoutant un arc (de n'importe quelle direction) liant les deux sommets  $v$ . Le graphe  $G_g$  ainsi obtenu est clairement de maille  $g$  ou  $g + 1$ . Sachant que  $G_g$  contient un  $p$ -circuit avec  $p \not\equiv 0 \pmod{3}$ , nous pouvons remarquer que si nous voulons colorier ce graphe avec quatre couleurs, le tournoi  $T$  à quatre sommets tel que  $G_g \rightarrow T$  doit contenir un 4-circuit, et par conséquent  $T \cong T_4$  (le graphe de la figure 2.7). De plus, pour tout homomorphisme  $f : G_g \rightarrow T_4$ , un des sommets  $x_i$  au moins satisfait  $f(x_i) = 3$ . Il est alors facile de vérifier que les deux  $v$ -sommets des chemins attachés à  $x_i$  sont coloriés de la même couleur, à savoir 0 ou 3 dépendant de la parité de  $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor$ . Puisque ces deux sommets sont joints par un arc dans  $G_g$ , nous obtenons la contradiction requise.  $\square$

Grâce au résultat de Sopena ( $\chi_o(\mathcal{O}_3) = 7$ , [Sop97]) et aux deux théorèmes que nous venons de prouver, nous connaissons à présent, pour tout entier  $g \geq 3$ , la valeur exacte du nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille  $g$ .

## 2.2 Les 2-arbres partiels

### 2.2.1 Présentation

Rappelons qu'un 2-arbre partiel est un graphe sans mineur  $K_4$  (également connu dans la littérature comme graphe séries-parallèle) et que la classe des 2-arbres partiels contient strictement la classe des graphes planaires extérieurs.

Rappelons que  $\mathcal{T}^2$  désigne la classe des 2-arbres partiels et que  $\mathcal{T}_g^2$  représente la classe des 2-arbres partiels de maille au moins  $g$ .

Comme dit précédemment, Sopena [Sop97] a prouvé que  $\chi_o(\mathcal{T}^2) = 7$ ; le nombre chromatique orienté des 2-arbres partiels (de maille 3) est donc égal au nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs (de maille 3). Par ailleurs, Borodin *et al.* [BKN<sup>+</sup>99] ont montré que  $\chi_o(\mathcal{P}_{14}) \leq 5$  ( $\mathcal{P}_g$  désigne la classe des graphes planaires de maille au moins  $g$ ) et Nešetřil, Raspaud et Sopena [NRS97] ont montré que  $\chi_o(\mathcal{O}_g) \geq 5$  pour tout  $g \geq 3$ ; sachant que  $\mathcal{O} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}$ , nous avons  $\chi_o(\mathcal{T}_{14}^2) = 5$ . D'après ces deux résultats, ainsi que les résultats que nous avons obtenus pour les graphes planaires extérieurs dans la partie précédente, nous obtenons les bornes que nous avons regroupées dans le tableau 2.2.

Maille	Borne inférieure	Borne supérieure
3	$\chi_o(\mathcal{T}^2) \geq 7$	$\chi_o(\mathcal{T}^2) \leq 7$
4	$\chi_o(\mathcal{T}_4^2) \geq 6$	$\chi_o(\mathcal{T}_4^2) \leq 7$
$5 \leq g \leq 13$	$\chi_o(\mathcal{T}_g^2) \geq 5$	$\chi_o(\mathcal{T}_g^2) \leq 7$
$g \geq 14$	$\chi_o(\mathcal{T}_g^2) \geq 5$	$\chi_o(\mathcal{T}_g^2) \leq 5$

TAB. 2.2 – Résultats connus pour le nombre chromatique orienté des 2-arbres partiels de maille donnée.

Nous améliorons ces résultats dans le théorème suivant :

**Théorème 2.6.**

1.  $\chi_o(\mathcal{T}_4^2) = 7$
2.  $\chi_o(\mathcal{T}_g^2) = 6$  pour  $5 \leq g \leq 6$ ;
3.  $5 \leq \chi_o(\mathcal{T}_g^2) \leq 6$  pour  $7 \leq g \leq 13$ .

Nous prouvons ces résultats en utilisant les mêmes méthodes que celles utilisées dans les preuves de la partie précédente.

**2.2.2 Résultats préliminaires**

Lih, Wang et Zhu [LWZ03] ont donné une propriété structurelle des 2-arbres partiels comme suit.

Pour un graphe  $G$  et un sommet  $v \in V(G)$ , nous notons :

$$D_G(v) = |\{u \in V(G) \text{ tel que } [d_G(u) \geq 3 \text{ et } uv \in A(G)]$$

$$\text{ou } [\exists w \in V(G), d_G(w) = 2, uw, wv \in A(G)]\}|.$$

**Lemme 2.7.** [LWZ03] Soit  $G$  un 2-arbre partiel. Alors, au moins une des affirmations suivantes est satisfaite :

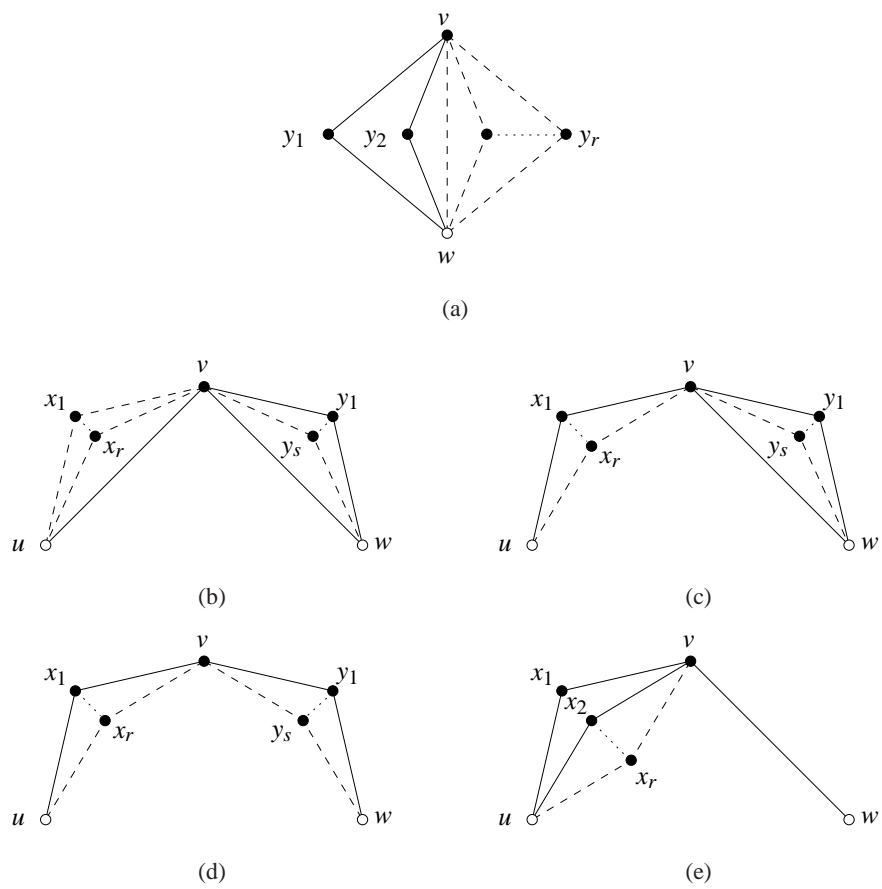


FIG. 2.8 – Les cinq configurations possibles du lemme 2.7.3 avec  $d_G(v) \geq 3$  et  $D_G(v) \leq 2$ .



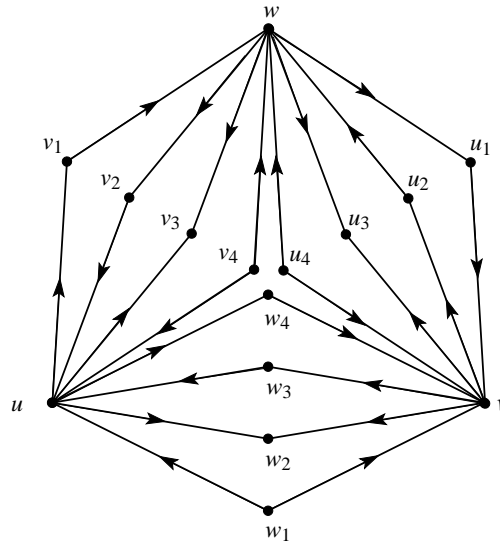


FIG. 2.9 – Un 2-arbre partiel de maille 4 et de nombre chromatique orienté 7.

1.  $\delta(G) \leq 1$  ;
2. il existe deux 2-sommets adjacents ;
3. il existe un  $\geq 3$ -sommet  $v$  tel que  $D_G(v) \leq 2$ . (voir la figure 2.8)

Nous pouvons alors immédiatement faire la remarque suivante :

**Remarque 2.8.** Un 2-arbre partiel de maille au moins 5 contient nécessairement soit un 1-sommet, soit deux 2-sommets adjacents.

**Preuve.** Soit  $G$  un 2-arbre partiel de maille au moins 5. Le graphe  $G$  ne peut contenir de  $\geq 3$ -sommet  $v$  tel que  $D_G(v) \leq 2$ . En effet, chacune des cinq configurations induites par un tel sommet contiennent un 4-cycle (voir la figure 2.8). Par conséquent, d'après le lemme 2.7,  $G$  contient nécessairement soit un 1-sommet, soit deux 2-sommets adjacents.  $\square$

### 2.2.3 Preuve du théorème 2.6

#### Preuve du théorème 2.6(1).

Sachant que  $\chi_o(\mathcal{T}_3^2) = 7$ , nous en déduisons que  $\chi_o(\mathcal{T}_4^2) \leq 7$ . Il nous suffit donc de construire un 2-arbre partiel de maille 4 ayant un nombre chromatique orienté 7 : c'est ce que nous montrons pour le 2-arbre partiel  $G$  de la figure 2.9.

Supposons que  $G$  admette une 6-sommet-coloration orientée  $f$ . Clairement, les couleurs des sommets  $u, w_1, w_2, w_3, w_4, v$  doivent être deux à deux distinctes. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $f(u) = 1, f(v) = 2, f(w_1) = 3, f(w_2) = 4, f(w_3) = 5$  et  $f(w_4) = 6$ .

Supposons premièrement que  $f(w) = 3$  (resp.  $f(w) = 4$ ). Alors, les deux sommets  $v_2$  et  $v_4$  (resp.  $v_1$  et  $v_3$ ) doivent obtenir des couleurs différentes ; or les deux seules couleurs disponibles sont 2 et 5 (resp. 2 et 6). Par conséquent, nous aurons un arc dans  $G$  reliant un sommet colorié 2 vers un sommet colorié 1 (resp. de 1 vers 2). Maintenant, les sommets  $u_1$  et  $u_4$  (resp.  $u_2$  et  $u_3$ ) doivent avoir des couleurs distinctes ; or les deux seules couleurs disponibles sont les couleurs 1 et 6 (resp. 1 et 5). Nous obtenons une contradiction puisque nous aurons un arc dans  $G$  reliant un sommet colorié 1 vers un sommet colorié 2 (resp. de 2 vers 1).

Les cas restants  $f(w) = 5$  et  $f(w) = 6$  conduisent à une contradiction de la même manière.  $\square$

### Preuve du théorème 2.6(2).

Nous prouvons dans un premier temps que  $\chi_o(\mathcal{T}_5^2) \leq 6$ . Pour cela, nous montrons que tout 2-arbre partiel de maille au moins 5 admet un homomorphisme vers le tournoi  $T_6$  de la figure 2.6(b). Soit  $H$  un contre-exemple minimal (en terme d'inclusion comme sous-graphe) de maille au moins 5 n'admettant pas d'homomorphisme vers  $T_6$ . Nous montrons que  $H$  ne contient pas de 1-sommet ni deux 2-sommets adjacents.

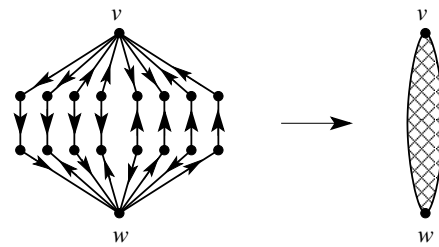
1. Supposons que  $H$  contienne un 1-sommet  $u$ . Alors, par minimalité de  $H$ , le 2-arbre partiel  $H' = H \setminus u$  de maille au moins 5 admet une  $T_6$ -sommet-coloration  $f$ . Puisque tout sommet de  $T_6$  possède au moins deux prédécesseurs et au moins deux successeurs,  $f$  peut facilement être étendue à  $H$ .
2. Supposons maintenant que  $H$  contienne deux 2-sommets adjacents  $v$  et  $w$ . Alors, par minimalité de  $H$ , le 2-arbre partiel  $H' = H \setminus \{v, w\}$  de maille au moins 5 admet une  $T_6$ -sommet-coloration  $f$ . D'après la proposition 2.4,  $f$  peut être étendue à  $H$ .

D'après la remarque 2.8, tout 2-arbre partiel de maille au moins 5 et de degré minimum 2 contient deux 2-sommets adjacents : nous obtenons une contradiction, ce qui permet de conclure.

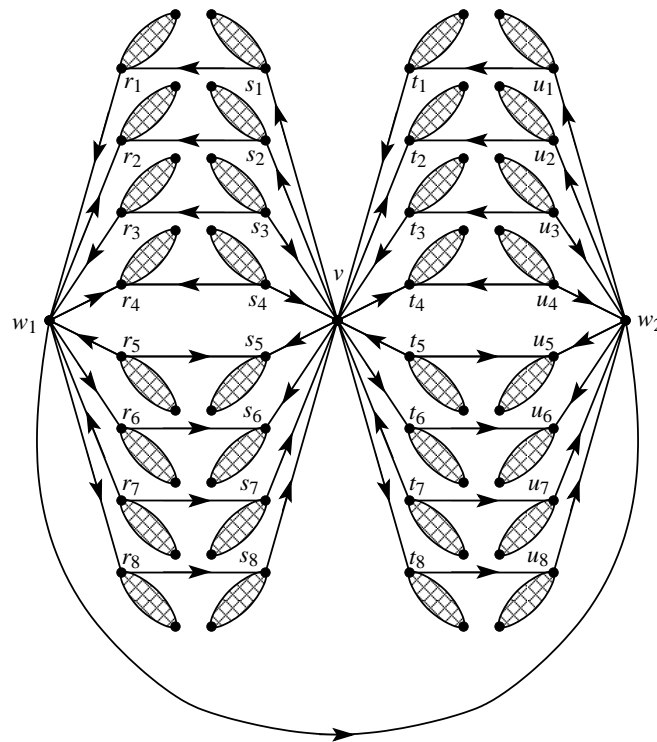
Pour terminer la preuve, il suffit de construire un 2-arbre partiel de maille 6 et de nombre chromatique orienté au moins 6.

Soit  $H$  le graphe construit à partir de deux sommets  $v$  et  $w$ , appelés sommets *externes*, en ajoutant entre ces sommets les huit 3-chaînes possibles (voir la figure 2.10(a)). Les seize sommets différents de  $v$  et  $w$  sont appelés sommets *internes*.

Nous construisons alors le graphe  $G$  de la manière suivante. Nous prenons deux copies de  $H$ , notées  $H_1$  et  $H_2$ . Les sommets externes de  $H_1$  (resp.  $H_2$ ) sont notés  $v_1$  et  $w_1$  (resp.  $v_2$  et  $w_2$ ) alors que les seize sommets internes sont notés  $r_1, \dots, r_8, s_1, \dots, s_8$  (resp.  $t_1, \dots, t_8, u_1, \dots, u_8$ ). Nous identifions les deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  en un unique sommet  $v$ . Nous ajoutons également un arc entre  $w_1$  et  $w_2$ . Finalement, nous prenons trente-deux copies de  $H$ , disons  $H'_1, H'_2, \dots, H'_{32}$ . Les sommets externes de  $H'_i$  sont notés  $v'_i$  et  $w'_i$ . À chacun des seize sommets internes de  $H_1$  et  $H_2$ , nous associons un graphe  $H'_i$  et identifions  $v'_i$  à ce sommet. Nous obtenons alors le graphe  $G$  de la figure 2.10(b). Nous pouvons aisément vérifier que ce graphe est bien un 2-arbre partiel de maille 6.



(a) Le graphe  $H$ .



(b) Un 2-arbre partiel  $G$  de maille 6 avec  $\chi_o(G) = 6$ .

FIG. 2.10 – Principe de construction d'un 2-arbre partiel  $G$  de maille 6 tel que  $\chi_o(G) = 6$ .

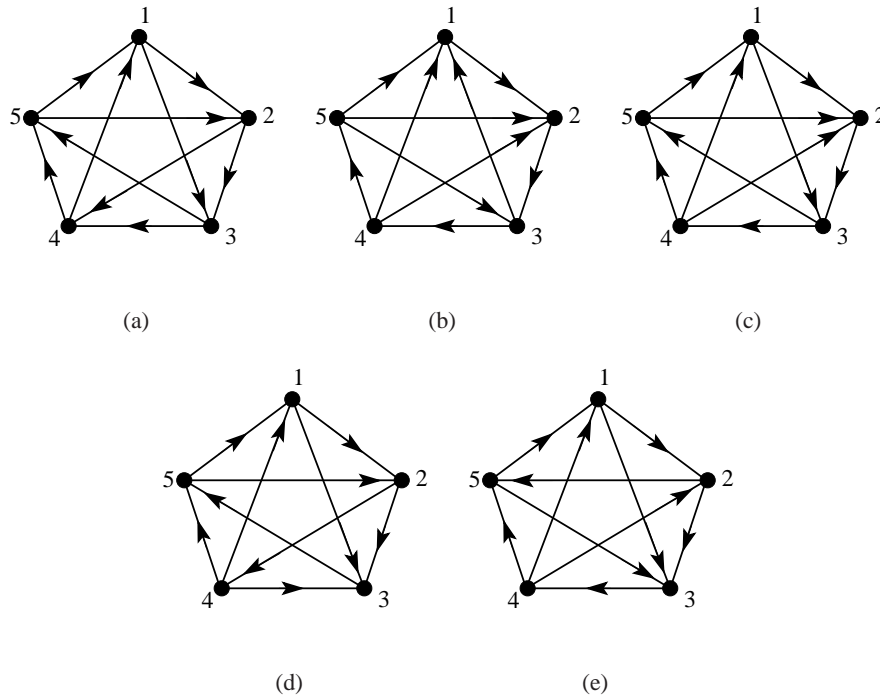


FIG. 2.11 – Les cinq tournois non isomorphes à cinq sommets ne contenant ni source ni puits.

Supposons tout d'abord que le graphe  $G$  de la figure 2.10(b) admette une 4-sommet-coloration orientée. Le graphe  $G$  contient un circuit à sept sommets  $[w_1, w_2, u_1, t_1, v, s_1, r_1, w_1]$ . Puisque  $7 \not\equiv 0 \pmod{3}$ , s'il existe un tournoi  $T$  à quatre sommets tel que  $G \rightarrow T$ , alors ce tournoi doit contenir un circuit de longueur quatre. Il existe quatre tournois non isomorphes à quatre sommets (voir la figure 1.7), mais un seul contient un circuit de longueur quatre : le tournoi  $T_4$  de la figure 2.7. Cependant, il est facile de vérifier qu'il n'existe pas de paire de sommets  $a$  et  $b$  dans ce tournoi tels qu'il existe une 3-chaîne les reliant pour chacune des huit orientations possibles, ce qui est obligatoire pour colorier les sous-graphes  $H'_i$  de  $G$ .

Par conséquent,  $\chi_o(G) \geq 5$ . Supposons qu'il existe un tournoi  $T$  à cinq sommets tel que  $G \rightarrow T$  et soit  $f : V(G) \rightarrow V(T)$  l'homomorphisme correspondant. Nous pouvons premièrement constater que le graphe  $G$  ne contient ni source, ni puits. Le tournoi  $T$  ne doit donc contenir ni source, ni puits. En effet, si  $T$  contient un source ou un puits, alors cette couleur ne peut être utilisée pour colorier  $G$ . Le graphe  $G$  admet donc une 4-sommet-coloration orientée, ce qui contredit la remarque précédente.

Il existe douze tournois à cinq sommets non isomorphes mais seulement cinq ne contiennent ni source, ni puits : ces cinq tournois sont représentés sur la figure 2.11. Pour chacun de ces tournois, un test par ordinateur nous permet de vérifier qu'il existe une 3-chaîne reliant deux sommets  $a$  et  $b$  pour chacune des huit orientations possibles si et seulement si :

- (a)  $a = b$  (figure 2.11(a)),
- (b)  $a = b = 2$  (figure 2.11(b)),

(c)  $a = b = 0$  ou  $a = b = 4$  (figure 2.11(c)),  
 (d)  $a = b = 0$ ,  $a = b = 1$  ou  $a = b = 4$  (figure 2.11(d)),  
 (e)  $a = b = 0$ ,  $a = b = 1$ ,  $a = b = 4$ ,  $a = 0$  et  $b = 1$ ,  $a = 0$  et  $b = 4$ , ou  $a = 1$  et  $b = 4$  (figure 2.11(e)).  
 Si  $T$  était l'un des quatre premiers tournois (figures 2.11(a), 2.11(b), 2.11(c), 2.11(d)), alors nous aurions  $f(v) = f(w_1) = f(w_2)$ , ce qui est impossible puisque  $\overrightarrow{w_1 w_2} \in A(G)$ . Ainsi,  $T$  est nécessairement le tournoi de la figure 2.11(e). Dans ce cas, nous avons  $f(v) \in \{0, 1, 4\}$ ,  $f(w_2) \in \{0, 1, 4\}$  et  $f(w_2) \in \{0, 1, 4\}$ . Cependant, certains sommets internes de  $H_1$  et  $H_2$  seront coloriés avec les couleurs 2 ou 3 : les graphes  $H'_i$  attachés à ces sommets ne sont alors pas  $T$ -sommets-coloriables d'après ce que nous avons dit précédemment.

Nous avons donc  $\chi_o(G) \geq 6$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Preuve du théorème 2.6(3).** Comme  $\chi_o(\mathcal{T}_5^2) = 6$ , nous avons  $\chi_o(\mathcal{T}_g^2) \leq 6$  pour  $g \geq 5$ . D'autre part, Nešetřil, Raspaud et Sopena [NRS97] ont construit pour toute maille  $g \geq 3$  des graphes planaires extérieurs de maille  $g$  ayant un nombre chromatique orienté 5, ce qui permet de conclure.  $\square$

Nous pouvons donc remarquer qu'à présent nous connaissons la valeur exacte du nombre chromatique orienté des 2-arbres partiels de maille  $g \leq 7$  et  $g \geq 14$ . En revanche, la question reste posée pour les 2-arbres partiels de maille  $7 \leq g \leq 13$ .

**Question 2.9.** *Le nombre chromatique orienté de la classe des 2-arbres partiels de maille  $g$ ,  $7 \leq g \leq 13$ , est-il 6 ou 7 ?*

## 2.3 Les graphes planaires de grande maille

Rappelons que  $\mathcal{P}$  désigne la classe des graphes planaires et que  $\mathcal{P}_g$  désigne la classe des graphes planaires de maille au moins  $g$ .

L'un des premiers résultats obtenus pour le nombre chromatique orienté est dû à Raspaud et Sopena [RS94] et porte sur la classe des graphes planaires. Ils ont montré que les classes de graphes ayant un nombre chromatique acyclique borné ont également un nombre chromatique orienté borné. Plus précisément :

**Théorème 2.10.** [RS94] *Tout graphe orienté  $G$  dont le graphe sous-jacent admet une  $k$ -sommets-coloration acyclique est tel que  $\chi_o(G) \leq k \cdot 2^{k-1}$ .*

À partir de ce résultat, il est possible d'obtenir une borne pour le nombre chromatique orienté des graphes planaires. En effet, rappelons que Borodin [Bor79] a prouvé que tout graphe planaire admet une 5-sommets-coloration acyclique. Ainsi :

**Corollaire 2.11.** [RS94]  $\chi_o(\mathcal{P}) \leq 80$ .

Cette borne supérieure paraît éloignée de la borne optimale. Pourtant, malgré de nombreuses tentatives, cette borne reste pour l'instant la meilleure borne connue. Récemment, Marshall a montré qu'il existait des graphes planaires avec un nombre chromatique orienté 17 [Mar01].

Sachant que la borne générale est difficile à améliorer, de nombreux auteurs, tels que Borodin, Ivanova, Kostochka, Nešetřil, Ochem, Raspaud et Sopena se sont intéressés aux graphes planaires de grande maille dans l'optique d'améliorer la borne supérieure connue.

**Théorème 2.12.**

1.  $\chi_o(\mathcal{P}_4) \leq 47$  [BI05b];
2.  $\chi_o(\mathcal{P}_5) \leq 19$  [BKN<sup>+</sup>99];
3.  $\chi_o(\mathcal{P}_6) \leq 11$  [BKN<sup>+</sup>99];
4.  $\chi_o(\mathcal{P}_7) \leq 7$  [BI05a];
5.  $\chi_o(\mathcal{P}_{14}) = 5$  [NRS97, BKN<sup>+</sup>99].

Nous améliorons ces résultats dans le cas des graphes planaires de maille 11.

Dans [NRS97], Nešetřil, Raspaud et Sopena montre le résultat suivant :

**Théorème 2.13.** [NRS97] *Tout graphe planaire  $G$  de maille au moins  $5d + 1$  avec  $\delta(G) \geq 2$  contient une  $(d + 1)$ -chaîne dont les sommets internes sont des 2-sommets.*

**Preuve.** Soit  $G$  un graphe planaire de maille  $5d + 1$ . Soit  $D$  le graphe obtenu en plaçant un sommet dans chaque face de  $G$  et en reliant deux tels sommets si les deux faces correspondantes sont adjacentes. Tout graphe planaire est 5-dégénéré et le graphe  $D$  est clairement planaire :  $D$  contient donc un  $\leq 5$ -sommets, ce qui signifie que  $G$  contient une  $\leq 5$ -face  $F$ . Sachant que  $G$  ne contient pas de 1-sommets, il est alors aisé de vérifier que la frontière de  $F$  contient une  $(d + 1)$ -chaîne constituée de 2-sommets.  $\square$

Nous sommes alors capable d'améliorer le théorème 2.12 :

**Théorème 2.14.**  $\chi_o(\mathcal{P}_{11}) \leq 6$ .

**Preuve.** Nous montrons que tout graphe planaire de maille au moins 11 admet un homomorphisme vers le tournoi  $T_6$  de la figure 2.6(b). Soit  $H$  un contre-exemple planaire minimal (en terme d'inclusion comme sous-graphe) de maille au moins 11 n'admettant pas d'homomorphisme vers  $T_6$ . Nous montrons que  $H$  ne contient pas de 1-sommets ni deux 2-sommets adjacents.

1. Supposons que  $H$  contienne un 1-sommets  $u$ . Alors, par minimalité de  $H$ , le graphe planaire  $H' = H \setminus u$  de maille au moins 11 admet une  $T_6$ -sommets-coloration  $f$ . Puisque tout sommets de  $T_6$  possède au moins deux prédécesseurs et au moins deux successeurs,  $f$  peut facilement être étendue à  $H$ .
2. Supposons maintenant que  $H$  contienne deux 2-sommets adjacents  $v$  et  $w$ . Alors, par minimalité de  $H$ , le graphe planaire  $H' = H \setminus \{v, w\}$  de maille au moins 11 admet une  $T_6$ -sommets-coloration  $f$ . D'après la proposition 2.4,  $f$  peut être étendue à  $H$ .

D'après le théorème 2.13, tout graphe planaire de maille au moins 11 et de degré minimum 2 contient deux 2-sommets adjacents : nous obtenons une contradiction, ce qui permet de conclure.  $\square$

De nombreuses bornes supérieures sont connues pour le nombre chromatique orienté des graphes planaires de grande maille.

Concernant les bornes inférieures, nous avons moins d'informations. En effet, Marshall [Mar01] a montré que  $\chi_o(\mathcal{P}_3) \geq 17$ ; d'autre part, Ochem a construit un graphe planaire de maille 4 permettant de montrer que  $\chi_o(\mathcal{P}_4) \geq 11$  [Och04]. Enfin, Nešetřil, Raspaud et Sopena [NRS97] ont montré que  $\chi_o(\mathcal{P}_g) \geq 5$  pour tout  $g \geq 3$ . Il serait alors intéressant de considérer les graphes planaires de maille 5 à 14 pour tenter d'obtenir une meilleure borne inférieure que celle de Nešetřil, Raspaud et Sopena.

## 2.4 Sommet-coloration orientée forte des graphes planaires sans cycles de longueurs données

### 2.4.1 Présentation

Dans cette dernière partie, nous considérons la notion de sommet-coloration orientée forte.

Dans [NR99], Nešetřil et Raspaud introduisent la notion de *sommet-coloration orientée forte*. Soit  $M$  un groupe abélien additif. Une *sommet-coloration orientée forte* d'un graphe orienté  $G$  est une application  $f : V(G) \rightarrow M$  telle que

- (i)  $f(u) \neq f(v)$  si  $\vec{uv}$  est un arc de  $G$ ,
- (ii) et  $f(v) - f(u) \neq -(f(x) - f(y))$  si  $\vec{uv}$  et  $\vec{xy}$  sont deux arcs de  $G$  (cette deuxième condition sera appelée dans la suite, la *condition de valeurs non opposées*).

Si une telle application existe, nous dirons que  $G$  admet une  $M$ -sommet-coloration orientée forte. Le *nombre chromatique orienté fort* d'un graphe orienté, noté  $\chi_s(G)$ , est l'ordre minimum d'un groupe  $M$ , tel que  $G$  admet une  $M$ -sommet-coloration orientée forte.

Une sommet-coloration orientée forte peut être définie de façon équivalente comme un homomorphisme  $f : V(G) \rightarrow V(H)$ , où  $H$  est un graphe orienté à  $k$  sommets étiquetés par les éléments d'un groupe abélien additif  $M$  tel que pour toute paire d'arcs  $\vec{uv}$  et  $\vec{xy}$  de  $A(H)$ ,  $f(v) - f(u) \neq -(f(x) - f(y))$ . Alors, le *nombre chromatique orienté fort* de  $G$  peut être défini comme le plus petit ordre d'un groupe abélien additif  $M$  tel que  $G$  admet un homomorphisme vers  $H$  étiqueté avec les éléments de  $M$  satisfaisant la condition de valeurs non opposées.

Par conséquent, toute sommet-coloration orientée forte d'un graphe orienté  $G$  est une sommet-coloration orientée; ainsi,  $\chi_o(G) \leq \chi_s(G)$ .

Soit  $M$  un groupe additif et  $S \subset M$  un sous-ensemble des éléments du groupe  $M$ . Le *digraphe de Cayley* associé au couple  $(M, S)$ , noté  $C_{(M, S)}$ , est alors défini comme suit :

$$V(C_{(M, S)}) = M \text{ et } A(C_{(M, S)}) = \{(g, g + s); g \in M, s \in S\}.$$

Si les éléments de  $S$  sont des générateurs du groupe  $M$ , alors le digraphe de Cayley  $C_{(M, S)}$  est connecté.

En supposant que  $M$  est abélien et  $S \cap -S = \emptyset$ , alors  $C_{(M,S)}$  est un graphe orienté (*i.e.*  $C_{(M,S)}$  ne contient ni boucle, ni arcs opposés), et pour toute paire  $(g_1, g_1 + s_1)$  et  $(g_2, g_2 + s_2)$  d'arcs de  $C_{(M,S)}$ ,  $g_1 + s_1 - g_1 \neq -(g_2 + s_2 - g_2)$ . Ainsi, trouver une  $k$ -sommets-coloration orientée forte d'un graphe orienté  $G$  peut être vu comme trouver un homomorphisme de  $G$  dans un tel graphe orienté de Cayley  $C_{(M,S)}$  d'ordre  $k$  avec  $M$  un groupe abélien,  $S \subset M$  et  $S \cap -S = \emptyset$ .

À l'origine, l'introduction de cette nouvelle notion de coloration est motivée par les flots. En effet, Nešetřil et Raspaud [NR99] ont défini la notion de *flot antisymétrique* d'un digraphe (notion analogue à la notion de  $B$ -flot introduite par Jaeger [Jae88]). Il ont ensuite montré qu'un graphe orienté  $G$  possède une  $M$ -sommets-coloration orientée forte si et seulement si le digraphe dual  $G^*$  de  $G$  possède un  $M$ -flot antisymétrique. Cette relation leur a permis d'obtenir de résultats sur les flots antisymétriques de certaines classes de multi-digraphes planaires. Dans ce manuscrit, nous ne n'aborderons pas cette notion de flots antisymétrique.

La sommets-coloration orientée forte des graphes planaires a récemment été étudiée. Šámal [Šám03] a prouvé que tout graphe planaire orienté admet une sommets-coloration orientée forte utilisant au plus 672 couleurs. Dans [Mar06], Marshall a amélioré ce résultat en montrant le théorème suivant :

**Théorème 2.15.** [Mar06] *Soit  $G$  un graphe planaire orienté. Alors  $\chi_s(G) \leq 271$ .*

De plus, les bornes supérieures du nombre chromatique orienté des graphes planaires de grande maille du théorème 2.12 sont toutes obtenues en prouvant l'existence d'un homomorphisme vers certains graphes de Cayley, notamment les tournois  $QR_q$  construits à l'aide des résidus quadratiques non nuls de  $q$ . Par conséquent, ces bornes sont également valides pour le nombre chromatique orienté fort.

**Théorème 2.16.**

1.  $\chi_s(\mathcal{P}_4) \leq 47$  [BI05b];
2.  $\chi_s(\mathcal{P}_5) \leq 19$  [BKN<sup>+</sup>99];
3.  $\chi_s(\mathcal{P}_6) \leq 11$  [BKN<sup>+</sup>99];
4.  $\chi_s(\mathcal{P}_7) \leq 7$  [BI05a];
5.  $\chi_s(\mathcal{P}_{14}) = 5$  [NRS97, BKN<sup>+</sup>99].

Notons que le résultat du théorème 2.14 concernant les graphes planaires de maille au moins 11 est obtenu en montrant que ces derniers admettent un homomorphisme vers le tournoi  $T_6$  (tournoi de la figure 2.6(b)). Cependant, ce tournoi n'est pas un tournoi de Cayley et ce résultat ne peut donc pas être étendu au nombre chromatique orienté fort.



Dans le cas non orienté, Appel, Haken et Kock [AH77, AHK77] ont montré que tout graphe planaire est 4-coloriable. En 1959, Grötzsch [Grö59] a d'autre part prouvé que les graphes planaires sans triangle sont 3-coloriables. Une question naturelle qui peut alors se poser est la suivante : les graphes planaires sans cycle de longueur 4 admettent-ils une 3-coloration ? Néanmoins, la réponse est négative : il existe des graphes planaires sans cycles de longueur 4 n'admettant pas de 3-coloration. Par conséquent, la question naturelle suivante que l'on peut se poser est la suivante : les graphes planaires sans cycle de longueur 4 et 5 admettent-ils une 3-coloration ? Cette question est connue comme étant la conjecture de Steinberg, posée en 1976 [JT95]. Jusqu'en 1991, aucune réponse n'a été obtenue pour cette conjecture. Erdős a alors proposé une relaxation de ce problème dans l'espoir d'obtenir un début de réponse :

**Problème 2.17 (Relaxation du problème de Steinberg proposée par Erdős).** *Déterminer la plus petite valeur de  $k$ , si elle existe, telle qu'un graphe planaire sans cycles de longueurs  $4, 5, \dots, k$  est 3-coloriable.*

De nombreux auteurs se sont intéressés à ce nouveau problème et un certain nombre de résultats ont été obtenus. Actuellement, la meilleure valeur connue est due à Borodin *et al.* [BGRS05] qui ont montré que tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à 7 admet une 3-coloration.

La conjecture de Steinberg reste donc encore à ce jour ouverte.

Il peut-être intéressant de considérer une question analogue dans le cas des graphes orientés :

**Question 2.18.** *Soit  $i \geq 4$  un entier. Soit  $G_i$  un graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à  $i$ . Quelle est la plus petite valeur  $k$  telle que  $\chi_s(G_i) \leq k$  ?*

Le nombre chromatique orienté fort des graphes planaires de maille  $g$ , c'est-à-dire sans cycles de longueurs 3 à  $g - 1$ , a été étudié durant ces dix dernières années comme nous l'avons vu avec les théorèmes 2.16 et 2.15. Ainsi, s'intéresser à la question 2.18 nous permet d'étudier l'impact des triangles pour la sommet-coloration orientée forte et c'est pourquoi nous étudions dans la suite le nombre chromatique orienté fort des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à  $i$  (en particulier pour  $i = 6$  et  $i = 12$ ).

Pour déterminer cet impact, nous étudions dans un premier temps le degré moyen maximum des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à  $i$ . Nous montrons le résultat suivant :

**Lemme 2.19.**

1. *Soit  $G$  un graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à  $i$ , alors  $\text{mad}(G) < 3 + \frac{9}{2i-1}$ .*
2.  *$\forall \varepsilon > 0$ , il existe un graphe planaire  $G$  sans cycles de longueurs 4 à  $i$  tel que*
  - *$\text{mad}(G) > 3 + \frac{9}{7} - \varepsilon$ , si  $i = 4$  ;*
  - *$\text{mad}(G) > 3 + \frac{3}{i-2} - \varepsilon$ , sinon.*

Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud et Sopena ont étudié le nombre chromatique orienté fort des graphes de degré moyen maximum borné :

**Théorème 2.20.** [BKN<sup>+</sup>99] Soit  $G$  un graphe.

1. Si  $\text{mad}(G) < 7/3$ , alors  $\chi_s(G) \leq 5$  ;
2. Si  $\text{mad}(G) < 8/3$ , alors  $\chi_s(G) \leq 7$  ;
3. Si  $\text{mad}(G) < 3$ , alors  $\chi_s(G) \leq 11$  ;
4. Si  $\text{mad}(G) < 10/3$ , alors  $\chi_s(G) \leq 19$ .

D'après le lemme 2.19, tout graphe planaire  $G$  sans cycles de longueurs 4 à 14 est tel que  $\text{mad}(G) < 3 + \frac{9}{2 \times 14 - 1} = \frac{10}{3}$ . En conséquence, d'après le théorème 2.20(4), nous obtenons :

**Corollaire 2.21.** Soit  $G$  un graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à 14, alors  $\chi_s(G) \leq 19$ .

La borne inférieure du degré moyen maximum donné par le lemme 2.19(2) nous assure que le théorème 2.20 ne peut pas nous donner de meilleures bornes : en effet, pour tout  $i \geq 4$ , il existe des graphes planaires  $G$  sans cycles de longueurs 4 à  $i$  tels que  $\text{mad}(G) > 3$ . Dans la suite, nous améliorons le corollaire 2.21 et nous donnons quelques pistes de réponses à la question 2.18 en prouvant les théorèmes suivants :

**Théorème 2.22.** Soit  $G$  un graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à 12. Alors  $\chi_s(G) \leq 7$ .

**Théorème 2.23.** Pour tout  $i \geq 6$ , il existe un graphe planaire extérieur  $G_i$  sans cycles de longueurs 4 à  $i$  tel que  $\chi_s(G_i) = 7$ .

**Théorème 2.24.** Soit  $G$  un graphe planaire sans cycles de longueurs 4 ou 6. Alors  $\chi_s(G) \leq 19$ .

**Corollaire 2.25.** Soit  $G$  un graphe planaire sans cycles de longueurs 4, 5 et 6. Alors  $\chi_s(G) \leq 19$ .

### 2.4.2 Preuve du lemme 2.19

**Preuve du lemme 2.19(1).** Soit  $G$  un graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à  $i$ . Soit  $\alpha = 3 + \frac{9}{2i-1} = \frac{6i+6}{2i-1} \geq 0$ . Nous pouvons tout d'abord observer que la formule d'Euler  $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$  peut être réécrite de la manière suivante :

$$2|E(G)| - \alpha|V(G)| + (\alpha - 2)|E(G)| - \alpha|F(G)| = -2\alpha$$

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - \alpha) + \sum_{f \in F(G)} \left( \frac{\alpha - 2}{2} r(f) - \alpha \right) = -2\alpha \quad (2.1)$$

Une procédure de déchargement va nous permettre d'aboutir au résultat désiré. Nous définissons une charge  $\omega$  pour toute face  $f$  de  $F(G)$  :  $\omega(f) = \frac{\alpha - 2}{2} r(f) - \alpha$ . Nous utilisons maintenant la règle de déchargement suivante :

(R1) Chaque  $j$ -face, avec  $j \geq i + 1$ , donne  $\frac{i-2}{2i-1}$  à chacune de ces 3-faces adjacentes.

Une fois la procédure de déchargement terminée, une nouvelle charge  $\omega^*$  est obtenue sur les faces de  $G$ .

Soit  $f$  une face de  $F(G)$ .

– Si  $r(f) = 3$ , alors  $\omega(f) = \frac{-3i+6}{2i-1}$ . Sachant que  $G$  ne contient pas de cycles de longueurs 4 à  $i$ , chaque 3-face est adjacente à 3 faces de longueur au moins  $i + 1$ . Par la règle (R1),  $\omega^*(f) = \frac{-3i+6}{2i-1} + 3\frac{i-2}{2i-1} = 0$ .

– Si  $r(f) = j \geq i + 1$ , alors  $\omega(f) = \frac{ij-6i+4j-6}{2i-1}$ . Par la règle (R1),  $\omega^*(f) = \frac{ij-6i+4j-6}{2i-1} - j\frac{i-2}{2i-1} = \frac{6j-6(i+1)}{2i-1} \geq 0$ .

Ainsi,  $\sum_{f \in F(H)} \omega^*(f) \geq 0$ . Par ailleurs, la somme totale des charges est conservée durant la procédure de déchargement. Nous avons donc :

$$0 \leq \sum_{f \in F(H)} \omega^*(f) = \sum_{f \in F(G)} \omega(f) = \sum_{f \in F(G)} \left( \frac{\alpha-2}{2} r(f) - \alpha \right)$$

Cette inégalité, avec l'équation 2.1, nous permettent d'obtenir que  $\sum_{v \in V(G)} (d(v) - \alpha) < 0$ . Ceci implique que pour tout graphe planaire  $G$  sans cycles de longueurs 4 à  $i$ ,  $\frac{2|E(G)|}{|V(G)|} < \alpha$ , et donc  $\frac{2|E(H)|}{|V(H)|} < \alpha$  pour tout sous-graphe  $H$  de  $G$ . Ainsi,  $\text{mad}(G) < \alpha$ .  $\square$

### Preuve du Lemme 2.19(2).

– Dans un premier temps, pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , nous construisons un graphe planaire  $G_\varepsilon$  sans cycles de longueur 4 qui est tel que  $\text{mad}(G_\varepsilon) > 3 + \frac{9}{7} - \varepsilon$ .

Considérons le graphe  $H$  de la figure 2.12(a). Ce graphe est planaire et ne contient pas de cycle de longueur 4. À présent, le graphe  $G_k$  est obtenu en pavant une partie du plan à l'aide de  $k \times k$  copies de  $H$  sur  $k$  lignes et  $k$  colonnes (voir la figure 2.12(b)).

Il est facile de voir que, pour tout  $k \geq 1$ , le graphe  $G_k$  est un graphe planaire sans cycles de longueur 4. Le graphe  $G_k$  est constitué de  $k^2$  copies de  $H$  et chaque copie contient 31 sommets (13 internes et 18 sur la frontière) et 54 arêtes (36 internes et 18 sur le frontière). De plus, nous avons  $|V(G_k)| = \frac{31k^2 + 13k^2 + 24k - 6 - (2k^2 - 2)}{2} = 21k^2 + 12k - 2$  et  $|E(G_k)| = \frac{54k^2 + 36k^2 + 24k - 6}{2} = 45k^2 + 12k - 3$ . Donc,

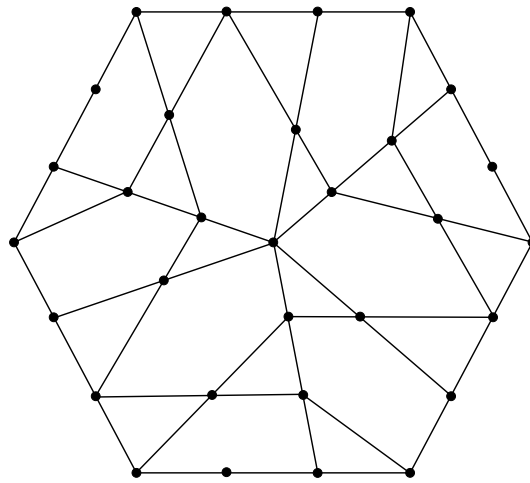
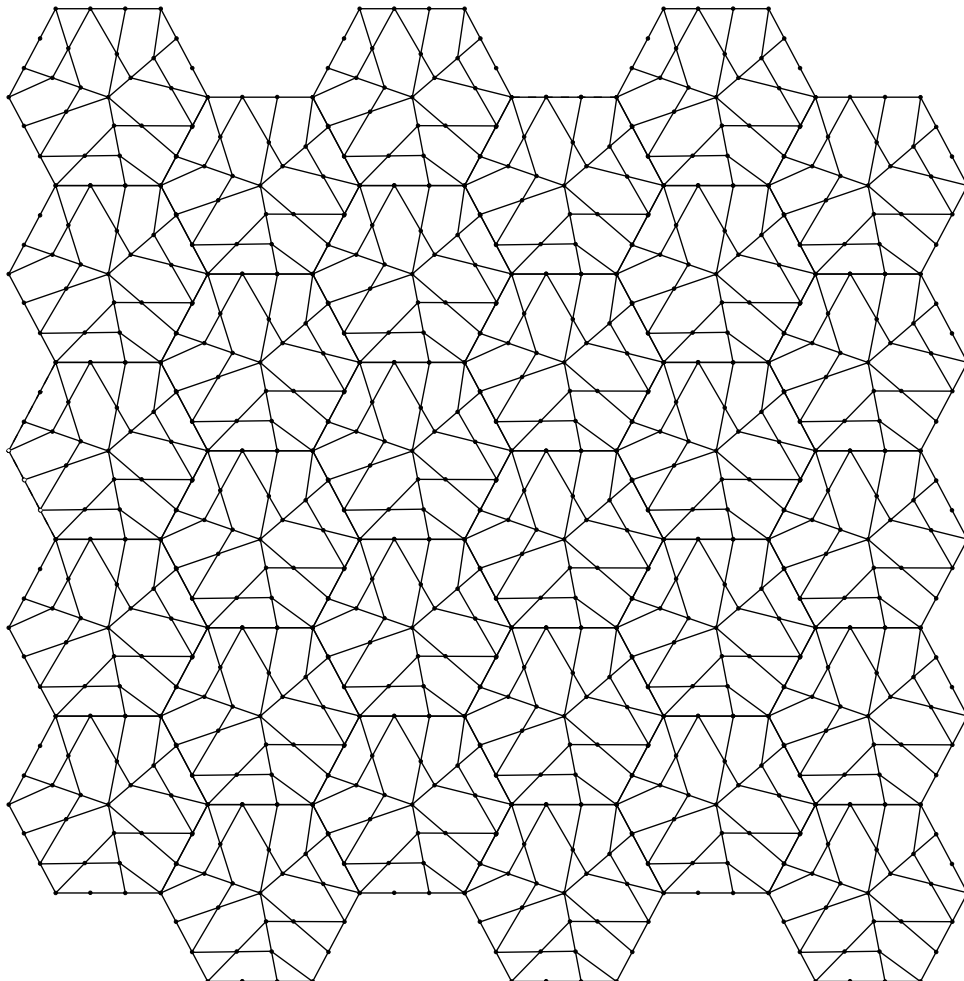
$$\text{mad}(G_k) = \frac{2|E(G_k)|}{|V(G_k)|} = \frac{2(45k^2 + 12k - 3)}{21k^2 + 12k - 2} = 3 + \frac{9}{7} - \frac{192k + 29}{147k^2 + 84k - 14} > 3 + \frac{9}{7} - \frac{4}{3k}$$

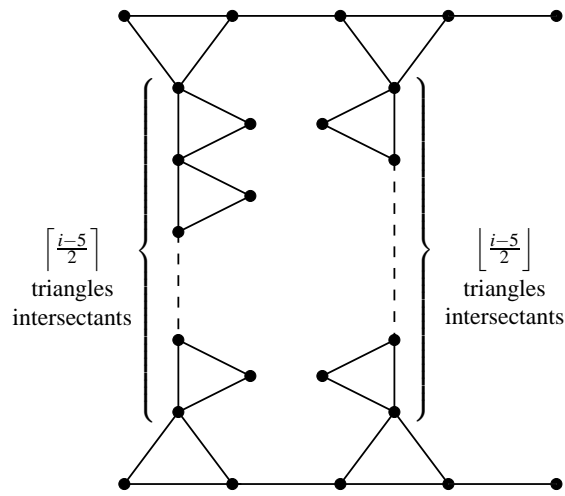
ce qui nous permet de conclure que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon, \text{mad}(G_n) > 3 + \frac{9}{7} - \varepsilon.$$

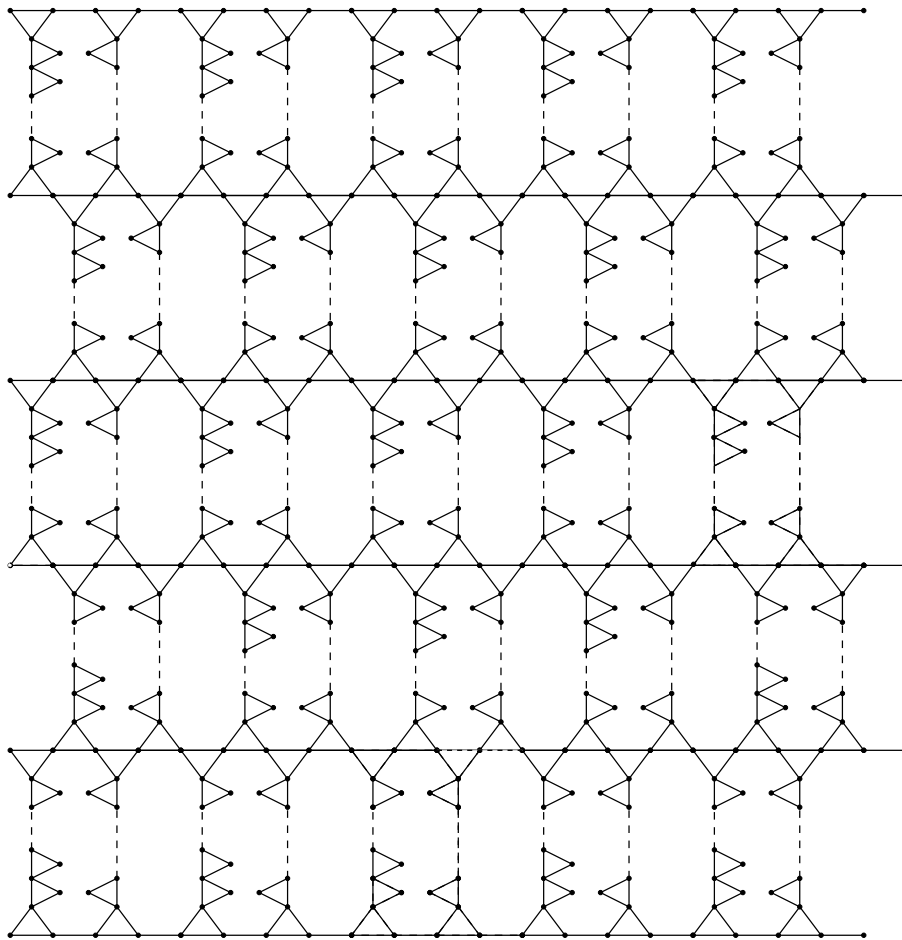
Il suffit ainsi de poser  $G_\varepsilon = G_{n_\varepsilon}$ .

– Maintenant, pour tout  $i \geq 5$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous construisons un graphe planaire  $G'_\varepsilon$  sans cycles de longueurs 4 à  $i$  tel que  $\text{mad}(G'_\varepsilon) > 3 + \frac{3}{i-2} - \varepsilon$ .

(a) Le graphe  $H$  du lemme 2.19(2).(b) Le graphe  $G_k$  du lemme 2.19(2).FIG. 2.12 – Un graphe planaire  $G_k$  sans cycles de longueur 4 tel que  $\text{mad}(G_k) > 3 + \frac{9}{7} - \varepsilon(k)$ .



(a) Le graphe  $H'$  du lemme 2.19(2).



(b) Le graphe  $G'_k$  du lemme 2.19(2).

FIG. 2.13 – Un graphe planaire  $G_k$  sans cycles de longueurs 4 à  $i$  ( $i \geq 5$ ) tel que  $\text{mad}(G_k) > 3 + \frac{3}{i-2} - \varepsilon(k)$ .

Soit  $H'$  le graphe construit à partir de deux chaînes de triangles, l'une de longueur  $\lfloor \frac{i-5}{2} \rfloor$  et l'autre de longueur  $\lceil \frac{i-5}{2} \rceil$ , arrangées comme sur la figure 2.13(a). Pour tout  $i \geq 5$ , ce graphe est planaire et ne contient pas de cycles de longueurs 4 à  $i$ . À présent, le graphe  $G'_k$  est obtenu en pavant le plan à l'aide de  $k \times k$  copies de  $H'$  sur  $k$  lignes et  $k$  colonnes (voir la figure 2.13(b)).

Il est facile de voir que, pour tout  $i \geq 5$  et pour tout  $k \geq 1$ , le graphe  $G'_k$  est un graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à  $i$ . Le graphe  $G'_k$  est constitué de  $k^2$  copies de  $H'$  et chaque copie contient  $2(i+1)$  sommets et  $3i+1$  arêtes. De plus, nous avons  $|V(G'_k)| = (k+1)(4k+2) - 2 + k^2(2i-8) = 2ik^2 - 4k^2 + 6k$  et  $|E(G'_k)| = (k+1)(4k+1) - 2 + 8k^2 + k^2(3(i-5)) = 3ik^2 - 3k^2 + k - 2$ . Donc,

$$\text{mad}(G'_k) = \frac{2|E(G'_k)|}{|V(G'_k)|} = \frac{6ik^2 - 6k^2 + 2k - 4}{2ik^2 - 4k^2 + 6k} = 3 + \frac{3}{i-2} - \frac{8ik - 7k + 2i - 4}{k(i-2)(ik - 2k + 3)} > 3 + \frac{3}{i-2} - \frac{4}{k}$$

ce qui permet de conclure que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon, \text{mad}(G'_n) > 3 + \frac{3}{i-2} - \varepsilon.$$

Il suffit ainsi de poser  $G'_\varepsilon = G'_{n_\varepsilon}$ .

□

Les bornes données par le lemme 2.19 sont optimales pour les cas  $i = 4$  et  $i = 5$ . En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un graphe planaire  $G_\varepsilon$  sans cycles de longueur 4 (resp. de longueurs 4 ou 5), tel que  $3 + \frac{9}{7} - \varepsilon < \text{mad}(G_\varepsilon) < 3 + \frac{9}{2 \times 4 - 1} = 3 + \frac{9}{7}$  (resp.  $3 + \frac{3}{5-2} - \varepsilon = 4 - \varepsilon < \text{mad}(G_\varepsilon) < 3 + \frac{9}{2 \times 5 - 1} = 4$ ).

### 2.4.3 Quelques propriétés des tournois $QR_7$ et $QR_{19}$

Dans cette sous-section, nous donnons certaines propriétés des tournois  $QR_7$  et  $QR_{19}$ , initialement définis dans le chapitre 1, § 1.2.1.

À noter que nous utiliserons les conventions de dessins suivantes dans le reste de cette section : un sommet noir est un sommet totalement défini (*i.e.* tous ses voisins sont présents sur le dessin), alors qu'un sommet blanc est un sommet partiellement défini (*i.e.* tous ses voisins ne sont pas nécessairement présents sur le dessin).

Le *graphe circulant*  $G = C(p; c_1, c_2, \dots, c_d)$  est défini par  $V(G) = \{0, 1, \dots, p-1\}$  et  $\vec{uv} \in A(G)$  si et seulement si  $v = u + c_i \pmod{p}$  pour un  $i$  donné,  $1 \leq i \leq d$ .

Rappelons que si  $q \equiv 3 \pmod{4}$  est une puissance de nombre premier et que les  $c_i$  sont les résidus quadratiques non nuls de  $q$ , alors  $d = \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor$  et  $QR_q = C(q; c_1, \dots, c_d)$  est un tournoi de Paley.

**Propriété 2.26.** Soit  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et soit  $S = \{x^2; x \in \mathbb{F}_p^*\}$  les carrés non nuls de  $\mathbb{F}_p$ . Alors  $S \cap -S = \emptyset$ .

**Preuve.** Puisque  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $-1$  n'est pas un carré modulo  $p$ . En effet, si  $-1$  était un carré,  $-1 = x^2$  et donc par le petit théorème de Fermat :  $(-1)^{(p-1)/2} = x^{p-1} = 1$ . Mais, nous avons également  $p = 4m + 3$  et donc  $(-1)^{(p-1)/2} = (-1)^{2m+1} = -1$ .

Alors, soit  $a, b \in \mathbb{F}_p$  tels que  $a^2 + b^2 = 0$ . Si  $a \neq 0$  (resp.  $b \neq 0$ ),  $(b/a)^2 = -1$  (resp.  $(a/b)^2 = -1$ ) ce qui est une contradiction. Par conséquent,  $a = b = 0$ . □

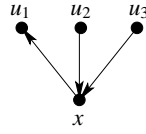


FIG. 2.14 –  $x$  est un  $(0, 1, 1)$ -successeur de  $(u_1, u_2, u_3)$ .

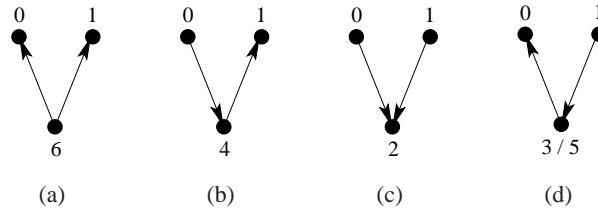


FIG. 2.15 – Exemple de la propriété  $P_{2,1}$  de  $QR_7$ .

Donc, un tel tournoi de Paley  $QR_p$  est clairement un graphe de Cayley  $C_{(M,S)}$  avec  $M = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et  $S = \{x^2; x \in \mathbb{F}_p^*\}$  avec  $S \cap -S = \emptyset$ . Rappelons également que les tournois de Paley sont arc-transitifs [Fri70].

Un *vecteur d'orientation* de taille  $n$  est un  $n$ -uplet  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$ .

Soit  $G$  un graphe orienté et soit  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  une séquence de sommets deux à deux distincts de  $G$ . Pour un vecteur d'orientation  $\alpha$ , un sommet  $v$  de  $G$  est appelé  $\alpha$ -successeur de  $U$  si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\vec{vu_i}$  est un arc de  $G$  si  $\alpha_i = 0$ ,  $\vec{u_i v}$  est un arc de  $G$  sinon (voir la figure 2.14 pour un exemple).

Nous dirons qu'un graphe orienté  $G$  satisfait la propriété  $P_{n,k}$  si pour toute séquence  $U$  à  $n$  sommets deux à deux distincts de  $G$  et tout vecteur d'orientation  $\alpha$  de taille  $n$ , il existe au moins  $k$  sommets dans  $G$  étant des  $\alpha$ -successeurs de  $U$ .

D'après [BKN<sup>+</sup>99], les tournois  $QR_7$  et  $QR_{19}$  ont les propriétés suivantes :

**Propriété 2.27.** [BKN<sup>+</sup>99] *Le tournoi  $QR_7$  satisfait les propriétés  $P_{1,3}$  et  $P_{2,1}$ .*

**Propriété 2.28.** [BKN<sup>+</sup>99] *Le tournoi  $QR_{19}$  satisfait les propriétés  $P_{1,9}$ ,  $P_{2,4}$  et  $P_{3,1}$ .*

Par exemple, dire que  $QR_7$  a la propriété  $P_{2,1}$  signifie que pour toute paire de sommets distincts  $(x, y)$  de  $QR_7$  et tout vecteur d'orientation  $\alpha$  de taille deux (quatre vecteurs d'orientation possibles), nous avons au moins un  $\alpha$ -successeur de  $(x, y)$ . Si l'on prend l'exemple  $x = 0$  et  $y = 1$ , nous pouvons vérifier qu'il existe un  $(0, 0)$ -successeur (voir la figure 2.15(a)), un  $(1, 0)$ -successeur (voir la figure 2.15(b)), un  $(1, 1)$ -successeur (voir la figure 2.15(c)) et deux  $(0, 1)$ -successeurs (voir la figure 2.15(d)) de  $(x, y)$ .

Dans le reste de cette section, nous allons considérer quelques propriétés supplémentaires du graphe  $QR_7$ .

Pour un sous-ensemble  $S$  de sommets de  $G$ , nous notons :

$$\Gamma^+(S) = \bigcup_{v \in S} \Gamma^+(v) \quad \text{et} \quad \Gamma^-(S) = \bigcup_{v \in S} \Gamma^-(v)$$

Pour un graphe orienté donné  $G$ , nous notons  $\Omega_G(k)$  le plus grand entier  $n$  tel que pour tout sous-ensemble  $S \subseteq V(G)$  de taille  $k$ ,  $|\Gamma^+(S)| \geq n$  et  $|\Gamma^-(S)| \geq n$ .

Grâce à une analyse cas par cas, nous pouvons vérifier que nous avons la propriété suivante :

**Propriété 2.29.**

1.  $\Omega_{QR_7}(1) = 3$ ;
2.  $\Omega_{QR_7}(2) = 5$ ;
3.  $\Omega_{QR_7}(k) = 6$  pour  $3 \leq k \leq 4$ ;
4.  $\Omega_{QR_7}(k) = 7$  pour  $5 \leq k \leq 7$ .

Considérons les définitions suivantes.

**Définition 2.30.** Soit  $G$  un graphe orienté. Soit  $W \subset V(G)$  et  $x \in W$ . Soit  $\gamma$  une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $G \setminus W$ . Nous dirons qu'il existe  $k$  choix pour colorier  $x$  basés sur  $\gamma$  dans  $G$  s'il existe  $k$   $QR_7$ -sommet-colorations  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  de  $G$  étendant  $\gamma$  telles que les  $\gamma_i(x)$  soient deux à deux distincts.

Nous pouvons remarquer que les sommets de  $W' = W \setminus \{x\}$  peuvent prendre au plus  $k$  couleurs distinctes selon les  $k$   $QR_7$ -sommet-colorations  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  : pour tout  $v \in W'$ ,  $|\{\gamma_i(v), 1 \leq i \leq k\}| \leq k$ . Maintenant, lorsque l'ensemble des couleurs possibles pour un sommet  $v$  de  $W'$  est connu (i.e.  $l$  couleurs possibles pour  $v$  pour un  $l < k$  donné), nous l'exprimerons de la manière suivante :

**Définition 2.31.** Soit  $G$  un graphe orienté. Soit  $W \subset V(G)$  et  $x, y \in W$  deux sommets adjacents. Soit  $\gamma$  une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $G \setminus W$ . Nous dirons qu'il existe  $k$  choix pour colorier  $x$  basés sur  $\gamma$  dans  $G$  qui impliquent au plus  $l$  possibilités pour  $y$ , pour un  $l < k$  donné, s'il existe  $k$   $QR_7$ -sommet-colorations  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  de  $G$  étendant  $\gamma$  telles que les  $\gamma_i(x)$  soient deux à deux distincts et  $|\{\gamma_i(y) \mid 1 \leq i \leq k\}| \leq l$ .

Nous devons de plus noter que fixer un choix pour  $x$  fixe une possibilité pour  $y$ .

**Définition 2.32.** Soit  $G$  un graphe orienté. Soit  $W \subset V(G)$  et  $x, y \in W$  deux sommets non adjacents. Soit  $\gamma$  une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $G \setminus W$ . Nous dirons qu'il existe  $k$  choix pour colorier  $x$  et  $l$  choix pour colorier  $y$  basés sur  $\gamma$  dans  $G$  s'il existe  $k \times l$   $QR_7$ -sommet-colorations  $\gamma_1, \dots, \gamma_{k \times l}$  de  $G$  étendant  $\gamma$  telles que :

1.  $|\{\gamma_i(x) \mid 1 \leq i \leq k \times l\}| = k$  et  $|\{\gamma_i(y) \mid 1 \leq i \leq k \times l\}| = l$ ;
2. les couples  $(\gamma_i(x), \gamma_i(y))$  sont deux à deux distincts.

Nous devons de plus noter que fixer un choix pour  $x$  ne fixe pas la couleur de  $y$ .



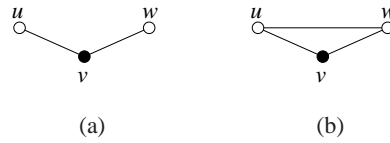


FIG. 2.16 – Configurations des propriétés 2.33 et 2.37

**Propriété 2.33.** Soit  $G$  un graphe orienté contenant la configuration de la figure 2.16(a), soient  $W \subset V(G)$  et  $u, v, w \in W$  ( $u$  et  $w$  sont non adjacents). Soit  $\gamma$  une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $G \setminus W$ . Si nous avons  $k$  choix pour colorier  $u$  et  $l$  choix pour colorier  $w$  basés sur  $\gamma$  dans  $G \setminus \{v\}$ , alors nous avons  $\Omega_{QR_7}(k) + \Omega_{QR_7}(l) - 7$  choix pour colorier  $v$  basés sur  $\gamma$  qui impliquent au plus  $k$  possibilités pour  $u$  et au plus  $l$  possibilités pour  $w$  dans  $G$ .

**Preuve.** Les  $k$  choix de couleurs pour  $u$  autorisent  $\Omega_{QR_7}(k)$  couleurs distinctes pour  $v$ , de même que les  $l$  choix de couleurs pour  $w$  autorisent  $\Omega_{QR_7}(l)$  couleurs distinctes pour  $v$ . Par le principe des tiroirs de Dirichlet, il est facile de voir que nous avons au moins  $n = \Omega_{QR_7}(k) + \Omega_{QR_7}(l) - 7$  choix pour colorier  $v$  basés sur  $\gamma$  dans  $G$  qui impliquent  $k$  possibilités pour  $u$  et  $l$  possibilités pour  $w$ .  $\square$

Une étude rapide du corps  $\mathbb{F}_7$  nous permet de vérifier la propriété suivante :

**Observation 2.34.** Soit  $S = \{x^2; x \in \mathbb{F}_7^*\} = \{1, 2, 4\}$ . Pour tout couple distinct  $(s_1, s'_1)$  et  $(s_2, s'_2)$  de  $S \times S$ , nous avons  $s_1 - s'_1 \neq s_2 - s'_2$ .

L'observation 2.34 nous permet alors de prouver la propriété suivante :

**Propriété 2.35.** Soient  $x, y \in \mathbb{F}_7$  avec  $x \neq y$  et soient  $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S = \{x^2; x \in \mathbb{F}_7^*\}$  tels que  $s_1 \neq s_2$  et  $s_3 \neq s_4$ . Alors  $|\{x + s_1, x + s_2, y + s_3, y + s_4\}| \geq 3$  et  $|\{x - s_1, x - s_2, y - s_3, y - s_4\}| \geq 3$ .

**Preuve.** Supposons que  $|\{x + s_1, x + s_2, y + s_3, y + s_4\}| < 3$ . Puisque  $s_1 \neq s_2$  et  $s_3 \neq s_4$ , nous avons  $x + s_1 \neq x + s_2$  et  $y + s_3 \neq y + s_4$ . Par conséquent, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $x + s_1 = y + s_3$  et  $x + s_2 = y + s_4$ , ce qui implique que  $s_3 - s_1 = s_4 - s_2$ ; ceci est une contradiction d'après l'observation 2.34.

Le même argument nous permet de montrer que  $|\{x - s_1, x - s_2, y - s_3, y - s_4\}| \geq 3$ .  $\square$

Une étude attentive du tournoi  $QR_7$  donne les deux propriétés suivantes :

**Propriété 2.36.** Soient  $x, y, z$  trois sommets distincts de  $QR_7$  tels que  $\vec{xy} \in A(QR_7)$  et  $\vec{xz} \in A(QR_7)$ . Pour tout vecteur d'orientation  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \{0, 1\}^2$ , il existe au moins deux sommets distincts  $y'$  et  $z'$  tels que  $y'$  soit un  $\alpha$ -successeur de  $(x, y)$  et  $z'$  soit un  $\alpha$ -successeur de  $(x, z)$ .

**Propriété 2.37.** Soit  $G$  un graphe orienté contenant la configuration de la figure 2.16(b), soit  $W \subset V(G)$ , et soient  $u, v, w \in W$  ( $u$  et  $w$  adjacents). Soit  $\gamma$  une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $G \setminus W$ . Si nous

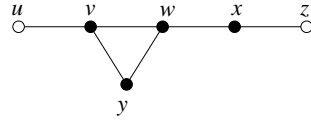


FIG. 2.17 – Configuration de la propriété 2.38.

avons deux (resp. cinq) choix pour colorier  $u$  basés sur  $\gamma$  qui impliquent au plus une (resp. trois) possibilité(s) pour colorier  $w$  dans  $G \setminus \{v\}$ , alors nous avons au moins deux (resp. trois) choix pour colorier  $v$  basés sur  $\gamma$  dans  $G$ .

**Preuve.** Soit  $G' = G \setminus \{v\}$ . Supposons sans perte de généralité que  $\vec{wu} \in A(G)$ .

Supposons premièrement qu'il existe au moins deux  $QR_7$ -sommet-colorations  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $G'$  étendant  $\gamma$  telles que  $\gamma_1(u) \neq \gamma_2(u)$  et  $\gamma_1(w) = \gamma_2(w)$ . Donc,  $\gamma_1(u)$  et  $\gamma_2(u)$  sont deux successeurs distincts de  $\gamma_1(w)$  dans  $QR_7$ . Par la propriété 2.36, nous avons au moins deux choix pour colorier  $v$  basés sur  $\gamma$  dans  $G$ .

Supposons maintenant qu'il existe au moins cinq  $QR_7$ -sommet-colorations  $\gamma_1, \dots, \gamma_5$  de  $G'$  étendant  $\gamma$  telles que les  $\gamma_i(u)$  sont deux à deux distincts et  $|\{\gamma_i(w) \mid 1 \leq i \leq 5\}| = 3$  (ce qui est le pire des cas). Soient  $\gamma_i(u) = u_i$  et  $\{\gamma_i(w) \mid 1 \leq i \leq 5\} = \{w_1, w_2, w_3\}$ . La couleur  $u_i$  est un successeur de  $\gamma_i(w)$  dans  $QR_7$  pour  $1 \leq i \leq 5$ . Sans perte de généralité, s'il existe  $j, k, l \in [1, 5]$  avec  $j \neq k \neq l \neq j$  tels que  $\gamma_j(w) = \gamma_k(w) = \gamma_l(w) = w_1$ , alors  $u_j, u_k, u_l$  sont les trois successeurs de  $w_1$  dans  $QR_7$  et d'après la propriété 2.36, nous avons au moins trois choix pour colorier  $v$  basés sur  $\gamma$  dans  $G$ . S'il n'existe pas trois tels entiers  $j, k, l \in [1, 5]$ , par le principe des tiroirs de Dirichlet, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $u_1$  et  $u_2$  sont tous deux des successeurs de  $w_1$  dans  $QR_7$  et,  $u_3$  et  $u_4$  sont tous deux des successeurs de  $w_2$  dans  $QR_7$ . D'après la propriété 2.36, pour tout vecteur d'orientation  $\alpha \in \{0, 1\}^2$ , il existe  $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S = \{1, 2, 4\}$  tels que  $w_1 + s_1$  (resp.  $w_1 + s_2, w_2 + s_3, w_2 + s_4$ ) est un  $\alpha$ -successeur de  $(w_1, u_1)$  (resp.  $(w_1, u_2), (w_2, u_3)$  et  $(w_2, u_4)$ ) et  $w_1 + s_1 \neq w_1 + s_2$  et  $w_2 + s_3 \neq w_2 + s_4$ . Par conséquent, d'après la propriété 2.35,  $|\{w_1 + s_1, w_1 + s_2, w_2 + s_3, w_2 + s_4\}| \geq 3$  et donc, nous avons au moins trois choix pour colorier  $v$  basés sur  $\gamma$  dans  $G$ .  $\square$

**Propriété 2.38.** Soit  $G$  un graphe orienté contenant la configuration de la figure 2.17 et soit  $\gamma$  une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $G \setminus \{v, w, x, y\}$ . Alors, nous avons trois choix pour colorier  $y$  basés sur  $\gamma$  dans  $G$ .

**Preuve.** D'après la propriété 2.29, nous avons trois choix pour colorier  $v$  et trois choix pour colorier  $x$  basés sur  $\gamma$  dans  $G \setminus \{w, y\}$ . Alors, d'après la propriété 2.33, nous avons au moins cinq choix pour colorier  $w$  basés sur  $\gamma$  ce qui implique que nous avons au plus trois possibilités pour  $v$  dans  $G \setminus \{y\}$ . Finalement, d'après la propriété 2.37, nous avons trois choix pour colorier  $y$  basés sur  $\gamma$  sur  $G$ .  $\square$

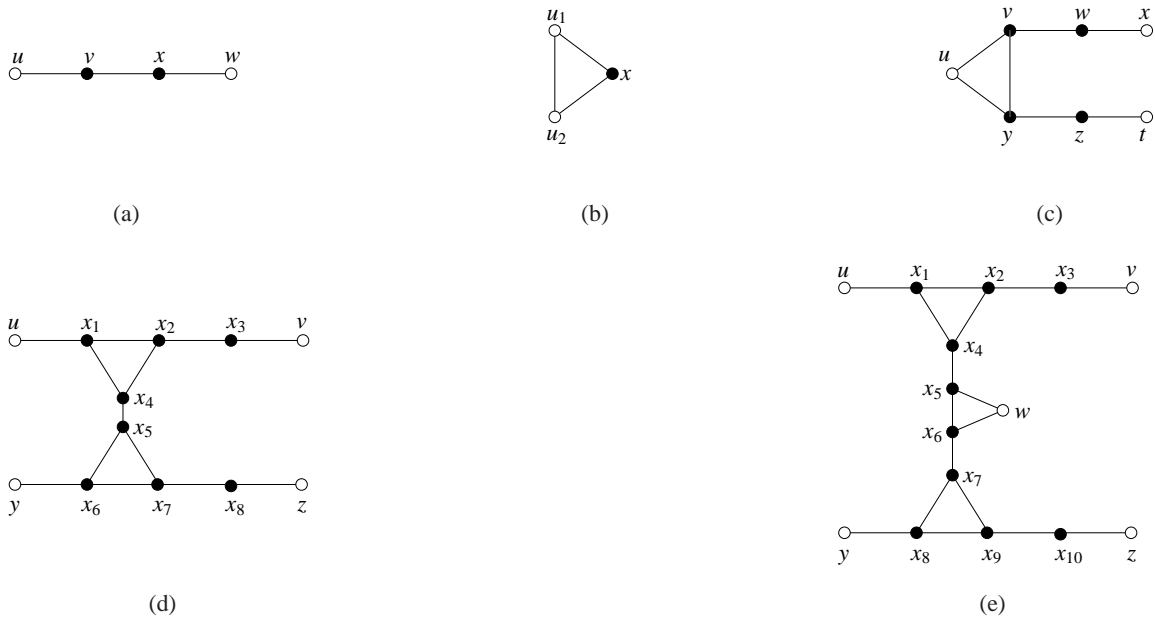


FIG. 2.18 – Configurations interdites du théorème 2.22.

Nous allons utiliser les trois propriétés précédentes dans les prochaines sous-sections pour prouver les théorèmes 2.22 et 2.24.

### 2.4.4 Preuve du théorème 2.22

Nous montrons ici que tout graphe planaire orienté sans cycles de longueurs 4 à 12 admet un homomorphisme vers le graphe de Cayley  $QR_7$ .

Dans le reste de cette section,  $H$  est un contre exemple d'ordre minimal du théorème 2.22. Nous allons montrer dans le prochain lemme que le graphe  $H$  ne contient pas certaines configurations. Pour chacune d'entre elles, nous considérons un graphe  $H'$  tel que  $|V(H')| < |V(H)|$ . Par minimalité de  $H$ , il existe une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $H'$  et nous montrons comment l'étendre à une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $H$ . Finalement, une procédure de déchargement complétera la preuve.

#### 2.4.4.1 Propriétés structurelles de $H$

**Lemme 2.39.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 1-sommet.*

**Preuve.** Trivial. □

**Lemme 2.40.** *Le graphe  $H$  ne contient pas deux 2-sommets adjacents.*

**Preuve.** Considérons la configuration de la figure 2.18(a). Toute  $QR_7$ -sommet-coloration  $\gamma$  de  $H \setminus \{x\}$  peut être modifiée telle que  $\gamma(v) \neq \gamma(w)$  grâce à la propriété  $P_{1,3}$ . Cette sommet-coloration orientée modifiée peut être étendue à  $H$  grâce à la propriété  $P_{2,1}$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.41.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 3-face incidente à un 2-sommet.*

**Preuve.** Considérons la configuration de la figure 2.18(b). Toute  $QR_7$ -sommet-coloration  $\gamma$  de  $H \setminus \{x\}$  satisfait  $\gamma(u_1) \neq \gamma(u_2)$ , et peut être étendue à  $H$  grâce à la propriété  $P_{2,1}$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.42.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 3-face incidente à deux 3-sommets, eux-mêmes adjacents à un 2-sommet.*

**Preuve.** Considérons la configuration de la figure 2.18(c). Soit  $\gamma$  une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $H \setminus \{v, w, y, z\}$ . Grâce à la propriété  $P_{1,3}$ , nous avons deux couleurs disponibles pour colorier le sommet  $v$ , notées  $a$  et  $b$ , telles que  $a \neq \gamma(x)$  et  $b \neq \gamma(x)$  dans  $H \setminus \{w, y, z\}$ . Grâce à la propriété  $P_{2,1}$ , nous choisissons parmi les couleurs  $a$  et  $b$  celle qui nous permet de colorier le sommet  $y$  avec une couleur  $\gamma(y) \neq \gamma(t)$  dans  $H \setminus \{w, z\}$ . Grâce à la propriété  $P_{2,1}$ , nous pouvons finalement étendre  $\gamma$  à une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $H$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.43.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 2.18(d).*

**Preuve.** Considérons la configuration de la figure 2.18(d). Soit  $\gamma$  une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $H \setminus \{x_1, \dots, x_8\}$ . Grâce à la propriété 2.38, nous avons trois choix pour colorier  $x_4$  et trois choix pour colorier  $x_5$  basés sur  $\gamma$  dans  $H \setminus x_4x_5$ . Grâce à la propriété 2.29, les trois choix pour  $x_4$  interdisent au plus une couleur pour  $x_5$  et par conséquent, il existe au moins deux couples de couleurs pour colorier  $x_4$  et  $x_5$ , *i.e.* il existe au moins deux  $QR_7$ -sommet-colorations de  $G$  étendant  $\gamma$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.44.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 2.18(e).*

**Preuve.** Considérons la configuration de la figure 2.18(e). Soit  $\gamma$  une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $H \setminus \{x_1, \dots, x_{10}\}$ . Grâce à la propriété 2.38, nous avons trois choix pour colorier  $x_4$  et trois choix pour colorier  $x_7$  basés sur  $\gamma$  dans  $H \setminus \{x_5, x_6\}$ . Alors, grâce à la propriété 2.33, nous avons deux choix pour colorier  $x_6$  basés sur  $\gamma$  ce qui implique une possibilité pour  $w$  dans  $H \setminus \{x_5\}$ . Alors grâce à la propriété 2.37, nous avons deux choix pour colorier  $x_5$  basés sur  $\gamma$  dans  $H \setminus x_4x_5$ . Grâce à la propriété 2.29, les trois choix de  $x_4$  interdisent au plus une couleur pour  $x_5$  et par conséquent, il existe au moins un couple de couleurs pour colorier  $x_4$  et  $x_5$ , *i.e.* il existe au moins une  $QR_7$ -sommet-coloration de  $G$  étendant  $\gamma$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

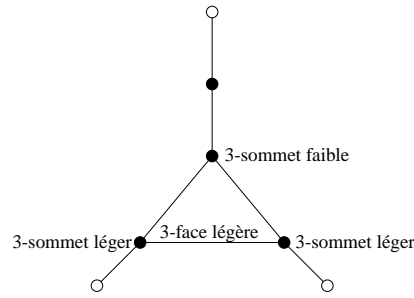


FIG. 2.19 – Une 3-face légère.

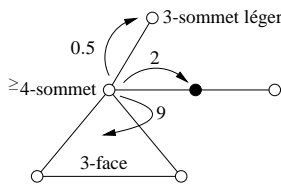


FIG. 2.20 – Règle (R1).

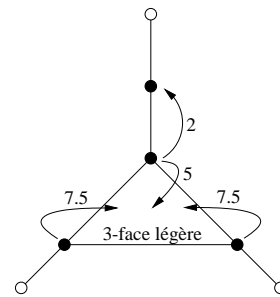


FIG. 2.21 – Règle (R2.1).

#### 2.4.4.2 Procédure de déchargement

**Lemme 2.45.** Soit  $H$  un graphe planaire connexe à  $n$  sommets,  $m$  arêtes et  $f$  faces. Alors, l'équation suivante est vérifiée :

$$\sum_{v \in V(H)} (11d(v) - 26) + \sum_{f \in F(H)} (2r(f) - 26) = -52 \quad (2.2)$$

**Preuve.** La formule d'Euler  $n - m + f = 2$  nous donne  $(22m - 26n) + (4m - 26f) = -52$  après transformation. Cette égalité, ainsi que la relation  $\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{f \in F} r(f) = 2m$ , concluent la preuve.  $\square$

Nous dirons qu'une 3-face est *légère* si elle est incidente à trois 3-sommets  $u, v, w$  dont exactement l'un d'eux, disons  $w$ , est adjacent à un 2-sommet. Les sommets  $u$  et  $v$  sont alors appelés sommets *légers* alors que le sommet  $w$  est appelé sommet *faible* (voir la figure 2.19).

Nous définissons la fonction de poids  $\omega$  par  $\omega(v) = 11d(v) - 26$  si  $v \in V(H)$  et  $\omega(f) = 2r(f) - 26$  si  $f \in F(H)$ . Nous utilisons maintenant les règles de déchargement suivantes :

(R1) Soit  $v$  un  $\geq 4$ -sommet (voir la figure 2.20).

(R1.1)  $v$  donne  $\frac{1}{2}$  à chacun de ses 3-voisins légers.

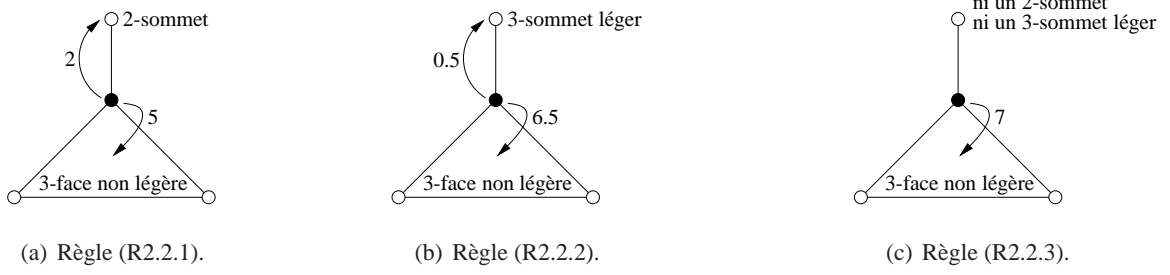


FIG. 2.22 – Règle (R2.2).

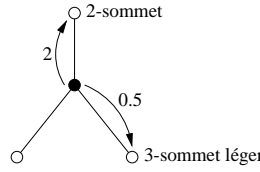


FIG. 2.23 – Règle (R2.3).

(R1.2)  $v$  donne 2 à chacun de ses 2-voisins.

(R1.3)  $v$  donne 9 à chacune de ses 3-faces incidentes.

(R2) Soit  $v$  un 3-sommet.

(R2.1)  $v$  est incident à une 3-face légère (voir la figure 2.21).

(R2.1.1) Si  $v$  est léger, alors  $v$  donne  $\frac{15}{2}$  à la 3-face légère incidente.

(R2.1.2) Si  $v$  est faible, alors  $v$  donne 2 à son 2-voisin et 5 à la 3-face légère incidente.

(R2.2)  $v$  est incident à une 3-face qui n'est pas légère (voir la figure 2.22).

(R2.2.1) Si  $v$  possède un 2-voisin, alors  $v$  donne 2 à ce 2-voisin et 5 à la 3-face incidente.

(R2.2.2) Si  $v$  possède un 3-voisin léger, alors  $v$  donne  $\frac{1}{2}$  à ce 3-voisin léger et  $\frac{13}{2}$  à la 3-face incidente.

(R2.2.3) Dans les autres cas,  $v$  donne 7 à la 3-face incidente.

(R2.3)  $v$  n'est pas incident à une 3-face. Alors  $v$  donne  $\frac{1}{2}$  à chacun de ses 3-voisins légers et 2 à chacun de ses 2-voisins (voir la figure 2.23).

Une fois la procédure de déchargement terminée, une nouvelle charge  $\omega^*$  est obtenue sur les sommets et les faces de  $H$ .

Soit  $v$  un  $k$ -sommet de  $H$ . Notons que le graphe  $H$  ne contient pas de 1-sommet (d'après le lemme 2.39), et par conséquent  $k \geq 2$ .

- Si  $k = 2$ , alors  $\omega(v) = -4$ . Puisque deux 2-sommets ne peuvent pas être adjacents (d'après le lemme 2.40),  $v$  reçoit 2 de chacun de ces voisins par les règles R1.2, R2.1.2, R2.2.1 et R2.3. Alors,  $\omega^*(v) = 0$ .
- Si  $k = 3$ , alors  $\omega(v) = 7$ .
  - Supposons premièrement que  $v$  n'est pas incident à une 3-face. Par la règle R2.3,  $v$  donne au plus  $3 \times 2$  et  $\omega^*(v) \geq 1$ .
  - Supposons maintenant que  $v$  est incident à une 3-face  $f$ .
    - Si  $f$  est légère, alors  $v$  est léger ou faible.
      - Si  $v$  est léger alors il reçoit  $\frac{1}{2}$  de ces voisins qui ne sont ni faible ni léger par les règles R1 et R2.3 (ces voisins existent puisqu'un 3-sommet léger ne peut pas être adjacent à deux autres 3-sommets légers (d'après le lemme 2.43)). Alors,  $v$  donne au plus  $\frac{15}{2}$  à  $f$  par la règle R2.1.1. Ainsi,  $\omega^*(v) = 7 + \frac{1}{2} - \frac{15}{2} = 0$ .
      - Si  $v$  est faible, par la règle R2.1.2, il donne 7 et  $\omega^*(v) = 0$ .
      - Si  $f$  n'est pas légère,  $v$  donne 7 par les règles R2.2.1, R2.2.2 et R2.2.3, et  $\omega^*(v) = 0$ .
- Si  $k \geq 4$ , alors  $\omega(v) = 11k - 26$ . Il est facile d'observer que  $v$  donne au plus  $\frac{9}{2}k$  par la règle R1. Ainsi,  $\omega^*(v) \geq 11k - 26 - \frac{9}{2}k = \frac{13}{2}k - 26 \geq 0$ .

Soit  $f$  une  $l$ -face. Rappelons que le graphe  $H$  ne contient pas de cycles de longueurs 4 à 12.

- Si  $l = 3$ , nous avons  $\omega(f) = -20$ .
  - Si  $f$  est légère, alors elle reçoit  $\frac{15}{2}$  de chacun de ces 3-sommets légers incidents et 5 du sommet faible adjacent par les règles R2.1.1 et R2.1.2, et  $\omega^*(f) = -20 + 2 \times \frac{15}{2} + 5 = 0$ .
  - Si  $f$  n'est pas légère, d'après le lemme 2.41,  $f$  n'est pas incidente à un 2-sommet.
    - Si  $f$  est incidente à trois 3-sommets, alors les sommets présents sur la frontière de  $f$  sont adjacents à au plus un 3-sommet léger (d'après le lemme 2.44) et ne sont pas adjacents à un 2-sommet (d'après le lemme 2.42); par conséquent,  $f$  reçoit au moins  $2 \times 7 + \frac{13}{2}$  par les règles R2.2.2 et R2.2.3. Ainsi,  $\omega^*(f) \geq \frac{1}{2}$ .
    - Si  $f$  est incidente à au moins un  $\geq 4$ -sommet, alors  $f$  reçoit au moins  $9 + 5 + \frac{13}{2}$  par les règles R1.3, R2.2.1, R2.2.2 et R2.2.3, et d'après le lemme 2.42. Ainsi,  $\omega^*(f) \geq \frac{1}{2}$ .
- Si  $l \geq 13$ , alors  $\omega(f) = \omega^*(f) \geq 0$ .

La somme totale des charges est conservée durant la procédure de déchargement et nous pouvons remarquer que  $\omega^*(x) \geq 0$  pour tout  $x \in V(H) \cup F(H)$ . Nous obtenons alors d'après l'égalité 2.2 la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega^*(x) \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega(x) = -52 < 0$$

Un tel contre-exemple  $H$  du théorème 2.22 n'existe pas, ce qui conclut la preuve.

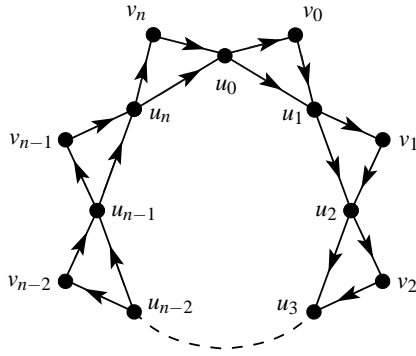


FIG. 2.24 – Un graphe planaire extérieur  $H_n$  sans cycles de longueurs 4 à  $n$  tel que  $\chi_o(H_n) \geq 6$  pour tout  $n \not\equiv 4 \pmod{5}$ .

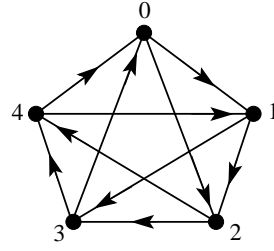


FIG. 2.25 – Le tournoi  $T_5$ .

### 2.4.5 Preuve du théorème 2.23

Nous montrons maintenant que la borne donnée par le théorème 2.23 est optimale en construisant un graphe planaire extérieur sans cycles de longueurs 4 à  $i$  dont le nombre chromatique orienté est 7, pour tout  $i \geq 6$ .

**Lemme 2.46.** *Pour tout  $n \geq 5$  et  $n \not\equiv 4 \pmod{5}$ ,  $\chi_o(H_n) \geq 6$  (où  $H_n$  est le graphe de la figure 2.24).*

**Preuve.** Il est facile de voir que ce graphe nécessite au moins cinq couleurs : en effet, les sommets  $u_n, v_n, u_0, v_0, u_1$  doivent avoir des couleurs différentes. Supposons que  $H_n$  admet une 5-sommet-coloration orientée  $f$  et posons sans perte de généralité  $f(u_n) = 0$ ,  $f(v_n) = 1$ ,  $f(u_0) = 2$ ,  $f(v_0) = 3$  et  $f(u_1) = 4$ . Alors, pour colorier  $v_1$  et  $u_2$ , nous avons deux couleurs disponibles, à savoir 0 et 1 ; de plus nous avons déjà un arc allant de 0 vers 1. Par conséquent, nous devons poser  $f(v_1) = 0$  et  $f(u_2) = 1$ . Maintenant, pour colorier  $v_2$  et  $u_3$ , nous avons deux couleurs disponibles, à savoir 2 et 3 ; de plus nous avons déjà un arc allant de 2 vers 3. Par conséquent, nous devons poser  $f(v_2) = 2$  et  $f(u_3) = 3$ . Finalement, pour colorier  $v_3$  et  $u_4$ , nous avons deux couleurs disponibles, à savoir 0 et 4 ; de plus nous avons déjà un arc allant de 4 vers 0. Par conséquent, nous devons poser  $f(v_3) = 4$  et  $f(u_4) = 0$ . Il apparaît donc clairement que toute 5-sommet-coloration orientée de  $H_n$  doit nécessairement être une  $T_5$ -sommet-coloration (où  $T_5$  est le tournoi de la figure 2.25). Nous pouvons à présent vérifier que pour toute  $T_5$ -sommet-coloration de  $H_n$ , nous avons  $f(u_{i+1}) = f(u_i) + 2 \pmod{5}$ . Par conséquent, nous avons  $f(u_n) = f(u_0) + 2n \pmod{5}$ , et  $f(u_0) = f(u_n) + 2 \pmod{5}$ . Donc,  $2 + 2n \pmod{5} = 0$ , ce qui implique  $n \equiv 4 \pmod{5}$ , une contradiction. Nous avons donc  $\chi_o(H_n) \geq 6$ .  $\square$

Soient  $T_6^1, T_6^2, T_6^3, T_6^4, T_6^5$  les cinq tournois à six sommets de la figure 2.27.



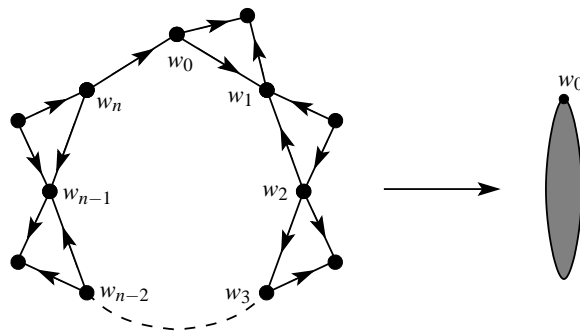


FIG. 2.26 – Un graphe planaire extérieur  $H'_n$  sans cycles de longueurs 4 à  $n$ .

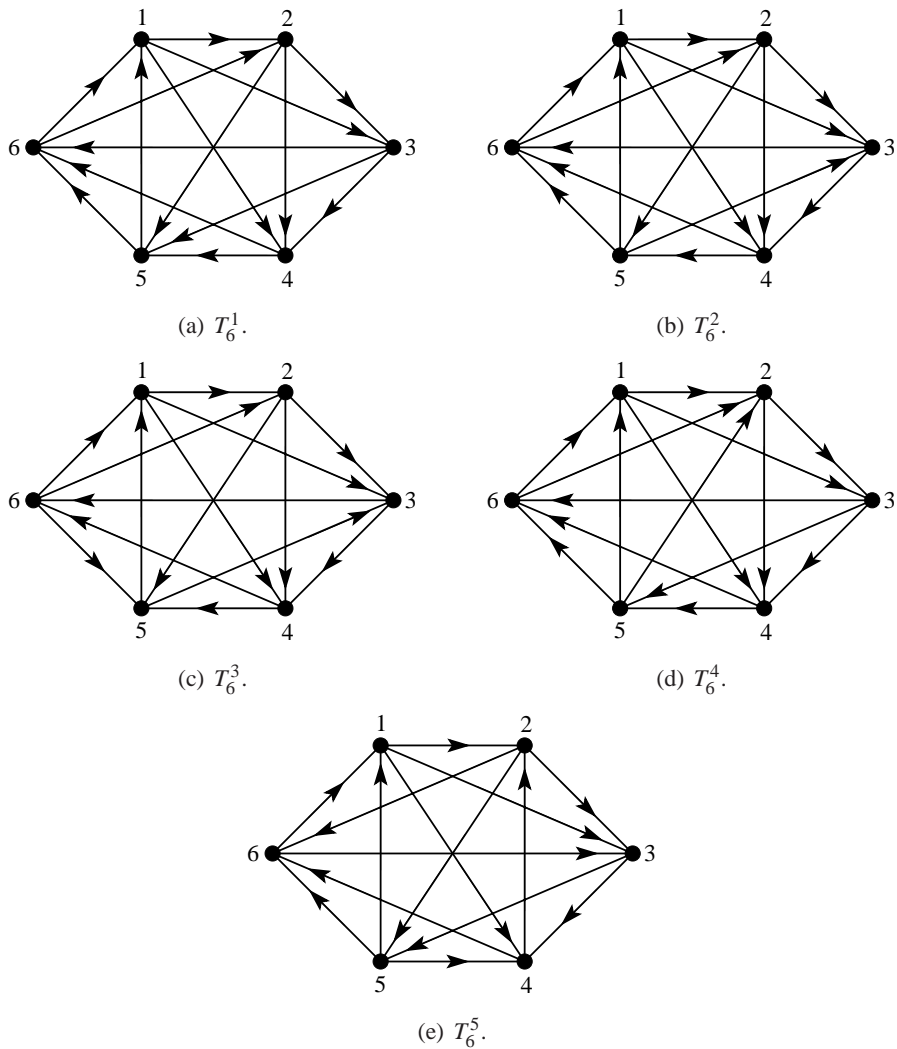
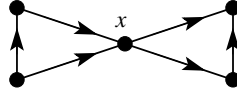
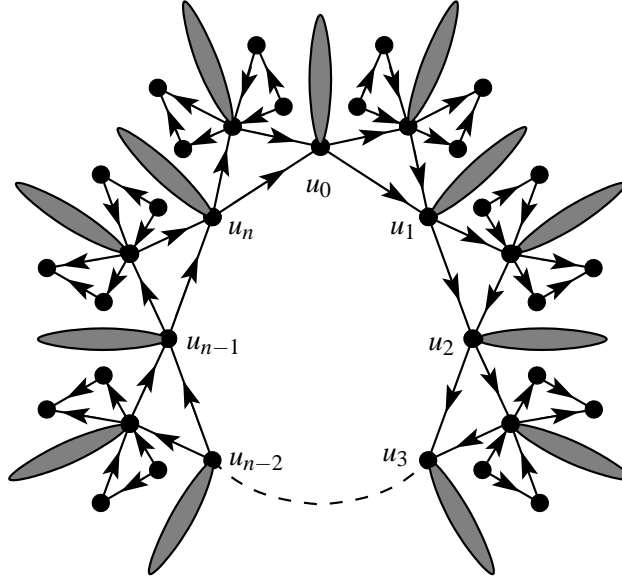


FIG. 2.27 – Les cinq tournois non isomorphes à six sommets tels que pour tout sommet  $u$ ,  $d^-(u) \geq 2$  et  $d^+(u) \geq 2$ .

FIG. 2.28 – Le graphe  $H$ .FIG. 2.29 – Un graphe planaire extérieur  $G_n$  sans cycles de longueurs 4 à  $n$  tel que  $\chi_o(G_n) = 7$  pour tout  $n \geq 5$ ,  $n$  impair et  $n \not\equiv 4 \pmod{5}$ .

**Lemme 2.47.** Soient  $n$  un entier impair et  $H'_n$  le graphe de la figure 2.26. Toute  $T_6^1$ -sommet-coloration (resp.  $T_6^2$ ,  $T_6^3$ ,  $T_6^4$ ,  $T_6^5$ )  $f$  de  $H'_n$  est telle que  $f(w_0) \neq 6$  (resp.  $f(w_0) \neq 6$ ,  $f(w_0) \neq 4$ ,  $f(w_0) \neq 4$ ,  $f(w_0) \neq 3$ ).

**Preuve.** Supposons que le graphe  $H'_n$  admet une  $T_6^1$ -sommet-coloration  $f$  telle que  $f(w_0) = 6$ . Alors, il est facile de vérifier que, pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , nous aurons  $f(w_i) = 6$  si  $i$  est pair, et  $f(w_i) = 1$  sinon. Sachant que  $n$  est impair, l'arc  $\overrightarrow{u_n u_0}$  reliera deux sommets de la même couleur, ce qui est une contradiction.

Nous obtenons de la même manière une contradiction pour le tournoi  $T_6^2$  (resp.  $T_6^3$ ,  $T_6^4$ ,  $T_6^5$ ) de la figure 2.27, le rôle des couleurs 6 et 1 étant joué par les couleurs 6 et 1 (resp. 4 et 6, 4 et 5, 3 et 5).  $\square$

**Preuve du théorème 2.23.** Soit  $J_n$  le graphe planaire extérieur construit de la manière suivante : nous prenons le graphe  $H_n$  (de la figure 2.24),  $n + 1$  copies du graphe  $H$  (voir figure 2.28) et nous identifions le sommet  $x$  de chaque copie de  $H$  aux sommets  $v_0, v_1, \dots, v_n$ . D'après le lemme 2.46,  $\chi_o(H_n) \geq 6$ . Donc, si  $\chi_o(J_n) = 6$ , les six couleurs sont nécessairement présentes sur les sommets  $u_1, u_2, \dots, u_n, v_0, v_1, \dots, v_n$  de  $J_n$ . De plus, sachant que chacun de ces sommets possèdent deux suc-

cesseurs et deux prédécesseurs qui doivent avoir des couleurs différentes, chacun des sommets d'un tournoi  $T$  à six sommets tel que  $J_n \rightarrow T$  doit avoir au moins deux prédécesseurs et au moins deux successeurs distincts. Sur les cinquante-six tournois non isomorphes à six sommets, il en existe seulement cinq tels que pour tout sommet  $u$ ,  $d^-(u) \geq 2$  et  $d^+(u) \geq 2$  : ceux de la figure 2.27 (nous avons généré ces tournois à l'aide du programme écrit par Brendan McKay [McK06]). Par conséquent, si  $\chi_o(J_n) = 6$ , alors  $J_n$  est  $T$ -sommet coloriable pour  $T \in \{T_6^1, T_6^2, T_6^3, T_6^4, T_6^5\}$ .

Soit  $G_n$  le graphe planaire extérieur de la figure 2.29 construit de la manière suivante. Nous prenons le graphe  $J_n$ ,  $2n + 2$  copies de  $H'_n$  et identifions le sommet  $w_0$  de chaque copie de  $H'_n$  aux sommets  $u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$  de  $J_n$ . Sachant que les six couleurs sont présentes sur les sommets  $u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$ , d'après le lemme 2.47 aucun des tournois de la figure 2.27 ne permet de colorier  $G_n$ . Nous avons donc  $\chi_o(G_n) = 7$ .  $\square$

Ce résultat permet donc de montrer que la borne du théorème 2.22 est optimale.

### 2.4.6 Preuve du théorème 2.24

Dans cette section, nous prouvons que tout graphe planaire orienté sans cycles de longueurs 4 ou 6 admet un homomorphisme vers le graphe de Cayley  $QR_{19}$ .

Nous définissons dans un premier temps l'ordre partiel  $\prec$  comme suit. Soit  $n_3(G)$  le nombre de  $\geq 3$ -sommets dans  $G$ . Soient  $G_1$  et  $G_2$  des graphes donnés. Nous avons  $G_1 \prec G_2$  si et seulement si au moins une des conditions suivantes est vérifiée :

- (i)  $G_1$  est un sous-graphe propre de  $G_2$  ;
- (ii)  $n_3(G_1) < n_3(G_2)$ .

Nous pouvons noter que cet ordre est bien défini, puisque si  $G_1$  est un sous-graphe propre de  $G_2$ , alors  $n_3(G_1) \leq n_3(G_2)$ . Donc  $\prec$  est une extension linéaire partielle de l'ordre partiel des sous-graphes.

Soit  $H$  un contre-exemple du théorème 2.24 minimal suivant l'ordre  $\prec$ .

Nous procédons de façon similaire à la preuve précédente : nous montrons dans un premier temps que le contre-exemple  $H$  ne contient pas un certain ensemble de configurations, puis nous aboutissons à une contradiction grâce à une procédure de déchargement.

#### 2.4.6.1 Propriétés structurelles de $H$

**Lemme 2.48.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 1-sommet.*

**Preuve.** Trivial.  $\square$

**Lemme 2.49.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 2-sommet incident à une 3-face.*

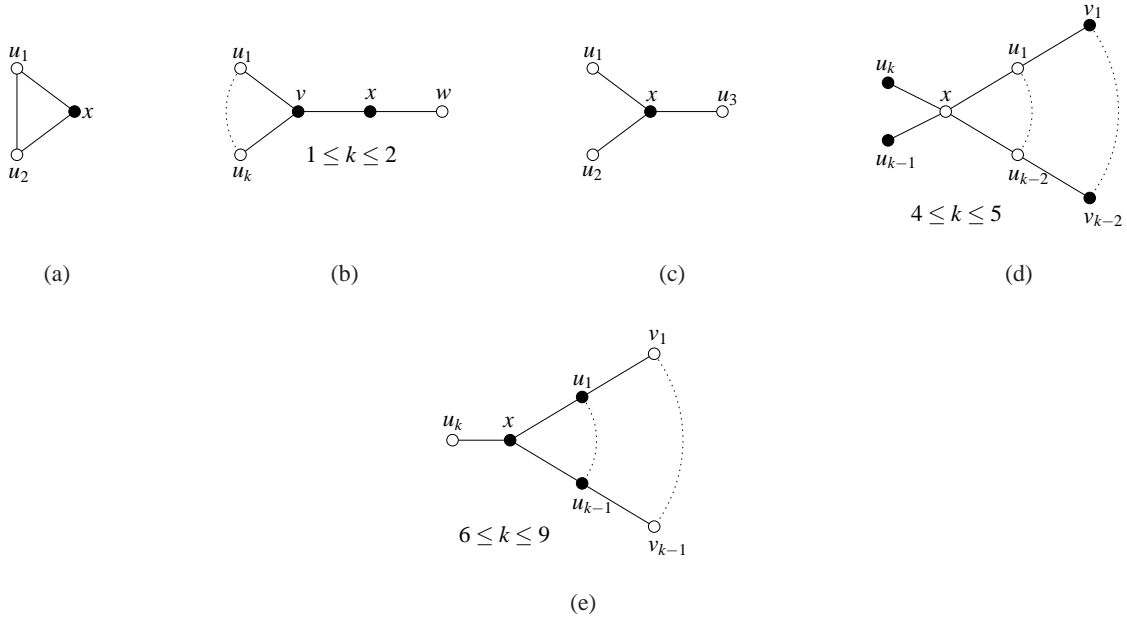


FIG. 2.30 – Configurations interdites du théorème 2.24.

**Preuve.** Considérons la configuration de la figure 2.30(a). Toute  $QR_{19}$ -sommet-coloration  $\gamma$  de  $H \setminus \{x\}$  satisfait  $\gamma(u_1) \neq \gamma(u_2)$ , et peut être étendue à  $H$  grâce à la propriété  $P_{2,4}$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.50.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 2-sommet adjacent à un  $\leq 3$ -sommet.*

**Preuve.** Considérons la configuration de la figure 2.30(b). Toute  $QR_{19}$ -sommet-coloration  $\gamma$  de  $H \setminus \{x\}$  peut être modifiée de telle sorte que  $\gamma(v) \neq \gamma(w)$  grâce à la propriété  $P_{2,4}$ . Cette sommet-coloration orientée modifiée peut alors être étendue à  $H$  grâce à la propriété  $P_{2,4}$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.51.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 3-sommet.*

**Preuve.** Considérons la configuration de la figure 2.30(c). Notons que  $u_1$ ,  $u_2$ , et  $u_3$  sont des  $\geq 3$ -sommets puisque la configuration de la figure 2.30(b) est interdite. Si  $x$  est un source ou un puits, alors nous pouvons étendre toute  $QR_{19}$ -sommet-coloration de  $H \setminus \{x\}$  à  $H$  grâce à la propriété  $P_{3,1}$ . Maintenant, il reste deux cas équivalents à traiter :

(1)  $d^-(x) = 1$  et  $d^+(x) = 2$

(2)  $d^-(x) = 2$  et  $d^+(x) = 1$ .

Nous ne traiterons que le cas (1). Soit  $\Gamma^-(x) = \{u_1\}$  et  $\Gamma^+(x) = \{u_2, u_3\}$ . Nous considérons maintenant le graphe  $H'$  obtenu à partir de  $H \setminus \{x\}$  en ajoutant un 2-chemin joignant respectivement  $u_1$  et  $u_2$ , et  $u_1$  et  $u_3$ . Notons que si  $H$  est un graphe planaire sans cycles de longueurs 4 ou 6, alors  $H'$  est un graphe planaire sans cycles de longueurs 4 ou 6. De plus, nous avons  $H' \prec H$  puisque  $n_3(H') = n_3(H) - 1$ . Toute  $QR_{19}$ -sommet-coloration  $\gamma$  de  $H'$  induit une coloration de  $H \setminus \{x\}$  telle que  $\gamma(u_1) \neq \gamma(u_2)$  et  $\gamma(u_1) \neq \gamma(u_3)$ , qui peut alors être étendue à  $H$  grâce à la propriété  $P_{3,1}$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.52.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 4-sommet (resp. 5-sommet) adjacent à deux (resp. trois) 2-sommets.*

**Preuve.** Considérons la configuration de la figure 2.30(d). Toute  $QR_{19}$ -sommet-coloration  $\gamma$  de  $H \setminus \{u_1, \dots, u_{k-2}\}$  peut être modifiée de telle sorte que  $\gamma(x) \notin \{\gamma(v_1), \dots, \gamma(v_{k-2})\}$  grâce à la propriété  $P_{2,4}$ . Cette sommet-coloration orientée modifiée peut alors être étendue à  $H$  grâce à la propriété  $P_{2,4}$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.53.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de  $k$ -sommet adjacent à  $(k-1)$  2-sommets pour  $6 \leq k \leq 9$ .*

**Preuve.** Considérons la configuration de la figure 2.30(e). Toute  $QR_{19}$ -sommet-coloration  $\gamma$  de  $H \setminus \{u_1, \dots, u_{k-1}\}$  peut être modifiée de telle sorte que  $\gamma(x) \notin \{\gamma(v_1), \dots, \gamma(v_{k-1})\}$  grâce à la propriété  $P_{1,9}$ . Cette sommet-coloration orientée modifiée peut être étendue à  $H$  grâce à la propriété  $P_{2,4}$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

#### 2.4.6.2 Procédure de déchargement

**Lemme 2.54.** *Soit  $H$  un graphe planaire connexe à  $n$  sommets,  $m$  arêtes et  $f$  faces. Alors, l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\sum_{v \in V(H)} (3d(v) - 10) + \sum_{f \in F(H)} (2r(f) - 10) = -20 \quad (2.3)$$

**Preuve.** À partir de la formule d'Euler  $n - m + f = 2$ , nous obtenons facilement  $(6m - 10n) + (4m - 10f) = -20$ . Cette égalité et la relation  $\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{f \in F} r(f) = 2m$  permettent de conclure la preuve.  $\square$

Nous dirons qu'un 4-sommet est *faible* s'il est incident à une unique 3-face et possède un unique 2-voisin (voir la figure 2.31). L'arête incidente à un 4-sommet faible qui n'est pas présente sur la frontière de la 3-face et qui n'est pas incidente au 2-sommet est dite *spéciale*. Une arête spéciale peut être incidente à deux 4-sommets faibles. Soient  $m_3(v)$  le nombre de 3-faces incidentes à  $v$  et  $m_7(v)$  le nombre de  $\geq 7$ -faces incidentes à  $v$ .

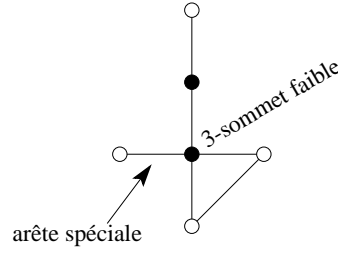


FIG. 2.31 – Un 4-sommet faible.

Nous définissons la fonction de poids  $\omega$  par  $\omega(v) = 3d(v) - 10$  si  $v \in V(H)$  et  $\omega(f) = 2r(f) - 10$  si  $f \in F(H)$ . Nous utilisons maintenant les règles de déchargement suivantes :

- (R1) Chaque  $\geq 7$ -face donne  $\frac{4}{7}$  à chaque arête de sa frontière.
- (R2) Chaque  $\geq 4$ -sommet donne  $\frac{16}{21}$  à chacune de ces 3-faces incidentes.
- (R3) Chaque arête spéciale donne  $\frac{2}{7}$  à chaque 4-sommet faible incident.
- (R4) Chaque arête présente sur la frontière d'un 3-face  $f$  donne  $\frac{4}{7}$  à  $f$ .
- (R5) Soit  $v$  un 2-sommet.
  - (R5.1) Si  $m_7(v) = 2$ , alors les sommets adjacents à  $v$  donnent chacun  $\frac{6}{7}$  à  $v$ .
  - (R5.2) Si  $m_7(v) = 1$ , alors les sommets adjacents à  $v$  donnent chacun  $\frac{10}{7}$  à  $v$ .
  - (R5.3) Si  $m_7(v) = 0$ , alors les sommets adjacents à  $v$  donnent chacun 2 à  $v$ .
- (R6) Chaque arête incidente à un 2-sommet  $v$  donne le total de sa charge obtenue par la règle (R1) à  $v$ .

Une fois la procédure de déchargement terminée, une nouvelle charge  $\omega^*$  est obtenue sur les sommets et les arcs de  $H$ .

Soit  $v$  un  $k$ -sommet. Notons que  $k \neq 1$  et  $k \neq 3$  d'après les lemmes 2.48 et 2.51.

- Si  $k = 2$ , alors  $\omega(v) = -4$ .  $H$  ne contient pas deux 2-sommets adjacents par le lemme 2.50.
  - Si  $m_7(v) = 2$ , alors  $v$  reçoit  $4 \times \frac{4}{7}$  de ces arêtes incidentes par la règle (R6) et  $2 \times \frac{6}{7}$  de ces sommets adjacents par la règle (R5.1). Ainsi,  $\omega^*(v) = -4 + 4 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{6}{7} = 0$ .
  - Si  $m_7(v) = 1$ , alors  $v$  reçoit  $2 \times \frac{4}{7}$  de ces arêtes incidentes par la règle (R6) et  $2 \times \frac{10}{7}$  de ces sommets adjacents par la règle (R5.2). Ainsi,  $\omega^*(v) = -4 + 2 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{10}{7} = 0$ .
  - Finalement, si  $m_7(v) = 0$ , alors,  $v$  ne reçoit rien de ces arêtes adjacentes, mais reçoit  $2 \times 2$  de ces sommets adjacents par la règle (R5.3). Ainsi,  $\omega^*(v) = -4 + 2 \times 2 = 0$ .
- Si  $k = 4$ , alors  $\omega(v) = 2$ . D'après le lemme 2.52,  $v$  est adjacent à au plus un 2-sommet.
  - Premièrement, supposons que  $v$  n'est pas faible.

- Si  $m_3(v) = 2$ , alors  $v$  n'est pas adjacent à un 2-sommet car  $H$  ne contient pas de 4-cycle et qu'une 3-face n'est pas incidente à un 2-sommet (d'après le lemme 2.49). Le sommet  $v$  donne donc  $2 \times \frac{16}{21}$  par la règle (R2) et  $\omega^*(v) > 0$ .
- Si  $v$  est adjacent à un 2-sommet, il donne au plus 2 par la règle (R5).
- Finalement, supposons que  $v$  est faible. Observons que puisque une 3-face est adjacente à des  $\geq 7$ -faces, alors le 2-sommet adjacent à  $v$  est incident à au moins une  $\geq 7$ -face. Donc,  $v$  donne au plus  $\frac{10}{7}$  au 2-sommet adjacent par la règle (R5) et  $\frac{16}{21}$  à la 3-face par la règle (R2). Maintenant,  $v$  reçoit  $\frac{2}{7}$  de son arête spéciale incidente par la règle (R3). Finalement,  $\omega^*(v) = 2 - \frac{10}{7} - \frac{16}{21} + \frac{2}{7} = \frac{2}{21} > 0$ .
- Si  $k = 5$ ,  $\omega(v) = 5$ . D'après le lemme 2.52,  $v$  est adjacent à au plus deux 2-sommets et donc  $\omega^*(v) \geq 5 - 2 \times 2 - \frac{16}{21} > 0$  par les règles (R2) et (R5).
- Si  $k = 6$ ,  $\omega(v) = 8$ . D'après le lemme 2.4.6.1,  $v$  est adjacent à au plus quatre 2-sommets.
  - Si  $v$  est adjacent à au plus trois 2-sommets, alors  $\omega^*(v) \geq 8 - 3 \times 2 - \frac{16}{21} > 0$  par les règles (R2) et (R5).
  - Maintenant supposons que  $v$  est adjacent à quatre 2-sommets.
    - Si  $v$  n'est pas incident à une 3-face alors  $\omega^*(v) \geq 8 - 4 \times 2 = 0$  par la règle (R5).
    - Si  $v$  est incident à une 3-face, alors deux des 2-sommets sont incidents à au moins une  $\geq 7$ -face. Ainsi,  $\omega^*(v) \geq 8 - 2 \times 2 - 2 \times \frac{10}{7} - \frac{16}{21} > 0$  par les règles (R2) et (R5).
- Si  $7 \leq k \leq 9$ ,  $\omega(v) = 3k - 10$ . D'après le lemme 2.4.6.1,  $v$  est adjacent à au plus  $(k - 2)$  2-sommets. Ainsi,  $\omega^*(v) \geq 3k - 10 - 2(k - 2) - \frac{16}{21} = k - 6 - \frac{16}{21} > 0$ .
- Si  $k \geq 10$ ,  $\omega(v) = 3k - 10$ . Ainsi,  $\omega^*(v) \geq 3k - 10 - 2k \geq 0$ .

Soit  $f$  une  $l$ -face. Notons que  $l \neq 4$  et  $l \neq 6$  par hypothèse.

- Si  $l = 3$ ,  $\omega(f) = -4$ . Puisque le graphe  $H$  ne contient aucun 2-sommet incident à une 3-face d'après le lemme 2.49 et aucun 3-sommet d'après le lemme 2.50,  $f$  est incidente à trois  $\geq 4$ -sommets et reçoit de chacun  $\frac{16}{21}$  par la règle (R2). De plus, chaque arête de la frontière donne  $\frac{4}{7}$  à  $f$  par la règle (R1). Ainsi,  $\omega^*(f) = -4 + 3 \times \frac{16}{21} + 3 \times \frac{4}{7} = 0$ .
- Si  $l = 5$ ,  $\omega(f) = \omega^*(f) = 0$ .
- Si  $l \geq 7$ ,  $\omega(f) = 2l - 10$ . Par la règle (R1),  $f$  donne  $\frac{4}{7}$  à chaque arête de sa frontière. Ainsi,  $\omega^*(f) = 2l - 10 - \frac{4}{7}l = \frac{10}{7}l - 10 \geq 0$ .

La somme totale des charges est conservée durant la procédure de déchargement et nous pouvons remarquer que  $\omega^*(x) \geq 0$  pour tout  $x \in V(H) \cup F(H)$ . Nous obtenons alors d'après l'égalité 2.3 la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega^*(x) \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega(x) = -20 < 0$$

Un tel contre-exemple  $H$  du théorème 2.24 n'existe pas, ce qui conclut la preuve.

### 2.4.7 Discussion des résultats

Nous venons d'étudier dans cette partie le nombre chromatique orienté fort des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à 6, ainsi que celui des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à 12. À travers cette étude, nous voulions étudier l'impact des triangles pour une sommet-coloration orientée forte en mettant en relation nos nouveaux résultats avec les résultats précédemment obtenus (cf. théorème 2.16) sur le nombre chromatique orienté fort des graphes planaires de maille donnée.

Dans ce qui suit, nous faisons un premier point sur les techniques de preuves que nous avons utilisées. Puis, nous comparons nos résultats à ceux déjà connus pour les graphes planaires de maille donnée.

L'une des principales techniques de preuves utilisées pour obtenir des bornes sur le nombre chromatique orienté fort des graphes planaires de maille donnée (cf. théorème 2.16) s'appuie sur le degré moyen maximum. Une première partie de la preuve consiste à montrer qu'un graphe planaire de maille  $g$  possède un degré moyen maximum d'au plus  $m$ . Il suffit ensuite de montrer dans une deuxième partie que tout graphe de degré moyen maximum au plus  $m$  a un nombre chromatique orienté fort au plus  $k$  en utilisant une procédure de déchargement de type « sommets-sommets ».

Dans notre cas, le fait d'autoriser les triangles dans les graphes que nous considérons entraîne une augmentation relativement importante du degré moyen maximum ; en effet, le degré moyen maximum des graphes planaires de maille donnée tend vers 2 lorsque la maille augmente (cf. observation 1.3) alors que celui des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à  $i$  tend vers 3 lorsque  $i$  augmente (cf. lemme 2.19(2)). Ainsi, le degré moyen maximum ne semble pas être un paramètre pertinent pour l'étude de la sommet-coloration orientée forte des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à  $i$ .

Pour obtenir nos résultats, nous avons donc utilisé une technique de preuve s'appuyant sur une procédure de déchargement de type « sommets-faces » qui a permis de répartir au mieux la charge présente sur le graphe entre les triangles ayant peu de charge et les faces de plus haut rang.

L'un des buts de notre étude était de déterminer, dans la mesure du possible, l'impact des triangles pour une sommet-coloration orientée forte.

Nous avons dans un premier temps montré que le nombre chromatique orienté fort de la classe des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à  $i$ , pour tout  $i \geq 12$ , est égal à 7 ; nous savons d'autre part que le nombre chromatique orienté fort de la classe des graphes planaires de maille au moins 14 est égal à 5. Ainsi, nous pouvons remarquer que le fait d'ajouter des triangles aux graphes de maille au moins 14 implique une augmentation du nombre chromatique orienté fort qui est relativement peu importante.

En revanche, nous ne pouvons pas conclure pour les autres cas. En effet, le nombre chromatique orienté fort de la classe des graphes planaires de maille 13 est compris entre 5 et 7. Il est donc possible que le nombre chromatique orienté fort des graphes planaires sans cycles de longueurs 3 à 12 (*i.e.* maille 13) soit égal au nombre chromatique orienté fort des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à 12. Nous ne pouvons pas nous prononcer sur l'impact des triangles dans ce cas.



De même, nous avons prouvé que le nombre chromatique orienté fort de la classe des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à 6 est compris entre 7 et 19 ; nous savons d'autre part que le nombre chromatique orienté fort de la classe des graphes planaires de maille 7 est compris entre 5 et 7. Ici également, nous ne pouvons pas nous prononcer sur l'impact des triangles.

Par conséquent, pour obtenir des informations précises sur l'impact des triangles pour la sommets-coloration orientée des graphes planaires, nous devons poursuivre l'étude de cette classe de graphes. Nous obtiendrions également des réponses si nous améliorions les bornes du nombre chromatique orienté fort des graphes planaires de maille donnée.

## 2.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous venons d'étudier successivement le nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs, des 2-arbres partiels et des graphes planaires. Nous avons également étudié le nombre chromatique orienté fort des graphes planaires sans cycles de longueurs données.

**Graphes planaires extérieurs.** Certaines questions étaient ouvertes concernant le nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs. Nous avons répondu à ces questions et connaissons à présent la valeur exacte du nombre chromatique orienté de cette classe de graphes pour toute maille  $g \geq 3$ .

**2-arbres partiels.** Le nombre chromatique orienté des 2-arbres partiels n'est en revanche pas connu de façon exacte pour toutes les mailles. En effet, nous ne savons toujours pas si le nombre chromatique orienté des 2-arbres partiels de maille  $7 \leq g \leq 13$  est égal à 5 ou 6.

Un des moyens de répondre à cette question serait de déterminer la longueur des chaînes constituées de 2-sommets contenues dans les 2-arbres partiels de degré minimum 2 en fonction de la maille. Rappelons que les graphes planaires (resp. planaires extérieurs)  $G$  de maille  $g$  tels que  $\delta(G) \geq 2$  contiennent obligatoirement une  $(\lceil \frac{g}{2} \rceil)$ -chaîne (resp.  $(g-1)$ -chaîne) constituée de 2-sommets. Alors, qu'en est-il pour les 2-arbres partiels ?

**Question 2.55.** Soit  $G$  un 2-arbre partiel de maille  $g$  tel que  $\delta(G) \geq 2$ . Le graphe  $G$  contient-il une  $(\frac{g}{2})$ -chaîne constituée de 2-sommets ?

Si la réponse est positive, alors grâce à la propriété du tournoi  $T_6$  (voir la proposition 2.4), nous pourrions montrer que  $\chi_o(\mathcal{T}_g^2) = 5$  pour  $g \geq 7$ .

**Graphes planaires de grande maille.** Le nombre chromatique orienté des graphes planaires de grande maille a été étudié par de nombreux auteurs comme nous avons pu le voir dans ce chapitre (voir le théorème 2.12). Nous avons contribué à l'étude de ce problème et l'avons amélioré pour certaines mailles. En effet, nous avons  $5 \leq \chi_o(\mathcal{P}_g) \leq 7$  pour  $11 \leq g \leq 13$ . Nous avons amélioré ce résultat en montrant que  $5 \leq \chi_o(\mathcal{P}_g) \leq 6$  pour  $11 \leq g \leq 13$ .

Cependant, il reste encore de nombreuses questions ouvertes. En effet, nous ne connaissons pas la valeur exacte du nombre chromatique orienté des graphes planaires de maille  $g \leq 13$ . Nous n'avons pour l'instant que des bornes inférieures et supérieures, qui sont pour certaines mailles très éloignées. Nous avons par exemple vu que  $17 \leq \chi_o(\mathcal{P}) \leq 80$ . De nombreux auteurs ont tenté de réduire l'écart qui existe entre ces deux bornes inférieures et supérieures, mais peu de résultats ont été obtenus. Concernant les bornes supérieures, il semble que les méthodes utilisées jusqu'à présent montrent leurs limites et ne permettront pas d'obtenir de meilleurs résultats.

**Graphes planaires sans cycles de longueurs données.** Nous avons considéré le nombre chromatique orienté fort des graphes planaires sans cycles de longueurs données. Nous savons que  $\chi_s(\mathcal{P}_{14}) = 5$  où  $\mathcal{P}_{14}$  est la classe des graphes planaires de maille au moins 14, *i.e.* des graphes planaires sans cycles de longueurs 3 à 13. Nous avons prouvé que pour tout graphe planaire  $G$  sans cycles de longueurs 4 à 12,  $\chi_s(G) \leq 7$ ; de plus, nous avons construit, pour tout  $i \geq 4$ , un graphe planaire extérieur  $G_i$  sans cycles de longueurs 4 à  $i$  tel que  $\chi_s(G_i) \geq 7$ , ce qui montre que la borne supérieure précédente est optimale. Nous pouvons donc nous rendre compte que dans le cas où les triangles sont autorisés, deux couleurs supplémentaires sont nécessaires, quelle que soit la longueur des cycles interdits. Nous avons également montré que le nombre chromatique orienté fort des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à 6 est d'au plus 19. Nous n'avons cependant pas étudié l'optimalité de cette dernière borne.

**Question 2.56.** *Existe-t-il des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 à 6 n'admettant pas de 7-sommet-coloration orientée ?*

**D'autres questions ouvertes.** En règle générale, de nombreuses questions sont ouvertes concernant le nombre chromatique orienté de certaines classes de graphes.

Par exemple, le nombre chromatique orienté des graphes de degré au plus trois n'est actuellement pas connu. Sopena et Vignal [SV96] ont montré que tout graphe de degré au plus trois admet une  $QR_{11}$ -sommet-coloration. Dans [Sop97], Sopena a de plus conjecturé que les graphes connexes de degré au plus trois admettaient une 7-sommet-coloration orientée. Cependant, le graphe  $QR_7$  n'est pas un graphe cible "universel" pour la classe des graphes de degré au plus trois (*i.e.* un tournoi  $T$  tel que pour tout graphe  $G$  de la classe,  $G \rightarrow T$ ). En effet, considérons le graphe de la figure 2.32. Supposons que le sommet  $u$  soit colorié avec la couleur  $a$ ; les sommets  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  doivent avoir des couleurs différentes et sont par conséquent coloriés avec les trois successeurs de la couleur  $a$ . Cependant, dans  $QR_7$ , les trois successeurs d'une couleur forment un circuit, ce qui n'est pas le cas ici : la couleur de  $v_2$  est prédécesseur des couleurs de  $v_1$  et  $v_3$ . Donc, tout graphe de degré au plus trois contenant le graphe de la figure 2.32 en tant que sous-graphe n'admet pas d'homomorphisme vers  $QR_7$ .

Avec Édita Máčajová (de l'université Comenius de Bratislava), nous nous sommes intéressés à ce problème. Une vérification par ordinateur a permis d'exhiber un tournoi  $T_7$  à sept sommets tel que tout graphe cubique d'au plus dix-huit sommets admet un homomorphisme vers  $T_7$  (voir la figure 2.33).

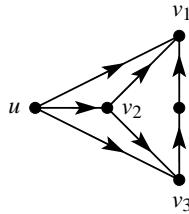


FIG. 2.32 – Graphe  $G$  de degré au plus trois tel que  $G \not\rightarrow QR_7$ .

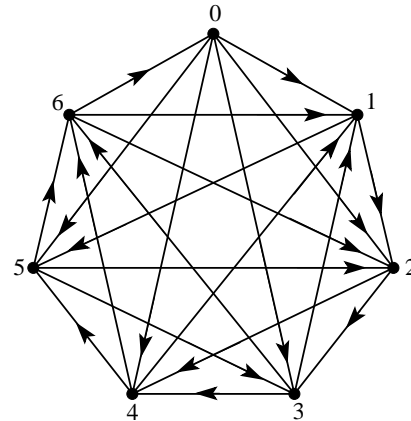


FIG. 2.33 – Le tournoi  $T_7$  à 7 sommets.

**Question 2.57.** Soit  $G$  un graphe cubique. Avons nous  $G \rightarrow T_7$  ?

De même, Fertin, Raspaud et Roychowdhury [FRR03] ont montré que les grilles à deux dimensions admettent une 11-sommet-coloration orientée et ont conjecturé que toute grille admet une 7-sommet-coloration orientée et plus exactement une  $QR_7$ -sommet-coloration. Szepletowski et Targan [ST04] ont prouvé que la conjecture de Fertin, Raspaud et Roychowdhury était en partie fautive en exhibant une grille construite par ordinateur n'admettant pas de  $QR_7$ -sommet-coloration (voir la figure 2.34). Toutefois, la question reste posée : les grilles à deux dimensions admettent-elles une 7-sommet-coloration orientée ? Un test par ordinateur nous a permis de vérifier que la grille de la figure 2.34 (qui n'est pas  $QR_7$ -sommet-coloriable) admet une  $T_7$ -sommet-coloration (où  $T_7$  est le tournoi de la figure 2.33). Nous pouvons alors nous poser la question suivante : les grilles à deux dimensions sont-elles  $T_7$ -sommet-coloriables ?

**Des tournois cibles non circulants ?** Comme nous l'avons vu au cours de ce chapitre, de nombreux résultats ont été obtenus pour le nombre chromatique orienté durant les dix dernières années. Ces derniers sont pour la plupart obtenus en montrant qu'il existe un homomorphisme des graphes de la classe considérée vers un certain tournoi. Les tournois cibles utilisés sont généralement des circulants, sommet-transitifs et arc-transitifs pour la majorité d'entre eux. Nous avons par exemple rencontré au cours de ce chapitre les tournois  $QR_q$  construits à partir des résidus quadratiques non nuls de  $q$ . Les symétries présentes dans ces tournois permettent d'obtenir assez facilement des propriétés structurelles intéressantes telles que les propriétés  $P_{1,3}$  ou  $P_{2,1}$  du tournoi  $QR_7$  par exemple (voir la proposition 2.27). Ces propriétés sont ensuite utilisées pour montrer l'existence d'homomorphismes de certaines classes de graphes vers ces tournois.

Cependant, nous avons construit et utilisé dans ce chapitre un tournoi cible qui n'était pas un graphe circulant : le tournoi  $T_6$  de la figure 2.6(b). Nous avons exhibé une propriété de ce tournoi (voir

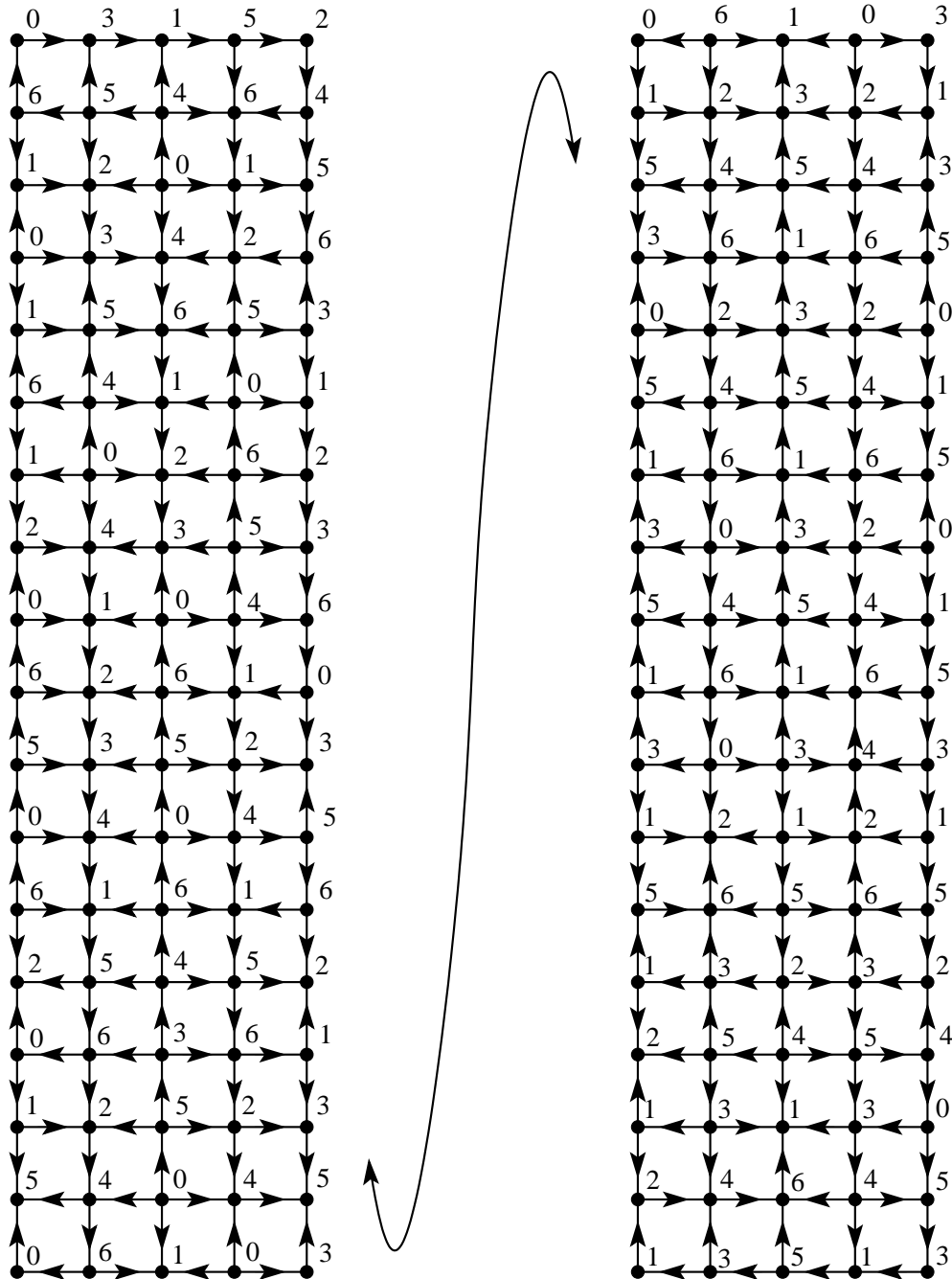


FIG. 2.34 – Une grille orientée  $G$  à deux dimensions telle que  $G \not\rightarrow QR_7$  mais  $G \rightarrow T_7$ .

la proposition 2.4) qui nous a permis d'obtenir des bornes pour le nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs, des 2-arbres partiels, et des graphes planaires.

De même, le tournoi  $T_7$  de la figure 2.33 est un graphe cible valide pour tous les graphes cubiques dont le nombre de sommets est au plus dix-huit. Ce tournoi n'est pas un circulant lui non plus.

Nous voyons donc que certains problèmes de colorations orientées trouvent des solutions grâce à des tournois qui ne semblent pas être à première vue de "bons candidats". Cette voie paraît donc intéressante à suivre : construire des tournois non circulants ayant des propriétés structurelles nous permettant de prouver que les graphes de certaines classes admettent un homomorphisme vers de tels tournois. Néanmoins, l'une des principales difficultés consistera à trouver des propriétés structurelles pertinentes dans un graphe où les degrés entrants et les degrés sortants ne sont pas réguliers. Par exemple, nous ne connaissons pour l'instant aucune propriété intéressante de  $T_7$  (le tournoi de la figure 2.33). De plus, il paraît évident, dans le cas où les tournois ne sont pas circulants, que les couleurs ne joueront pas toutes le même rôle. Par exemple, en ce qui concerne le tournoi  $T_7$ , le sommet étiqueté 0 possède un degré sortant 5 ; ceci implique que cette couleur ne pourra pas être utilisée dans certaines configurations bien précises qu'il faudra déterminer. En plus de trouver des propriétés pertinentes de ces tournois cibles non circulants, il faudra donc identifier dans le graphe que nous voulons colorier les configurations pour lesquelles certaines couleurs sont obligatoires et d'autres pour lesquelles certaines couleurs sont interdites.



## Chapitre 3

# Arc-coloration orientée

Divers types de colorations d'arcs ont été étudiés dans la littérature. Nous en avons donné certains dans le chapitre 1, § 1.3.2. Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle notion d'arc-coloration : l'*arc-coloration orientée*.

Dans le cas non orienté, une arête-coloration propre d'un graphe non orienté  $G$  est une sommet-coloration de  $L(G)$ , son graphe représentatif des arêtes ; par conséquent,  $\chi'(G) = \chi(L(G))$  pour tout graphe non orienté  $G$ . Dans le cas orienté, nous pouvons de la même manière définir une *arc-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  comme une sommet-coloration orientée de  $LD(G)$ , son graphe représentatif des arcs (la notion de sommet-coloration orientée a été étudiée dans le chapitre précédent).

Considérons le graphe  $G$  de la figure 3.1(a). Le graphe représentatif des arcs  $LD(G)$  de  $G$  est le graphe de la figure 3.1(b) ; une sommet-coloration orientée de  $LD(G)$  est donnée sur cette figure. Il suffit alors de reporter les couleurs des sommets de  $LD(G)$  sur les arcs correspondants de  $G$  pour obtenir une arc-coloration orientée de ce dernier.

Une arc-coloration orientée d'un graphe orienté  $G$  peut alors être définie comme une application  $f : A(G) \rightarrow C$  (où  $C$  est un ensemble de couleurs) satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (i) pour tous  $u, v, w \in V(G)$  tels que  $\vec{uv}, \vec{vw} \in A(G)$ ,  $f(\vec{uv}) \neq f(\vec{vw})$ ,

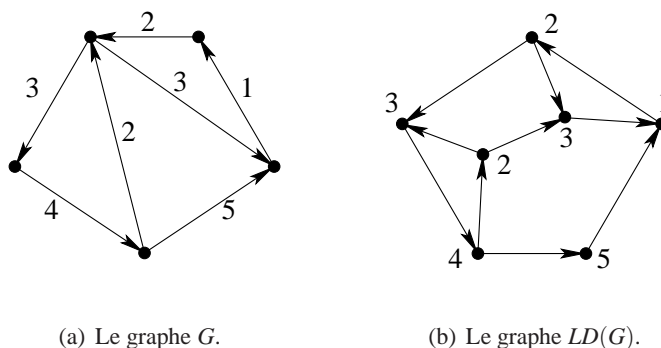


FIG. 3.1 – Exemple d'arc-coloration orientée et de sommet-coloration orientée.

(ii) pour tous  $u, v, w, x, y, z \in V(G)$  tels que  $\vec{uv}, \vec{vw}, \vec{xy}, \vec{yz} \in A(G)$  et  $f(\vec{uv}) = f(\vec{yz}), f(\vec{vw}) \neq f(\vec{xy})$ .

Si  $|C| = k$ , alors nous dirons que  $f$  est une  $k$ -arc-coloration orientée de  $G$ . L'indice chromatique orienté de  $G$ , noté  $\chi'_o(G)$ , est alors défini comme le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -arc-coloration orientée. De plus, si  $\mathcal{F}$  est une classe de graphes, alors  $\chi'_o(\mathcal{F})$  est défini comme le maximum des indices chromatiques orientés pris sur tous les graphes de la classe  $\mathcal{F}$ .

D'après la définition ci-dessus, nous avons donc  $\chi'_o(G) = \chi_o(LD(G))$  pour tout graphe orienté  $G$ .

Nous pouvons tout de suite remarquer que les deux conditions ci-dessus impliquent qu'un 3-chemin nécessite obligatoirement trois couleurs différentes pour toute arc-coloration orientée. Notons d'autre part que deux arcs partageant la même extrémité initiale ou la même extrémité terminale (*i.e.* deux arcs adjacents mais non consécutifs) peuvent prendre la même couleur. Ceci découle de la définition du graphe représentatif des arcs : si  $a$  et  $b$  sont deux arcs non consécutifs d'un graphe orienté  $G$ , alors les deux sommets correspondants dans  $LD(G)$  ne seront pas adjacents.

En termes d'homomorphisme, une  $k$ -arc-coloration orientée d'un graphe orienté  $G$  est un homomorphisme de  $LD(G)$  vers un graphe orienté  $H$  à  $k$  sommets. Si  $LD(G) \rightarrow H$ , alors nous dirons que  $G$  admet une  $H$ -arc-coloration. L'indice chromatique orienté de  $G$  peut alors être défini comme le plus petit ordre  $k$  d'un graphe orienté  $H$  tel que  $LD(G) \rightarrow H$ .

Soit  $G$  un graphe orienté. Pour une arc-coloration orientée  $f$  de  $G$ , éventuellement partielle (*i.e.* uniquement définie sur un sous-ensemble d'arcs de  $A(G)$ ) et un sommet  $u$  de  $G$ , nous notons  $C_f^+(u)$  (resp.  $C_f^-(u)$ ) l'ensemble des couleurs sortantes de  $u$  (resp. l'ensemble des couleurs entrantes de  $u$ ), c'est à dire l'ensemble des couleurs présentes sur les arcs sortants (resp. entrants) du sommet  $u$ . Enfin,  $C_f(u) = C_f^-(u) \cup C_f^+(u)$ .

Ce chapitre est organisé comme suit. Nous donnons dans un premier temps un résultat de complexité pour cette coloration. Nous exhibons ensuite des bornes de l'indice chromatique orienté en fonction de paramètres déjà étudiés, tels que le nombre chromatique orienté ou encore le nombre chromatique acyclique. Nous considérons enfin l'indice chromatique orienté de certaines classes de graphes, telles que les graphes planaires extérieurs, les graphes planaires ou encore les graphes de degré maximum borné.

Certains résultats de ce chapitre font partie d'un rapport de recherche actuellement soumis [OPS06] (à savoir, le résultat de complexité, les bornes de l'indice chromatique orienté en fonction du nombre chromatique orienté et du nombre chromatique acyclique, l'indice chromatique orienté des graphes planaires et des graphes de degré maximum borné). D'autres résultats sont actuellement publiés dans des revues : les bornes de l'indice chromatique orienté des graphes planaires extérieurs dans *Information Processing Letters* [PS06b] et la borne de l'indice chromatique orienté des graphes de degré au plus trois dans *The Electronic Journal of Combinatorics* [Pin06].



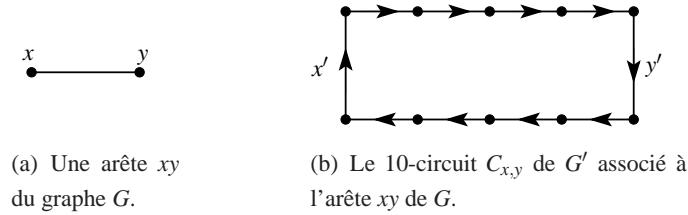


FIG. 3.2 – Principe de construction du graphe orienté  $G'$  à partir du graphe non orienté  $G$ .

### 3.1 Complexité

Dans cette première partie, nous étudions la complexité du problème qui consiste à décider si un graphe orienté admet une  $k$ -arc-coloration orientée.

Des résultats de complexité pour le nombre chromatique orienté ont été établis récemment. Klostermeyer et MacGillivray [KM04] ont montré que pour un graphe  $G$  donné, décider si  $\chi_o(G) \leq k$  est un problème polynomial si  $k \leq 3$  et est un problème NP-complet si  $k \geq 4$ . Culus et Demange [CD06] ont étendu ce précédent résultat au cas des graphes bipartis et des graphes orientés sans circuit.

Le problème ARC-COL peut s'énoncer de la façon suivante :

ARC-COL

*Instance* : Un graphe orienté  $G$  et un entier positif  $k$ .

*Question* :  $G$  admet-il une  $k$ -arc-coloration orientée ?

Puisque l'indice chromatique orienté d'un graphe orienté  $G$  est le nombre chromatique orienté de son graphe représentatif des arcs  $LD(G)$ , le résultat que nous exhibons ici est en fait une extension du résultat de Klostermeyer et MacGillivray au cas des graphes représentatifs des arcs.

**Théorème 3.1.** *Le problème ARC-COL est polynomial pour  $k \leq 3$  et est NP-complet pour  $k \geq 4$ .*

**Preuve.** Le cas  $k \leq 3$  découle directement du résultat de Klostermeyer et MacGillivray puisque  $\chi'_o(G) = \chi_o(LD(G))$  et que le graphe représentatif des arcs  $LD(G)$  de  $G$  peut être construit à partir de  $G$  en temps polynomial.

Nous montrons que le problème ARC-COL est NP-complet pour  $k \geq 4$  en utilisant une réduction de 3-COLORABILITÉ. Il est connu que le problème  $k$ -COLORABILITÉ est NP-complet pour  $k \geq 3$ .

Nous construisons un graphe orienté  $G'$  à partir d'un graphe non orienté  $G$  comme suit. À tout sommet  $v$  de  $G$ , nous associons un arc  $v'$  dans  $G'$ . Pour une arête  $xy$  dans  $G$ , nous ajoutons un 4-chemin constitué de 2-sommets joignant l'extrémité terminale de  $x'$  et l'extrémité initiale de  $y'$ , ainsi qu'un autre 4-chemin constitué de 2-sommets joignant l'extrémité terminale de  $y'$  et l'extrémité initiale de  $x'$  (voir la figure 3.2). Par conséquent,  $G'$  contient des 10-circuits induit par les arêtes de  $G$  : un tel 10-circuit induit par l'arête  $xy$  est noté  $C_{x,y}$ . Ainsi, toute arc-coloration orientée de  $G'$  nécessite au moins quatre couleurs puisque  $10 \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Nous avons donc  $\chi'_o(G') \leq 4$  si et seulement si  $LD(G')$  admet un homomorphisme vers le tournoi  $T_4$  dessiné sur la figure 3.7(a) ( $T_4$  est le seul tournoi à 4

sommets contenant un 4-circuit). Nous pouvons noter que, pour une arête  $xy$  de  $G$ , les arcs  $x'$  et  $y'$  sont opposés sur le circuit  $C_{x,y}$ . Nous vérifions simplement, par une étude cas par cas de  $T_4$ , que pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  de  $T_4$ , il existe un 5-chemin de  $u$  à  $v$ , à l'exception des cas où  $u = v$ , ou  $u = 2$  et  $v = 3$ . Toute  $T_4$ -arc-coloration  $h$  de  $C_{x,y}$  est donc telle que  $h(x') \neq h(y')$  et chaque couple de couleurs distinctes peut être obtenu pour  $(h(x'), h(y'))$  à l'exception de  $(2, 3)$  et  $(3, 2)$ . Si  $c$  est une 3-sommet-coloration propre de  $G$ , alors  $G'$  admet une  $T_4$ -arc-coloration  $h$  telle que  $h(v') = 1$  si  $c(v) = 1$ ,  $h(v') = 2$  si  $c(v) = 2$ , et  $h(v') = 4$  si  $c(v) = 3$ . Inversement, si  $G'$  admet une  $T_4$ -arc-coloration  $h$ , alors la coloration  $c$  de  $G$  telle que  $c(v) = 1$  si  $h(v') = 1$ ,  $c(v) = 2$  si  $h(v') = 2$  ou  $h(v') = 3$ , et  $c(v) = 3$  si  $h(v') = 4$ , est une 3-sommet-coloration propre.

Nous considérons maintenant le cas  $k \geq 4$ ,  $k$  pair. Nous considérons le problème de décision de  $\chi'_o(H) \leq k$  restreint aux graphes orientés  $H$  ne contenant ni sources, ni puits. Ce cas est traité par induction sur  $k$ . Nous pouvons noter que les graphes orientés que nous avons considérés dans le cas  $k = 4$  ne contiennent ni sources, ni puits ; le cas  $k = 4$  est notre cas de base. Nous construisons un graphe orienté  $H'$  sans source, ni puits, à partir d'un graphe orienté  $H$  sans source ni puits tel que  $\chi'_o(H') = \chi'_o(H) + 2$ . Le graphe  $H'$  est obtenu à partir de  $H$  en ajoutant trois sommets  $v_1, v_2, v_3$ , les arcs  $\overrightarrow{v_1v_2}, \overrightarrow{v_2v_3}$ , et les arcs  $\overrightarrow{vv_1}, \overrightarrow{v_3v}$ , pour tout sommet  $v$  de  $H$ . Toute  $k$ -arc-coloration orientée  $f$  de  $H$  peut être étendue à une  $(k + 2)$ -arc-coloration orientée de  $H'$  comme suit. Les arcs  $\overrightarrow{vv_1}$  (resp.  $\overrightarrow{v_3v}$ ) prennent une couleur parmi celles présentes dans  $C_f^+(v)$  (resp.  $C_f^-(v)$ ) puisque  $C_f^+(v) \neq \emptyset$  et  $C_f^-(v) \neq \emptyset$ . Les arcs  $\overrightarrow{v_1v_2}$  et  $\overrightarrow{v_2v_3}$  obtiennent deux couleurs supplémentaires. Inversement, toute  $k$ -arc-coloration orientée de  $H'$  induit une  $(k - 2)$ -arc-coloration orientée de  $H$ . Pour voir ceci, notons que tout arc  $\overrightarrow{xy}$  de  $H$  appartient à un 5-circuit  $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yv_1}, \overrightarrow{v_1v_2}, \overrightarrow{v_2v_3}, \overrightarrow{v_3x}$ , ce qui implique que la couleur de  $\overrightarrow{xy}$  doit être différente de celles des arcs  $\overrightarrow{v_1v_2}$  et  $\overrightarrow{v_2v_3}$ .

Nous considérons finalement le cas  $k \geq 4$ ,  $k$  impair. Nous construisons un graphe orienté  $H'$  à partir d'un graphe orienté  $H$  sans source, ni puits, tel que  $\chi'_o(H') = \chi'_o(H) + 1$ . Le graphe  $H'$  est obtenu à partir de  $H$  en ajoutant deux sommets  $v_1, v_2$ , l'arc  $\overrightarrow{v_1v_2}$ , et les arcs  $\overrightarrow{vv_1}$ , pour tout sommet  $v$  de  $H$ . Comme précédemment, toute  $k$ -arc-coloration orientée de  $H$  peut être étendue à une  $(k + 1)$ -coloration orientée de  $H'$ , et que toute  $k$ -arc-coloration orientée de  $H'$  induit une  $(k - 1)$ -arc-coloration orientée de  $H$ .  $\square$

## 3.2 Relation entre nombre chromatique orienté et indice chromatique orienté

Dans cette partie, nous allons montrer qu'il est possible de borner l'indice chromatique orienté d'un graphe orienté en fonction de son nombre chromatique orienté, et inversement, qu'il est également possible de borner le nombre chromatique orienté en fonction de l'indice chromatique orienté, ce qui implique que les classes de graphes ayant un nombre chromatique orienté borné sont les mêmes que celles ayant un indice chromatique orienté borné.

La relation suivante s'obtient facilement :

**Théorème 3.2.** Soit  $G$  un graphe orienté. Alors  $\chi'_o(G) \leq \chi_o(G)$ .

**Preuve.** Soit  $f$  une sommet-coloration orientée de  $G$ . Soit  $g$  une arc-coloration orientée de  $G$  définie par  $g(\overrightarrow{uv}) = f(u)$  pour tout arc  $\overrightarrow{uv} \in A(G)$ . Il est facile de vérifier que si deux arcs  $\overrightarrow{uv}$  et  $\overrightarrow{vw}$  sont consécutifs, alors  $g(\overrightarrow{uv}) = f(u) \neq f(v) = g(\overrightarrow{vw})$  puisque  $f$  est une sommet-coloration orientée de  $G$ . Par conséquent, si  $g$  n'est pas une arc-coloration orientée de  $G$ , il existe quatre arcs  $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vw}, \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \in A(G)$  tels que  $g(\overrightarrow{uv}) = g(\overrightarrow{yz})$  et  $g(\overrightarrow{vw}) = g(\overrightarrow{xy})$ . Dans ce cas, nous avons  $f(u) = f(y)$  et  $f(v) = f(x)$ , ce qui est une contradiction puisque  $f$  est une sommet-coloration orientée de  $G$ .  $\square$

Les bornes supérieures actuellement connues pour le nombre chromatique orienté sont donc également valides pour l'indice chromatique orienté. Nous nous appuyerons sur ces dernières dans la suite de ce chapitre et essayerons de les améliorer pour l'indice chromatique orienté.

Nous devons également noter que la borne du théorème 3.2 est optimale. En effet, pour tout  $n$ , nous pouvons construire un graphe  $G$  avec  $\chi'_o(G) = n = \chi_o(G)$ . Soit  $TT_n$  le tournoi transitif à  $n$  sommets avec  $V(TT_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  et  $\overrightarrow{v_i v_j} \in A(TT_n)$  si  $i < j$ . Alors, considérons le tournoi  $T_n$  à  $n$  sommets obtenu à partir de  $TT_n$  en inversant l'arc  $\overrightarrow{v_0 v_{n-1}}$  (par conséquent  $\overrightarrow{v_{n-1} v_0} \in A(T_n)$ ). Alors, toute paire d'arcs de l'ensemble  $S = \{\overrightarrow{v_i v_{i+1}} \in T_n, i \in [0, n-1]\}$  (les indices sont pris modulo  $n$ ) appartient à un 3-chemin et donc tous les arcs de  $S$  doivent obtenir des couleurs différentes. Nous avons donc  $\chi'_o(T_n) = |S| = n = \chi_o(T_n)$ .

Pour borner le nombre chromatique orienté en fonction de l'indice chromatique orienté, nous avons dans un premier temps besoin de quelques nouvelles définitions ainsi que des deux lemmes suivants.

Soit  $G$  un graphe orienté et soit  $\mathcal{P}(G)$  l'ensemble des parties de  $V(G)$ . Nous définissons l'application  $\mu_G$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_G : \mathcal{P}(G) &\rightarrow \mathcal{P}(G) \\ s &\mapsto s \cup \bigcup_{v \in s} \Gamma_G^+(v) \end{aligned}$$

Nous notons alors  $\mathcal{Q}(G)$  l'ensemble  $\mathcal{Q}(G) = \{\mu_G(s), s \in \mathcal{P}(G)\}$  ( $\mathcal{Q}(G)$  est par conséquent l'image de  $\mu_G$ ). Clairement,  $\mathcal{Q}(G) \subseteq \mathcal{P}(G)$ . Pour un élément  $s \in \mathcal{Q}(G)$ , nous notons  $\overline{s} = \{v \in s; \Gamma_G^+(v) \subseteq s\}$  et  $\underline{s} = \{v \in s; \Gamma_G^+(v) \not\subseteq s\}$ ; nous avons donc  $s = \overline{s} \uplus \underline{s}$  (union disjointe).

**Exemple.** Considérons le tournoi  $T_4$  dessiné sur la figure 3.3(d). Nous avons  $\mathcal{Q}(T_4) = \{\emptyset, \{1,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ . De plus, si nous considérons l'élément  $s = \{1,2,3\}$  de  $\mathcal{Q}(T_4)$ , alors  $\overline{s} = \{1\}$  et  $\underline{s} = \{2,3\}$ .

**Lemme 3.3.** Soit  $G$  un graphe orienté avec  $\chi'_o(G) = k$  et soit  $T_k$  un graphe orienté à  $k$  sommets tel que  $G$  admet une  $T_k$ -arc-coloration (i.e.  $LD(G) \rightarrow T_k$ ). Alors,  $\chi_o(G) \leq |\mathcal{Q}(T_k)|$ .

**Preuve.** Sans perte de généralité, nous considérons que  $T_k$  est un tournoi (sinon, nous le complétons).

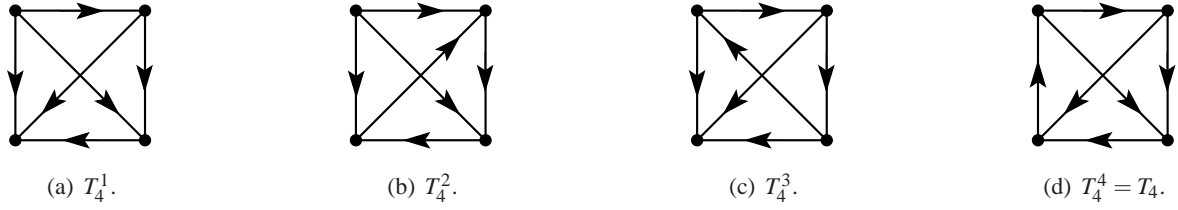


FIG. 3.3 – Les quatre tournois non isomorphes à quatre sommets.

Soit  $f$  un homomorphisme de  $LD(G)$  dans  $T_k$  ; nous définissons l'application  $g$  comme suit :

$$\begin{aligned} g : V(G) &\rightarrow \mathcal{Q}(T_k) \\ w &\mapsto \mu_{T_k}(C_f^+(w)) \end{aligned}$$

Nous affirmons que  $g$  est une sommet-coloration orientée de  $G$ . Soit  $\vec{uv} \in A(G)$  avec  $f(\vec{uv}) = a$ . Puisque  $a \in C_f^+(u)$ , nous avons  $a \in g(u)$  et  $a \notin C_f^+(v)$  ; de plus, par définition de  $f$ , pour toute couleur  $c \in C_f^+(v)$ ,  $\vec{ca} \notin A(T_k)$ , c'est à dire  $\vec{ac} \in A(T_k)$ . Par conséquent  $a \notin g(v)$  et  $g$  est une sommet-coloration propre de  $G$ .

Maintenant, si  $g$  n'est pas une sommet-coloration orientée de  $G$ , alors il existe deux arcs  $\vec{uv}$  et  $\vec{xy}$  de  $G$  avec  $g(u) = g(y)$  et  $g(v) = g(x)$ . Soit  $f(\vec{uv}) = a$  et  $f(\vec{xy}) = b$ . Nous montrons tout d'abord que nous avons nécessairement  $b \in g(y)$ . Si  $a \neq b$ , puisque  $T_k$  est un tournoi, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\vec{ab} \in A(T_k)$ . Alors, nous avons  $b \in g(u)$  et par conséquent  $b \in g(y)$ . Maintenant, si  $a = b$ , nous avons  $b \in g(u)$  et par conséquent  $b \in g(y)$ . Donc, dans les deux cas,  $b \in g(y)$ . Puisque  $f$  est une arc-coloration orientée de  $G$ ,  $b \notin C_f^+(y)$ . Ainsi, il existe une couleur  $c \in C_f^+(y)$  telle que  $\vec{cb} \in A(T_k)$ . Puisque  $f(\vec{xy}) = b$ , nous avons aussi  $\vec{bc} \in T_k$ , ce qui est une contradiction puisque  $T_k$  est un tournoi, qui est par définition antisymétrique.  $\square$

En particulier, tout graphe orienté  $G$  qui admet une  $T_4$ -arc-coloration a un nombre chromatique orienté d'au plus 7 puisque  $|\mathcal{Q}(T_4)| = 7$  comme nous l'avons observé plus haut.

Nous montrons maintenant que la borne donné par le théorème 3.3 est optimale :

**Lemme 3.4.** *Pour tout tournoi  $T_k$  à  $k$  sommets, il existe un graphe orienté  $G$  tel que  $\chi'_o(G) \leq k$ ,  $LD(G) \rightarrow T_k$  et  $\chi_o(G) = |\mathcal{Q}(T_k)|$ .*

**Preuve.** Soit  $G$  un digraphe défini par  $V(G) = \mathcal{Q}(T_k)$  et  $\vec{xy} \in A(G)$  si et seulement s'il existe  $v \in V(T_k)$  tel que  $v \in \vec{x}$  et  $v \notin \vec{y}$ .

Nous vérifions dans un premier temps que  $G$  est un graphe orienté (*i.e.* sans arcs opposés ni boucle). Supposons au contraire que  $x, y \in V(G)$  sont deux sommets tels qu'il existe  $v_1$  et  $v_2$  avec  $v_1 \in \vec{x}$ ,  $v_1 \notin \vec{y}$ ,  $v_2 \in \vec{y}$  et  $v_2 \notin \vec{x}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $\vec{v_1 v_2} \in A(T_k)$  : nous obtenons une contradiction puisque  $v_2$  doit appartenir à  $x$ . Le graphe  $G$  est bien un graphe orienté.

Nous montrons maintenant que toute sommet-coloration orientée de  $G$  nécessite  $|\mathcal{Q}(T_k)|$  couleurs (c'est à dire une couleur différente pour chaque sommet de  $G$ ). Puisque toute sommet-coloration

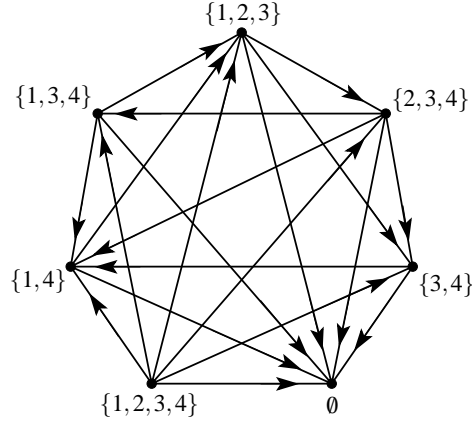


FIG. 3.4 – Un graphe orienté ayant indice chromatique orienté 4 et un nombre chromatique orienté 7.

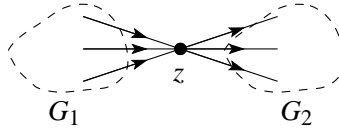
orientée est une sommet-coloration propre, nous devons seulement vérifier que les paires de sommets non adjacents de  $G$  nécessitent des couleurs différentes. Pour ce faire, nous montrons que toute paire de sommets non adjacents appartient à un 2-chemin. Soit  $x, y \in V(G)$  deux sommets non adjacents ; par construction de  $G$  nous avons  $\bar{x} \subseteq y$  et  $\bar{y} \subseteq x$ . De plus,  $x \neq y$ , et sans perte de généralité ceci implique qu'il existe  $u \in V(T_k)$  tel que  $u \in \bar{x}$  et  $u \notin y$ . D'autre part, il existe  $v \in \bar{x}$  tel que  $\vec{vu} \in A(T_k)$ . Considérons le sommet  $z = \mu_{T_k}(\{u\})$  de  $G$ . Nous avons  $u \in \bar{z}$  et  $v \notin z$ . Par construction de  $G$ ,  $\vec{xz}, \vec{zy} \in A(G)$ . Donc,  $\chi_o(G) = |\mathcal{Q}(T_k)|$ .

Finalement, nous construisons une  $T_k$ -arc-coloration  $f$  de  $G$ . Soit  $\vec{xy} \in A(G)$ . Il existe donc  $u$  tel que  $u \in \bar{x}$  et  $u \notin y$ . Ceci implique que tout  $v_i \in \bar{y}$  est un successeur de  $u$  dans  $T_k$  (sinon, nous aurions  $u \in y$ ). Soit  $f : A(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  l'application telle que  $f(\vec{xy}) = u$  pour  $u \in \bar{x}$  et  $u \notin y$  : tout arc sortant de  $y$  sera colorié par un successeur de  $u$  dans  $T_k$ . Par conséquent,  $f$  est homomorphisme de  $LD(G)$  vers  $T_k$  et donc  $\chi'_o(G) \leq k$ .  $\square$

Notons que le graphe construit dans le précédent théorème est le plus petit graphe possible puisqu'il a  $|\mathcal{Q}(T_k)|$  sommets et qu'il nécessite  $|\mathcal{Q}(T_k)|$  couleurs pour toute sommet-coloration orientée.

**Exemple.** En utilisant la construction de la précédente preuve, à partir du tournoi  $T_4$  de la figure 3.3(d) nous obtenons le graphe  $G$  de la figure 3.4 : il est facile de vérifier que  $G$  admet une  $T_4$ -arc-coloration et a un nombre chromatique orienté  $|\mathcal{Q}(T_4)| = 7$ .

Nous venons donc de voir que pour tout tournoi  $T_k$  à  $k$  sommets, il existe un graphe orienté  $T_k$ -arc-colorable qui nécessite  $|\mathcal{Q}(T_k)|$  couleurs pour toute sommet-coloration orientée. Ce qui nous intéresse à présent est de connaître, pour tout entier  $k$ , la plus grande valeur  $p$  telle qu'il existe un graphe orienté  $G$  dont l'indice chromatique orienté est au plus  $k$  et dont le nombre chromatique est au moins

FIG. 3.5 – Le graphe  $H$  du lemme 3.7.

$p$ . Pour cela, nous devons déterminer la plus grande valeur que peut prendre  $|\mathcal{G}(T_k)|$ . Nous posons alors  $\phi(k) = \max\{|\mathcal{Q}(T_k)|, T_k \text{ est un tournoi à } k \text{ sommets}\}$ . À partir des deux précédents lemmes, nous obtenons la borne supérieure suivante :

**Théorème 3.5.** *Soit  $G$  un graphe orienté avec  $\chi'_o(G) = k$ . Alors,  $\chi_o(G) \leq \phi(k)$ . De plus, cette borne est optimale.*

**Preuve.** Puisque  $\chi'_o(G) = k$ , il existe un tournoi  $T_k$  à  $k$  sommets tel que  $G$  admet une  $T_k$ -arc-coloration. D'après le lemme 3.3, nous avons  $\chi_o(G) \leq |\mathcal{Q}(T_k)|$ , et donc,  $\chi_o(G) \leq \phi(k)$ .

Maintenant, soit  $T_k^{\max}$  un tournoi à  $k$  sommets tel que  $\phi(k) = |\mathcal{Q}(T_k^{\max})|$ . D'après le lemme 3.4, il existe un graphe orienté  $G$  tel que  $\chi_o(G) = |\mathcal{Q}(T_k^{\max})| = \phi(k)$ . La borne est donc optimale.  $\square$

**Exemple.** Nous pouvons vérifier pour les quatre tournois à quatre sommets de la figure 3.3 que nous avons  $|\mathcal{Q}(T_4^1)| = 5$ ,  $|\mathcal{Q}(T_4^2)| = 6$ ,  $|\mathcal{Q}(T_4^3)| = 6$  et  $|\mathcal{Q}(T_4)| = 7$ . Nous avons donc  $\phi(4) = \max\{|\mathcal{Q}(T_4^1)|, |\mathcal{Q}(T_4^2)|, |\mathcal{Q}(T_4^3)|, |\mathcal{Q}(T_4)|\} = 7$  et par conséquent tout graphe orienté ayant un indice chromatique orienté d'au plus 4 a un nombre chromatique orienté d'au plus 7. Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, l'indice chromatique orienté du graphe de la figure 3.4 est 4 et son nombre chromatique orienté est  $\phi(4) = 7$ .

Nous venons donc de voir que  $\chi_o(G) \leq \phi(\chi'_o(G))$  pour tout graphe orienté  $G$ . Nous allons maintenant exprimer  $\phi(\chi'_o(G))$  en fonction de  $\chi'_o(G)$  pour avoir une borne supérieure de  $\chi_o(G)$  en fonction de  $\chi'_o(G)$ .

Le théorème suivant nous donne les valeurs exactes de  $\phi(k)$  pour  $k \leq 9$  et une estimation pour  $k \geq 10$  :

**Théorème 3.6.**

- $\phi(0) = 1, \quad \phi(1) = 2, \quad \phi(2) = 3, \quad \phi(3) = 5, \quad \phi(4) = 7, \quad \phi(5) = 12, \quad \phi(6) = 15,$   
 $\phi(7) = 25, \quad \phi(8) = 31, \quad \phi(9) = 51 ;$
- $\alpha \cdot 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} - 1 \leq \phi(k) \leq (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$  pour  $k \geq 10$ , où  $\alpha = 2$  si  $k$  est pair et  $\alpha = \frac{13}{4\sqrt{2}}$  sinon.

Pour prouver le théorème 3.6, nous avons besoin du lemme et des deux propriétés qui suivent.

**Lemme 3.7.** *Soit  $G$  un graphe orienté tel que  $\chi'_o(G) = p$  et  $\chi_o(G) = q$ . Alors, il existe un graphe orienté  $H$  tel que  $\chi'_o(H) = p + 2$  et  $\chi_o(H) = 2q + 1$ .*

**Preuve.** Soit  $H$  le graphe orienté obtenu en prenant deux copies disjointes de  $G$  (notées  $G_1$  et  $G_2$ ), un nouveau sommet  $z$  et en ajoutant tous les arcs des sommets de  $G_1$  vers  $z$  ainsi que tous les arcs de  $z$  vers les sommets de  $G_2$  (voir la figure 3.5).

Puisque toute paire  $u, v$  de sommets de  $H$  tels que  $u \in V(G_1)$  et  $v \in V(G_2)$  appartient à un 2-chemin, nous obtenons  $\chi_o(H) = \chi_o(G_1) + \chi_o(G_2) + 1 = 2q + 1$ .

Maintenant, soient  $A_1 = A(G_1)$ ,  $A_2 = A(G_2)$ ,  $A^- = \{\vec{uz} \in A(H), u \in V(G_1)\}$ ,  $A^+ = \{\vec{z\bar{u}} \in A(H), u \in V(G_2)\}$ ; nous avons donc  $A(H) = A_1 \uplus A_2 \uplus A^- \uplus A^+$ . Pour toute arc-coloration orientée de  $H$ , nous avons besoin d'au moins  $p$  couleurs distinctes pour colorier  $A_1$ ; de plus, nous avons besoin d'au moins deux couleurs supplémentaires (différentes de celle utilisées pour colorier  $A_1$ ) pour colorier  $A^-$  et  $A^+$ . Nous avons donc besoin d'au moins  $p + 2$  couleurs pour toute arc-coloration orientée de  $H$ . Soit  $g : A(G) \rightarrow \{1, \dots, p\}$  une  $p$ -arc-coloration orientée de  $G$ . Nous définissons alors l'application  $h : A(H) \rightarrow \{1, \dots, p + 2\}$  comme suit :

$$h(\vec{uv}) = \begin{cases} g(\vec{uv}) & \text{si } \vec{uv} \in A_1 \cup A_2 \\ p + 1 & \text{si } \vec{uv} \in A^- \\ p + 2 & \text{si } \vec{uv} \in A^+ \end{cases}$$

L'application  $h$  est une  $(p + 2)$ -arc-coloration orientée de  $H$  et donc  $\chi'_o(H) = p + 2$ .  $\square$

Rappelons que le graphe inverse de  $G$  est noté  $G^{-1}$  (voir chapitre 1, § 1.1). Puisque  $G^{-1} \rightarrow H^{-1}$  si  $G \rightarrow H$ , nous avons clairement :

**Observation 3.8.**

1. Si  $\chi_o(G) = k$  avec  $G \rightarrow T_k$ , alors  $\chi_o(G^{-1}) = k$  avec  $G^{-1} \rightarrow T_k^{-1}$ ;
2. Si  $\chi'_o(G) = k$  avec  $LD(G) \rightarrow T_k$ , alors  $\chi'_o(G^{-1}) = k$  avec  $LD(G^{-1}) \rightarrow T_k^{-1}$ .

**Preuve du théorème 3.6.** Nous avons déterminé par programme les valeurs de  $\phi(k)$  pour  $k \leq 9$ .

Pour  $k \geq 10$ , d'après le lemme 3.7,  $\phi(k + 2) \geq 2\phi(k) + 1$ , ce qui implique les bornes inférieures de  $\phi(k)$ .

Maintenant, nous prouvons que  $\phi(k) \leq (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$  pour  $k \geq 10$ . D'après le théorème 3.5, pour tout  $k \geq 10$ , il existe un graphe orienté  $G_k$  avec  $\chi'_o(G_k) = k$  et  $\chi_o(G_k) = \phi(k)$ ; par conséquent, il est suffisant de montrer que  $\chi_o(G_k) \leq (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ . Soit  $T_k$  un tournoi à  $k$  sommets tel que  $LD(G_k) \rightarrow T_k$ . Nous ordonnons les sommets  $v_1, v_2, \dots, v_k$  de  $T_k$  de telle sorte que  $d^+(v_i) \leq d^+(v_j)$  pour  $i < j$ . Nous supposons premièrement que  $d^+(v_i) \geq \lceil \frac{k-1}{2} \rceil$  pour tout  $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil \leq i \leq k$ . Pour un  $i$  donné, on pose  $\mathcal{P}_i = \{s \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_i\} \text{ contenant } v_i\}$  et  $\mathcal{Q}_i = \{\mu_{T_k}(s), s \in \mathcal{P}_i\}$ . Il est clair que  $\mathcal{Q}_i \subseteq \mathcal{P}_i$ . Nous avons alors  $\mathcal{P}(T_k) = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}_i$  et par conséquent  $\mathcal{Q}(T_k) \subseteq \{\emptyset\} \cup \bigcup_{i=1}^n \mathcal{Q}_i$ . D'une part, puisque  $|\mathcal{P}_i| = 2^{i-1}$ , nous avons  $|\mathcal{Q}_i| \leq 2^{i-1}$ . D'autre part, puisque chaque élément de  $\mathcal{Q}_i$  contient  $v_i$  ainsi que ses successeurs dans  $T_k$ ,  $\mathcal{Q}_i$  ne contient que des ensembles dont le cardinal est d'au moins  $1 + d^+(v_i)$ ; nous avons

$|\mathcal{Q}_i| \leq 2^{k-d^+(v_i)-1}$ . Donc,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Q}(T_k)| &\leq 1 + \sum_{i=1}^k |\mathcal{Q}_i| \\
&\leq 1 + \sum_{i=1}^k \min\{2^{i-1}, 2^{k-d^+(v_i)-1}\} \\
&\leq 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{i-1} + \sum_{i=\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}^k 2^{k-d^+(v_i)-1} \\
&\leq 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{i-1} + \sum_{i=\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}^k 2^{k-\lceil \frac{k+1}{2} \rceil -1} \\
&\leq 1 + 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} - 1 + \lceil \frac{k}{2} \rceil 2^{k-\lceil \frac{k+1}{2} \rceil -1} \\
&\leq 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} + \lceil \frac{k}{2} \rceil 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \\
&\leq (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}
\end{aligned}$$

Par conséquent,  $\chi_o(G_k) \leq (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ .

Supposons maintenant que  $d^+(v_i) < \lceil \frac{k-1}{2} \rceil$  pour  $i \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ . Dans ce cas, nous considérons le graphe  $T_k^{-1}$  et nous avons donc  $d^+(v_i) \geq \lceil \frac{k-1}{2} \rceil$  pour tout  $1 \leq i \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ . En utilisant les arguments précédents, nous obtenons que  $|\mathcal{Q}(T_k^{-1})| \leq (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ . D'après l'observation 3.8(2), nous avons  $\chi'_o(G_k^{-1}) = k$  et  $LD(G_k^{-1}) \rightarrow T_k^{-1}$ . Par conséquent,  $\chi_o(G_k^{-1}) \leq (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$  et d'après l'observation 3.8(1)  $\chi_o(G_k) \leq (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ .

Nous avons donc  $\phi(k) \leq (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$  pour tout  $k \geq 10$ .  $\square$

Si  $\mathcal{C}_k$  désigne la classe des graphes ayant un indice chromatique orienté  $k$ , alors nous connaissons les valeurs exactes de  $\chi_o(\mathcal{C}_k)$  pour  $0 \leq k \leq 9$  et nous avons  $\alpha \cdot 2^{\frac{k}{2}} - 1 \leq \chi_o(\mathcal{C}_k) \leq (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) 2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$  pour  $k \geq 10$ , où  $\alpha = 2$  si  $k$  est pair et  $\alpha = \frac{13}{4\sqrt{2}}$  si  $k$  est impair. La valeur exacte de  $\chi_o(\mathcal{C}_k)$  est donc de l'ordre de  $2^{\frac{k}{2}}$  et l'écart qui existe actuellement entre la borne inférieure et la borne supérieure est réduit. Cependant, nous n'avons pas pour l'instant de méthodes nous permettant d'avoir une meilleure approximation et le problème reste donc pour l'instant ouvert.

### 3.3 Indice chromatique orienté et nombre chromatique acyclique

Nous nous intéressons dans cette partie à la relation qui existe entre l'indice chromatique orienté d'un graphe et son nombre chromatique acyclique.

Rappelons qu'une sommet-coloration acyclique d'un graphe non orienté  $G$  est une sommet-coloration propre de  $G$  telle que deux classes de couleurs induisent une forêt (en d'autres termes, le graphe ne contient pas de cycle bicolore). Le nombre chromatique acyclique de  $G$ , noté  $\chi_a(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -sommet-coloration acyclique.



Raspaud et Sopena [RS94] ont montré que tout graphe orienté  $G$  dont le graphe sous-jacent admet une  $k$ -sommets-coloration acyclique est tel que  $\chi_o(G) \leq k \cdot 2^{k-1}$  (voir le théorème 2.10). D'après le théorème 3.2, nous avons donc  $\chi'_o(G) \leq k \cdot 2^{k-1}$ . Nous améliorons cette borne.

**Théorème 3.9.** *Tout graphe orienté  $G$  dont le graphe sous-jacent admet une  $k$ -sommets-coloration acyclique est tel que  $\chi'_o(G) \leq 2k(k-1) - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ .*

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin des deux lemmes suivants.

**Lemme 3.10.** *Soit  $F$  une forêt orientée. Alors  $F$  admet une  $C_3$ -arc-coloration orientée où  $C_3$  est le circuit à trois sommets.*

**Preuve.** Sachant que le graphe représentatif des arcs d'une forêt est une forêt, le résultat découle directement du fait que toute forêt orientée admet une  $C_3$ -sommets-coloration.  $\square$

**Lemme 3.11.** *Soient  $F$  une forêt,  $c$  une 2-sommets-coloration propre de  $F$  utilisant les couleurs  $i$  et  $j$  ( $i < j$ ) et  $\vec{F}$  une orientation de  $F$ . Alors,  $\vec{F}$  admet une 4-arc-coloration orientée  $f : A(\vec{F}) \rightarrow \{i, j\} \times \{0, 1\}$  telle que pour tout sommet  $u \in \vec{F}$ ,  $c(u)$  et la première composante de  $f(u)$  sont égales.*

**Preuve.** La coloration  $f$  peut facilement être obtenue à partir de  $c$  en utilisant les règles suivantes : si  $\vec{uw}$  et  $\vec{vw}$  sont deux arcs consécutifs de  $\vec{F}$ , nous fixons alors  $f(\vec{uw}) = (c(u), \alpha)$  et  $f(\vec{vw}) = (c(v), \beta)$  avec  $\alpha = \beta$  si et seulement si  $c(u) < c(v)$ .  $\square$

**Preuve du théorème 3.9.** Soient  $G$  un graphe orienté et  $V_1, V_2, \dots, V_k$  les  $k$  classes de couleurs de  $V(G)$  induites par une  $k$ -sommets-coloration acyclique de  $G$ . Par définition,  $F_{i,j} = G[V_i, V_j]$  est une forêt pour  $i, j \in [1, k]$ ,  $i < j$  et il existe  $\frac{k(k-1)}{2}$  telles forêts. De plus, considérons les  $l = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  forêts  $F_{1,2}, F_{3,4}, \dots, F_{2l-1,2l}$  : ces  $l$  forêts n'ont aucun sommet en commun. Nous dirons dans la suite que ces  $l$  forêts sont de *type 1*, alors que les  $\frac{k(k-2)}{2}$  forêts restantes seront de *type 2*. Nous définissons alors une arc-coloration orientée  $f_{i,j}$  pour chaque forêt  $F_{i,j}$  comme suit. Si  $F_{i,j}$  est de type 1,  $f_{i,j}$  sera n'importe quelle 3-arc-coloration orientée donnée par le lemme 3.10 ; si  $F_{i,j}$  est de type 2,  $f_{i,j}$  sera n'importe quelle 4-arc-coloration orientée donnée par le lemme 3.11.

Rappelons que tout arc  $\vec{uv} \in A(G)$  appartient à une unique forêt  $F_{i,j}$  (si nous considérons que  $F_{i,j} = F_{j,i}$  pour  $i, j \in [1, k]$ ,  $i \neq j$ ). Nous définissons alors, à partir des  $\frac{k(k-1)}{2}$  arc-colorations orientées définies ci-dessus, la coloration  $f$  suivante de  $A(G)$  :

$$\forall \vec{uv} \in F_{i,j}, f(\vec{uv}) = (x, i, j) \quad \text{où } x = f_{i,j}(\vec{uv}).$$

Nous allons prouver que  $f$  est une arc-coloration orientée de  $G$ . Nous commençons par vérifier que deux arcs consécutifs  $\vec{uw}$  et  $\vec{vw}$  ont des couleurs différentes. Si  $\vec{uw}$  et  $\vec{vw}$  appartiennent à deux forêts différentes, disons  $\vec{uw} \in F_{i,j}$  et  $\vec{vw} \in F_{j,k}$ , alors  $f(\vec{uw}) = (x, i, j) \neq (y, j, k) = f(\vec{vw})$  pour tout  $x, y$  puisque  $i \neq k$ . Maintenant, si  $\vec{uw}, \vec{vw} \in F_{i,j}$ , alors  $f(\vec{uw}) = (f_{i,j}(\vec{uw}), i, j) \neq (f_{i,j}(\vec{vw}), i, j) = f(\vec{vw})$  puisque  $f_{i,j}$  est une arc-coloration orientée de  $F_{i,j}$ . Par conséquent, si  $f$  n'est pas une arc-coloration orientée de

$G$ , il existe quatre arcs  $\vec{uv}, \vec{vw}, \vec{xy}, \vec{yz}$  de  $G$  avec  $f(\vec{uv}) = f(\vec{yz})$  et  $f(\vec{vw}) = f(\vec{xy})$ . Puisque chaque application  $f_{i,j}$  est une arc-coloration orientée, les arcs  $\vec{uv}, \vec{vw}, \vec{xy}, \vec{yz}$  n'appartiennent pas à la même forêt et donc sans perte de généralité  $\vec{uv}, \vec{yz} \in F_{i,j}$  et  $\vec{vw}, \vec{xy} \in F_{j,k}$ ,  $i \neq k$ . Puisque deux forêts de type 1 n'ont aucun sommet en commun, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $F_{i,j}$  est de type 2. Supposons que  $f(\vec{uv}) = f(\vec{yz}) = ((i,p), i, j)$  pour  $p \in \{0, 1\}$ . Il en découle que  $u, y \in V_i$  et  $v, z \in V_j$ . Alors, puisque  $f(\vec{vw}) = f(\vec{xy}) = (r, j, k)$  pour un  $r$  donné, le sommet  $y$  appartient soit à  $V_j$ , soit à  $V_k$ . Nous obtenons une contradiction puisque  $i \neq j \neq k \neq i$ . Dans le cas où  $f(\vec{uv}) = f(\vec{yz}) = ((j,p), i, j)$  pour  $p \in \{0, 1\}$ , nous obtenons de la même manière une contradiction. Il est facile de voir que cette coloration utilise au plus  $2k(k-1) - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  couleurs. Ceci conclut la preuve.  $\square$

De façon à nous assurer de la pertinence de cette borne supérieure, nous construisons dans la suite des graphes orientés ayant un nombre chromatique acyclique borné et un indice chromatique orienté grand. Pour ce faire, nous considérons la classe des  $k$ -arbres partiels, notés  $\mathcal{T}^k$ .

Nous rappelons tout d'abord que  $\chi_a(\mathcal{T}^k) = k + 1$ . En effet, une  $(k+1)$ -clique est un  $k$ -arbre et nécessite  $k+1$  couleurs pour toute sommet-coloration propre et donc  $k+1$  couleurs pour toute sommet-coloration acyclique.

Nous montrons la borne suivante :

**Théorème 3.12.**  $\chi'_o(\mathcal{T}^k) = \Omega\left(\frac{k^2}{\log k}\right)$ .

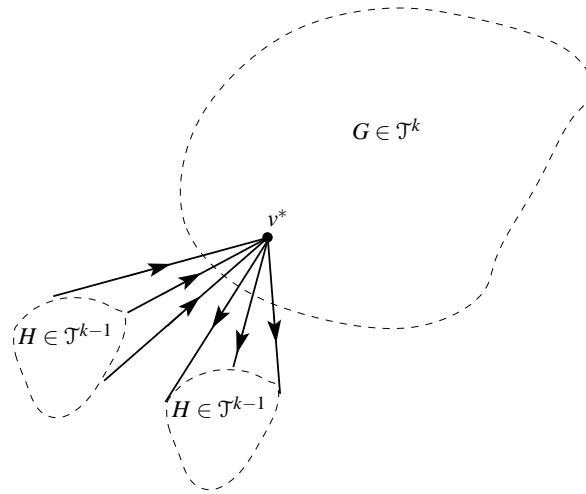
Sachant que  $\chi_a(\mathcal{T}^k) = k + 1$ , nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 3.13.** *Il existe des graphes orientés de nombre chromatique acyclique  $k$  dont l'indice chromatique orienté est  $\Omega\left(\frac{k^2}{\log k}\right)$ .*

**Preuve du théorème 3.12.** Soit  $h(k) = \chi'_o(\mathcal{T}^k)$ .

Dans la première partie de cette preuve, nous montrons que tout graphe  $G \in \mathcal{T}^k$  admet une  $h(k)$ -arc-coloration orientée  $f$  telle que  $\forall v \in V(G)$ ,  $|C_f^+(v)| \leq h(k) - h(k-1)$ . Supposons le contraire : soit  $G \in \mathcal{T}^k$  tel que pour toute  $h(k)$ -arc-coloration orientée de  $G$ , il existe un sommet  $v^* \in V(G)$  tel que  $|C_f^+(v^*)| > h(k) - h(k-1)$ . Soit  $H \in \mathcal{T}^{k-1}$  tel que  $\chi'_o(H) = h(k-1)$ . Nous construisons alors le graphe  $G^*$  de la figure 3.6 de la manière suivante : à tout sommet  $v$  de  $G$ , nous associons deux copies du graphe  $H$ , notées  $H_v^+$  et  $H_v^-$ , et nous relierons tous les sommets de  $H_v^+$  au sommet  $v$  et le sommet  $v$  à tous les sommets de  $H_v^-$ . Le graphe  $G^*$  est un  $k$ -arbre partiel et admet donc une  $h(k)$ -arc-coloration orientée  $f$ . Soit  $v^* \in V(G)$  le sommet tel que  $|C_f^+(v^*)| = i > h(k) - h(k-1)$ . Les  $h(k-1)$  couleurs utilisées pour colorier les arcs de  $H_{v^*}^+$  doivent nécessairement être différentes des  $i$  couleurs présentes sur les arcs sortants de  $v^*$ , ce qui implique que  $\chi'_o(G^*) > h(k)$  : nous obtenons une contradiction.

Nous montrons maintenant que  $h(k) = \Omega\left(\frac{k^2}{\log k}\right)$ . Notons tout d'abord que Sopena a montré que  $\chi_o(\mathcal{T}^k) \geq 2^{k+1} - 1$  [Sop97]. Soit  $G$  un  $k$ -arbre partiel tel que  $\chi_o(G) \geq 2^{k+1} - 1$  et  $f$  une arc-coloration orientée de  $G$  telle que  $\forall v \in V(G)$ ,  $|C_f^+(v)| \leq h(k) - h(k-1)$ . Il est facile de vérifier que la sommet-coloration  $g : V(G) \rightarrow C$  (où  $C$  est un ensemble de couleurs) définie par  $g(v) = C_f^+(v), \forall v \in V(G)$

FIG. 3.6 – Le graphe  $G^*$  de la preuve du théorème 3.12.

est une sommet-coloration orientée de  $G$ . De plus, sachant que  $|C_f^+(v)| \leq h(k) - h(k-1), \forall v \in V(G)$ , nous avons  $|C| \leq \sum_{i=0}^{h(k)-h(k-1)} \binom{h(k)}{i}$ . Nous obtenons alors l'inégalité suivante qui nous permet de conclure :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{h(k)-h(k-1)} \binom{h(k)}{i} &\geq \chi_o(G) \geq 2^{k+1} - 1 \\ h(k)^{h(k)-h(k-1)} &\geq 2^{k+1} - 1 \\ (h(k) - h(k-1)) \log h(k) &\geq k \\ h(k) &= \Omega\left(\frac{k^2}{\log k}\right) \end{aligned}$$

□

Nous ne savons pas pour l'instant si la borne supérieure du théorème 3.9 est atteinte, mais nous pouvons cependant voir que la borne optimale est de l'ordre de  $k^2$  (où  $k$  est le nombre chromatique acyclique).

### 3.4 Les graphes planaires extérieurs

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'indice chromatique orienté des graphes planaires extérieurs et nous en donnons une caractérisation complète en fonction de la maille.

Rappelons que  $\mathcal{O}$  désigne la classe des graphes planaires extérieurs et que  $\mathcal{O}_g$  désigne la classe des graphes planaires extérieurs de maille au moins  $g$ .

Rappelons que dans le chapitre précédent, § 2.1, nous avons étudié le nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille donnée. Ces résultats nous permettent d'obtenir des bornes

supérieures pour l'indice chromatique orienté grâce au théorème 3.2. En revanche, nous n'avons aucune information nous permettant d'obtenir des bornes inférieures. Nous avons regroupé les résultats connus dans le tableau 3.1.

Maille	Borne inférieure	Borne supérieure
3	?	$\chi'_o(\mathcal{O}) \leq 7$
4	?	$\chi'_o(\mathcal{O}_4) \leq 6$
$g \geq 5$	?	$\chi'_o(\mathcal{O}_g) \leq 5$

TAB. 3.1 – Résultats connus pour l'indice chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille donnée.

Nous améliorons ces bornes en donnant, pour toute maille, la valeur exacte de l'indice chromatique orienté :

**Théorème 3.14.**

1.  $\chi'_o(\mathcal{O}_3) = 7$ ,
2.  $\chi'_o(\mathcal{O}_4) = 6$ ,
3.  $\chi'_o(\mathcal{O}_g) = 5$  pour  $5 \leq g \leq 9$ ,
4.  $\chi'_o(\mathcal{O}_g) = 4$  pour  $g \geq 10$ .

Pour prouver les trois premiers points du théorème 3.14 (cas des graphes planaires extérieurs de maille  $g = 3$ ,  $g = 4$  et  $5 \leq g \leq 9$ ), il nous suffit de montrer la borne inférieure, la borne supérieure étant obtenue à partir des précédents résultats sur le nombre chromatique orienté (voir le tableau 3.1). En revanche, dans le cas des graphes planaires extérieurs de maille  $g \geq 10$ , nous aurons besoin de prouver la borne inférieure ainsi que la borne supérieure.

### 3.4.1 Résultats préliminaires

Pour prouver le théorème 3.14, nous avons besoin de quelques nouvelles définitions et résultats préliminaires.

Rappelons que les tournois  $T_4$ ,  $T_5$  et  $T_6$ , que nous avons déjà eu l'occasion de rencontrer, sont les tournois dessinés sur la figure 3.7. Nous utiliserons à nouveau ces trois tournois pour prouver le théorème 3.14 dans la section suivante.

La borne supérieure du théorème 3.14.4 va être obtenue en prouvant qu'un contre-exemple à ce théorème n'existe pas. Pour ce faire, nous montrons que certaines configurations ne peuvent être présentes dans l'éventuel contre-exemple, et notamment les sommets de degré un. Pour nous permettre d'interdire les sommets de degrés un, nous introduisons la notion de *bonne*  $T_4$ -arc-coloration. Une  $T_4$ -arc-coloration  $f$  d'un graphe orienté  $G$  est *bonne* si :

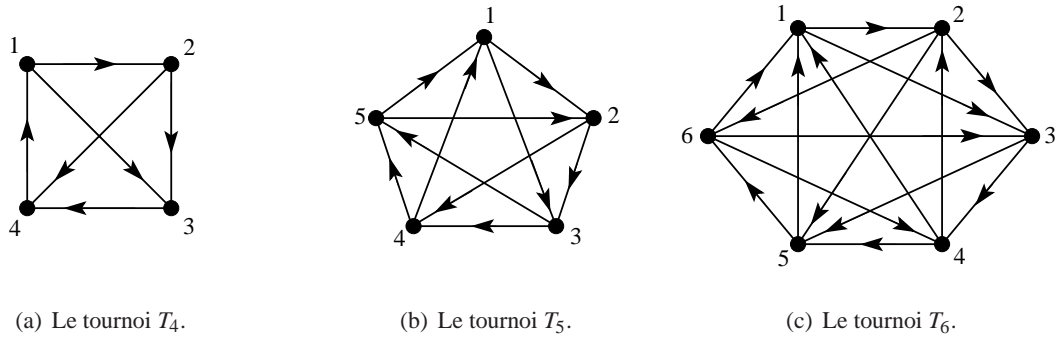


FIG. 3.7 – Trois tournois cibles.

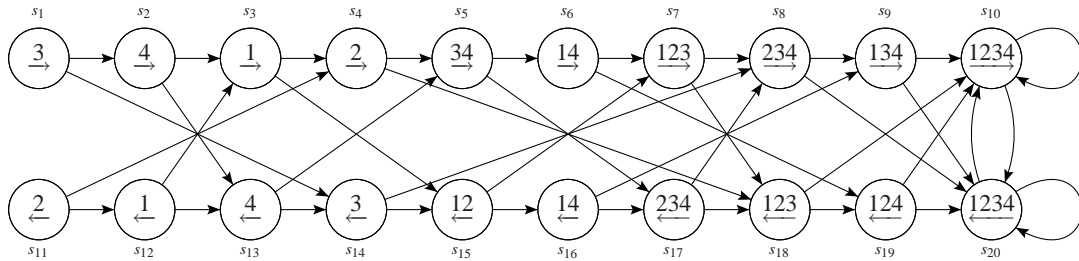


FIG. 3.8 – Automate  $\mathcal{A}$  de la proposition 3.16.

- (i)  $\forall u \in V(G), C_f^+(u) \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{3,4\}\},$
- (ii)  $\forall u \in V(G), C_f^-(u) \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}.$

Ainsi, nous obtenons facilement le lemme suivant :

**Lemme 3.15.** Soient  $G$  un graphe orienté,  $u$  un sommet de  $G$ , et  $f$  une bonne  $T_4$ -arc-coloration de  $G$ . Le graphe  $H$  obtenu à partir de  $G$  en ajoutant un nouveau sommet  $v$  relié au sommet  $u$  admet une bonne  $T_4$ -arc-coloration.

**Preuve.** L'arc-coloration  $f$  est une bonne  $T_4$ -arc-coloration partielle de  $H$ . Supposons que  $\vec{uv} \in A(G)$  (resp.  $\vec{vu} \in A(G)$ ). Puisque  $C_f^-(u) \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$  (resp.  $C_f^+(u) \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$ ), il existe un successeur (resp. prédécesseur) dans  $T_4$  qui peut être utilisé pour étendre  $f$  à une bonne  $T_4$ -arc-coloration de  $H$ .  $\square$

Nous montrons maintenant le résultat suivant :

**Proposition 3.16.** Soit  $P = (v_0, v_1, \dots, v_9, v_{10})$  une 10-chaîne telle que  $d(v_i) = 2$  pour  $1 \leq i \leq 9$ . Alors, toute bonne  $T_4$ -arc-coloration de  $P' = P \setminus \{v_2, \dots, v_8\}$  peut être étendue à une bonne  $T_4$ -arc-coloration de  $P$ .

**Preuve.** Soit  $f'$  une bonne  $T_4$ -arc-coloration de  $P'$ . Soit  $f'(v_9v_{10}) = c$ . Nous décolorons  $f'(v_9v_{10})$  et prouvons dans la suite qu'il existe une bonne  $T_4$ -arc-coloration  $f$  de  $P$  étendant  $f'$  telle que  $f(v_9v_{10}) =$

c. Nous étendrons  $f'$  à  $P$  de  $v_1v_2$  vers  $v_9v_{10}$  et nous raisonnerons en terme de couleurs accessibles. (*i.e.* pour tout  $i$ , nous considérerons l'ensemble des couleurs que nous sommes capable d'obtenir sur  $v_iv_{i+1}$ ). Par exemple, si l'ensemble des couleurs accessibles de  $v_iv_{i+1}$  est  $S = \{c_1, \dots, c_n\}$ , cela signifie qu'il existe  $n$  bonnes  $T_4$ -arc-coloration  $f_1, \dots, f_n$  de  $P \setminus \{v_{i+1}v_{i+2}, \dots, v_9v_{10}\}$  étendant  $f'$  telles que  $f_j(v_iv_{i+1}) = c_j$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Par conséquent, montrer que l'ensemble des couleurs accessibles de  $v_9v_{10}$  est  $\{1, 2, 3, 4\}$  signifie qu'il existe une bonne  $T_4$ -arc-coloration  $f$  de  $P$  avec  $f(v_9v_{10}) = c$ , ce qui conclura la preuve.

Nous associons à tout arc de  $P$  un *état*, qui est défini par son orientation (de gauche à droite si  $\overrightarrow{v_iv_{i+1}} \in A(G)$  et de droite à gauche sinon) et son ensemble de couleurs accessibles. Une étude cas par cas de  $T_4$  nous a permis de déterminer vingt états possibles pour un arc de  $P$ . Considérons l'automate de la figure 3.8. Ses vingt états sont les vingt états possibles d'un arc de  $P$ . La première ligne correspond aux arcs orientés de gauche à droite alors que la deuxième ligne correspond aux arcs orientés de la droite vers la gauche. Chaque état de la première ligne (resp. de la deuxième ligne) sera appelé un *1-état* (resp. un *2-état*). Deux transitions partent de chaque état, une vers un 1-état et une vers un 2-état. Ces transitions sont respectivement appelées *1-transition* et *2-transition*. Les quatre premiers états de chaque ligne (*i.e.* les états  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}$ ) correspondent aux huit états possibles de  $v_0v_1$  (*i.e.* une couleur et une orientation). Alors, connaissant l'état d'un arc  $v_iv_{i+1}$  et l'orientation de l'arc suivant  $v_{i+1}v_{i+2}$ , nous sommes capable de déterminer l'état de  $v_{i+1}v_{i+2}$  en suivant soit la 1-transition si  $\overrightarrow{v_{i+1}v_{i+2}} \in A(P)$ , soit la 2-transition si  $\overleftarrow{v_{i+2}v_{i+1}} \in A(P)$ . Clairement, l'état de l'arc  $v_9v_{10}$  sera soit l'état  $s_{10}$  soit l'état  $s_{20}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

Nous obtenons également, grâce à une vérification faite par ordinateur, un résultat similaire :

**Proposition 3.17.** *Soit  $P = (v_0, v_1, \dots, v_9)$  une 9-chaîne constituée de 2-sommets ( $d(v_i) = 2$  pour  $1 \leq i \leq 8$ ). Alors, toute bonne  $T_4$ -arc-coloration  $f$  de  $P' = P \setminus \{v_2, \dots, v_7\}$  telle que  $C_f^-(v_0) \cap C_f^+(v_9) \neq \emptyset$  ou  $C_f^+(v_0) \cap C_f^-(v_9) \neq \emptyset$  peut être étendue à une bonne  $T_4$ -arc-coloration de  $P$ .*

### 3.4.2 Preuve du théorème 3.14

Dans cette section, nous prouvons les quatre points du théorème 3.14.

**Preuve du théorème 3.14(1).** Dans [Sop97], Sopena a montré que  $\chi_o(\mathcal{O}_3) \leq 7$ , ce qui implique d'après le théorème 3.2 que  $\chi'_o(\mathcal{O}_3) \leq 7$ .

Nous allons maintenant montrer que  $\chi'_o(\mathcal{O}_3) \geq 7$  en prouvant que le graphe planaire extérieur  $G$  de la figure 3.9 est tel que  $\chi'_o(G) = 7$ . Supposons au contraire qu'il existe une arc-coloration orientée  $f$  de  $G$  utilisant au plus six couleurs (disons 1, 2, 3, 4, 5, 6). Nécessairement, les couleurs des arcs  $\overrightarrow{u_1u_2}$ ,  $\overrightarrow{u_2u_3}$ ,  $\overrightarrow{u_3u_4}$ ,  $\overrightarrow{u_4u_5}$ ,  $\overrightarrow{u_5u_6}$  et  $\overrightarrow{u_6u_1}$  doivent être différentes puisque toute paire de ces arcs appartient à un 2- ou 3-chemin dans  $G$ . Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $f(\overrightarrow{u_iu_j}) = i$  (comme marqué sur la figure 3.9). Les couleurs présentes sur ces six arcs interdisent pour chacun des arcs non encore coloriés trois ou quatre couleurs. Les ensembles de couleurs *disponibles* pour chacun de ces arcs sont donnés sur la figure 3.9.

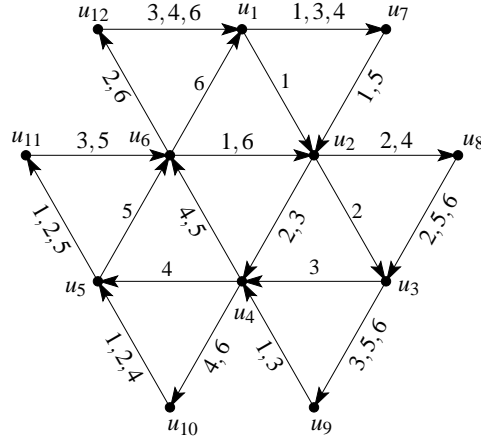


FIG. 3.9 – Un graphe planaire extérieur avec un indice chromatique orienté 7.

Supposons premièrement que nous avons  $f(\overrightarrow{u_6u_2}) = 6$  et  $f(\overrightarrow{u_2u_4}) = 3$ . Ceci implique que  $f(\overrightarrow{u_{11}u_6}) = 5$  et  $f(\overrightarrow{u_4u_{10}}) = 4$  et donc  $f(\overrightarrow{u_{10}u_5}) = 1$  et  $f(\overrightarrow{u_5u_{11}}) = 2$  puisque nous avons déjà  $1 \rightarrow 2$  avec les arcs  $\overrightarrow{u_1u_2}$  et  $\overrightarrow{u_2u_3}$ . Par conséquent, puisque nous avons  $2 \rightarrow 5$  avec les arcs  $\overrightarrow{u_5u_{11}}$  et  $\overrightarrow{u_{11}u_6}$  (resp.  $4 \rightarrow 1$  avec les arcs  $\overrightarrow{u_4u_{10}}$  et  $\overrightarrow{u_{10}u_5}$ ), nous avons nécessairement  $f(\overrightarrow{u_7u_2}) = 1$  (resp.  $f(\overrightarrow{u_2u_8}) = 2$ ). Finalement, ceci implique que  $f(\overrightarrow{u_1u_7}) = 4$  et  $f(\overrightarrow{u_8u_3}) = 5$  et il ne reste plus aucune couleur de disponible pour colorier l'arc  $\overrightarrow{u_4u_6}$ .

Supposons maintenant que nous avons  $f(\overrightarrow{u_6u_2}) = 1$  et  $f(\overrightarrow{u_4u_6}) = 4$ . Ceci implique que  $f(\overrightarrow{u_2u_8}) = 2$  et  $f(\overrightarrow{u_9u_4}) = 3$  et donc  $f(\overrightarrow{u_8u_3}) = 5$  et  $f(\overrightarrow{u_3u_9}) = 6$  puisque nous avons déjà  $5 \rightarrow 6$  avec les arcs  $\overrightarrow{u_5u_6}$  et  $\overrightarrow{u_6u_1}$ . Par conséquent, puisque nous avons  $6 \rightarrow 3$  avec les arcs  $\overrightarrow{u_3u_9}$  et  $\overrightarrow{u_9u_4}$  (resp.  $2 \rightarrow 5$  avec les arcs  $\overrightarrow{u_2u_8}$  et  $\overrightarrow{u_8u_3}$ ), nous avons nécessairement  $f(\overrightarrow{u_4u_{10}}) = 4$  (resp.  $f(\overrightarrow{u_6u_{12}}) = 6$ ). Finalement, ceci implique que  $f(\overrightarrow{u_{10}u_5}) = 2$  et  $f(\overrightarrow{u_{12}u_1}) = 3$  et il ne reste plus aucune couleur de disponible pour colorier l'arc  $\overrightarrow{u_2u_4}$ .

Finalement, supposons que nous avons  $f(\overrightarrow{u_2u_4}) = 2$  et  $f(\overrightarrow{u_4u_6}) = 5$ . Ceci implique que  $f(\overrightarrow{u_7u_2}) = 1$  et  $f(\overrightarrow{u_6u_{12}}) = 6$  et donc  $f(\overrightarrow{u_{12}u_1}) = 3$  et  $f(\overrightarrow{u_1u_7}) = 4$  puisque nous avons déjà  $3 \rightarrow 4$  avec les arcs  $\overrightarrow{u_3u_4}$  et  $\overrightarrow{u_4u_5}$ . Par conséquent, puisque nous avons  $6 \rightarrow 3$  avec les arcs  $\overrightarrow{u_6u_{12}}$  et  $\overrightarrow{u_{12}u_1}$  (resp.  $4 \rightarrow 1$  avec les arcs  $\overrightarrow{u_1u_7}$  et  $\overrightarrow{u_7u_2}$ ), nous avons nécessairement  $f(\overrightarrow{u_{11}u_6}) = 5$  (resp.  $f(\overrightarrow{u_9u_4}) = 3$ ). Finalement, ceci implique que  $f(\overrightarrow{u_5u_{11}}) = 1$  et  $f(\overrightarrow{u_3u_9}) = 6$  et il ne reste plus aucune couleur disponible pour  $\overrightarrow{u_6u_2}$ .

Les couleurs des arcs  $\overrightarrow{u_2u_4}$ ,  $\overrightarrow{u_4u_6}$  et  $\overrightarrow{u_6u_2}$  sont donc respectivement soit  $3, 5, 1$ , soit  $2, 4, 6$ .

Supposons premièrement que nous avons  $f(\overrightarrow{u_2u_4}) = 3$ ,  $f(\overrightarrow{u_4u_6}) = 5$  et  $f(\overrightarrow{u_6u_2}) = 1$ . Ceci implique  $f(\overrightarrow{u_9u_4}) = 3$  et  $f(\overrightarrow{u_{11}u_6}) = 5$ . Alors, nous avons nécessairement  $f(\overrightarrow{u_3u_9}) = 6$  et  $f(\overrightarrow{u_5u_{11}}) = 2$ . Finalement, ceci implique que  $f(\overrightarrow{u_4u_{10}}) = 4$ , et il ne reste plus aucune couleur disponible pour l'arc  $\overrightarrow{u_{10}u_5}$ .

Maintenant, supposons que nous avons  $f(\overrightarrow{u_2u_4}) = 2$ ,  $f(\overrightarrow{u_4u_6}) = 4$  et  $f(\overrightarrow{u_6u_2}) = 6$ . Ceci implique que  $f(\overrightarrow{u_4u_{10}}) = 4$  et  $f(\overrightarrow{u_2u_8}) = 2$ . Alors, nous avons nécessairement  $f(\overrightarrow{u_{10}u_5}) = 1$  et  $f(\overrightarrow{u_8u_3}) = 5$ . Finalement, ceci implique que  $f(\overrightarrow{u_9u_4}) = 3$ , et il ne reste plus aucune couleur de disponible pour l'arc  $\overrightarrow{u_3u_9}$ .

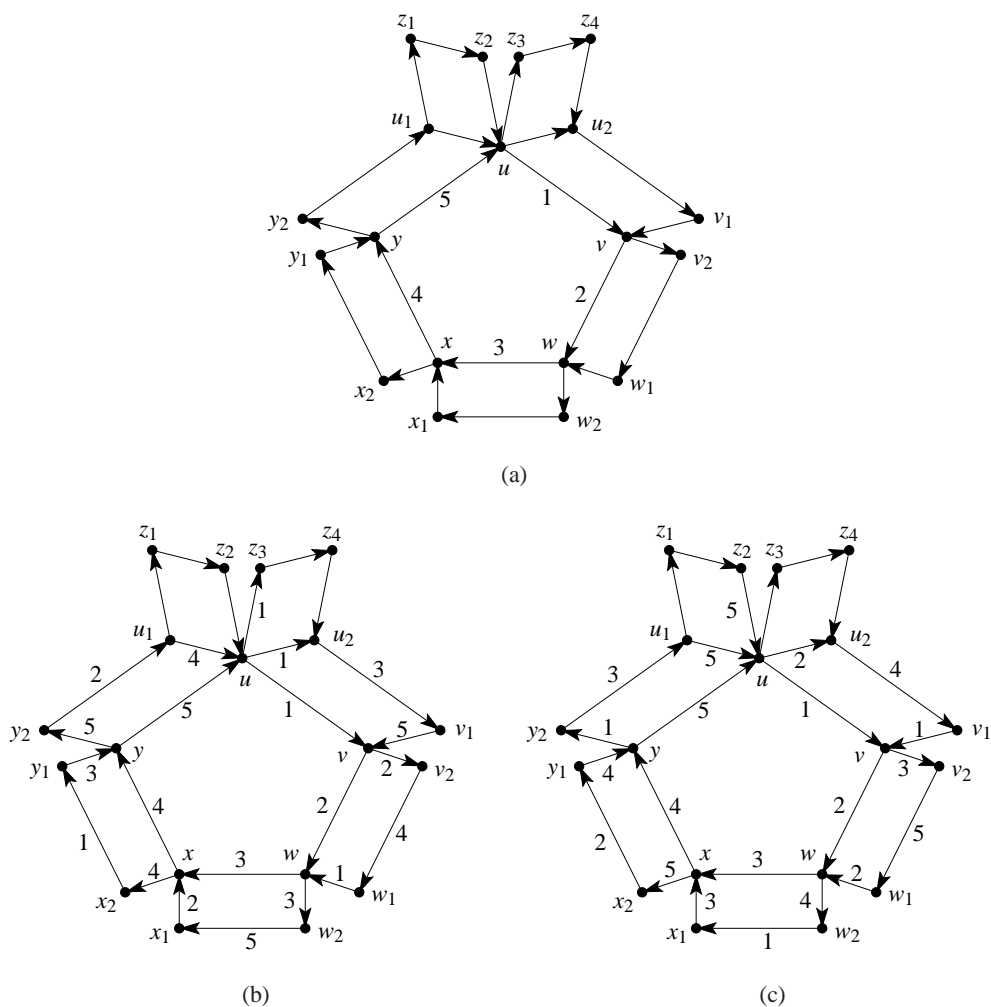


FIG. 3.10 – Un graphe planaire extérieur de maille 4 et d'indice chromatique orienté 6.

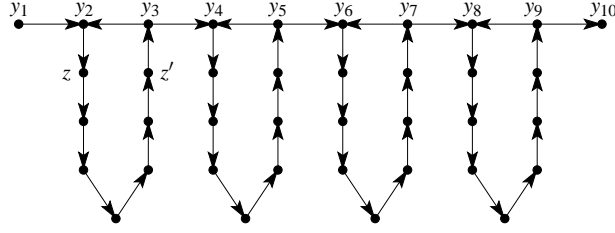
Ainsi, il n'existe pas de tournoi  $T$  à six sommets tels que  $G$  est  $T$ -arc-coloriable, ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Preuve du théorème 3.14(2).** D'après le théorème 2.1(1),  $\chi_o(\mathcal{O}_4) \leq 6$ , ce qui implique d'après le théorème 3.2 que  $\chi'_o(\mathcal{O}_4) \leq 6$ . Il nous suffit donc de montrer que  $\chi'_o(\mathcal{O}_4) \geq 6$ , et pour ce faire, nous montrons que le graphe planaire extérieur  $G$  de la figure 3.10(a) est tel que  $\chi'_o(G) = 6$ .

Supposons au contraire qu'il existe une arc-coloration orientée  $f$  utilisant au plus cinq couleurs (disons 1, 2, 3, 4, 5). Nécessairement, les couleurs des arcs  $\vec{uv}$ ,  $\vec{vw}$ ,  $\vec{wx}$ ,  $\vec{xy}$  et  $\vec{yu}$  doivent être différentes. Supposons sans perte de généralité que nous avons  $f(\vec{uv}) = 1$ ,  $f(\vec{vw}) = 2$ ,  $f(\vec{wx}) = 3$ ,  $f(\vec{xy}) = 4$  et  $f(\vec{yu}) = 5$ .

Nous montrons dans un premier temps que si  $f$  existe, alors  $f$  est obligatoirement une  $T_5$ -arc-coloration ( $T_5$  est le tournoi de la figure 3.7(b)). Supposons au contraire que  $f$  est une  $T'_5$ -arc-coloration de  $G$ , avec  $T'_5 \not\cong T_5$ . Nous pouvons alors supposer sans perte de généralité que  $\Gamma_{T'_5}^+(1) = \{2\}$ , ce



FIG. 3.11 – La configuration  $H$  de la preuve du théorème 3.14(3).

qui implique que  $\Gamma_{T_5}^-(1) = \{3, 4, 5\}$ . Ceci implique successivement que  $f(\overrightarrow{vv_2}) = 2$ ,  $f(\overrightarrow{w_1w}) = 5$ ,  $f(\overrightarrow{ww_2}) = 3$ ,  $f(\overrightarrow{x_1x}) = 2$ ,  $f(\overrightarrow{xx_2}) = 4$ ,  $f(\overrightarrow{y_1y}) = 2$ ,  $f(\overrightarrow{v_1v}) = 1$  et  $f(\overrightarrow{uu_2}) = 3$ . Alors, la seule couleur disponible pour  $\overrightarrow{u_1u}$  et  $\overrightarrow{yy_2}$  est la couleur 5, ce qui est une contradiction.

La coloration  $f$  est donc une  $T_5$ -arc-coloration de  $G$ . (Notons que puisque le tournoi  $T_5$  est sommet-transitif, nous pouvons encore supposer sans perte de généralité que  $f(\overrightarrow{uv}) = 1$ ,  $f(\overrightarrow{vw}) = 2$ ,  $f(\overrightarrow{wx}) = 3$ ,  $f(\overrightarrow{xy}) = 4$  et  $f(\overrightarrow{yu}) = 5$ .)

Observons maintenant que nous pouvons poser soit  $f(\overrightarrow{uu_2}) = 1$ , soit  $f(\overrightarrow{uu_2}) = 2$ . Dans chacun des cas, la couleur de  $f(\overrightarrow{uu_2})$  oblige les couleurs de tous les arcs de  $G$  à l'exception de cinq arcs (voir la figure 3.10(b) pour le cas  $f(\overrightarrow{uu_2}) = 1$  et la figure 3.10(c) pour le cas  $f(\overrightarrow{uu_2}) = 2$ ).

Pour compléter la  $T_5$ -arc-coloration  $f$ , nous avons donc besoin d'un 3-chemin dans  $T_5$  reliant le sommet 1 au sommet 3 (si  $f(\overrightarrow{uu_2}) = 1$ ) ou reliant le sommet 3 au sommet 5 (si  $f(\overrightarrow{uu_2}) = 2$ ). De tels 3-chemins n'existent pas dans  $T_5$ , ce qui nous conduit à une contradiction.  $\square$

**Preuve du théorème 3.14(3).** D'après le théorème 2.1(2),  $\chi_o(\mathcal{O}_g) \leq 5$  pour  $g \geq 5$ , ce qui implique d'après le théorème 3.2 que  $\chi'_o(\mathcal{O}_g) \leq 5$  pour  $5 \leq g \leq 9$ .

Nous allons maintenant montrer que  $\chi_o(\mathcal{O}_g) \geq 5$  pour  $5 \leq g \leq 9$  en construisant un graphe planaire extérieur  $G$  de maille 9 tel que  $\chi'_o(G) = 5$ .

Considérons tout d'abord la configuration  $H$  faite d'une 9-chaîne alternée et de quatre 9-circuits arrangés comme sur la figure 3.11. Notons tout d'abord que le tournoi  $T_4$  (figure 3.7(a)) contient seulement deux 3-circuits, à savoir  $[1, 2, 4, 1]$  et  $[1, 3, 4, 1]$ . Ainsi, toute  $T_4$ -arc-coloration d'un 9-circuit est de la forme  $[1, x, 4, 1, x, 4, 1, x, 4, 1]$  avec  $x \in \{2, 3\}$ . Soit  $h$  une  $T_4$ -arc-coloration de  $H$  avec  $h(\overrightarrow{y_1y_2}) = 1$ . Nous avons alors nécessairement  $h(\overrightarrow{y_2z}) \in \{2, 3\}$  et, par l'observation précédente,  $h(\overrightarrow{z'y_3}) = 4$ , ce qui implique  $h(\overrightarrow{y_3y_2}) = h(\overrightarrow{y_3y_4}) = 1$ . En répétant cet argument pour les quatre 9-circuits de  $H$ , nous obtenons que  $h(\overrightarrow{y_9y_{10}}) = 1$ .

Considérons maintenant le graphe orienté  $G$  obtenu à partir du 10-circuit  $C_{10} = [x_0, x_1, \dots, x_9, x_0]$  en associant à tout arc de  $C_{10}$  une copie de  $H$  de telle sorte que le sommet  $y_1$  est identifié avec le sommet  $x_i$  et le sommet  $y_{10}$  est identifié avec le sommet  $x_{i-1}$  (les indices sont pris modulo 10) pour  $0 \leq i \leq 9$ . Le graphe  $G$  ainsi obtenu est clairement un graphe planaire extérieur de maille 9. Si  $T$  est un tournoi à quatre sommets tel que  $G$  admet une  $T$ -arc-coloration, alors  $T$  doit contenir un 4-circuit puisque  $G$  contient un 10-circuit (*i.e.* un circuit dont la longueur n'est pas multiple de trois). Par

conséquent,  $T \cong T_4$ .

Soit  $f$  une  $T_4$ -arc-coloration de  $G$ . La couleur 4 est clairement utilisée sur un des arcs du 10-circuit  $C_{10}$ , disons  $f(\overrightarrow{x_0x_1}) = 4$ . Considérons alors la copie de  $H$  collée à l'arc  $\overrightarrow{x_0x_1}$  : nous avons nécessairement  $f(\overrightarrow{x_1y_2}) = 1$  et donc  $f(\overrightarrow{y_9x_0}) = 1$  par la remarque précédente. Nous aboutissons à une contradiction.

Ainsi, le graphe  $G$  n'admet pas de  $T_4$ -arc-coloration et nous avons donc  $\chi'_o(G) = 5$ .  $\square$

**Preuve du théorème 3.14(4).** Nous montrons dans un premier temps que  $\chi'_o(\mathcal{O}_g) \leq 4$  pour tout  $g \geq 10$ . Notons qu'il est suffisant que considérer le cas  $g = 10$ . Plus précisément, nous prouvons que tout graphe planaire extérieur de maille au moins 10 admet une *bonne*  $T_4$ -arc-coloration (où  $T_4$  est le tournoi de la figure 3.7(a)).

Soit  $H$  un contre-exemple minimal (en terme d'inclusion comme sous-graphe) planaire extérieur de maille 10 n'admettant pas de bonne  $T_4$ -arc-coloration. D'après le lemme 3.15, par minimalité de  $H$ , ce dernier ne contient pas de 1-sommet. Nous montrons que  $H$  ne contient pas de face de taille  $l \geq 10$  avec  $l - 2$  2-sommets consécutifs.

Supposons maintenant que  $H$  contienne une face  $F$  de taille  $l \geq 10$  avec  $l - 2$  2-sommets consécutifs. Nous considérons deux cas :

1.  $l = 10$ .

Soit  $F = (u, v_1, v_2, \dots, v_8, w, u)$ . Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H \setminus \{v_2, \dots, v_7\}$  admet une bonne  $T_4$ -arc-coloration  $f$ . De plus, puisque  $\overrightarrow{uw} \in A(H)$  ou  $\overrightarrow{wu} \in A(H)$ , nous avons soit  $C_f^-(u) \cap C_f^+(w) \neq \emptyset$ , soit  $C_f^+(u) \cap C_f^-(w) \neq \emptyset$ . D'après la proposition 3.17,  $f$  peut-être étendue à  $H$ .

2.  $l > 10$ .

La face  $F$  contient un chaîne  $(u_1, u_2, \dots, u_9)$  de 2-sommets. Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H \setminus \{u_2, \dots, u_8\}$  admet une bonne  $T_4$ -arc-coloration  $f$ . Par la proposition 3.16,  $f$  peut être étendue à  $H$ .

Nous obtenons donc une contradiction grâce à la proposition 2.5.

Nous prouvons finalement que pour toute maille  $g \geq 3$ , il existe des graphes planaires extérieurs de maille  $g$  ayant un indice chromatique orienté au moins 4. Observons premièrement que toute arc-coloration orientée d'un  $p$ -circuit avec  $p \not\equiv 0 \pmod{3}$  doit utiliser au moins quatre couleurs. Ainsi, le graphe  $G_g$  obtenu à partir de deux circuits partageant un arc, le premier de taille  $g$ , l'autre de taille  $p$ ,  $p \equiv 1$  ou  $2 \pmod{3}$ ,  $p \geq g$ , possède la propriété désirée.

Ceci conclut la preuve.  $\square$

Nous venons de caractériser, pour tout entier  $g \geq 3$ , l'indice chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille  $g$ . De la même manière que nous nous sommes posé la question pour le nombre chromatique orienté (voir chapitre 2, § 2.2), il serait maintenant intéressant de se demander quel est le comportement de l'indice chromatique orienté des 2-arbres partiels (rappelons que la classe

des graphes planaires extérieurs est une sous-classe des 2-arbres partiels). Pour l'instant, la question reste ouverte.

## 3.5 Les graphes planaires

Dans la partie précédente, nous nous sommes intéressé à l'indice chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille donnée. Dans cette partie, nous considérons les graphes planaires. En particulier, nous donnons une borne supérieure ainsi qu'une borne inférieure de l'indice chromatique orienté dans le cas général. Dans le cas particulier des graphes planaires de maille au moins 46, nous donnons la valeur exacte de l'indice chromatique orienté.

Rappelons que  $\mathcal{P}$  désigne la classe des graphes planaires et que  $\mathcal{P}_g$  désigne la classe des graphes planaires de maille au moins  $g$ .

### 3.5.1 Résultats généraux

Rappelons que Raspaud et Sopena [RS94] ont montré que  $\chi_o(\mathcal{P}) \leq 80$  (voir corollaire 2.11). Cette borne supérieure est également valide pour l'indice chromatique orienté d'après le théorème 3.2 :  $\chi'_o(\mathcal{P}) \leq 80$ . Concernant la borne inférieure, Marshall [Mar06] a montré que  $\chi_o(\mathcal{P}) \geq 17$ .

Le théorème 3.9, ainsi que le théorème 1.7 de Borodin montrant que tout graphe planaire admet une 5-sommet-coloration acyclique, nous permettent d'obtenir une borne supérieure pour l'indice chromatique orienté des graphes planaires :

**Théorème 3.18.**  $\chi'_o(\mathcal{P}) \leq 38$ .

Nous nous sommes également intéressé à la borne inférieure de l'indice chromatique orienté. Nous obtenons la valeur suivante :

**Théorème 3.19.**  $\chi'_o(\mathcal{P}) \geq 10$ .

Nous avons tout d'abord besoin de quelques résultats préliminaires pour prouver ce théorème.

Rappelons que nous avons prouvé que le graphe planaire extérieur  $O$  de la figure 3.9 a un indice chromatique orienté 7 (voir la preuve du théorème 3.14(1)).

Soit  $H$  le graphe planaire obtenu à partir de deux copies du graphe  $O$ , à savoir  $O_1$  et  $O_2$ , un nouveau sommet  $x$  et en ajoutant tous les arcs reliant les sommets de  $O_1$  au sommet  $x$  et tous les arcs reliant le sommet  $x$  aux sommets de  $O_2$  (voir la figure 3.12). Dans la suite, le sommet  $x$  sera appelé le *sommet séparant de  $H$* . Nous notons  $A^-(H)$  (resp.  $A^+(H)$ ) l'ensemble des arcs entrants (resp. des arcs sortants) du sommet séparant de  $H$ .

**Lemme 3.20.** *Toute 9-arc-coloration orientée de  $H$  utilise sept couleurs pour colorier les arcs de  $A(O_1)$ , les sept mêmes couleurs pour colorier les arcs de  $A(O_2)$ , une huitième couleur pour colorier les arcs de  $A^-(H)$  et une neuvième couleur pour colorier les arcs de  $A^+(H)$ .*

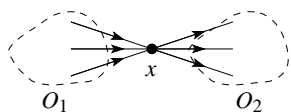


FIG. 3.12 – Le graphe planaire  $H$  du lemme 3.20.

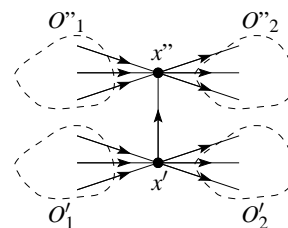


FIG. 3.13 – Le graphe planaire  $H^*$  du théorème 3.19.

**Preuve.** Supposons que nous utilisons plus de sept couleurs pour colorier les arcs de  $A(O_1)$  ; alors, il ne reste plus aucune couleur disponible pour colorier les arcs de  $A^+(H)$ . Nous devons par conséquent utiliser seulement sept couleurs, disons sans perte de généralité  $1, 2, \dots, 7$ , pour colorier les arcs de  $A(O_1)$ . La seule manière de colorier les arcs restants de  $H$  est alors de colorier les arcs de  $A^-(H)$  avec la couleur 8, les arcs de  $A^+(H)$  avec la couleur 9, et les arcs de  $A(O_2)$  avec les sept couleurs  $1, 2, \dots, 7$ .  $\square$

**Preuve du théorème 3.19.** Soit  $H^*$  le graphe obtenu en prenant deux copies du graphe  $H$ , à savoir  $H'$  et  $H''$ , et en ajoutant un arc reliant le sommet séparant de  $H'$  au sommet séparant de  $H''$  (voir la figure 3.13). Le sommet séparant  $H'$  (resp.  $H''$ ) est noté  $x'$  (resp.  $x''$ ).

Nous montrons que  $\chi'_o(H^*) \geq 10$ . Nous supposons que  $H^*$  admet une 9-arc-coloration orientée. D'après le lemme 3.20, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $A(O'_1)$  et  $A(O'_2)$  utilisent les couleurs  $1, 2, \dots, 7$ ,  $A^-(H')$  utilise la couleur 8 et  $A^+(H')$  utilise la couleur 9. La seule couleur disponible pour l'arc  $\overrightarrow{x'x''}$  est la couleur 9. Maintenant, les couleurs 8 et 9 sont clairement interdites pour  $A^+(H'')$  et, d'après le lemme 3.20, nous pouvons supposer sans perte de généralité que tous les arcs de  $A^+(H'')$  sont coloriés avec la couleur 1 ; donc  $A(O''_2)$  utilise les sept couleurs  $2, 3, \dots, 8$ . Notons que le graphe  $O$  ne contient ni source, ni puits. Par conséquent, il existe une couleur  $c \in \{2, 3, \dots, 6\}$  telle que deux arcs consécutifs dans  $O'_1$  sont respectivement coloriés avec  $c$  et 1. Maintenant, la couleur  $c$  est clairement utilisée par un des arcs de  $A(O''_2)$ , ce qui implique que  $H^*$  contient deux arcs consécutifs respectivement coloriés 1 et  $c$  : nous obtenons une contradiction. Par conséquent,  $\chi'_o(H^*) \geq 10$  et donc  $\chi'_o(\mathcal{P}) \geq 10$ .

Notons que nous ne pouvons pas obtenir une meilleure borne inférieure puisque  $\chi'_o(H^*) = 10$ . En effet, nous pouvons colorier  $A(O'_1)$ ,  $A(O'_2)$ ,  $A(O''_2)$  et  $A(O''_1)$  avec les couleurs  $1, 2, \dots, 7$ ,  $A^-(H')$  et  $A^-(H'')$  avec la couleur 8,  $A^+(H')$  et  $A^+(H'')$  avec la couleur 9, et  $\overrightarrow{x'x''}$  avec la couleur 10.  $\square$

De même que pour le nombre chromatique orienté, l'écart qui existe actuellement entre la borne supérieure et la borne inférieure de l'indice chromatique orienté des graphes planaires est relativement grand. Si nous voulons réduire cet écart, il semble qu'il soit plus simple "d'attaquer" la borne inférieure (*i.e.* construire un graphe planaire  $G$  tel que  $\chi'_o(G) > 10$ ).

### 3.5.2 Les graphes planaires de grande maille

Rappelons que Nešetřil, Raspaud et Sopena [NRS97] ont montré que pour tout entier  $g \geq 3$ ,  $\chi_o(\mathcal{P}_g) \geq 5$ .

Nous montrons que dans le cas de l'indice chromatique orienté, cette borne peut être ramenée à 4 à partir d'une maille donnée.

Rappelons également que  $T_4$  est le tournoi de la figure 3.7(a) et qu'une *bonne*  $T_4$ -arc-coloration  $f$  (définie dans § 3.4.1) d'un graphe orienté  $G$  est telle que :

- (i)  $\forall u \in V(G), C_f^+(u) \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$ ,
- (ii)  $\forall u \in V(G), C_f^-(u) \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$ .

**Théorème 3.21.**  $\chi'_o(\mathcal{P}_g) = 4$  pour tout  $g \geq 46$ .

**Preuve.** Nous allons montrer que tout graphe planaire de maille  $g \geq 46$  admet une *bonne*  $T_4$ -arc-coloration. Considérons un contre-exemple minimal  $H$  (en terme de nombre de sommets et nombre d'arcs, *i.e.*  $|V(G)| + |A(G)|$ ) à ce résultat. D'après le lemme 3.15, par minimalité de  $H$ , ce dernier ne contient pas de 1-sommet. Nous montrons que  $H$  ne contient pas de 10-chaîne constituée de 2-sommets.

Supposons maintenant que  $H$  contienne une 10-chaîne  $[u, v_1, v_2, \dots, v_9, w]$  constituée de 2-sommets ( $d(v_i) = 2$  pour tout  $i \in [1, 9]$ ) et soit  $H' = H \setminus \{v_2, v_3, \dots, v_8\}$ . Par minimalité de  $H$ ,  $H'$  admet une bonne  $T_4$ -arc-coloration  $f$ . La proposition 3.16 assure que  $f$  peut être étendue à une bonne  $T_4$ -arc-coloration de  $H$ .

Dans [NRS97], les auteurs ont montré que tout graphe planaire  $G$  de maille  $g \geq 5d + 1$  contient soit un 1-sommet, soit une  $(d + 1)$ -chaîne de 2-sommets. Nous obtenons donc une contradiction, ce qui permet de conclure la preuve.  $\square$

Nous pouvons construire, pour toute maille  $g \geq 3$ , des graphes planaires nécessitant quatre couleurs pour toute arc-coloration orientée (voir le théorème 3.14(4)). Nous avons alors tenter de déterminer la valeur de la maille à partir de laquelle tout graphe planaire admet une 4-arc-coloration orientée : nous avons montré que tout graphe planaire de maille au moins 46 admet une 4-arc-coloration orientée. Cependant, cette valeur n'est certainement pas optimale et il serait donc intéressant de la réduire.

## 3.6 Les graphes de degré borné

Dans cette partie, nous exhibons une borne supérieure de l'indice chromatique orienté d'un graphe orienté  $G$  en fonction de son degré maximum  $\Delta(G)$ . Dans un premier temps, nous donnons une borne de l'indice chromatique orienté dans le cas général, avant de nous intéresser au cas particulier des graphes de degré au plus trois.

Rappelons que  $\mathcal{D}_k$  désigne la classe des graphes de degré au plus  $k$ .

### 3.6.1 Bornes générales

Kostochka, Sopena et Zhu [KSZ97] ont prouvé que tout graphe orienté  $G$  ayant un degré maximum  $\Delta$  a un nombre chromatique orienté d'au plus  $2\Delta^2 2^\Delta$  en utilisant des arguments probabilistes. Par conséquent, pour un tel graphe  $G$ , nous avons  $\chi'_o(G) \leq 2\Delta^2 2^\Delta$  d'après le théorème 3.2. Dans [AMR91], Alon, McDiarmid et Reed ont prouvé que tout graphe ayant un degré maximum  $\Delta$  a un nombre chromatique acyclique d'au plus  $O(\Delta^{4/3})$ . En utilisant le théorème 3.9, nous obtenons donc la meilleure borne supérieure de  $O(\Delta^{8/3})$  pour l'indice chromatique orienté des graphes orientés de degré maximum  $\Delta$ .

Nous améliorons cette dernière borne et montrons le résultat suivant :

**Théorème 3.22.**  $\chi'_o(\mathcal{D}_\Delta) \leq 2 \left( \left\lfloor \frac{\Delta^2}{2} \right\rfloor + \Delta \right)$ .

**Preuve.** Soient  $G$  un graphe orienté et  $G^*$  le graphe non orienté défini par  $V(G^*) = V(G)$  et  $uv \in E(G^*)$  si et seulement si  $\overrightarrow{uv} \in A(G)$ , ou si  $\overrightarrow{vu} \in A(G)$ , ou encore si il existe un sommet  $t$  tel que  $\overrightarrow{ut}, \overrightarrow{tv} \in A(G)$ . Dans [GSR05], Gonçalves, Shalu et Raspaud ont prouvé qu'un tel graphe  $G^*$  est  $\left( \left\lfloor \frac{\Delta^2}{2} \right\rfloor + \Delta \right)$ -dégénéré. Soit  $h$  une sommet-coloration propre utilisant au plus  $\left\lfloor \frac{\Delta^2}{2} \right\rfloor + \Delta + 1$  couleurs de  $\{0, \dots, \left\lfloor \frac{\Delta^2}{2} \right\rfloor + \Delta\}$  d'après le théorème de Halin.

Maintenant, soit  $f : A(G) \rightarrow \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{\Delta^2}{2} \right\rfloor + \Delta\right\} \times \{0, 1\}$  définie par  $f(\overrightarrow{uv}) = (h(v), 0)$  si  $h(u) < h(v)$  et  $f(\overrightarrow{uv}) = (h(u), 1)$  si  $h(u) > h(v)$ . Nous montrons que  $f$  est une arc-coloration orientée de  $G$ .

Supposons premièrement que  $\overrightarrow{uv}$  et  $\overrightarrow{vw}$  sont deux arcs consécutifs de  $G$  tels que  $f(\overrightarrow{uv}) = f(\overrightarrow{vw}) = (\alpha, i)$ . Si  $i = 0$  (resp.  $i = 1$ ) alors  $h(v) = h(w)$  (resp.  $h(u) = h(v)$ ), ce qui nous conduit à une contradiction puisque  $vw \in E(G^*)$  (resp.  $uv \in E(G^*)$ ).

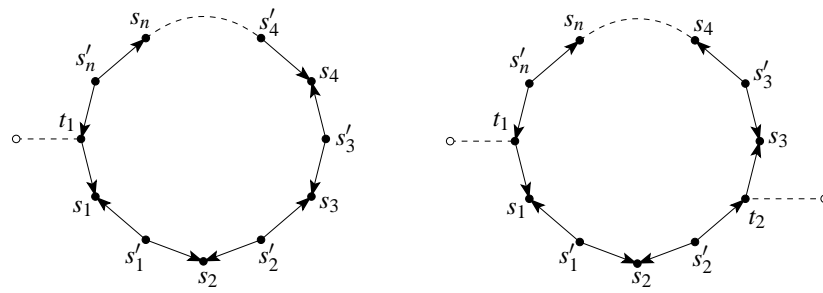
Supposons maintenant qu'il existe quatre arcs  $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vw}, \overrightarrow{xy}$ , et  $\overrightarrow{yz}$  de  $G$  tels que  $f(\overrightarrow{uv}) = f(\overrightarrow{yz}) = (\alpha, i)$  et  $f(\overrightarrow{vw}) = f(\overrightarrow{xy}) = (\beta, j)$ . Si  $i = j = 0$ , nous obtenons  $\alpha = h(v) = h(z)$  et  $h(v) < h(w)$  d'une part,  $\beta = h(y) = h(w)$  et  $h(w) = h(y) < h(z) = h(v)$  d'autre part, ce qui est une contradiction. Le cas  $i = j = 1$  nous conduit de façon similaire à une contradiction. Supposons maintenant que  $i \neq j$  et sans perte de généralité que  $i = 0$  et  $j = 1$ . Alors nous avons  $\alpha = h(v) = h(z)$  d'une part et  $\beta = h(v) = h(x)$  d'autre part. Donc,  $h(x) = h(z)$ , ce qui est une contradiction puisque  $xz \in E(G^*)$ .

Par conséquent,  $f$  est une arc-coloration orientée de  $G$  qui utilise au plus  $2 \left( \left\lfloor \frac{\Delta^2}{2} \right\rfloor + \Delta \right)$  couleurs.  $\square$

Concernant la borne inférieure, nous pouvons construire une famille infinie de graphes orientés avec un degré maximum  $\Delta$  et un indice chromatique orienté  $2\Delta - 1$ .

**Théorème 3.23.**  $\chi'_o(\mathcal{D}_\Delta) \geq 2\Delta - 1$ .

**Preuve.** Soit  $n = 2\Delta - 1$  et considérons le graphe orienté biparti  $B_{n,n}$  défini par  $V(B_{n,n}) = \{x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1}\}$ ,  $\overrightarrow{x_i y_i} \in A(B_{n,n})$  pour tout  $0 \leq i < n$  et  $\overrightarrow{y_i x_k} \in A(B_{n,n})$  pour tout  $0 \leq i < n$ ,  $1 \leq j < \Delta$  et



(a) Un cycle spécial contenant un seul sommet transitif.

(b) Un cycle spécial contenant deux sommets transitifs.

FIG. 3.14 – Exemples de cycles spéciaux.

$k = i + j \pmod{n}$ . Le graphe  $B_{n,n}$  est  $\Delta$ -régulier et toute paire d'arcs de  $\{\overrightarrow{x_i y_i}, 0 \leq i < n\}$  appartient à un 3-chemin : les arcs de  $\{\overrightarrow{x_i y_i}, 0 \leq i < n\}$  nécessitent donc des couleurs distinctes.  $\square$

L'écart qui existe actuellement entre la borne inférieure et la borne supérieure est relativement grand et semble difficile à réduire.

### 3.6.2 Les graphes de degré au plus trois

Dans [SV96], Sopena et Vignal ont montré que tout graphe de degré au plus trois admet une 11-sommet-coloration orientée et donc, d'après le théorème 3.2, une 11-arc-coloration orientée. Nous pouvons également obtenir la même borne grâce au théorème 3.22. Nous améliorons cette borne.

**Théorème 3.24.**  $\chi'_o(\mathcal{D}_3) \leq 7$ .

Nous pouvons également noter que Sopena [Sop97] a conjecturé que tout graphe connexe de degré au plus trois admet une 7-sommet coloration orientée.

Pour prouver le théorème 3.24, nous avons besoin de nouvelles définitions, et de quelques résultats préliminaires.

Soit  $G$  un graphe orienté de degré au plus trois et soit  $C$  un cycle de  $G$  ( $C$  est un sous-graphe de  $G$ ). Un sommet  $u$  de  $C$  est un *sommet transitif de  $C$*  si  $d_C^+(u) = d_C^-(u) = 1$  (par conséquent  $2 \leq d_G(u) \leq 3$ ); en d'autres termes, un sommet  $u$  de  $C$  est un sommet transitif de  $C$  si les deux arcs de  $C$  incidents à  $u$  sont consécutifs.

Un cycle  $C$  de  $G$  est dit *spécial* si et seulement si :

- (i) chaque sommet non transitifs de  $C$  est un 2-source ou un 2-puits dans  $G$  ;
- (ii)  $C$  contient exactement un sommet transitif, ou exactement deux sommets transitifs, et dans ce dernier cas, les deux sommets transitifs possèdent la même orientation sur le cercle  $C$ .

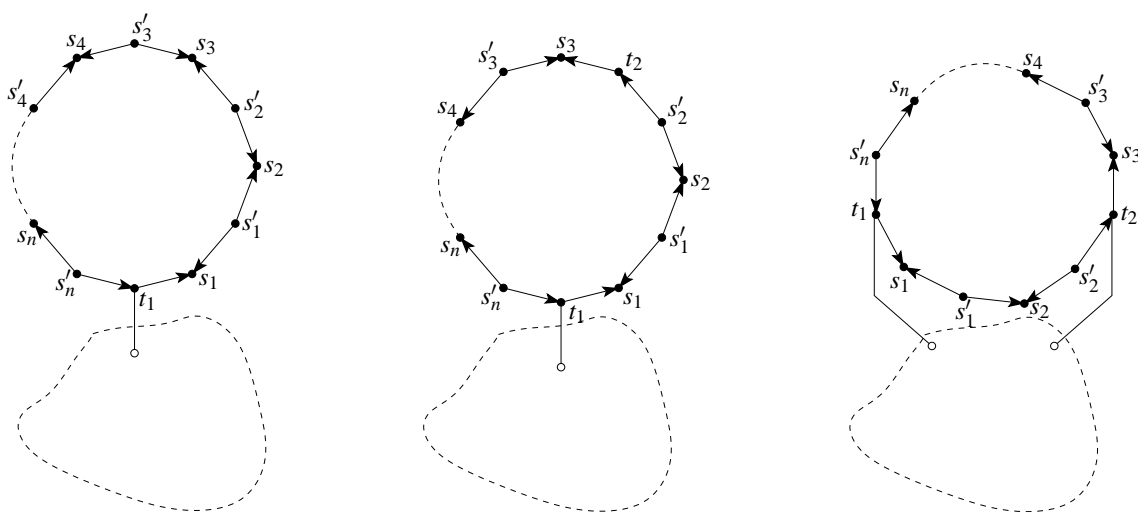


FIG. 3.15 – Exemples de graphes possédant un cycle spécial.

La figure 3.14 nous donne deux exemples de cycles spéciaux ; le premier possède exactement un sommet transitif, tandis que le deuxième possède deux sommets transitifs. Dans le deuxième, comme nous l'avons précisé ci-dessus, les deux sommets transitifs ont la même orientation autour du cycle. Les sommets  $s_i$ ,  $s'_j$  et  $t_k$  représentent respectivement les sommets puits, les sommets sources, et les sommets transitifs des deux cycles spéciaux. Notons également que les sommets transitifs sont de degré deux ou trois, et par conséquent un arc en pointillés sur la figure 3.14 représente un arc possiblement présent.

**Remarque.** Chaque 2-source (resp. 2-puits) d'un cycle spécial  $C$  est nécessairement adjacent à un 2-puits (resp. 2-source). Ceci découle directement du fait que  $C$  ne contient pas deux sommets transitifs orientés dans des directions opposées.

Dans la suite de cette partie, nous noterons  $SP_G(C)$  l'ensemble des 2-sources et 2-puits du cycle  $C$  dans  $G$ .

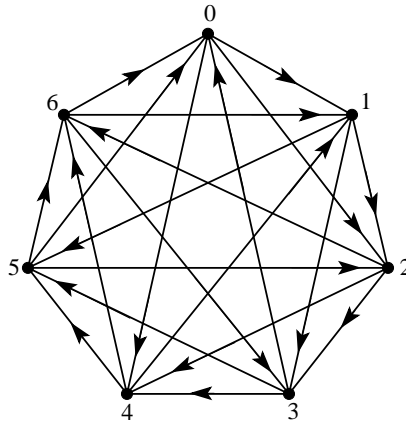
**Remarque 3.25.** Nous pouvons noter qu'un cycle spécial ne peut être connecté au reste du graphe que via ses sommets transitifs (voir la figure 3.15 pour un exemple).

La remarque suivante sera utilisée fréquemment dans la suite :

**Remarque 3.26.** Soit  $G$  un graphe orienté sans cycles spéciaux. Soit  $A \subseteq A(G)$ . Si le graphe  $G' = G \setminus A$  contient un cycle spécial  $C$ , alors au moins un des sommets incidents à  $A$  est un 2-source ou un 2-puits dans  $G'$  et appartient à  $V(C)$ , puisque dans le cas contraire  $C$  aurait été un cycle spécial dans  $G$ .

Soit  $QR_7$  le tournoi de la figure 3.16 que nous avons déjà rencontré dans le chapitre précédent, § 2.4.3. Une  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  d'un graphe orienté de degré au plus trois  $G$  est *bonne* si :



FIG. 3.16 – La graphe  $QR_7$ .

(i) pour tout 2-source  $u$ ,  $|C_f^+(u)| = 1$  ;

(ii) pour tout 2-puits  $v$ ,  $|C_f^-(v)| = 1$ .

Il est alors clair qu'une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  d'un graphe orienté de degré au plus trois  $G$  sera telle que pour tout 2-sommet  $v$  de  $G$ ,  $|C_f^+(v)| \leq 1$  et  $|C_f^-(v)| \leq 1$ .

Nous utiliserons fréquemment la proposition suivante :

**Proposition 3.27.** *Soit  $G$  un graphe orienté admettant une bonne  $QR_7$ -arc-coloration. Alors  $G^{-1}$  (le graphe inverse de  $G$ ) admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration.*

**Preuve.** Soit  $f$  une bonne  $QR_7$ -arc-coloration de  $G$ . Considérons la coloration  $f' : V(QR_7) \rightarrow A(G^{-1})$  définie par  $f'(\overrightarrow{uv}) = 6 - f(\overrightarrow{vu})$ .

Il est facile de voir que pour tout arc  $\overrightarrow{uv} \in A(QR_7)$ , nous avons  $\overrightarrow{xy} \in A(QR_7)$  pour  $x = 6 - v$  et  $y = 6 - u$ . De plus, les deux arcs incidents à un 2-source (ou un 2-puits) prendront la même couleur par  $f'$  puisqu'ils prennent la même par  $f$ .  $\square$

Nous prouvons dans un premier temps le théorème suivant :

**Théorème 3.28.** *Tout graphe orienté de degré au plus trois ne contenant pas de cycle spécial admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration.*

Nous définissons un ordre partiel  $\prec$  sur l'ensemble des graphes. Soit  $n_2(G)$  le nombre de  $\geq 2$ -sommets de  $G$ . Pour toute paire de graphes  $G_1$  et  $G_2$ ,  $G_1 \prec G_2$  si et seulement si au moins une des conditions suivantes est vérifiée :

(i)  $G_1$  est un sous-graphe propre de  $G_2$  ;

(ii)  $n_2(G_1) < n_2(G_2)$ .

Nous pouvons noter que cet ordre partiel est bien défini, car si  $G_1$  est un sous-graphe propre de  $G_2$ , alors  $n_2(G_1) \leq n_2(G_2)$ . Cet ordre partiel  $\prec$  est donc une extension linéaire partielle de l'ordre défini par la relation "être sous sous-graphe".

Dans le chapitre précédent, § 2.4.3, nous avons défini les propriétés  $P_{n,k}$  ; nous redonnons ici leurs définitions.

Un *vecteur d'orientation* de taille  $n$  est un  $n$ -uplet  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$ .

Soit  $G$  un graphe orienté et soit  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  une séquence de sommets deux à deux distincts de  $G$ . Pour un vecteur d'orientation  $\alpha$ , un sommet  $v$  de  $G$  est appelé  $\alpha$ -successeur de  $U$  si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\overrightarrow{vu_i}$  est un arc de  $G$  si  $\alpha_i = 0$ ,  $\overrightarrow{u_i v}$  est un arc de  $G$  sinon.

Nous disons qu'un graphe orienté  $G$  satisfait la propriété  $P_{n,k}$  si pour toute séquence  $U$  à  $n$  sommets deux à deux distincts de  $G$  et tout vecteur d'orientation  $\alpha$  de taille  $n$ , il existe au moins  $k$  sommets dans  $G$  étant des  $\alpha$ -successeurs de  $U$ .

D'après [BKN<sup>+</sup>99], le tournoi  $QR_7$  possède les propriétés  $P_{1,3}$  et  $P_{2,1}$ . Ces deux propriétés vont être fréquemment utilisées dans les preuves qui suivent.

### 3.6.2.1 Preuve du théorème 3.28

Jusqu'à la fin de cette sous-section, nous considérons un contre-exemple du théorème 3.28, noté  $H$ , qui est minimal suivant l'ordre  $\prec$  précédemment défini.

Nous allons montrer grâce aux lemmes qui suivent que le contre-exemple minimal  $H$  ne contient pas certaines configurations. Dans toutes les preuves qui suivent, nous procédons de manière similaire. Nous supposons que  $H$  contient une configuration donnée, puis nous considérons une réduction  $H'$  de  $H$  ne contenant pas de cycle spécial telle que  $H' \prec H$ . Par minimalité de  $H$ , il existe une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  de  $H'$ . Cette coloration  $f$  est une bonne  $QR_7$ -arc-coloration partielle de  $H$  (i.e. une arc-coloration d'un sous-ensemble  $S$  d'arcs de  $A(H)$ ); nous montrons alors de quelle manière il est possible d'étendre  $f$  à une bonne  $QR_7$ -arc-coloration de  $H$ . Ceci permet de montrer que  $H$  ne contient pas la configuration considérée.

Notons que grâce à la proposition 3.27, lorsque nous considérerons une bonne  $QR_7$ -arc-coloration d'un graphe orienté  $G$ , nous pourrons supposer que l'orientation d'un arc est fixée.

**Lemme 3.29.** *Le graphe  $H$  est connexe.*

**Preuve.** Supposons que  $H = H_1 \uplus H_2$  (union disjointe). Nous avons  $H_1 \prec H$  et  $H_2 \prec H$ . Les graphes  $H_1$  et  $H_2$  ne contiennent pas de cycle spécial et donc, par minimalité de  $H$ ,  $H_1$  et  $H_2$  admettent respectivement une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f_1$  et  $f_2$  qui peuvent facilement être étendues à une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f = f_1 \cup f_2$  de  $H$ .  $\square$

**Lemme 3.30.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 3-source, ni de 3-puits.*

**Preuve.** Par la proposition 3.27, il nous suffit de considérer le cas du 3-source. Soient  $u$  un 3-source de  $H$  et  $H'$  le graphe obtenu à partir de  $H$  en éclatant  $u$  en trois 1-sommets  $u_1, u_2, u_3$ . Nous avons  $H' \prec H$  puisque  $n_2(H') = n_2(H) - 1$ . Toute bonne  $QR_7$ -arc-coloration de  $H'$  est clairement une bonne  $QR_7$ -arc-coloration de  $H$ .  $\square$

**Lemme 3.31.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 1-sommet.*

**Preuve.** Soit  $u_1$  un 1-sommet de  $H$ ,  $v$  son voisin et  $\Gamma_H(v) = \{u_i, 1 \leq i \leq d_H(v)\}$ . Par la proposition 3.27, nous pouvons supposer que  $\overrightarrow{u_1 v} \in A(H)$ . Nous devons alors considérer trois sous-cas.

1.  $d_H(v) = 1$ .

Par le lemme 3.29,  $H = \overrightarrow{u_1 v}$  et évidemment,  $H$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration.

2.  $d_H(v) = 2$ .

Soit  $H' = H \setminus u_1$ ; nous avons  $H' \prec H$  et  $H'$  ne contient pas de cycle spécial d'après la remarque 3.26. Par minimalité de  $H$ ,  $H'$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  qui peut aisément s'étendre à  $H$ : si  $v$  est un 2-puits, nous fixons  $f(\overrightarrow{u_1 v}) = f(\overrightarrow{u_2 v})$ ; sinon, nous avons trois couleurs disponibles pour  $f(\overrightarrow{u_1 v})$  d'après la propriété  $P_{1,3}$ .

3.  $d_H(v) = 3$ .

Soit  $H' = H \setminus u_1$ ; nous avons  $H' \prec H$ .

Si  $H'$  ne contient pas de cycle spécial alors, par minimalité de  $H$ ,  $H'$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$ , et donc  $|C_f^+(v)| \leq 1$ . La coloration  $f$  peut alors être étendue à  $H$  puisque nous avons trois couleurs disponibles pour colorier  $\overrightarrow{u_1 v}$  d'après la propriété  $P_{1,3}$ .

Si  $H'$  contient un cycle spécial  $C$ ,  $v \in C$  et  $v$  est un 2-source de  $H'$  d'après la remarque 3.26 et le lemme 3.30. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $u_2$  est un 2-puits par la remarque 3.6.2. Soit  $\Gamma_H(u_2) = \{v, x\}$  et  $H'' = H \setminus \{\overrightarrow{vu_2}, \overrightarrow{u_1 v}\}$ . Nous avons  $H'' \prec H$  et  $H''$  ne contient pas de cycle spécial d'après la remarque 3.26. Par minimalité de  $H$ ,  $H''$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  qui peut être étendue à  $H$  comme suit: nous posons  $f(\overrightarrow{vu_2}) = f(\overrightarrow{xu_2})$ , et nous avons au moins une couleur disponible pour  $f(\overrightarrow{u_1 v})$  d'après la propriété  $P_{2,1}$ .

□

Rappelons qu'un *isthme* dans un graphe  $G$  est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes de  $G$ .

**Lemme 3.32.** *Le graphe  $H$  ne contient pas d'isthme.*

**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne un isthme  $uv$ . Soit  $H \setminus uv = H_1 \uplus H_2$ . Pour  $i = 1, 2$ , considérons  $H'_i = H_i + uv$ . D'après le lemme 3.31,  $uv$  n'est pas un arc pendant dans  $H$ . De plus,  $H'_i \prec H$  pour  $i = 1, 2$ . Clairement, les graphes  $H'_1$  et  $H'_2$  ne contiennent pas de cycle spécial, et par minimalité de  $H$ , admettent une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f_1$  et  $f_2$ , respectivement. Par permutation cyclique des couleurs de  $f_2$  si nécessaire, nous pouvons supposer que  $f_1(uv) = f_2(uv)$ . L'application  $f = f_1 \cup f_2$  est alors une bonne  $QR_7$ -arc-coloration de  $H$ . □

**Lemme 3.33.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 2-puits adjacent à un 2-source.*

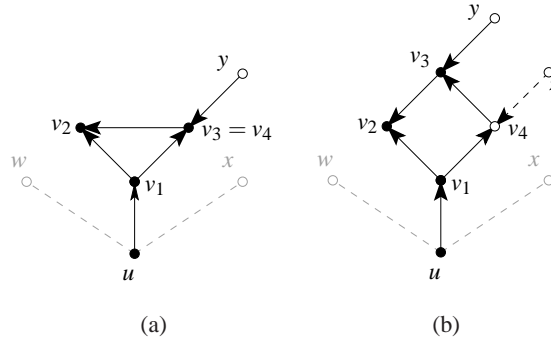


FIG. 3.17 – Configurations du lemme 3.35.

**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne un 2-puits  $v$  adjacent à un 2-source  $w$ . Soit  $\Gamma(v) = \{u, w\}$  et  $\Gamma(w) = \{v, x\}$ . Puisque  $H$  ne contient pas de cycle spécial,  $u$  et  $x$  sont deux sommets distincts et  $\overrightarrow{xu} \notin A(H)$ .

Soit  $H'$  le graphe obtenu à partir de  $H \setminus \{v, w\}$  en ajoutant l'arc  $\overrightarrow{ux}$  (s'il n'est pas déjà présent dans  $H$ ). Nous avons  $H' \prec H$  car  $n_2(H') \leq n_2(H) - 2$ . Puisque les sommets  $u$  et  $x$  ne sont ni des 3-sources, ni des 3-puits dans  $H$  d'après le lemme 3.30, ils ne sont ni des 2-sources, ni des 2-puits  $H'$  et par conséquent, d'après la remarque 3.26,  $H'$  ne contient pas de cycle spécial.

Alors, par minimalité de  $H$ ,  $H'$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f'$  qui peut être étendue à  $H$  en posant  $f(\overrightarrow{uv}) = f(\overrightarrow{wv}) = f(\overrightarrow{wx}) = f(\overrightarrow{ux})$ .  $\square$

**Lemme 3.34.** Chaque 2-source (resp. 2-puits) de  $H$  est adjacent à un sommet  $v$  tel que  $d^+(v) = 2$  (resp.  $d^-(v) = 2$ ).

**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne un 2-source  $u$  adjacent à deux sommets  $v$  et  $w$  tels que  $d^+(v) \neq 2$  et  $d^+(w) \neq 2$  (d'après la proposition 3.27, il est suffisant de considérer ce cas). Soit  $H' = H \setminus u$ ; par hypothèse et d'après les lemmes 3.30 et 3.33, les sommets  $v$  et  $w$  sont tels que  $d_{H'}^+(v) = d_{H'}^-(v) = d_{H'}^+(w) = d_{H'}^-(w) = 1$ . Par conséquent, le graphe  $H'$  ne contient pas de cycle spécial d'après la remarque 3.26. Par minimalité de  $H$ ,  $H'$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  qui peut être étendue à  $H$  de telle sorte que  $f(\overrightarrow{uv_1}) = f(\overrightarrow{uv_2})$  grâce à la propriété  $P_{2,1}$ .  $\square$

Rappelons que l'on note  $SP_G(C)$  l'ensemble des 2-sources et des 2-puits du cycle  $C$  de  $G$ .

**Lemme 3.35.** Soit  $u$  un sommet de  $H$  et  $H' = H \setminus u$ . Alors,  $H'$  ne contient pas de cycle spécial  $C$  avec  $|\Gamma_H(u) \cap SP_{H'}(C)| = 1$ .

**Preuve.** Soit  $v_1 \in \Gamma(u)$  et sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $H' = H \setminus u$  contient un cycle spécial  $C$  tel que  $\Gamma_H(u) \cap SP_{H'}(C) = \{v_1\}$ ; d'après la remarque 3.26,  $v_1$  est un 2-source ou un 2-puits dans  $H'$  et d'après la proposition 3.27 nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $v_1$  est un 2-source.

D'après la remarque 3.6.2,  $v_1$  est adjacent à un 2-puits  $v_2$ . D'après le lemme 3.33, la seule paire de 2-source et 2-puits adjacents dans  $H'$  est  $v_1, v_2$ . Par conséquent, nous avons  $3 \leq |C| \leq 4$ . Soit  $V(C) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  et  $v_3 = v_4$  si  $|C| = 3$ . De plus,  $v_3$  et  $v_4$  sont nécessairement deux sommets transitifs de  $C$ . Enfin, nous avons  $\overrightarrow{yv_3} \in A(H)$  d'après le lemme 3.34 et  $\overrightarrow{uv_1} \in A(H)$  par le lemme 3.30. Alors, seulement deux configurations sont possibles, et elles sont dessinées sur la figure 3.17.

- Si  $|C| = 3$  (voir la figure 3.17(a)), considérons  $H'_1 = H \setminus \overrightarrow{v_1v_2}$ . Ce graphe ne contient pas de cycle spécial d'après la remarque 3.26 et nous avons  $H'_1 \prec H$ . Par minimalité de  $H$ ,  $H'_1$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  qui peut être étendue à  $H$  : nous effaçons tout d'abord la couleur de l'arc  $\overrightarrow{v_1v_3}$  ; nous pouvons alors poser  $f(\overrightarrow{v_1v_2}) = f(\overrightarrow{v_3v_2})$  grâce à la propriété  $P_{2,1}$  et donc nous avons une couleur disponible pour  $f(\overrightarrow{v_1v_3})$  d'après le propriété  $P_{2,1}$  puisque  $f(\overrightarrow{uv_1}) \neq f(\overrightarrow{v_3v_2})$ .
- Si  $|C| = 4$  (voir la figure 3.17(b)), considérons le graphe  $H'_2 = H \setminus v_2$ . Nous avons  $H'_2 \prec H$ .
  - Si  $H'_2$  ne contient pas de cycle spécial, par minimalité de  $H$ ,  $H'_2$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  qui peut être étendue à  $H$  de telle sorte que  $f(\overrightarrow{v_3v_2}) = f(\overrightarrow{v_1v_2})$  grâce à la propriété  $P_{2,1}$  puisque  $f(\overrightarrow{v_4v_3}) = f(\overrightarrow{yv_3})$ .
  - Supposons maintenant que  $H'_2$  contienne un cycle spécial  $C'$ . D'après la remarque 3.26,  $v_3$  appartient à  $C'$  et d'après la remarque 3.6.2,  $y$  est un 2-puits. D'après la remarque 3.33, la seule paire de 2-source et 2-puits adjacents dans  $H'$  est  $v_3, y$ , et par conséquent  $C'$  est un cycle spécial de longueur 3 ou 4. Supposons premièrement que  $\{u, v_1, v_4, v_3, y\} \subseteq V(C')$  ; nous avons alors  $u = y$ , ce qui est une contradiction puisque par hypothèse  $\Gamma_H(u) \cap SP_H(C) = \{v_1\} \neq \{v_1, v_3\}$ .

Par conséquent,  $V(C') = \{y, v_3, v_4, z\}$ , et donc  $\overrightarrow{zv_4} \in A(H)$ . Si  $|C'| = 3$ , nous avons  $y = z$  et dans ce cas, le graphe  $H$  contient un isthme  $\overrightarrow{uv_1}$ , ce qui est interdit d'après le lemme 3.32. Par conséquent, nous avons  $|C'| = 4$  et  $z$  est un sommet transitif de  $C'$ .

Considérons dans ce cas le graphe  $H'_3 = H \setminus v_4$ . Ce graphe ne contient pas de cycle spécial puisque les sommets  $v_1$  et  $v_3$  sont deux 2-sommets transitifs orientés dans des directions opposées. Nous avons  $H'_3 \prec H$  et par conséquent, par minimalité de  $H$ , il existe une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  de  $H'_3$  telle que  $C_f^-(v_1) = \{c_1\}$ ,  $C_f^-(v_2) = \{c_2\}$  et  $C_f^+(y) = C_f^-(z) = \{c_3\}$ . L'application  $f$  peut alors être étendue à  $H$  comme suit : nous posons  $f(\overrightarrow{v_4v_3}) = c_4 \notin \{c_1, c_3\}$  grâce à la propriété  $P_{1,3}$ . Alors, d'après la propriété  $P_{2,1}$ , nous avons une couleur disponible pour  $f(\overrightarrow{v_1v_4})$  puisque  $c_1 \neq c_4$  et une couleur disponible pour  $f(\overrightarrow{zv_4})$  puis  $c_3 \neq c_4$ .  $\square$

**Lemme 3.36.** *Le graphe  $H$  ne contient pas deux 2-sommets adjacents.*

**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne deux 2-sommets adjacents  $v$  et  $w$ . Soit  $\Gamma(v) = \{u, w\}$ ,  $\Gamma(w) = \{v, x\}$  et  $H' = H \setminus v$ . D'après la remarque 3.26 et le lemme 3.35,  $H$  ne contient pas de cycle spécial. Nous avons  $H' \prec H$  et par minimalité de  $H$ ,  $H'$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$ .

Nous allons considérer deux cas suivant l'orientation des arcs incidents à  $v$  et  $w$  (d'après la proposition 3.27, nous pouvons supposer que  $\overrightarrow{uv} \in A(H)$ ).

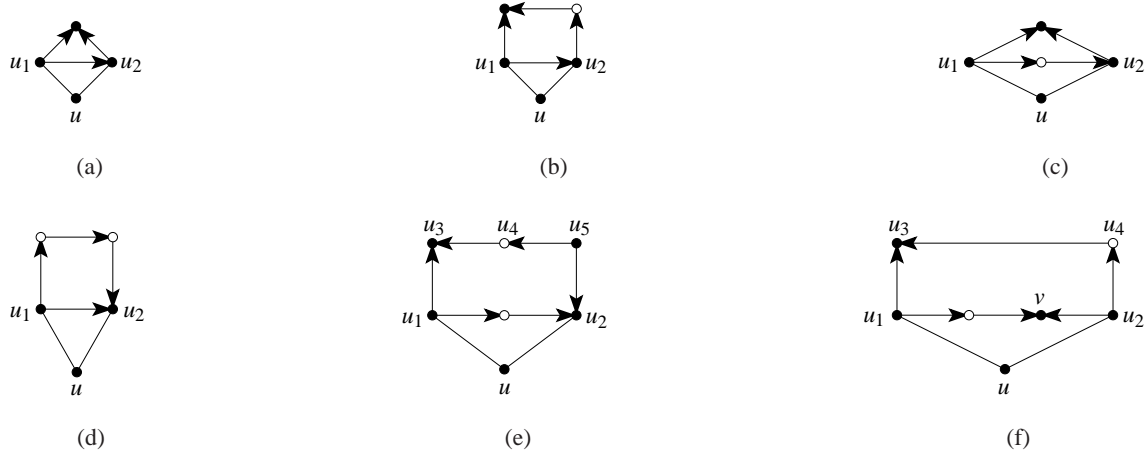


FIG. 3.18 – Configurations du lemme 3.37.

1.  $v$  est un 2-puits et  $w$  est un sommet transitif.

D'après le lemme 3.33,  $u$  n'est pas un 2-source de  $H$ . Nous avons  $|C_f^-(u)| \leq 1$  et donc, nous pouvons poser  $f(\overrightarrow{uv}) = f(\overrightarrow{vw})$  grâce à la propriété  $P_{2,1}$ .

2.  $v$  et  $w$  sont deux sommets transitifs.

Grâce à ce que nous venons de prouver dans le précédent cas, le sommet  $u$  n'est pas un 2-source. Nous avons  $|C_f^-(u)| \leq 1$ . Grâce à la propriété  $P_{1,3}$ , nous pouvons poser  $f(\overrightarrow{uv}) \neq f(\overrightarrow{wx})$  et finalement, nous avons une couleur disponible pour  $f(\overrightarrow{vw})$  d'après la propriété  $P_{2,1}$  puisque  $f(\overrightarrow{uv}) \neq f(\overrightarrow{wx})$ .

□

**Lemme 3.37.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 2-sommet.*

**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne un 2-sommet  $u$  et soit  $\Gamma(u) = \{u_1, u_2\}$ . Les sommets  $u_1$  et  $u_2$  sont tous deux des 3-sommets d'après le lemme 3.36. D'après la proposition 3.27, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\overrightarrow{uu_1} \in A(H)$ . Soit  $H'_1 = H \setminus u$ ; nous avons  $H'_1 \prec H$ .

Si  $H'_1$  ne contient pas de cycle spécial, alors par minimalité de  $H$ ,  $H'_1$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  qui peut être étendue à  $H$  comme suit. Si  $u$  est un 2-source, nous pouvons poser  $f(\overrightarrow{uu_1}) = f(\overrightarrow{uu_2})$  grâce à la propriété  $P_{2,1}$  puisque  $|C_f^+(u_1)| \leq 1$  et  $|C_f^+(u_2)| \leq 1$ . Si  $u$  est un sommet transitif, nous pouvons poser  $f(\overrightarrow{uu_1}) \notin C_f^-(u_2)$  grâce à la propriété  $P_{1,3}$  et nous avons alors une couleur disponible pour  $f(\overrightarrow{u_2u})$  d'après la propriété  $P_{2,1}$ .

Supposons maintenant que  $H'_1$  contienne un cycle spécial  $C$ . D'après le lemme 3.35,  $u_1$  et  $u_2$  appartiennent à  $C$  et au moins l'un d'eux est un 2-source ou un 2-puits.

Supposons dans un premier temps que  $u_1$  est un 2-sommet de  $H'_1$  et  $u_2$  n'est ni un 2-source, ni un 2-puits de  $H'_1$ . Alors, puisque  $H$  ne contient pas deux 2-sommets adjacents d'après le lemme 3.36,

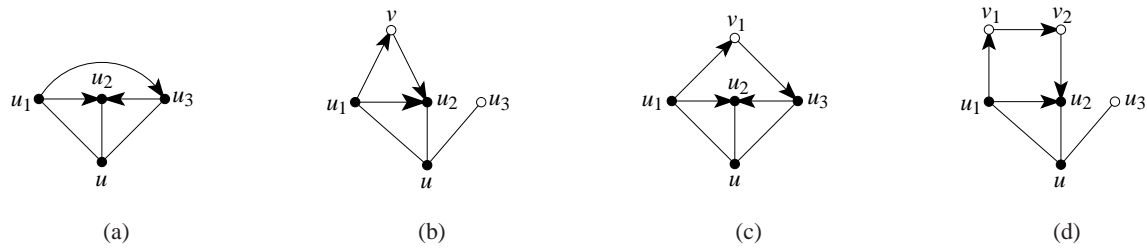


FIG. 3.19 – Configurations de la preuve du théorème 3.28.

nous avons seulement trois configurations possibles, qui sont dessinées sur les figures 3.18(a), 3.18(b) et 3.18(c). Nous utilisons les conventions de dessins suivantes : un sommet noir est un sommet dont tous les voisins sont présents sur le dessin, alors qu'un sommet blanc est un sommet dont les voisins ne sont pas nécessairement présents sur le dessin.

Clairement, la configuration de la figure 3.18(a) admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration. Le sommet blanc de la configuration de la figure 3.18(b) est un 3-sommet d'après le lemme 3.36, mais dans ce cas, le graphe  $H$  contient un isthme, ce qui est interdit d'après le lemme 3.32. Le sommet blanc de la configuration de la figure 3.18(c) est un 2-sommet d'après le lemme 3.32 et cette configuration admet clairement une bonne  $QR_7$ -arc-coloration.

Par conséquent,  $u_1$  et  $u_2$  sont soit deux 2-sources, soit deux 2-puits de  $H'_1$ . Dans ce cas, puisque  $H$  ne contient pas deux 2-sommets adjacents, d'après le lemme 3.36, nous avons alors seulement trois configurations possibles, qui sont dessinées sur les figures 3.18(d), 3.18(e) et 3.18(f).

- Figure 3.18(d) : d'après le lemme 3.30, nous avons  $\overrightarrow{u_2u}, \overrightarrow{uu_1} \in A(H)$ . Considérons le graphe  $H'_2 = H \setminus \overrightarrow{u_1u_2}$ ;  $H'_2$  ne contient pas de cycle spécial. Puisque  $H'_2 \prec H$ , par minimalité de  $H$ ,  $H'_2$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  qui peut être étendue à  $H$  grâce à la propriété  $P_{2,1}$  puisque  $f(\overrightarrow{u_2u}) \neq f(\overrightarrow{uu_1})$ .
- Figure 3.18(e) : d'après le lemme 3.30, nous avons  $\overrightarrow{u_2u}, \overrightarrow{uu_1} \in A(H)$ . D'après le lemme 3.36,  $u_4$  est un 3-sommet. Si  $d^-(u_4) = 2$ , cette configuration est interdite d'après le lemme 3.34. Si  $d^+(u_4) = 2$ , cette configuration est également interdite d'après le lemme 3.34.
- Figure 3.18(f) : d'après le lemme 3.30, nous avons  $\overrightarrow{uu_1}, \overrightarrow{uu_2} \in A(H)$ . Par conséquent, d'après le lemme 3.34,  $d^-(u_4) = 2$ . Considérons  $H'_4 = H \setminus \overrightarrow{u_1u_3}$ ; clairement,  $H'_4$  ne contient pas de cycle spécial. Par minimalité de  $H$ ,  $H'_4$  admet une  $QR_7$ -arc-coloration qui peut être étendue à  $H$  comme suit. Nous décolorions premièrement  $f(\overrightarrow{u_2u_4})$  et  $f(\overrightarrow{u_4u_3})$ ; ensuite, grâce à la propriété  $P_{2,1}$ , nous pouvons poser  $f(\overrightarrow{u_1u_3}) = f(\overrightarrow{u_4u_3})$ . Finalement, puisque  $f(\overrightarrow{uu_2}) \neq f(\overrightarrow{u_4u_3})$ , nous pouvons étendre  $f$  à une bonne  $QR_7$ -arc-coloration de  $H$  grâce à la propriété  $P_{2,1}$ . □

**Preuve du théorème 3.28.** D'après les lemmes 3.31 et 3.37,  $H$  est un graphe 3-régulier.

Soient  $u$  un sommet de  $H$  et  $\Gamma(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ . D'après le lemme 3.30,  $u$  n'est ni un 3-source, ni un 3-puits, et par conséquent, d'après la proposition 3.27, nous pouvons supposer sans perte de

généralité que  $d^+(u) \geq d^-(u)$ . Soit  $\overrightarrow{u_1u}, \overrightarrow{uu_2}, \overrightarrow{uu_3} \in A(H)$ .

Si  $H'_1 = H \setminus u$  ne contient pas de cycle spécial, alors par minimalité de  $H$ ,  $H'_1$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  qui peut être étendue à  $H$  comme suit. Nous pouvons poser  $f(\overrightarrow{u_1u}) \notin C_f^+(u_2) \cup C_f^+(u_3)$  grâce à la propriété  $P_{1,3}$ . Puis, grâce à la propriété  $P_{2,1}$ , nous pouvons étendre  $f$  à une bonne  $QR_7$ -arc-coloration de  $H$ .

Supposons maintenant que  $H'_1$  contienne un cycle spécial  $C$ . Le graphe  $H'_1$  contient alors trois 2-sommets. Puisqu'un cycle spécial est constitué de  $k$  paires de 2-sources et 2-puits,  $C$  contient uniquement une seule paire de 2-source et 2-puits adjacents (sans perte de généralité, disons  $u_1$  et  $u_2$  respectivement). Par conséquent, nous avons seulement quatre configurations possibles, dessinées sur la figure 3.19.

Clairement, la configuration de la figure 3.19(a) admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration. Le sommet blanc de la configuration de la figure 3.19(c) est un 2-sommet d'après le lemme 3.32 et il est alors facile de vérifier qu'il existe une bonne  $QR_7$ -arc-coloration de ce graphe. Considérons maintenant les configurations des figures 3.19(b) et 3.19(d), et soit  $H'_2 = H \setminus \overrightarrow{u_1u_2}$ . Nous avons  $H'_2 \prec H$  et clairement,  $H'_2$  ne contient pas de cycle spécial. Par conséquent, par minimalité de  $H$ ,  $H'_2$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  qui peut être étendue à  $H$  grâce à la propriété  $P_{2,1}$  puisque pour toute orientation de  $H$ ,  $C_f^-(u_1) \cap C_f^+(u_2) = \emptyset$ .

Dans chacun des cas, le graphe  $H$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration, ce qui permet de conclure.  $\square$

### 3.6.2.2 Preuve du théorème 3.24

Dans cette dernière sous-section, nous donnons la preuve du théorème 3.24 et discutons de l'optimalité de ce résultat.

Nous dirons dans la suite qu'une  $QR_7$ -arc-coloration  $f$  d'un graphe orienté de degré au plus trois  $G$  est *quasi-bonne* si pour tout 2-sommet  $u$ , nous avons  $|C_f^+(u)| = 1$ . Une bonne  $QR_7$ -arc-coloration est donc une quasi-bonne  $QR_7$ -arc-coloration.

Nous pouvons alors remarquer que si un graphe de degré au plus trois admet une quasi-bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f$ , nous avons  $|C_f^+(v)| \leq 1$  pour tout  $\leq 2$ -sommet  $v$  de  $G$ .

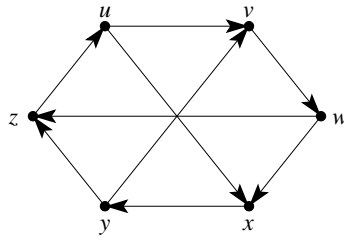
**Preuve du théorème 3.24.** Nous prouvons le théorème 3.24 en montrant que tout graphe de degré au plus trois admet une quasi-bonne  $QR_7$ -arc-coloration, qui est une  $QR_7$ -arc-coloration.

Soit  $H$  un contre-exemple d'ordre minimal du théorème 3.24.

Si  $H$  ne contient pas de cycle spécial, d'après le théorème 3.28,  $H$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration, qui est également une quasi-bonne  $QR_7$ -arc-coloration.

Supposons maintenant que  $H$  contienne au moins un cycle spécial. Par définition, un cycle spécial contient au moins un 2-source. Nous allons définir inductivement une séquence de graphes  $H_0, H_1, \dots, H_n$  pour  $n \geq 0$ , et une séquence de sommets  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  tels que :



FIG. 3.20 – Un graphe cubique  $G$  avec  $\chi'_o(G) = 6$ .

- $H_0 = H$  ;
- $H_i$  contient un cycle spécial et donc un 2-source  $u_i$  pour  $0 \leq i < n$  ;
- $H_{i+1} = H_i \setminus u_i$  pour  $0 \leq i < n$  ;
- $H_n$  ne contient pas de cycle spécial.

D'après le théorème 3.28,  $H_n$  admet une bonne  $QR_7$ -arc-coloration, et par conséquent une quasi-bonne  $QR_7$ -arc-coloration. Supposons que  $H_{i+1}$  admette une quasi-bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f_{i+1}$  pour  $1 \leq i < n$  ; nous affirmons que nous pouvons étendre  $f_{i+1}$  à une quasi-bonne  $QR_7$ -arc-coloration  $f_i$  de  $H_i$  comme suit. Soit  $v_i$  et  $w_i$  les deux sommets voisins de  $u_i$  qui sont des  $\leq 2$ -sommets dans  $H_{i+1}$ . Nous avons  $|C_{f_{i+1}}^+(v_i)| \leq 1$  et  $|C_{f_{i+1}}^+(w_i)| \leq 1$ , et grâce à la propriété  $P_{2,1}$ , nous pouvons poser  $f_i(\overrightarrow{u_i v_i}) = f_i(\overrightarrow{u_i w_i})$ .

Par conséquent, toute quasi-bonne  $QR_7$ -arc-coloration de  $H_n$  peut être étendue à  $H_0 = H$ , ce qui est une contradiction. Un contre-exemple minimal au théorème 3.24 n'existe pas, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Actuellement, nous ne connaissons pas de graphes de degré au plus trois dont le indice chromatique orienté est 7. Cependant, l'indice chromatique orienté du graphe cubique  $G$  de la figure 3.20 est 6.

Supposons que nous voulons colorier le graphe  $G$  avec cinq couleurs, disons 1, 2, 3, 4, 5. Nécessairement, les couleurs de  $\overrightarrow{vw}$ ,  $\overrightarrow{xy}$  et  $\overrightarrow{zu}$  sont deux à deux distinctes et nous pouvons par conséquent supposer que  $f(\overrightarrow{vw}) = 1$ ,  $f(\overrightarrow{xy}) = 2$  et  $f(\overrightarrow{zu}) = 3$ . Clairement, chacune des couleurs 4 et 5 apparaîtra au plus une fois sur  $\overrightarrow{uv}$ ,  $\overrightarrow{wx}$  et  $\overrightarrow{yz}$ . Sans perte de généralité, nous pouvons donc supposer que  $f(\overrightarrow{yz}) = 1$ , ce qui implique que  $f(\overrightarrow{ux}) = 4$  ou  $f(\overrightarrow{ux}) = 5$ . Si  $f(\overrightarrow{ux}) = 4$  (resp. 5), nous devons poser  $f(\overrightarrow{yv}) = 5$  (resp. 4), et nous n'avons alors plus aucune couleur disponible pour colorier  $\overrightarrow{wz}$ .

Grâce à ce que nous venons de montrer dans cette partie, nous avons  $6 \leq \chi'_o(\mathcal{D}_3) \leq 7$ . Ainsi, connaître la valeur exacte de l'indice chromatique orienté des graphes de degré au plus trois reste pour l'instant un problème ouvert.

### 3.7 Conclusion et perspectives

Nous venons d'étudier dans ce chapitre une nouvelle notion de coloration orientée, l'*arc-coloration orientée*, et son paramètre associé l'*indice chromatique orienté*.

**Comparaison avec des paramètres connus.** Nous avons comparé ce nouveau paramètre à des paramètres déjà étudiés dans la littérature tels que le nombre chromatique orienté ou le nombre chromatique acyclique. Dans chaque cas, nous obtenons des bornes qui ne sont pas pour l'instant optimales, mais qui permettent malgré tout d'avoir une idée du comportement de l'indice chromatique orienté en fonction de ces paramètres.

De même que Raspaud et Sopena [RS94] ont borné le nombre chromatique orienté en fonction du nombre chromatique acyclique, Kostochka, Sopena et Zhu [KSZ97] ont borné le nombre chromatique acyclique en fonction du nombre chromatique orienté. Dans le cas de l'indice chromatique orienté, nous ne nous sommes intéressé qu'à borner ce dernier en fonction du nombre chromatique acyclique. Il reste maintenant à considérer le problème inverse : borner le nombre chromatique acyclique en fonction de l'indice chromatique orienté. Nous pouvons déjà noter que le théorème 3.6 nous donne une première borne du nombre chromatique acyclique en fonction de l'indice chromatique orienté. En effet, sachant que si  $\chi'_o(G) \leq k$ , alors  $\chi_o(G) \leq \phi(k)$  pour tout graphe orienté  $G$ , nous obtenons  $\chi_a(G) \leq \phi(k)^2 + \phi(k)^{3+\lceil \log \log \phi(k) \rceil}$  (voir le théorème 3.6 pour une valeur  $\phi(k)$  en fonction de  $k$ ).

**Indice chromatique orienté des 2-arbres partiels.** Nous avons caractérisé, pour tout entier  $g \geq 3$ , l'indice chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille  $g$ . De la même manière que nous nous sommes posé la question pour le nombre chromatique orienté, il serait intéressant de considérer l'indice chromatique orienté des 2-arbres partiels de maille donnée. Les seuls résultats que nous connaissons actuellement grâce aux théorèmes 2.6, 3.14 et 3.2 sont résumés dans le tableau 3.2.

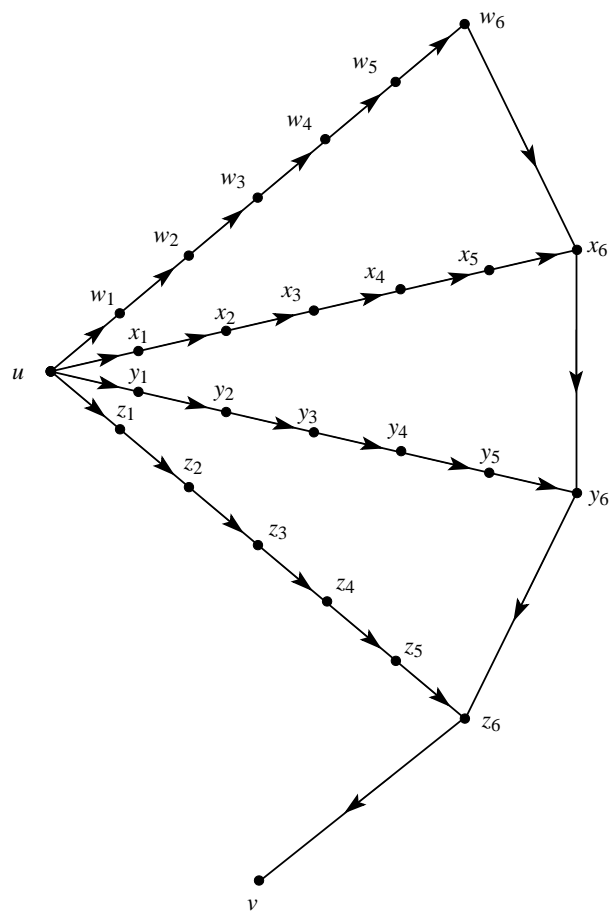
Maille	Borne inférieure	Borne supérieure
3	$\chi'_o(\mathcal{T}^2) \geq 7$	$\chi'_o(\mathcal{T}^2) \leq 7$
4	$\chi'_o(\mathcal{T}_4^2) \geq 6$	$\chi'_o(\mathcal{T}_4^2) \leq 7$
$5 \leq g \leq 9$	$\chi'_o(\mathcal{T}_g^2) \geq 5$	$\chi'_o(\mathcal{T}_g^2) \leq 6$
$g \geq 10$	$\chi'_o(\mathcal{T}_g^2) \geq 4$	$\chi'_o(\mathcal{T}_g^2) \leq 6$

TAB. 3.2 – Résultats connus pour l'indice chromatique orienté des 2-arbres partiels de maille donnée.

Nous pouvons cependant améliorer légèrement ces résultats pour les 2-arbres partiels de maille  $10 \leq g \leq 13$  :

**Théorème 3.38.**  $\chi'_o(\mathcal{T}_g^2) \geq 5$  pour tout  $g$ ,  $10 \leq g \leq 13$ .

**Preuve.** Il nous suffit de construire un 2-arbre partiel de maille 13 ayant un indice chromatique d'au moins 5 pour prouver ce théorème.

FIG. 3.21 – Configuration  $H$  de la preuve du théorème 3.38.

Considérons dans un premier temps un 6-chemin  $P_6 = [r_1, r_2, \dots, r_7]$  et soit  $f$  une  $T_4$ -arc-coloration de  $P_6$  telle que  $f(\overrightarrow{r_1 r_2}) = 4$  (rappelons que  $T_4$  est le tournoi de la figure 3.7(a)). Il est alors facile de vérifier que soit  $f(\overrightarrow{r_5 r_6}) = 1$ , soit  $f(\overrightarrow{r_6 r_7}) = 1$ .

Maintenant, soit  $G$  le 2-arbre partiel obtenu de la manière suivante. Nous prenons le 13-circuit  $C_{13} = [s_1, s_2, \dots, s_{13}, s_1]$  et treize copies  $H_1, H_2, \dots, H_{13}$  du graphe  $H$  de la figure 3.21 ; nous identifions alors les treize  $u$ -sommets de chaque copie de  $H$  à chacun des sommets  $s_i$  du 13-circuit. Nous montrons maintenant que le graphe  $G$  ainsi obtenu n'admet pas de 4-arc-coloration orientée. Supposons le contraire. Alors il existe un tournoi  $T$  à 4 sommets tel que  $G$  admet une  $T$ -arc-coloration  $f$  ; sachant que le circuit  $C_{13}$  est de taille non multiple de 3, nous avons nécessairement  $T \cong T_4$  (où  $T_4$  est le tournoi de la figure 3.7(a)). De plus, la couleur 3 apparaît nécessairement sur un des arcs de  $C_{13}$  : sans perte de généralité, disons que  $f(\overrightarrow{s_1 s_2}) = 3$ . Soit  $H_2$  la copie de  $H$  associée au sommet  $s_2$ . Les quatre arcs  $\overrightarrow{uw_1}$ ,  $\overrightarrow{ux_1}$ ,  $\overrightarrow{y_1}$  et  $\overrightarrow{uz_1}$  de  $H_2$  reçoivent alors obligatoirement la couleur 4. Par la remarque ci-dessus, la couleur 1 sera présente sur le dernier ou l'avant dernier arc de chacun des 6-chemins  $[u, \dots, w_6]$ ,  $[u, \dots, x_6]$ ,  $[u, \dots, y_6]$  et  $[u, \dots, z_6]$ . Ainsi, la couleur 1 ne peut être présente sur aucun des arcs du 4-chemin  $[w_6, x_6, y_6, z_6, v]$ , ce qui est une contradiction puisque toute  $T_4$ -arc-coloration d'un 4-chemin utilise nécessairement la couleur 1 sur un des arcs.  $\square$

**Indice chromatique orienté des graphes planaires.** Nous avons obtenu la valeur exacte de l'indice chromatique orienté des graphes planaire de maille au moins 46. Cependant, dans les autres cas (mailles  $3 \leq g \leq 45$ ), nous ne connaissons pas les valeurs exactes de l'indice chromatique orienté. Actuellement, grâce aux résultats présents dans la littérature sur le nombre chromatique orienté, aux résultats que nous avons obtenu pour l'indice chromatique orienté des 2-arbres partiels – sous-classe des graphes planaires (voir le tableau 3.2 et le théorème 3.38) – ainsi qu'aux théorèmes 2.12, 2.14, 3.21 et 3.2, nous obtenons les bornes qui sont résumées dans le tableau 3.3.

Maille	Borne inférieure	Borne supérieure
3	$\chi'_o(\mathcal{P}) \geq 10$	$\chi'_o(\mathcal{P}) \leq 38$
4	$\chi'_o(\mathcal{P}_4) \geq 6$	$\chi'_o(\mathcal{P}_4) \leq 38$
5	$\chi'_o(\mathcal{P}_5) \geq 5$	$\chi'_o(\mathcal{P}_5) \leq 19$
6	$\chi'_o(\mathcal{P}_6) \geq 5$	$\chi'_o(\mathcal{P}_6) \leq 11$
$7 \leq g \leq 10$	$\chi'_o(\mathcal{P}_g) \geq 5$	$\chi'_o(\mathcal{P}_g) \leq 7$
$11 \leq g \leq 13$	$\chi'_o(\mathcal{P}_g) \geq 5$	$\chi'_o(\mathcal{P}_g) \leq 6$
$14 \leq g \leq 45$	$\chi'_o(\mathcal{P}_g) \geq 4$	$\chi'_o(\mathcal{P}_g) \leq 5$
$g \geq 46$	$\chi'_o(\mathcal{P}_g) \geq 4$	$\chi'_o(\mathcal{P}_g) \leq 4$

TAB. 3.3 – Résultats connus pour l'indice chromatique orienté des graphes planaires de maille donnée.

Nous avons donc ici de nombreuses questions ouvertes qu'il serait intéressant de considérer.

**D'autres classes de graphes.** De nombreuses classes de graphes restent à considérer, et notamment celles dont une borne est connue pour le nombre chromatique orienté. En effet, d'après le théorème 3.2, cela nous permet d'obtenir une première borne supérieure que nous pouvons ensuite tenter de réduire. En particulier, Fertin, Raspaud et Roychowdhury [FRR03] ont montré que les grilles à deux dimensions admettent une 11-sommet-coloration. Plus récemment, Hosseini et Sopena [HDS06] ont montré que le nombre chromatique orienté des graphes de Halin est d'au plus 9. Esperet et Ochem se sont également intéressés aux graphes planaires 2-externes [EO07] et ont montré qu'il admettent une 67-sommet-coloration orientée. Il serait donc intéressant de considérer l'indice chromatique orienté de ces familles de graphes et tenter d'améliorer les premières valeurs que nous avons.

**Indice chromatique orienté des graphes non orientés.** Le nombre chromatique orienté d'un graphe non orienté  $G$  est défini comme le *maximum* des nombres chromatiques orientés pris sur toutes les orientations de  $G$ . En effet, le minimum des nombres chromatiques orientés pris sur toutes les orientations d'un graphe non orienté  $G$  correspond au nombre chromatique de  $G$ . D'une part, il est évident que  $\chi(G) \leq \chi_o(G)$ ; d'autre part, il est facile de construire une orientation  $\vec{G}$  de  $G$  telle que  $\chi_o(\vec{G}) = \chi(G)$  (à partir d'une coloration propre de  $G$ , il suffit d'orienter les arcs de  $G$  de  $i$  vers  $j$  si  $i < j$ ).

En revanche, dans le cas de l'indice chromatique orienté, le *minimum* des indices chromatiques orientés pris sur toutes les orientations d'un graphe non orienté  $G$  ne correspond à aucun paramètre connu. Dans ce chapitre, nous avons fait le choix de considérer l'indice chromatique orienté d'une classe de graphes orientés comme étant le *maximum* des indices chromatiques orientés pris sur tous les graphes de cette classe, et donc sur toutes les orientations de chaque graphe de la classe.

Nous pourrions à présent étudier le comportement de l'indice chromatique orienté *minimum* du graphe non orienté  $G$ , noté  $\underline{\chi}_o(G)$ , défini comme le *minimum* des indices chromatiques orientés pris sur toutes les orientations de  $G$ . Une première étude [Pin03] de ce paramètre nous a permis de montrer que  $\underline{\chi}_o(K_n) \leq \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil$  pour tout  $n \geq 1$ . Grâce à ce résultat, nous pouvons alors obtenir une borne en fonction du nombre chromatique :

**Théorème 3.39.** *Si  $G$  est un graphe non orienté, alors  $\underline{\chi}_o(G) \leq \lceil \frac{2\chi(G)-1}{3} \rceil$ .*

**Preuve.** Soit  $n = \chi(G)$ . Le graphe  $G$  admet donc un homomorphisme  $f$  vers le graphe complet  $K_n$  à  $n$  sommets. Sachant que  $\underline{\chi}_o(K_n) \leq \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil$  pour tout  $n \geq 1$  [Pin03], il existe une orientation  $T_n$  de  $K_n$  telle que  $\chi_o(T_n) = \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil$ . Soit  $g$  une  $(\lceil \frac{2n-1}{3} \rceil)$ -arc-coloration orientée de  $T_n$ . Maintenant, considérons le graphe orienté  $D$  qui est une orientation de  $G$  obtenue comme suit : pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ ,  $\vec{uv} \in A(D)$  si  $\overrightarrow{f(u)f(v)} \in A(T_n)$  et  $\vec{vu} \in A(D)$  sinon. Nous définissons alors l'arc-coloration orientée  $h$  de  $D$  comme suit :  $h(\vec{uv}) = g(\overrightarrow{f(u)f(v)})$ . Puisque  $g$  est une arc-coloration orientée de  $T_n$ ,  $f$  est une  $(\lceil \frac{2n-1}{3} \rceil)$ -arc-coloration orientée de  $D$ . Par conséquent, nous avons  $\underline{\chi}_o(G) \leq \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil$ .  $\square$

Si nous notons  $\mathcal{C}_k$  la famille de graphes dont le nombre chromatique est  $k$ , alors nous avons :

**Corollaire 3.40.**  $\underline{\chi}'_o(\mathcal{C}_k) \leq \lceil \frac{2k-1}{3} \rceil$ .

La question qui se pose maintenant est la suivante : pour quelles valeurs de  $k$  la borne ci-dessus est-elle optimale ? Dans le cas  $k = 1$  ( $\mathcal{C}_1$  est la classe des graphes sans arête), il est clair que  $\underline{\chi}'_o(\mathcal{C}_1) = 0$  et par conséquent, la borne donnée par le corollaire précédent n'est pas optimale. En revanche, pour les cas  $k = 2, 3$  ou  $4$ , cette borne est optimale. En effet,  $\mathcal{C}_2$  est la classe des couplages et par conséquent nous avons  $\underline{\chi}'_o(\mathcal{C}_2) = 1$ . D'autre part, il n'est pas difficile de vérifier que toute orientation d'un triangle contient un 2-chemin : nous avons donc  $\underline{\chi}'_o(\mathcal{C}_3) = 2$ . Enfin, nous pouvons également vérifier que toute orientation de  $K_4$  contient un 3-chemin et par conséquent  $\underline{\chi}'_o(\mathcal{C}_4) = 3$ . Qu'en est-il pour les autres valeurs de  $k$  ?

## Chapitre 4

# Étoile coloration orientée acircuitique

La notion d'*étoile arboricité* a été introduite par Akiyama et Kano dans [AK85] et est définie, pour un graphe non orienté  $G$ , comme le nombre minimum de forêts d'étoiles arête-disjointes nécessaires pour couvrir  $E(G)$ . Ils ont notamment prouvé que les graphes complets à  $n$  sommets peuvent être décomposés en  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  forêts d'étoiles. Cette notion a depuis été étudiée par différents auteurs pour quelques familles de graphes telles que les graphes  $d$ -réguliers, les graphes complets multipartis réguliers ou encore les graphes planaires (voir *e.g.* [AA89, AMR92, Aok90]).

Concernant les graphes planaires, Algor et Alon ont montré dans [AA89] que tout graphe planaire peut être décomposé en 6 forêts d'étoiles. Hakimi *et al.* [HME96] ont prouvé par la suite que tout graphe planaire peut être décomposé en 5 forêts d'étoiles et que cette borne est optimale.

Dans [AA89], Algor et Alon ont introduit la notion d'étoile arboricité *dirigée* (*directed star arboricity* en anglais) d'un digraphe  $G$ , notée  $\text{dst}(G)$ , définie comme le nombre minimum de forêts d'étoiles sources arc-disjointes nécessaires pour couvrir  $A(G)$  (une *étoile source* est une étoile dont les arcs sont orientés du centre vers les feuilles). Dans [Gui97], Guiduli a montré que tout digraphe ayant un degré entrant maximum et un degré sortant maximum au plus  $D$  possède une étoile arboricité dirigée d'au plus  $D + 20 \log D + 84$ .

Cette notion d'arboricité peut être définie en terme d'arc-coloration, ou encore en termes de partition d'arcs. Plus précisément, une *étoile  $k$ -coloration dirigée* (ou plus simplement une  *$k$ -dst-coloration*) d'un graphe orienté  $G$  est une partition de  $A(G)$  en  $k$  forêts d'étoiles sources  $F_1, F_2, \dots, F_k$ . De façon équivalente, une  $k$ -dst-coloration de  $G$  est une  $k$  coloration  $f$  de  $A(G)$  telle que

- (i) pour tous  $u, v, w \in V(G)$  tels que  $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vw} \in A(G)$ ,  $f(\overrightarrow{uv}) \neq f(\overrightarrow{vw})$ ,
- (ii) pour tous  $u, v, w \in V(G)$  tels que  $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vw} \in A(G)$ ,  $f(\overrightarrow{uv}) \neq f(\overrightarrow{vw})$ .

L'*étoile arboricité dirigée* de  $G$  peut alors être définie comme le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -dst-coloration.

Récemment, Amini, Havet, Huc et Thomassé [AHHT06] ont montré que certains problèmes de routage multicast peuvent être modélisés comme une coloration des arcs d'un digraphe telle que les arcs incidents à un même sommet reçoivent des couleurs différentes, à l'exception éventuelle des arcs

sortants qui peuvent avoir la même couleur, puisqu'il transporte le même message. Le but est donc de minimiser le nombre de couleurs, *i.e.* déterminer l'étoile arboricité dirigée d'un tel graphe.

Dans le même esprit, nous introduisons ici une extension naturelle de cette notion, l'étoile arboricité orientée *acircuitique* d'un graphe orienté  $G$ , notée  $\text{adst}(G)$ , définie comme le nombre minimum de forêts d'étoiles sources arc-disjointes nécessaires pour couvrir  $A(G)$  de telle sorte que l'union de deux telles forêts est acircuitique (un graphe orienté est *acircuitique* s'il ne contient aucun circuit). Nous dirons qu'un graphe orienté  $G$  admet une  $k$ -étoile coloration orientée acircuitique, ou plus simplement une  $k$ -adst-coloration, si  $\text{adst}(G) \leq k$ .

Une *étoile  $k$ -coloration orientée acircuitique* (ou simplement une  *$k$ -adst-coloration*) d'un graphe  $G$  est une partition de  $A(G)$  en  $k$  forêts d'étoiles sources  $F_1, F_2, \dots, F_k$  telles que pour tout  $i, j \in [1, k]$ ,  $F_i \cup F_j$  est acircuitique. De façon équivalente, une  $k$ -adst-coloration de  $G$  est une  $k$  coloration de  $A(G)$  telle que

(i) pour tous  $u, v, w \in V(G)$  tels que  $\vec{uv}, \vec{vw} \in A(G)$ ,  $f(\vec{uv}) \neq f(\vec{vw})$ ,

(ii) pour tous  $u, v, w \in V(G)$  tels que  $\vec{uv}, \vec{wv} \in A(G)$ ,  $f(\vec{uv}) \neq f(\vec{wv})$ .

(iii)  $G$  ne contient pas de circuit bicolore.

L'*étoile arboricité orientée acircuitique* de  $G$  peut alors être définie comme le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -adst-coloration.

Notons que contrairement à l'étoile arboricité dirigée qui est définie pour les digraphes, l'étoile arboricité orientée acircuitique n'est définie que pour les graphes orientés (*i.e.* les digraphes sans boucle ni arcs opposés). Effet, un digraphe contenant deux arcs opposés ou une boucle n'admet pas d'étoile coloration orientée acircuitique puisqu'il contiendra un circuit bicolore (formé par la paire d'arcs opposés ou la boucle).

Soit  $f$  une adst-coloration d'un graphe orienté  $G$ .

Pour un sommet  $u$  de  $G$ , nous notons  $C_f^+(u)$  (resp.  $C_f^-(u)$ ) l'*ensemble des couleurs sortantes de  $u$*  (resp. l'*ensemble des couleurs entrantes de  $u$* ), c'est à dire l'ensemble des couleurs présentes sur les arcs sortants (resp. entrants) du sommet  $u$ . Enfin,  $C_f(u) = C_f^-(u) \cup C_f^+(u)$ .

À présent, soit  $f$  une adst-coloration partielle d'un graphe orienté  $G$  (*i.e.* une adst-coloration d'une sous-ensemble d'arcs de  $G$ ).

Pour un arc non colorié  $\vec{uv}$  de  $G$ , une couleur  $c$  est dite *disponible pour  $\vec{uv}$*  si cette couleur satisfait les contraintes d'une *dst-coloration* pour l'arc  $\vec{uv}$ ; nous notons  $F^f(\vec{uv}) = C_f^-(u) \cup C_f(v)$  l'*ensemble des couleurs interdites pour  $\vec{uv}$*  par la coloration  $f$ ; nous pouvons voir facilement que toute couleur  $c \notin F^f(\vec{uv})$  est une couleur disponible pour  $\vec{uv}$ . Une couleur  $c$  est dite *acceptable pour  $\vec{uv}$*  si affecter la couleur  $c$  à l'arc  $\vec{uv}$  donne une adst-coloration partielle de  $G$ . Il est clair qu'une couleur acceptable est également une couleur disponible. En revanche, le contraire est faux.



Nous pouvons alors noter que pour une adst-coloration partielle  $f$  de  $H$  et un arc non colorié  $\vec{uv}$ , si  $C_f^-(u) \cap C_f^+(v) = \emptyset$ , alors toute couleur disponible pour  $\vec{uv}$  est également acceptable pour  $\vec{uv}$  (en effet, tout circuit contenant  $\vec{uv}$  ne sera pas bicolore quelle que soit la couleur affectée à cet arc).

Nous considérons dans la suite trois classes de graphes : les graphes de degré au plus trois, les graphes planaires de grande maille, et les 2-arbres partiels.

Le résultat obtenu pour la classe des graphes de degré au plus trois est publié dans *Discrete Mathematics* [PS06a] ; cependant, la preuve que nous présentons ici est plus courte. Enfin, les résultats obtenus pour les graphes planaires de grande maille sont sous la forme d'un rapport de recherche [PS05] actuellement soumis.

## 4.1 Motivation initiale : lien avec l'arc-coloration orientée

La notion d'étoile arboricité orientée acircuitique provient de l'étude de l'arc-coloration orientée de graphes orientés (cf. chapitre 3).

Rappelons qu'une arc-coloration orientée d'un graphe orienté  $G$  est une coloration des arcs de  $G$  telle que

- (i) deux arcs consécutifs ont des couleurs différentes,
- (ii) si deux arcs consécutifs sont respectivement coloriés  $a$  et  $b$ , alors le graphe  $G$  ne contient pas d'arcs consécutifs respectivement coloriés  $b$  et  $a$ .

Raspud et Sopena ont montré dans [RS94] que toute orientation d'un graphe non orienté admettant une  $k$ -coloration acyclique admet une  $(k \cdot 2^{k-1})$ -coloration orientée. Il est alors possible d'obtenir le corollaire suivant :

**Corollaire 4.1.** *Toute orientation d'un graphe non orienté  $G$  admettant une  $k$ -arête-coloration acyclique admet une  $(k \cdot 2^{k+1})$ -arc-coloration orientée.*

Comme nous l'avons déjà dit (cf. chapitre 1, § 1.3.1), la meilleure borne connue pour l'indice chromatique acyclique des graphes de degré maximum  $\Delta$  est  $16\Delta$  [AMR91]. Par conséquent, dans le cas général, la borne supérieure que nous obtenons pour l'indice chromatique orienté en fonction de l'indice chromatique acyclique semble très supérieure à sa valeur exacte.

Chaque classe de couleurs d'une arête-coloration acyclique d'un graphe non orienté  $G$  est un couplage parfait, et donc une forêt d'étoiles. Le graphe induit par deux tels couplages parfaits est une forêt, et est donc acircuitique. Pour toute orientation  $\vec{G}$  de  $G$ , nous avons donc  $\text{adst}(\vec{G}) \leq \chi'_a(G)$ .

De plus, les contraintes de coloration imposées par une arête-coloration acyclique ne sont pas toutes nécessaires pour obtenir le corollaire 4.1. En revanche, nous pouvons voir que les contraintes d'une étoile coloration orientée acircuitique sont suffisantes. Nous avons en effet :

**Théorème 4.2.** *Toute orientation d'un graphe non orienté  $G$  ayant une étoile arboricité orientée acircuitique au plus  $k$  admet une  $(k \cdot 2^{k+1})$ -arc-coloration orientée.*

**Preuve.** Soit  $f$  une  $k$ -étoile coloration orientée acircuitique de  $G$ . Soient  $LD(G)$  le graphe représentatif des arcs de  $G$  et  $G'$  le graphe sous-jacent à  $LD(G)$  ( $G'$  est donc un graphe non orienté). Soit  $g$  une  $k$ -sommets coloration de  $G'$  telle que  $g(s_{uv}) = f(\vec{uv})$ , où  $s_{uv}$  est le sommet de  $G'$  associé à l'arc  $uv$  de  $G$ .

Nous montrons que cette coloration  $g$  est une coloration propre et acyclique de  $G'$ . Sachant que deux sommets adjacents de  $G'$  correspondent à deux arcs consécutifs de  $G$ , toute paire de sommets adjacents de  $G'$  recevra deux couleurs distinctes. Nous devons maintenant vérifier que tout cycle est colorié avec un minimum de trois couleurs. Tout cycle de  $G'$  correspond à un cycle (orienté) ou à un circuit dans  $LD(G)$ . Soit  $C = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_0)$  un cycle de  $G'$ . Si  $C$  est un circuit dans  $LD(G)$ , alors  $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\} \subseteq A(G)$ , les arcs  $u_i$  et  $u_{i+1}$  sont consécutifs dans  $G$  (les indices sont pris modulo  $n$ ) et forment par conséquent un circuit dans  $G$ . Sachant que  $f$  est une coloration acircuitique, le cycle  $C$  obtiendra au moins trois couleurs par  $g$ . Maintenant, si  $C$  est un cycle de  $LD(G)$ , il existe  $0 \leq i \leq n-1$  tel que  $\vec{u_i u_{i+1}}, \vec{u_{i+2} u_{i+1}} \in A(LD(G))$ . Ceci signifie qu'il existe quatre sommets  $u, v, w$  et  $x$  de  $G$  tels que  $u_i = \vec{uv}$ ,  $u_{i+1} = \vec{vx}$  et  $u_{i+2} = \vec{wv}$ . Sachant que  $f$  est une  $k$ -étoile coloration orientée, les arcs  $u_i$ ,  $u_{i+1}$  et  $u_{i+2}$  recevront trois couleurs distinctes, ce qui implique que le cycle  $C$  de  $G'$  obtiendra au moins trois couleurs par  $g$ . La coloration  $g$  est donc une  $k$ -sommets-coloration acyclique de  $G'$ . En utilisant le résultat de Raspaud et Sopena cité précédemment, le graphe orienté  $LD(G)$  admet une  $(k \cdot 2^{k-1})$ -sommets-coloration orientée et par conséquent,  $G$  admet une  $(k \cdot 2^{k+1})$ -arc-coloration orientée.  $\square$

Les bornes que nous obtiendrons pour l'indice chromatique orienté en fonction de l'étoile arboricité orientée acircuitique sont donc potentiellement plus intéressantes que celle que nous pouvons obtenir à partir de l'indice chromatique acyclique. Cependant, les résultats que nous avons obtenus à ce jour n'ont pas permis d'améliorer les bornes que nous connaissons pour l'indice chromatique orienté.

## 4.2 Les graphes de degré au plus trois

Rappelons que  $\mathcal{D}_k$  désigne la classe des graphes de degré au plus  $k$ .

Dans [ASZ01], Alon, Sudakov et Zaks ont montré que tout graphe  $G$  de degré au plus trois possède un indice chromatique acyclique d'au plus 5, ce qui implique que  $G$  possède une étoile arboricité orientée acircuitique d'au plus 5. Par conséquent, d'après le théorème 4.2,  $\chi'_o(\mathcal{D}_3) \leq 80$ . Nous montrons dans la suite que la borne de l'étoile arboricité orientée acircuitique des graphes de degré au plus trois peut être améliorée (et permet ainsi d'obtenir une meilleure borne pour l'indice chromatique orienté de cette classe) :

**Théorème 4.3.**  $\text{adst}(\mathcal{D}_3) \leq 4$ .

Supposons que le théorème 4.3 est faux. Nous pouvons alors considérer un contre-exemple  $H$  minimal (en terme de nombre d'arêtes). Nous allons prouver dans la suite une série de lemmes. Dans chacun d'eux, nous réduisons  $H$  à un graphe  $H'$  plus petit (c'est à dire  $|A(H)| > |A(H')|$ ) qui admet par conséquent une 4-adst-coloration  $f$ . Cette coloration  $f$  est également une adst-coloration partielle de  $H$ , c'est à dire une coloration d'un certain sous-ensemble des arcs de  $H$ . Nous montrons qu'il est alors possible d'étendre une telle coloration partielle à une adst-coloration de  $H$ , c'est à dire colorier les arcs non encore coloriés de  $H$  en recoloriant éventuellement certains arcs déjà coloriés. L'existence d'une telle adst-coloration  $f$  prouve que  $H$  ne contient pas certaines configurations spécifiques. Cet ensemble de configurations nous conduira finalement à une contradiction, ce qui impliquera qu'un tel contre-exemple  $H$  au théorème 4.3 n'existe pas.

Considérons un circuit  $C$  et soient  $u, v \in V(C)$ . Nous notons  $P_C(u, v)$  le chemin  $[u, w_1, \dots, w_n, v]$  tel que  $w_i \in V(C)$  pour tout  $i \in [1, n]$ .

L'observation suivante sera utilisée plusieurs fois dans la suite :

**Observation 4.4.** *Soit  $C$  un circuit,  $f$  une adst-coloration de  $C$ , et  $C'$  le circuit obtenu à partir de  $C$  en remplaçant  $P_C(u, v)$  par un chemin  $P_{C'}(u, v)$ . Si  $f'$  est une adst-coloration de  $C'$  telle que  $f'(a) = f(a)$  pour tout  $a \notin P_C(u, v)$  et  $\{f(a); a \in P_C(u, v)\} \subseteq \{f'(a'); a' \in P_{C'}(u, v)\}$  alors  $f'$  est une adst-coloration de  $C'$ .*

Ceci découle directement du fait que  $f(C) \subseteq f'(C')$  et donc  $|f'(C')| \geq 3$ .

**Lemme 4.5.** *Le graphe  $H$  est cubique.*

**Preuve.** Soit  $v \in V(H)$  avec  $d(v) \leq 2$ . Nous considérons deux cas suivant que  $d(v) = 1$  ou  $d(v) = 2$  :

*Cas 1 :  $d(v) = 1$ .*

Soit  $\Gamma(v) = \{u\}$ . Considérons l'arête pendante  $uv$  de  $H$  et soit  $f$  une 4-adst-coloration du graphe  $H' = H \setminus \{v\}$ . Puisque  $|C_f(u)| \leq 2$ , il est alors possible de choisir  $f(uv) \notin C_f(u)$  car nous avons au moins deux couleurs acceptables.

*Cas 2 :  $d(v) = 2$ .*

Soit  $\Gamma(v) = \{u, w\}$ . Considérons les deux arcs  $uv$  et  $wv$  dans  $H$ .

- Supposons que  $uw \in A(G)$ . Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H \setminus v$  admet une 4-adst-coloration  $f$ . Si le triangle  $uvw$  de  $H$  est transitif, alors sans perte de généralité nous avons soit  $\vec{uv}, \vec{uw} \in A(G)$ , soit  $\vec{vu}, \vec{wv} \in A(G)$ . Nous posons alors  $f(\vec{uv}) = f(\vec{uw})$  ou  $f(\vec{vu}) = f(\vec{wv})$  suivant le cas, et il est clair qu'il reste encore deux couleurs acceptables pour l'arc  $vw$ .
- Supposons maintenant que  $uw \notin A(G)$ . Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H'$  obtenu à partir de  $H$  en contractant  $uv$  en un unique sommet admet une 4-adst-coloration  $f$ . Nous pouvons alors étendre cette coloration partielle de  $H'$  à  $H$  en posant  $f(uv) \notin C_f(u) \cup C_f(v) = C_f(u) \cup \{a\}$ . Par l'observation 4.4, aucun circuit de  $H$  ne peut être bicolore, et  $f$  est par conséquent une 4-adst-coloration de  $H$ .

Dans les deux cas, nous obtenons donc une 4-adst-coloration  $f$  de  $H$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

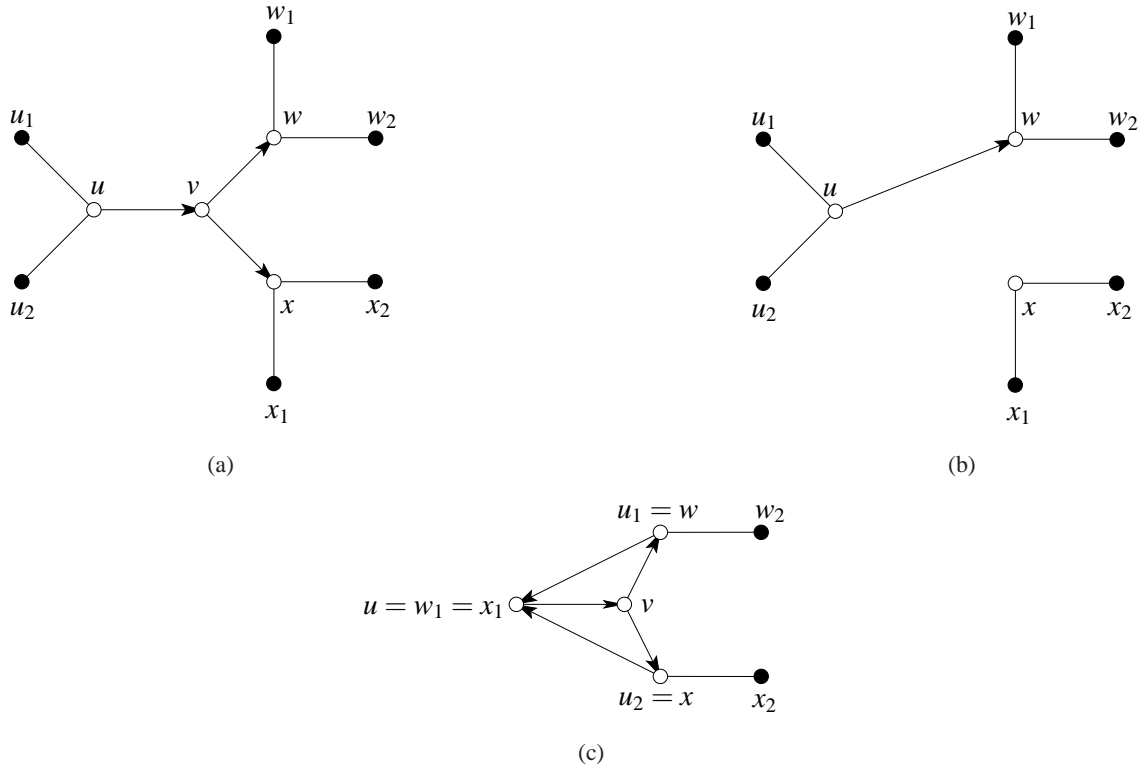


FIG. 4.1 – Configuration du lemme 4.7

**Lemme 4.6.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de sommet source.*

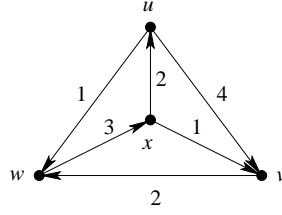
**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne un sommet source  $v \in V(H)$ . Par le lemme 4.5, nous savons que  $d^+(v) = 3$ . Soient  $u_1, u_2$  et  $u_3$  les trois voisins de  $v$  et  $f$  une 4-adst-coloration du graphe  $H' = H \setminus v$ . Chacun des arcs  $\overrightarrow{vu_1}$ ,  $\overrightarrow{vu_2}$  et  $\overrightarrow{vu_3}$  a au moins deux couleurs acceptables. Sachant que deux arcs sortants d'un même sommet  $v$  peuvent prendre la même couleur, nous pouvons étendre  $f$  à une 4-adst-coloration de  $H$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

Dans la suite, un sommet  $v$  de  $H$  tel que  $d^-(v) = 1$  et  $d^+(v) = 2$  (resp.  $d^-(v) = 2$  et  $d^+(v) = 1$ ) sera appelé un  $(1, 2)$ -sommet (resp.  $(2, 1)$ -sommet).

**Lemme 4.7.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de  $(1, 2)$ -sommet.*

**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne un  $(1, 2)$ -sommet  $v$  (voir la figure 4.1(a)). Soit  $\Gamma(v) = \{u, w, x\}$  tels que  $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vw}, \overrightarrow{vx} \in A(H)$  et soient  $\Gamma(u) = \{v, u_1, u_2\}, \Gamma(w) = \{v, w_1, w_2\}$  et  $\Gamma(x) = \{v, x_1, x_2\}$ . Les sommets  $u_1$  et  $u_2$  (resp.  $w_1$  et  $w_2, x_1$  et  $x_2$ ) ne sont pas nécessairement distincts.

Supposons dans un premier temps que  $w$  est un puits de  $H$ . Dans ce cas, par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H \setminus \overrightarrow{vw}$  admet une 4-adst-coloration  $f$ . L'arc  $\overrightarrow{vw}$  n'appartient à aucun circuit. Nous avons donc au moins une couleur acceptable pour  $\overrightarrow{vw}$  : nous choisissons  $f(\overrightarrow{vw}) \notin \{f(\overrightarrow{uv}), f(\overrightarrow{w_1v}), f(\overrightarrow{w_2v})\}$ . Ceci signifie que les sommets  $w$  et  $x$  ne sont pas des sommets puits.

FIG. 4.2 – L'orientation  $\vec{K}_4$  telle que  $adst(\vec{K}_4) = 4$ 

Supposons maintenant que le sommet  $w$  est un  $(1,2)$ -sommet. Dans ce cas, par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H \setminus \overrightarrow{ww_1}$  admet une 4-adst-coloration  $f$ . Nous étendons alors cette coloration à une 4-adst-coloration de  $H$  de la façon suivante. Si  $f(\overrightarrow{vw}) \notin C_f^+(w_1)$ , nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{ww_1}) \notin S = \{f(\overrightarrow{vw})\} \cup C_f^+(w_1)$  ( $|S| \leq 3$ ) sans risque de créer de circuits bicolores. En revanche, si  $f(\overrightarrow{vw}) \in C_f^+(w_1)$ , nous pouvons alors choisir  $f(\overrightarrow{ww_1}) \notin T = \{f(\overrightarrow{uv})\} \cup C_f^+(w_1)$  ( $|T| \leq 3$ ) sans risque de créer de circuits bicolores puisque nous aurons  $f(\overrightarrow{ww_1}) \neq f(\overrightarrow{uv})$ . Ceci signifie que les sommets  $w$  et  $x$  sont par conséquent des  $(2,1)$ -sommets.

Sans perte de généralité, nous supposons que  $\overrightarrow{w_1w}, \overrightarrow{ww_2}, \overrightarrow{x_1x}, \overrightarrow{xx_2} \in A(H)$ .

- Supposons que nous avons  $u_1 = w$  et  $u_2 = x$  (voir la figure 4.1(c)). Dans ce cas, par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H \setminus \overrightarrow{vw}$  admet une 4-adst-coloration  $f$  que nous pouvons étendre à une 4-adst-coloration de  $H$  en choisissant  $f(\overrightarrow{vw}) \notin \{f(\overrightarrow{wu}), f(\overrightarrow{ww_2}), f(\overrightarrow{uv})\}$ . Par conséquent, sans perte de généralité, nous avons  $u_1 \neq w$ .
- Soit  $H'$  le graphe dessiné sur le figure 4.1(b). Nous avons  $|A(H')| < |A(H)|$  et donc il existe une 4-adst-coloration  $f$  de  $H'$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $f(\overrightarrow{uw}) = 1$ ,  $f(\overrightarrow{w_1w}) = 2$  et  $f(\overrightarrow{ww_2}) = 3$ . Nous étendons alors  $f$  à une 4-adst-coloration de  $H$  comme suit.
  - Si  $f(\overrightarrow{xx_2}) \neq 1$ , nous posons  $f(\overrightarrow{uv}) = 1$  : par l'observation 4.4, quelle que soit la couleur de  $\overrightarrow{vw}$ , tout circuit contenant cet arc ne sera pas bicolore ; sachant que  $f(\overrightarrow{uv}) \neq f(\overrightarrow{xx_2})$ , quelle que soit la couleur de  $\overrightarrow{vx}$ , tout circuit contenant cet arc ne sera pas bicolore. Il existe ensuite pour chacun des arcs  $\overrightarrow{vw}$  et  $\overrightarrow{vx}$  au moins une couleur acceptable.
  - Si  $f(\overrightarrow{xx_2}) = 1$ , nous posons  $f(\overrightarrow{vw}) = 1$  ; par la remarque 4.4, quelle que soit la couleur de  $\overrightarrow{vw}$ , tout circuit contenant cet arc n'est pas bicolore. De plus, il existe au moins une couleur  $a \neq 1$  disponible pour  $\overrightarrow{uv}$  : nous posons  $f(\overrightarrow{uv}) = a$ . Puisque  $f(\overrightarrow{uv}) \neq f(\overrightarrow{xx_2})$ , toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{vx}$ , est également acceptable. Nous choisissons alors  $f(\overrightarrow{vx}) \notin \{f(\overrightarrow{uv}), f(\overrightarrow{x_1x}), f(\overrightarrow{xx_2})\}$ .

Dans chacun des différents cas, la coloration  $f$  est donc une 4-adst-coloration de  $H$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Preuve du théorème 4.3.** Par les lemmes 4.5, 4.6 et 4.7, le graphe  $H$  est cubique et ne contient que des sommets ayant plus d'arcs entrants que d'arcs sortants : en effet,  $H$  ne contient que des  $(2,1)$ -sommets et des sommets puits. Sachant que  $\sum_{v \in V(H)} d^+(v) = \sum_{v \in V(H)} d^-(v)$ , nous obtenons une contradiction, nous permettant de conclure qu'il n'existe pas de contre-exemple au théorème 4.3.  $\square$

La borne donnée par le théorème 4.3 est optimale. En effet, nous pouvons considérer l'orientation

$\vec{K}_4$  du graphe complet  $K_4$  donnée sur la figure 4.2. Si nous voulons colorier ce graphe avec 3 couleurs, la seule manière de colorier les arcs  $\vec{uw}$ ,  $\vec{xu}$ ,  $\vec{wx}$ ,  $\vec{vw}$  et  $\vec{xv}$  est clairement celle donnée sur la figure 4.2. Mais, dans ce cas, nous avons besoin d'une couleur supplémentaire pour l'arc  $\vec{uv}$  et par conséquent,  $\text{adst}(\vec{K}_4) = 4$ .

Nous devons cependant remarquer que nous ne connaissons pas d'autres graphes de degré au plus trois ayant une étoile arboricité orientée acircuitique égale à quatre.

**Question 4.8.** Soit  $G$  un graphe cubique non isomorphe à  $K_4$ . Avons-nous  $\text{adst}(G) \leq 3$  ?

### 4.3 Les graphes de faible densité

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'étoile arboricité orientée acircuitique des graphes de faible densité, et plus exactement des graphes dont le degré moyen maximum est borné. Rappelons que le degré moyen maximum d'un graphe  $G$ , noté  $\text{mad}(G)$ , est  $\text{mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$ . En utilisant la relation entre degré moyen maximum et maille d'un graphe planaire (voir l'observation 1.3), les résultats que nous obtenons nous donnerons des corollaires pour certaines classes de graphes planaires de grande maille.

Nous considérons deux classes de graphes :

- les graphes  $G$  tels que  $\text{mad}(G) < \frac{7}{3}$  ;
- les graphes  $G$  tels que  $\text{mad}(G) < \frac{133}{41}$ .

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction de ce chapitre,  $\text{adst}(G) \leq \chi'_a(G)$  pour tout graphe  $G$ . Pour obtenir une borne sur l'étoile arboricité orientée acircuitique des graphes  $G$  tels que  $\text{mad}(G) < \frac{7}{3}$ , nous étudierons leur indice chromatique acyclique. En revanche, nous étudierons directement l'étoile arboricité orientée acircuitique des graphes  $G$  tels que  $\text{mad}(G) < \frac{133}{41}$ .

Récemment, Muthu, Narayanan et Subramanian [MNS05] ont étudié l'indice chromatique acyclique les graphes planaires de grande maille : en particulier, ils montrent que tout graphe  $G$  de maille  $g \geq 9$ ,  $\chi'_a(G) \leq 6\Delta(G)$ , et par conséquent  $\text{adst}(G) \leq 6\Delta(G)$ . Nous améliorons cette borne dans le cas des graphes planaires de maille au moins 14 :

**Théorème 4.9.** Soit  $G$  un graphe non orienté avec  $\text{mad}(G) < \frac{7}{3}$ .

- $\chi'_a(G) = \Delta(G) + 1$  si  $G$  est un cycle ;
- $\chi'_a(G) = \Delta(G)$  sinon.

**Corollaire 4.10.** Soit  $G$  un graphe planaire non orienté de maille  $g \geq 14$ .

- $\chi'_a(G) = \Delta(G) + 1$  si  $G$  est un cycle ;
- $\chi'_a(G) = \Delta(G)$  sinon.

Il est évident que cette borne est optimale puisque tout graphe  $G$  nécessite au moins  $\Delta(G)$  couleurs pour toute arête-coloration acyclique.

Nous avons alors :

**Corollaire 4.11.** Soit  $G$  un graphe planaire orienté de maille  $g \geq 14$ .

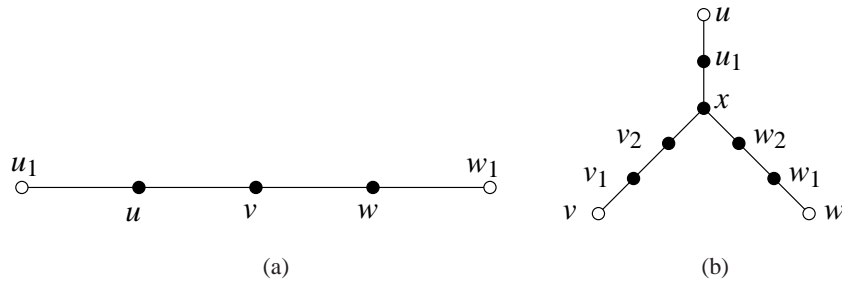


FIG. 4.3 – Configurations interdites du théorème 4.9.

- $\text{adst}(G) \leq \Delta(G) + 1$  si  $G$  est un cycle ;
- $\text{adst}(G) \leq \Delta(G)$  sinon.

Si  $G$  est un cycle, alors il existe une orientation nécessitant  $\Delta(G) + 1$  pour toute  $\text{adst}$ -coloration : il suffit d'orienter  $G$  de telle sorte qu'il forme un circuit. De même, nous pouvons remarquer que tout graphe  $G$  admet une orientation nécessitant au moins  $\Delta(G)$  couleurs pour toute  $\text{dst}$ -coloration : il suffit de considérer les orientations de  $G$  dont les arcs incidents à un sommet de degré maximum sont tous orientés vers ce sommet. Par conséquent, tout graphe  $G$  admet une orientation nécessitant au moins  $\Delta(G)$  couleurs pour toute  $\text{adst}$ -coloration.

Pour des graphes de plus grand degré moyen maximum, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 4.12.** Soit  $G$  un graphe orienté avec  $\text{mad}(G) < \frac{133}{41}$ . Alors  $\text{adst}(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

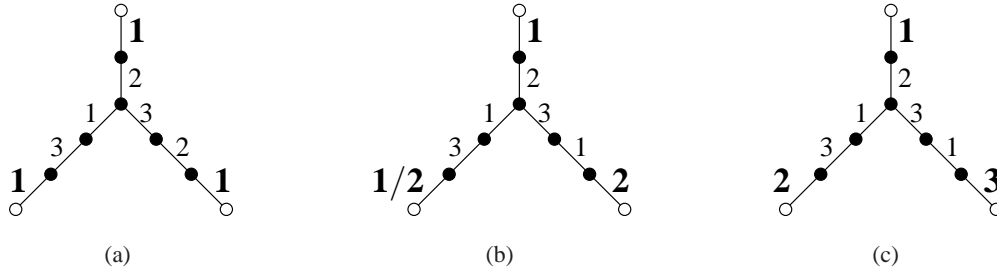
**Corollaire 4.13.** Soit  $G$  un graphe planaire orienté de maille  $g \geq 6$ . Alors  $\text{adst}(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

### 4.3.1 Preuve du théorème 4.9

Dans le reste de cette partie, le graphe (non orienté)  $H$  est un contre-exemple minimal (au sens de l'inclusion en tant que sous-graphe) du théorème 4.9 avec  $\Delta = \Delta(H)$ . Nous montrerons dans un premier temps que  $H$  ne contient pas un certain ensemble de configurations, que nous appelons *ensemble de configurations interdites*.

Dans toutes les preuves qui suivent, nous allons procéder de façon similaire. Nous supposons que  $H$  contient certaines configurations, et pour chacune d'entre elles, nous considérons une réduction  $H'$  de  $H$  obtenue à partir de  $H$  en supprimant certains sommets et/ou certains arcs. Sachant que  $H'$  sera alors un sous-graphe de  $H$ , nous aurons  $\text{mad}(H') \leq \text{mad}(H)$ . Donc, par minimalité de  $H$ , il existe une  $\Delta(H')$ -arête-coloration acyclique  $f$  de  $H'$ . De plus, il est clair que nous avons  $\Delta(H') \leq \Delta$  et par conséquent  $f$  est une  $\Delta$ -arête-coloration acyclique de  $H'$ . La coloration  $f$  est une  $\Delta$ -arête-coloration acyclique partielle de  $H$ , c'est à dire une arête-coloration acyclique d'un certain sous-ensemble d'arcs de  $A(H)$ . Nous montrons alors comment étendre cette coloration partielle de  $H$  à une  $\Delta$ -arête-coloration acyclique de  $H$ . L'existence d'une telle coloration  $f$  de  $H$  montre que  $H$  ne contient aucune des configurations considérées.

**Lemme 4.14.** Le graphe  $H$  n'est pas un cycle.

FIG. 4.4 – Configuration du lemme 4.16 : arête-coloration acyclique de  $H'$  étendue à  $H$ .

**Preuve.** Il est évident que tout cycle admet une 3-arête-coloration acyclique.  $\square$

**Lemme 4.15.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 1-sommet.*

**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne une arête pendante  $uv$  et soit  $H' = H \setminus uv$ . Nous pouvons étendre  $f$  puisque  $uv$  est adjacent à au plus  $\Delta - 1$  arcs, et donc à au plus  $\Delta - 1$  couleurs.  $\square$

**Remarque.** Sachant que  $H$  n'est pas un cycle et ne contient pas de 1-sommet, nous avons  $\Delta \geq 3$  et par conséquent, nous avons au moins trois couleurs à disposition.

**Lemme 4.16.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.3(a).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus v$ . Nous pouvons choisir  $f(uv) \notin \{f(u_1u), f(w_1w)\}$  puisque  $|\{f(u_1u), f(w_1w)\}| \leq 2$ . Nous pouvons finalement choisir  $f(vw) \notin \{f(u_1u), f(w_1w)\}$  sachant que nous avons au moins une couleur disponible ( $f$  est acyclique puisque  $C_f(v) \cap C_f(w) = \emptyset$ ).  $\square$

**Lemme 4.17.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.3(b).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus \{x, v_2, w_2\}$ . Considérons les trois graphes de la figure 4.4. Les couleurs en gras sont les couleurs de la  $\Delta$ -arête-coloration acyclique partielle  $f$  de  $H$ , et la notation  $\mathbf{a/b}$  signifie que nous considérons deux configurations possibles (couleur  $a$  ou couleur  $b$ ) sur la même figure.

Nous considérons quatre configurations distinctes dépendants des couleurs de  $uu_1$ ,  $vv_1$  et  $ww_1$  :  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$ ,  $(1, 2, 2)$  et  $(1, 2, 3)$ . La figure 4.4 montre les quatre cas possibles et donne une possible extension de l'arête-coloration acyclique requise.  $\square$

Nous montrons maintenant que le graphe  $H$  est tel que  $\text{mad}(H) \geq \frac{7}{3}$ . Pour cela, nous utilisons une procédure de déchargement. Nous affectons à chaque sommet  $v$  de  $H$  une charge initiale  $\omega(v) = d(v)$ , et nous utilisons les règles de déchargement suivantes :

**Règle 1.** Chaque 3-sommet donne  $\frac{1}{3}$  à chacun de ses 3-voisins ayant un 2-voisin.

**Règle 2.** Chaque 3-sommet donne  $\frac{1}{6}$  à chacun de ses 2-voisins.



Nous notons  $\omega^*(v)$  la nouvelle charge du sommet  $v$  après la procédure de déchargement. Soit  $v$  un  $k$ -sommet ; nous allons prouver que la nouvelle charge de chaque sommet  $v$  est au moins  $\frac{7}{3}$ . Nous considérons les cas suivants (rappelons que  $H$  ne contient pas de 1-sommet) :

- si  $k = 2$ , alors  $\omega(v) = 2$  et  $\omega^*(v) \geq 2 + \min\{\frac{1}{3}; 2 \cdot \frac{1}{6}\} = \frac{7}{3}$ , puisque d'après le lemme 4.16, un 2-sommet a au moins un  $\geq 3$ -voisin ;
- si  $k = 3$ , alors  $\omega(v) = 3$  et  $\omega^*(v) \geq 3 - \max\{2 \cdot \frac{1}{3}; \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6}; 3 \cdot \frac{1}{6}\} = \frac{7}{3}$  ;
- si  $k \geq 4$ , alors  $\omega(v) = k$  et  $\omega^*(v) \geq k - k \cdot \frac{1}{3} > \frac{7}{3}$ .

Nous pouvons observer que

$$\sum_{v \in V(H)} \omega(v) = \sum_{v \in V(H)} \omega^*(v) = \sum_{v \in V(H)} d(v),$$

et

$$\text{mad}(H) \geq \frac{2|A(H)|}{|V(H)|} = \frac{\sum_{v \in V(H)} d(v)}{|V(H)|} = \frac{\sum_{v \in V(H)} \omega^*(v)}{|V(H)|} \geq \frac{\frac{7}{3}|V(H)|}{|V(H)|} = \frac{7}{3}.$$

La contradiction avec l'hypothèse  $\text{mad}(H) < \frac{7}{3}$  conclut la preuve du théorème 4.9.

### 4.3.2 Preuve du théorème 4.12

Pour prouver ce théorème, nous utilisons la même technique que celle utilisée dans la section précédente.

Soit  $H$  un contre-exemple minimal (au sens de l'inclusion en tant que sous-graphe) du théorème 4.12 et  $\Delta = \Delta(H)$ . Dans presque tous les cas, nous considérerons une adst-coloration partielle  $f$  que nous étendrons comme suit : pour un arc non encore colorié  $\vec{uv}$ , nous déterminerons initialement ses couleurs disponibles, puis nous nous assurerons, en recoloriant certains arcs si nécessaire, que ces couleurs soient également acceptables pour  $\vec{uv}$ .

Nous montrerons dans les lemmes suivants que  $H$  ne contient aucune des configurations de la figure 4.5. Rappelons que nous utilisons les conventions de dessin suivantes pour les configurations : un sommet *noir* est un sommet totalement défini, *i.e.* tous ses voisins apparaissent sur le dessin, alors qu'un sommet *blanc* est un sommet partiellement défini, *i.e.* tous ses voisins n'apparaissent pas obligatoirement sur le dessin.

**Remarque.** D'après le théorème 4.3, tout graphe de degré au plus trois admet une 4-adst-coloration. Nous pouvons par conséquent supposer que  $\Delta \geq 4$  dans les arguments qui vont suivre.

**Lemme 4.18.** *Le graphe  $H$  ne contient pas les configurations des figures 4.5(a) et 4.5(b).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus uu_1$ . Nous pouvons choisir  $f(uu_1) \notin F^f(uu_1)$  puisque toute couleur disponible pour  $uu_1$  est également acceptable (aucun circuit de  $H$  ne contient  $uu_1$ ) et  $|F^f(uu_1)| = |C_f(u_1)| \leq \Delta - 1$ .  $\square$

**Lemme 4.19.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(c).*

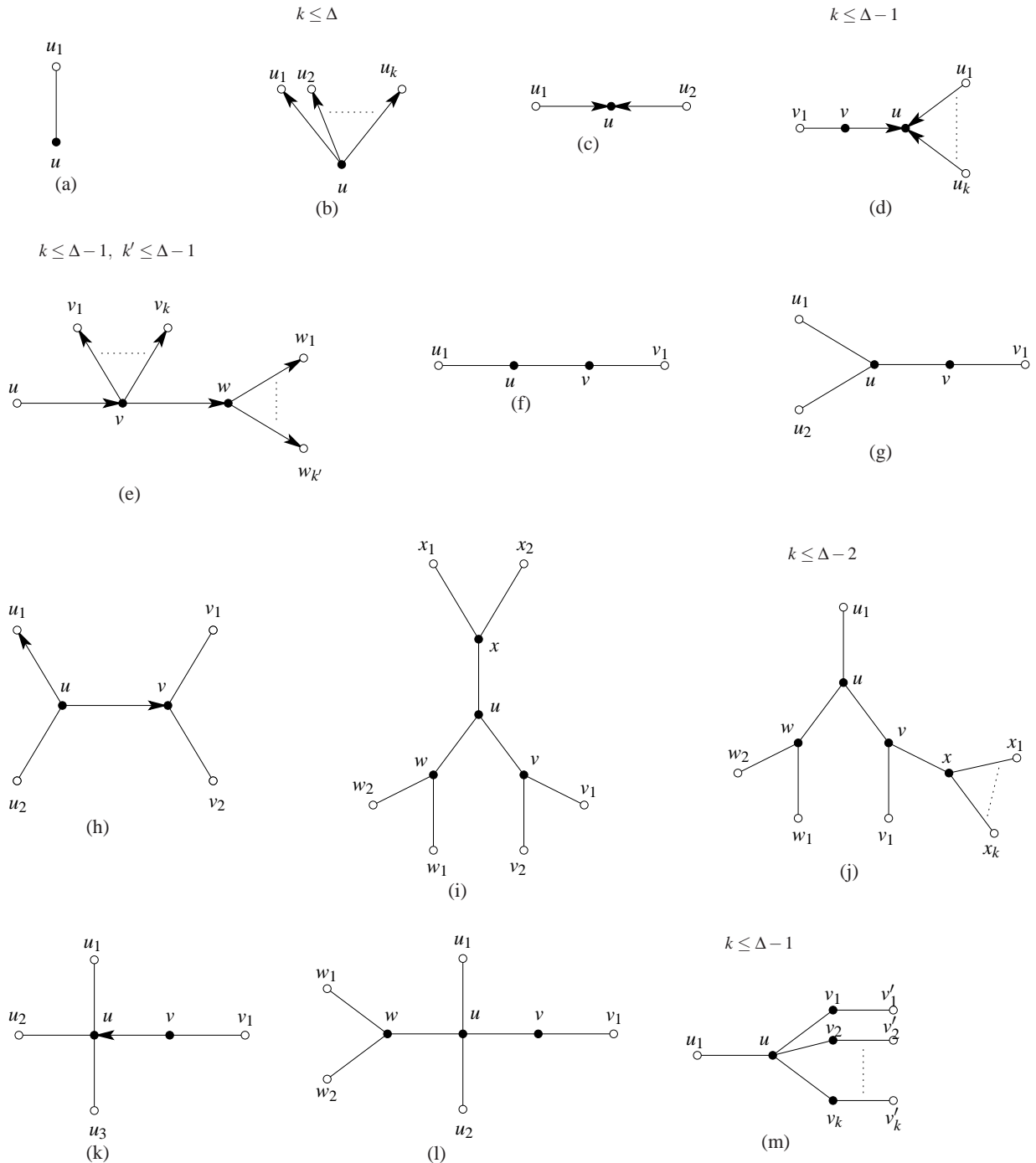


FIG. 4.5 – Configurations interdites du théorème 4.12.

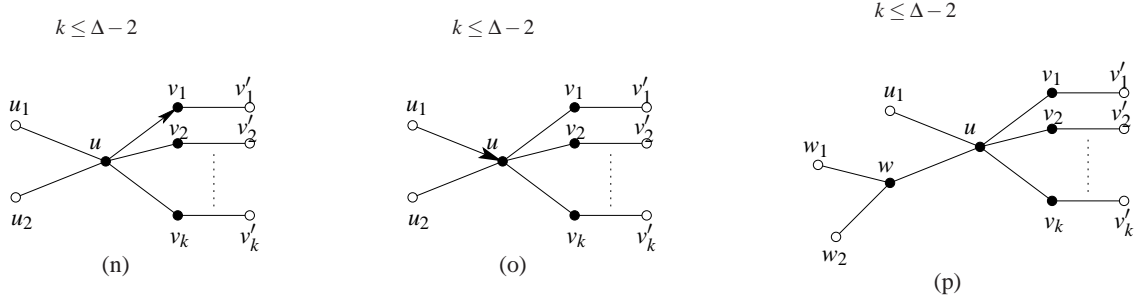


FIG. 4.5 – Configurations interdites du théorème 4.12 (suite).

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus \overrightarrow{u_1 u}$ . Nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{u_1 u}) \notin F^f(\overrightarrow{u_1 u})$  puisque toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{u_1 u}$  est également acceptable (aucun circuit de  $H$  ne contient  $\overrightarrow{u_1 u}$ ) et  $|F^f(\overrightarrow{u_1 u})| = |C_f^-(u_1) \cup C_f(u)| \leq \Delta - 1 + 1 = \Delta$ .  $\square$

**Remarque.** D'après les deux lemmes précédents, nous savons que si  $u$  est un 2-sommet de  $H$ , alors  $u$  aura exactement un arc entrant et exactement un arc sortant ( $d^-(u) = d^+(u) = 1$ ).

**Lemme 4.20.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(d).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus \overrightarrow{vu}$ . Nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{vu}) \notin F^f(\overrightarrow{vu})$  puisque toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{vu}$  est également acceptable (aucun circuit de  $H$  ne contient  $\overrightarrow{vu}$ ) et  $|F^f(\overrightarrow{vu})| = |C_f^-(v) \cup C_f(u)| \leq 1 + \Delta - 1 = \Delta$ .  $\square$

**Lemme 4.21.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(e).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus \overrightarrow{vw}$ . Supposons tout d'abord que  $f(\overrightarrow{uw}) \notin C_f^+(w)$ ; nous avons donc  $C_f^-(v) \cap C_f^+(w) = \emptyset$  et par conséquent toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{vw}$  est également acceptable : nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{vw}) \notin F^f(\overrightarrow{vw})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{vw})| = |C_f^-(v) \cup C_f(w)| \leq 1 + \Delta - 1 = \Delta$ .

Supposons maintenant que  $f(\overrightarrow{uw}) \in C_f^+(w)$ . Sans perte de généralité, soit  $f(\overrightarrow{uw}) = f(\overrightarrow{ww_1}) = \dots = f(\overrightarrow{ww_n})$  pour tout  $n$ ,  $1 \leq n \leq k$ . Sachant que  $|F^f(\overrightarrow{ww_i})| \leq \Delta - 1$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{ww_i}) \notin F^f(\overrightarrow{ww_i}) \cup f(\overrightarrow{uw})$ , ce qui nous conduit directement au cas précédent.  $\square$

**Remarque.** D'après les lemmes que nous venons de prouver, si  $[u, v, w]$  est un 2-chemin de  $H$ , alors l'un des deux sommets  $v$  et  $w$  doit avoir au moins deux arcs entrants ( $d^-(v) \cdot d^-(w) \geq 2$ ).

**Lemme 4.22.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(f).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus uv$ . Supposons tout d'abord que  $f(uu_1) \neq f(vv_1)$ ; nous pouvons choisir  $f(uv) \notin F^f(uv)$  puisque toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{uv}$  est également acceptable (nous avons  $C_f(u) \cap C_f(v) = \emptyset$ ) et  $|F^f(uv)| = 2 < \Delta + 1$ .

Supposons maintenant  $f(uu_1) = f(vv_1)$ . Soit  $c \notin F^f(uv) \cup C_f(v_1) = C_f(v_1)$ ; nous avons  $|C_f(v_1)| \leq \Delta$ , et par conséquent une couleur existe et est disponible pour  $uv$ ; de plus, puisque  $c \notin C_f(v_1)$ ,  $c$  est aussi une couleur acceptable pour  $uv$  et donc nous posons  $f(uv) = c$ .  $\square$

**Lemme 4.23.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(g).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus uv$ . Soient  $f(uu_1) = a$ ,  $f(uu_2) = b$  et  $f(vv_1) = c$ . D'après les lemmes 4.18, 4.19 et 4.21, il existe  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $\vec{u_i u} \in A(H)$ ; sans perte de généralité, supposons que  $\vec{u_1 u} \in A(H)$ ; ceci implique  $a \neq b$ . Nous avons deux cas à considérer :

1.  $|\{a, b, c\}| = 3$ .

Nous avons  $C_f(u) \cap C_f(v) = \emptyset$  et donc toute couleur disponible pour  $\vec{uv}$  est acceptable pour  $\vec{uv}$  (quelle que soit la couleur de  $\vec{uv}$ , les circuits contenant cet arc ne seront pas bicolores). Nous pouvons donc choisir  $f(uv) \notin F^f(uv)$  puisque  $|F^f(uv)| \leq 3 < \Delta$ .

2.  $|\{a, b, c\}| = 2$ .

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $a = c$ . Supposons que  $[u, v, v_1]$  est un chemin; d'après le lemme 4.21, nous avons  $d^-(v_1) \geq 2$ . Soit  $d \notin S = F^f(\vec{uv}) \cup C_f^+(v_1)$ ; une telle couleur existe puisque  $|S| \leq 2 + \Delta - 2 = \Delta$ , et est disponible pour  $uv$ ; de plus, puisque  $d \notin C_f^+(v_1)$ ,  $d$  est également acceptable pour  $uv$  et par conséquent nous posons  $f(uv) = d$ .

Supposons maintenant que  $[v_1, v, u]$  est un chemin; nous avons  $d^-(u) = 2$  d'après le lemme 4.20. Puisque  $C_f^-(v) \cap C_f^+(u) = \emptyset$ , toute couleur disponible pour  $\vec{vu}$  est acceptable pour  $\vec{vu}$  (quelle que soit la couleur de  $\vec{vu}$ , les circuits contenant cet arc ne seront pas bicolores). Nous choisissons  $f(\vec{vu}) \notin F^f(\vec{vu})$  puisque  $|F^f(\vec{vu})| = 2 < \Delta$ .  $\square$

**Lemme 4.24.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(h).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus \vec{uv}$ . D'après le lemme 4.18, nous avons  $\vec{u_2 u} \in A(H)$ , et d'après le lemme 4.21,  $d^-(v) \geq 2$  (sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $\vec{v_1 v} \in A(H)$ ).

Supposons que soit  $\vec{v_2 v} \in A(H)$ , soit  $f(\vec{u_2 u}) \neq f(\vec{v_1 v})$ ; nous avons alors  $C_f^-(u) \cap C_f^+(v) = \emptyset$  et donc toute couleur disponible pour  $\vec{uv}$  est également acceptable; nous pouvons donc choisir  $f(\vec{uv}) \notin F^f(\vec{uv})$  puisque  $|F^f(\vec{uv})| \leq 3 < \Delta$ .

Supposons maintenant que  $f(\vec{u_2 u}) = f(\vec{v_1 v})$ . Considérons l'ensemble de couleurs  $S = F^f(\vec{uv}) \cup (C_f^-(u_2) \cap C_f^+(v_2))$ . Clairement, toute couleur  $c \notin S$  est acceptable pour  $\vec{uv}$ . Si  $|S| \leq \Delta$ , nous pouvons choisir  $f(\vec{uv}) \notin S$ . Si  $|S| = \Delta + 1$ , ceci implique que  $C_f^-(u_2) = C_f^+(v_2)$ ,  $d^-(u_2) = d^+(v_2) = \Delta - 1$  et  $f(\vec{v_1 v}) \notin C_f^+(v_2)$ . Dans ce cas, nous décolorions  $\vec{v_1 v}$  et choisissons un arc sortant de  $v_2$ , noté  $\vec{v_2 v'_2}$ . Soit  $f(\vec{v_2 v'_2}) = d$ ; puisque  $|F^f(\vec{v_2 v'_2})| = |C_f^+(v_2)| \leq \Delta - 1$ , nous pouvons recolorier  $\vec{v_2 v'_2}$  et choisir  $f(\vec{v_2 v'_2}) \notin F^f(\vec{v_2 v'_2}) \cup \{d\}$ . Donc, la couleur  $d$  est acceptable  $\vec{v_1 v}$ ; en effet,  $f(\vec{v_1 v}) \notin \{f(\vec{v_2 w}) \mid w \in N^+(v_2) \setminus v'_2\}$  et  $d \notin C_f^+(v'_2)$ . Nous posons ensuite  $f(\vec{v_1 v}) = d$ , ce qui nous mène au précédent cas ( $f(\vec{u_2 u}) \neq f(\vec{v_1 v})$ ).  $\square$

**Lemme 4.25.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(i).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus u$ . D'après le lemme 4.24,  $u$  possède deux arcs entrants et un arc sortant (sans perte de généralité, supposons que  $\vec{vu}, \vec{w\dot{u}}, \vec{u\dot{x}} \in A(H)$ ). Nous choisissons tout d'abord  $f(\vec{vu}) \notin S = F^f(\vec{vu}) \cup \{f(xx_1), f(xx_2)\}$  puisque  $|S| \leq 2 + 2 \leq \Delta$ . Soit  $T = F^f(\vec{w\dot{u}}) \cup \{f(xx_1), f(xx_2)\}$ . Nous considérons deux cas :

1. Si  $|T| \leq \Delta$ , nous pouvons choisir  $f(\vec{w\dot{u}}) \notin T$ . Par conséquent, nous avons  $C_f^-(u) \cap C_f^+(x) = \emptyset$ , et donc tout couleur disponible pour  $\vec{u\dot{x}}$  est acceptable et nous pouvons définir  $f(\vec{u\dot{x}}) \notin F^f(\vec{u\dot{x}})$  puisque  $|F^f(\vec{u\dot{x}})| \leq 4 \leq \Delta$ .
2. Si  $|T| = \Delta + 1$ , ceci implique que  $\Delta = 4$ . Supposons sans perte de généralité que  $C_f^-(v) = C_f^-(w) = \{1, 2\}$  et  $C_f^+(x) = \{3, 4\}$ . Nous pouvons recolorier  $\vec{vu}$  en posant  $f(\vec{vu}) = 3$ , et poser  $f(\vec{w\dot{u}}) = 4$ ; finalement, la couleur 5 est clairement acceptable pour  $\vec{u\dot{x}}$  : nous posons  $f(\vec{u\dot{x}}) = 5$ .

□

**Lemme 4.26.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(j).*

**Preuve.** D'après les lemmes 4.18 et 4.24, nous avons  $d^+(u) \leq 1$ . Nous allons alors considérer trois cas :

1. Supposons tout d'abord que  $u$  est un sommet puits et soit  $H' = H \setminus \vec{w\dot{u}}$ . Sachant que  $C_f^-(w) \cap C_f^+(u) = \emptyset$ , toute couleur disponible pour  $\vec{w\dot{u}}$  est acceptable pour  $\vec{w\dot{u}}$  et donc nous pouvons choisir  $f(\vec{w\dot{u}}) \notin F^f(\vec{w\dot{u}})$  puisque  $|F^f(\vec{w\dot{u}})| \leq 4 \leq \Delta$ .
2. Supposons maintenant qu'un des arcs  $\vec{uv}$  ou  $\vec{u\dot{v}}$  appartient à  $A(H)$  (sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $\vec{uv} \in A(H)$  et donc  $\vec{w\dot{u}} \in A(H)$ ) et soit  $H' = H \setminus \vec{w\dot{u}}$ . D'après le lemme 4.24, nous avons  $\vec{w_1\dot{w}}, \vec{w_2\dot{w}} \in A(H)$ .

Si  $C_f^-(w) \cap C_f^+(u) = \emptyset$ , toute couleur disponible pour  $\vec{w\dot{u}}$  est aussi acceptable, et par conséquent, nous pouvons choisir  $f(\vec{w\dot{u}}) \notin F^f(\vec{w\dot{u}})$  puisque  $|F^f(\vec{w\dot{u}})| \leq 4 \leq \Delta$ .

Sinon,  $f(\vec{uv}) \in C_f^-(w)$  (sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $f(\vec{uv}) = f(\vec{w_1\dot{w}})$ ).

Soit  $S = F^f(\vec{w\dot{u}}) \cup C_f^+(v)$ . Toute couleur  $c \notin S$  est acceptable pour  $\vec{w\dot{u}}$  puisque  $c \notin C_f^+(v)$  et donc, si  $|S| \leq \Delta$ , nous pouvons choisir  $f(\vec{w\dot{u}}) \notin S$ . Sinon, nous avons  $|S| = \Delta + 1$ , ce qui implique

que  $\Delta = 4$  et  $d^+(v) = 2$ ; par conséquent, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $f(\vec{w_1\dot{w}}) = f(\vec{uv}) = 1, f(\vec{w_2\dot{w}}) = 2, f(\vec{u_1\dot{u}}) = 3, f(\vec{v_1\dot{v}}) = 4$  et  $f(\vec{v\dot{x}}) = 5$ . Alors, nous effaçons les couleurs de  $\vec{uv}$  et de  $\vec{v_1\dot{v}}$ , et nous posons  $f(\vec{uv}) = 4$ ; maintenant, toute couleur  $c \notin F^f(\vec{v_1\dot{v}})$  est acceptable puisque  $C_f^-(v) \cap C_f^+(v_1) = \emptyset$ , et nous pouvons poser  $f(\vec{v_1\dot{v}}) = c$  puisque  $|F^f(\vec{v_1\dot{v}})| \leq \Delta$ . Ceci nous conduit au cas précédemment traité ( $f(\vec{uv}) \notin \{f(\vec{w_1\dot{w}}), f(\vec{w_2\dot{w}})\}$ ).

3. Supposons finalement que  $\vec{uu_1} \in A(H)$ ; d'après les lemmes 4.18 et 4.24, nous avons  $\vec{v_1\dot{v}}, \vec{x\dot{v}}, \vec{w_1\dot{w}}, \vec{w_2\dot{w}} \in A(H)$ . Sachant que  $k \leq \Delta - 2$ , nous avons  $d(x) \leq \Delta - 1$ . Soit  $H' = H \setminus v$ . Nous choisissons dans un premier temps  $f(\vec{v_1\dot{v}}) \notin S = F^f(\vec{v_1\dot{v}}) \cup f(\vec{uu_1})$  puisque  $|S| \leq \Delta - 1 + 1 = \Delta$  et  $f(\vec{x\dot{v}}) \notin T = F^f(\vec{xv}) \cup f(\vec{uu_1}) = C_f^-(x) \cup \{f(\vec{v_1\dot{v}}), f(\vec{uu_1})\}$  puisque  $|T| \leq \Delta - 2 + 2 = \Delta$ . Par

conséquent, tout couleur disponible pour  $\vec{v}\vec{u}$  est également acceptable puisque  $C_f^-(v) \cap C_f^+(u) = \emptyset$ ; nous pouvons donc choisir à présent  $f(\vec{v}\vec{u}) \notin F^f(\vec{v}\vec{u})$ .

□

**Lemme 4.27.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(k).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus v$ . D'après le lemme 4.18, nous avons  $\vec{v}_1\vec{v} \in A(H)$  et d'après le lemme 4.20 nous avons  $d^+(u) > 0$  (sans perte de généralité, supposons que  $\vec{u}\vec{u}_1 \in A(H)$ ). Nous considérons trois cas dépendant du cardinal de l'ensemble de couleurs  $C_f^+(u)$ .

1.  $|C_f^+(u)| = 1$ .

Nous choisissons  $f(\vec{v}_1\vec{v}) \notin S = F^f(\vec{v}_1\vec{v}) \cup C_f^+(u)$  puisque  $|S| \leq \Delta - 1 + 1 = \Delta$ . Alors, nous avons  $C_f^-(v) \cap C_f^+(u) = \emptyset$  et donc toute couleur disponible pour  $\vec{v}\vec{u}$  est également acceptable. Nous choisissons alors  $f(\vec{v}\vec{u}) \notin F^f(\vec{v}\vec{u})$  puisque  $|F^f(\vec{v}\vec{u})| = 2 < \Delta$ .

2.  $|C_f^+(u)| = 2$ .

Sans perte de généralité, supposons que  $f(\vec{u}\vec{u}_1) = 1$  et  $f(\vec{u}\vec{u}_2) = 2$ . Soit  $S = F^f(\vec{v}_1\vec{v}) \cup C_f^+(u) = C_f^-(v_1) \cup C_f^+(u) = C_f^-(v_1) \cup C_f^+(u)$ . Clairement, si  $|S| \leq \Delta$ , nous pouvons procéder comme dans le cas précédent.

Si  $|S| = \Delta + 1$ , alors  $C_f^-(v_1) = \{3, 4, \dots, \Delta + 1\}$ . Supposons premièrement que  $\vec{u}\vec{u}_3 \in A(H)$  et sans perte de généralité supposons que  $f(\vec{u}\vec{u}_3) = 2$ . Nous pouvons recolorier  $\vec{u}\vec{u}_1$  et choisir  $f(\vec{u}\vec{u}_1) \notin F^f(\vec{u}\vec{u}_1) \cup \{1\}$  puisque  $|F^f(\vec{u}\vec{u}_1)| \leq \Delta - 1$ . Ceci implique que  $|S| \leq \Delta$  et par conséquent, nous pouvons procéder comme dans le cas précédent.

Supposons maintenant que  $\vec{u}_3\vec{u} \in A(H)$  et sans perte de généralité que  $f(\vec{u}_3\vec{u}) = 3$ . Soit  $T = \{4, 5, \dots, \Delta + 1\}$ .

- S'il existe un entier  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $T \not\subseteq C_f^+(u_i)$ , nous avons  $|T \setminus C_f^+(u_i)| \neq \emptyset$  et par conséquent, nous pouvons choisir une couleur  $c \in T \setminus C_f^+(u_i)$  et poser  $f(\vec{v}_1\vec{v}) = i$  et  $f(\vec{v}\vec{u}) = c$ : la couleur  $c$  est acceptable pour  $\vec{v}\vec{u}$  puisque  $f(\vec{u}\vec{u}_{3-i}) \neq f(\vec{v}_1\vec{v})$  et  $c \notin C_f^+(u_i)$ .

- Si pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $T \subseteq C_f^+(u_i)$ , alors nous décolorons l'arc  $\vec{u}\vec{u}_1$  et nous considérons quatre sous-cas distincts :

- $C_f^+(u_1) = T$  et  $2 \notin C_f^-(u_1)$ .

Nous pouvons poser  $f(\vec{u}\vec{u}_1) = 2$  (la couleur 2 est acceptable pour  $\vec{u}\vec{u}_1$  puisque  $3 \notin C_f^+(u_1)$ ) et  $f(\vec{v}_1\vec{v}) = 1$ . Nous avons donc  $C_f^-(v) \cap C_f^+(u) = \emptyset$  ce qui implique que toute couleur disponible pour  $\vec{v}\vec{u}$  est aussi acceptable; nous pouvons alors choisir  $f(\vec{v}\vec{u}) \notin F^f(\vec{v}\vec{u})$  puisque  $|F^f(\vec{v}\vec{u})| = 3 < \Delta$ .

Notons que si nous considérons  $C_f^+(u_2) = T$  et  $1 \notin C_f^-(u_2)$ , de la même manière, nous étendons la coloration  $f$  à  $H$ .

- $C_f^+(u_1) = T \cup \{2\}$ .

Soit  $\vec{u}_1\vec{w}$  l'arc sortant du sommet  $u_1$  tel que  $f(\vec{u}_1\vec{w}) = 2$ . Nous commençons par effacer la couleur de l'arc  $\vec{u}\vec{u}_1$  et nous posons  $f(\vec{u}_1\vec{w}) \notin U = F^f(\vec{u}_1\vec{w}) \cup \{2\}$  (nous avons  $|U| \leq$

$\Delta - 1 + 1 = \Delta$ ); alors, la couleur 2 est acceptable pour  $\overrightarrow{uu_1}$  puisque  $f(\overrightarrow{u_1x}) \notin \{f(\overrightarrow{u_1x}) \mid x \in N^+(u_1) \setminus w\}$  et  $2 \notin C_f^+(w)$ : nous posons  $f(\overrightarrow{uu_1}) = 2$ . Nous pouvons alors poser  $f(\overrightarrow{v_1v}) = 1$ , ce qui implique que  $C_f^-(v) \cap C_f^+(u) = \emptyset$ . Par conséquent, toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{vu}$  est également acceptable et nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{vu}) \notin F^f(\overrightarrow{vu})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{vu})| = 3 < \Delta$ .

Notons que si nous considérons  $C_f^+(u_2) = T \cup \{1\}$ ., de la même manière, nous étendons la coloration  $f$  à  $H$ .

$$- C_f^+(u_1) = T \cup \{3\}.$$

Soit  $\overrightarrow{u_1w}$  l'arc sortant du sommet  $u_1$  tel que  $f(\overrightarrow{u_1w}) = 3$ . Nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{u_1w}) \notin U = F^f(\overrightarrow{u_1w}) \cup \{3\}$  (nous avons  $|U| \leq \Delta - 1 + 1$ ). À ce point, nous avons  $C_f^+(u_1) = T$  et  $2 \notin C_f^-(u_1)$ , ou  $C_f^+(u_1) = T \cup \{2\}$ : ces deux sous-cas ont déjà été traités précédemment.

Notons que si nous considérons  $C_f^+(u_2) = T \cup \{3\}$ ., de la même manière, nous aboutissons à deux sous-cas déjà traités.

$$- C_f^+(u_1) = T, C_f^-(u_1) = \{2\}, C_f^+(v_2) = T \text{ et } C_f^-(v_2) = \{1\}$$

Nous décolorions les arcs  $\overrightarrow{uu_1}$ ,  $\overrightarrow{uu_2}$  et  $\overrightarrow{u_3u}$ . Nous posons  $f(\overrightarrow{uu_1}) = 3$  et  $f(\overrightarrow{uu_2}) = 3$ . Nous avons à présent  $C_f^-(u_3) \cap C_f^+(u) = \emptyset$ : tout couleur disponible pour  $\overrightarrow{u_3u}$  est également acceptable. Nous choisissons donc  $f(\overrightarrow{u_3u}) \notin F^f(u_3u)$  (nous avons  $|F^f(\overrightarrow{u_3u})| \leq \Delta - 1 + 1$ ). Finalement, nous posons  $f(\overrightarrow{v_1v}) = 1$ , ce qui implique que  $C_f^-(v) \cap C_f^+(u) = \emptyset$ : nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{vu}) \notin F^f(\overrightarrow{vu})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{vu})| \leq 3 < \Delta$ .

$$3. |C_f^+(u)| = 3.$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que nous avons  $f(\overrightarrow{uu_1}) = 1$ ,  $f(\overrightarrow{uu_2}) = 2$ ,  $f(\overrightarrow{uu_3}) = 3$ . Soit  $S = F^f(\overrightarrow{v_1v}) \cup C_f^+(u)$ . Si  $|S| \leq \Delta$ , nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{v_1v}) \notin S$  et  $f(\overrightarrow{vu}) \notin F^f(\overrightarrow{vu})$  puisque toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{vu}$  est également acceptable (nous avons  $C_f^-(v) \cap C_f^+(u) = \emptyset$  et  $F^f(\overrightarrow{vu}) = 4 \leq \Delta$ ). Si  $|S| = \Delta + 1$ , ceci implique que  $\{4, 5, \dots, \Delta + 1\} \subseteq C_f^-(v_1)$  et par conséquent au moins deux couleurs de l'ensemble  $C_f^+(u)$  n'appartiennent pas à  $C_f^-(v_1)$ . Supposons sans perte de généralité que  $1 \notin C_f^-(v_1)$ . Nous choisissons alors  $f(\overrightarrow{uu_1}) \notin T = F^f(\overrightarrow{uu_1}) \cup \{1\}$  puisque  $|T| \leq \Delta - 1 + 1 = \Delta$ . Nous pouvons alors poser  $f(\overrightarrow{v_1v}) = 1$ , ce qui implique que  $C_f^-(v) \cap C_f^+(u) = \emptyset$ . Nous choisissons finalement  $f(\overrightarrow{vu}) \notin F^f(\overrightarrow{vu})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{vu})| \leq 4 \leq \Delta$ .

□

**Lemme 4.28.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(l).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus v$ . D'après le lemme 4.27, nous avons  $\overrightarrow{uv} \in A(H)$ , ce qui implique d'après le lemme 4.19 que  $\overrightarrow{v_1v} \in A(H)$ . D'après le lemme 4.27, nous avons  $d(v_1) \geq 5$  (par conséquent,  $\Delta \geq 5$ ), et d'après le lemme 4.21 nous avons  $d^-(v_1) \geq 2$ . Soit  $S = F^f(\overrightarrow{uv}) \cup C_f^+(v_1)$ . Si  $|S| \leq \Delta$ , nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{uv}) \notin S$ , ce qui implique que  $C_f^-(v) \cap C_f^+(v_1) = \emptyset$ : toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{v_1v}$  est également acceptable et donc nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{v_1v}) \notin F^f(\overrightarrow{v_1v})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{v_1v})| \leq \Delta$ . Si  $|S| = \Delta + 1$ , ceci signifie sans perte de généralité que  $f(\overrightarrow{u_1u}) = 1$ ,  $f(\overrightarrow{u_2u}) = 2$ ,  $f(\overrightarrow{u_3u}) = 3$  et  $C_f^+(v_1) = \{4, 5, \dots, \Delta + 1\}$ . Dans ce cas, nous décolorions l'arc  $\overrightarrow{wu}$ , ce qui implique que  $|S| \leq 2 + \Delta - 2 =$

$\Delta$  et nous posons  $f(\overrightarrow{uv}) = 3$ . Alors, nous choisissons  $f(\overrightarrow{wu}) \notin F^f(\overrightarrow{wu})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{wu})| \leq 5 \leq \Delta$ . Finalement, puisque  $3 \notin C_f^+(v_1)$ , toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{vv_1}$  est également acceptable : nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{vv_1}) \notin F^f(\overrightarrow{vv_1})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{vv_1})| \leq \Delta$ .  $\square$

**Remarque.** D'après les lemmes 4.18 et 4.19, pour les configurations des quatre figures 4.5(m), 4.5(n), 4.5(o) et 4.5(p), soit  $[u, v_i, v'_i]$  est un 2-chemin de  $H$ , soit  $[v'_i, v_i, u]$  est un 2-chemin de  $H$  pour tout  $i \in [1, k]$ .

**Lemme 4.29.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(m).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus v_1$ . Nous considérons deux cas distincts :

1. Supposons tout d'abord qu'il existe un entier  $i \in [1, k]$  tel que  $[u, v_i, v'_i]$  est un chemin de  $H$  (sans perte de généralité nous pouvons supposer que nous avons  $[u, v_1, v'_1]$ ). Nous pouvons poser  $f(\overrightarrow{v_1v'_1}) = c$  pour  $c \notin F^f(\overrightarrow{v_1v'_1})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{v_1v'_1})| \leq \Delta - 1$ . Toute couleur  $d \notin S = \{f(\overrightarrow{v_1v'_1})\} \cup C_f^-(u) \cup \{f(\overrightarrow{v'_jv_j}) \mid f(\overrightarrow{v_ju}) = c\}$  est acceptable pour  $\overrightarrow{uv_1}$  ; il est facile de vérifier que  $|S| \leq \Delta$  et par conséquent au moins une couleur est acceptable pour  $\overrightarrow{uv_1}$  : nous posons  $f(\overrightarrow{uv_1}) = d$ .
2. Supposons maintenant que  $[v'_i, v_i, u]$  est un 2-chemin de  $H$  pour tout entier  $i \in [1, k]$ . D'après le lemme 4.20, nous avons  $\overrightarrow{uu_1} \in A(H)$ . Nous pouvons alors choisir  $f(\overrightarrow{v'_1v_1}) \notin S = F^f(\overrightarrow{v'_1v_1}) \cup \{f(\overrightarrow{uu_1})\}$  puisque  $|S| \leq \Delta - 1 + 1 = \Delta$ . Alors, nous avons  $C_f^-(v_1) \cap C_f^+(u) = \emptyset$  ce qui implique que toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{v_1u}$  est également acceptable ; nous choisissons alors  $f(\overrightarrow{v_1u}) \notin F^f(\overrightarrow{v_1u})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{v_1u})| \leq \Delta$ .

$\square$

**Lemme 4.30.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(n).*

**Preuve.** Supposons premièrement que  $\overrightarrow{uv_i} \in A(H)$  pour tout entier  $i \in [1, k]$ . D'après le lemme 4.21, nous avons  $d^-(v'_i) \geq 2$  pour tout  $i \in [1, k]$ . Soit  $H' = H \setminus v_1$ . Nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{uv_1}) \notin S = F^f(\overrightarrow{uv_1}) \cup C_f^+(v'_1)$  puisque  $|S| \leq 2 + \Delta - 2 = \Delta$ . Alors, nous avons  $C_f^-(v_1) \cap C_f^+(v'_1) = \emptyset$  et par conséquent toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{v_1v'_1}$  est aussi acceptable : nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{v_1v'_1}) \notin F^f(\overrightarrow{v_1v'_1})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{v_1v'_1})| \leq \Delta$ .

Supposons maintenant qu'il existe un entier  $i \in [1, k]$  tel que  $\overrightarrow{v_iu} \in A(H)$  (sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $\overrightarrow{v_2u} \in A(H)$ ). Nous allons considérer deux cas dépendant de l'orientation des arcs  $uu_1$  et  $uu_2$  :

–  $\overrightarrow{uu_1}, \overrightarrow{uu_2} \in A(H)$ .

Soit  $H' = H \setminus v_1$ . Nous pouvons poser  $f(\overrightarrow{v_1v'_1}) = c$  pour  $c \notin F^f(\overrightarrow{v_1v'_1})$  puisque  $|F^f(\overrightarrow{v_1v'_1})| \leq \Delta - 1$ . Toute couleur  $d \notin S = \{f(\overrightarrow{v_1v'_1})\} \cup C_f^-(u) \cup \{f(\overrightarrow{v'_jv_j}) \mid f(\overrightarrow{v_ju}) = c\}$  est acceptable pour  $\overrightarrow{uv_1}$  ; par conséquent au moins une couleur est acceptable pour  $\overrightarrow{uv_1}$  puisque  $|S| \leq \Delta$  : nous posons  $f(\overrightarrow{uv_1}) = d$ .



–  $\overrightarrow{u_1 u} \in A(H)$ .

Soit  $H' = H \setminus v_2$ . Nous pouvons poser  $f(\overrightarrow{v'_2 v_2}) = c$  pour  $c \notin S = F^f(\overrightarrow{v'_2 v_2}) \cup \{f(uu_2)\}$  puisque  $|S| \leq \Delta - 1 + 1 = \Delta$ . Toute couleur  $d \notin T = \{f(\overrightarrow{v'_2 v_2})\} \cup C_f^-(u) \cup \{f(\overrightarrow{v_j v'_j}) \mid f(\overrightarrow{uv'_j}) = c\}$  acceptable pour  $\overrightarrow{v_2 u}$ ; par conséquent au moins une couleur est acceptable pour  $\overrightarrow{v_2 u}$  puisque  $|T| \leq \Delta$  : nous posons  $f(\overrightarrow{v_2 u}) = d$ .

□

**Lemme 4.31.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(o).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus v_1$ . D'après le lemme 4.30, nous avons  $\overrightarrow{v_i u} \in A(H)$  pour tout entier  $i \in [1, k]$ . Nous pouvons choisir  $f(\overrightarrow{v_1 v'_1}) \notin S = F^f(\overrightarrow{v_1 v'_1}) \cup \{f(uu_2)\}$  puisque  $|S| \leq \Delta - 1 + 1 = \Delta$ . Par conséquent,  $C_f^-(v_1) \cap C_f^+(u) = \emptyset$  et toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{v_1 u}$  est également acceptable ; nous choisissons donc  $f(\overrightarrow{v_1 u}) \notin F^f(\overrightarrow{v_1 u})$ .

□

**Lemme 4.32.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.5(p).*

**Preuve.** Soit  $H' = H \setminus uw$ . D'après les lemmes 4.30 et 4.31, nous avons  $\overrightarrow{v_i u} \in A(H)$  pour tout entier  $i \in [1, k-2]$ , et  $\overrightarrow{uu_1}, \overrightarrow{uw} \in A(H)$ . Toute couleur  $c \notin S = F^f(\overrightarrow{uu_2}) \cup \{f(\overrightarrow{v_j v'_j}) \mid f(\overrightarrow{v_j u}) \in \{f(ww_1), f(ww_2)\}\}$  est acceptable pour  $\overrightarrow{uw}$ ; par conséquent au moins une couleur est acceptable pour  $\overrightarrow{uw}$  : nous posons  $f(\overrightarrow{uw}) = c$ .

□

Nous allons maintenant montrer que  $\text{mad}(H) \geq \frac{133}{41}$ .

Dans la suite, un  $k$ -sommet fort désignera un  $k$ -sommet qui possède  $k-3$  2-voisins ; d'autre part, un  $k$ -sommet faible désignera un  $k$ -sommet ayant  $k-2$  2-voisins. Nous dirons qu'un 3-sommet est fort s'il possède au plus un 3-voisin, alors que nous dirons qu'il est faible s'il possède deux 3-voisins.

D'après le lemme 4.30, si  $H$  contient un  $k$ -sommet faible  $u$ , alors nous avons  $\overrightarrow{v_i u} \in A(H) \forall i \in [1, k-2]$ , où les sommets  $v_i$  sont les 2-voisins de  $u$ . Par conséquent, sachant que  $H$  ne contient pas de sommet source (d'après le lemme 4.18), un 2-sommet ne peut être adjacent à deux  $k$ -sommets faibles.

Nous affectons à chaque sommet  $v$  une charge initiale  $\omega(v) = d(v)$ , puis nous utilisons les règles de déchargement suivantes :

**Règle 1.** Chaque 3-sommet fort donne  $\frac{2}{41}$  à chacun de ses 3-voisins.

**Règle 2.** Chaque 4-sommet donne  $\frac{27}{41}$  à chacun de ses 2-voisins et  $\frac{6}{41}$  à chacun de ses 3-voisins.

**Règle 3.** Chaque  $\geq 5$ -sommet donne  $\frac{6}{41}$  à chacun de ses 3-voisins.

**Règle 4.** Chaque  $\geq 5$ -sommet faible donne  $\frac{24}{41}$  à chacun des ses 2-voisins.

**Règle 5.** Chaque  $\geq 5$ -sommet fort donne  $\frac{27}{41}$  à chacun de ses 2-voisins.

Nous notons  $\omega^*(v)$  la nouvelle charge du sommet  $v$  après déchargement.

Soit  $v$  un  $k$ -sommet de  $H$  ; nous allons prouver que la nouvelle charge  $\omega^*(v)$  de chaque sommet  $v$  est au moins  $\frac{133}{41}$ . Nous considérons les différents cas suivants (rappelons que  $H$  ne contient pas de 1-sommet) :

- Si  $k = 2$ , alors  $\omega(v) = 2$  et  $\omega^*(v) \geq 2 + \frac{24}{41} + \frac{27}{41} = \frac{133}{41}$ , puisque d'après le lemme 4.30 un 2-sommet n'est pas adjacent à deux  $\geq 5$ -sommets faibles.
- Si  $k = 3$  et  $v$  est un 3-sommet fort, alors  $\omega(v) = 3$  et  $\omega^*(v) \geq 3 + 2 \cdot \frac{6}{41} - \frac{2}{41} = \frac{133}{41}$ .
- Si  $k = 3$  et  $v$  est un 3-sommet faible, alors  $\omega(v) = 3$  et  $\omega^*(v) = 3 + 2 \cdot \frac{2}{41} + \frac{6}{41} = \frac{133}{41}$ , puisque d'après le lemme 4.26 un 3-sommet faible est adjacent à deux 3-sommets fort.
- Si  $k = 4$  et  $v$  est adjacent à un 2-sommet, alors  $\omega(v) = 4$  et  $\omega^*(v) \geq 4 - \frac{27}{41} = \frac{137}{41}$ , puisque d'après le lemme 4.27, un 4-sommet est relié à un 2-sommet par un arc sortant et par conséquent, d'après les lemmes 4.30 et 4.31, un 4-sommet ne peut avoir qu'un seul 2-voisin ; de plus, d'après le lemme 4.28, un 4-sommet ne peut avoir à la fois un 3-voisin et un 2-voisin.
- Si  $k = 4$  et  $v$  n'est pas adjacent à un 2-sommet, alors  $\omega(v) = 4$  et  $\omega^*(v) \geq 4 - 4 \cdot \frac{6}{41} = \frac{140}{41}$ .
- Si  $k \geq 5$  et  $v$  est un  $k$ -sommet fort, alors  $\omega(v) = k$  et  $\omega^*(v) \geq k - 3 \cdot \frac{6}{41} - (k-3) \cdot \frac{27}{41} \geq \frac{133}{41}$  ;
- Si  $k \geq 5$  et  $v$  est un  $k$ -sommet faible, alors  $\omega(v) = k$  et  $\omega^*(v) \geq k - (k-2) \cdot \frac{24}{41} \geq \frac{133}{41}$ , puisque d'après le lemme 4.32 les deux autres voisins d'un  $k$ -sommet faible sont des  $\geq 4$ -sommets.

Comme dans la preuve du théorème 4.9, nous obtenons que  $\text{mad}(H) \geq \frac{133}{41}$ . Cette contradiction permet de conclure la preuve du théorème 4.12.

## 4.4 Les 2-arbres partiels

Dans cette dernière partie sur l'étoile arboricité orientée acircuitique, nous nous intéressons à la classe des 2-arbres partiels, classe de graphes équivalente à la classe des graphes sans mineur  $K_4$  ou encore à la classe des graphes séries-parallèles.

Rappelons que le degré entrant maximum d'un graphe orienté  $G$ , noté  $\Delta^-(G)$ , est le maximum des degrés entrants de chaque sommet de  $G$ .

Nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 4.33.** *Tout 2-arbre partiel  $G$  qui n'est pas un circuit, de degré maximum  $\Delta(G)$ , admet une  $k$ -adst-coloration, où  $k = \min\{\Delta(G), \Delta^-(G) + 2\}$ .*

Pour prouver le théorème 4.33, nous allons nous appuyer sur un lemme structurel dû à Lih, Wang et Zhu [LWZ03] que nous avons déjà utilisé lorsque nous avons étudié le nombre chromatique orienté des 2-arbres partiels (voir le chapitre 2, § 2.2.2).

Pour un graphe  $G$  et un sommet  $v \in V(G)$ , nous notons :

$$D_G(v) = |\{u \in V(G) \text{ tel que } [d_G(u) \geq 3 \text{ et } uv \in A(G)] \\ \text{ou } [\exists w \in V(G), d_G(w) = 2, uw, wv \in A(G)]\}|.$$

**Lemme 4.34.** [LWZ03] *Soit  $G$  un 2-arbre partiel. Alors, au moins une des affirmations suivantes est satisfaite :*

1.  $\delta(G) \leq 1$  ;
2. il existe deux 2-sommets adjacents ;
3. il existe un  $\geq 3$ -sommet  $v$  tel que  $D_G(v) \leq 2$ .

Une  $(k,l)$ -adst-coloration d'un graphe  $G$  est une  $k$ -adst-coloration  $f$  de  $G$  telle que pour chaque sommet  $v \in V(G)$ ,  $|C_f^+(v)| \leq l$ .

Nous montrons en réalité un résultat plus fort que celui du théorème 4.33 :

**Théorème 4.35.** *Tout 2-arbre partiel  $G$  (qui n'est pas un circuit) de degré maximum  $\Delta(G)$  admet une  $(k,2)$ -adst-coloration, où  $k = \min\{\Delta(G), \Delta^-(G) + 2\}$ .*

Dans la suite de cette partie, le graphe  $H$  est un contre-exemple minimal (en terme de nombre de sommets et d'arcs, i.e.  $|V(H)| + |A(H)|$ ) du théorème 4.35 ( $H$  n'est par conséquent pas un circuit). Soient  $\Delta = \Delta(H)$  et  $\Delta^- = \Delta^-(H)$ . Dans toutes les preuves qui suivent, nous allons procéder de façon similaire. Nous supposons successivement que  $H$  contient les configurations énoncées dans le lemme structurel 4.34, et pour chacune d'entre elles, nous considérons une réduction  $H'$  de  $H$  obtenue à partir de  $H$  en supprimant certains sommets et/ou certains arcs, ou en contractant certains arcs. Nous avons alors clairement  $\Delta(H') \leq \Delta$ . Par minimalité de  $H$ , il existe une  $(\min\{\Delta(H'), \Delta^-(H') + 2\}, 2)$ -adst-coloration  $f$  de  $H'$ , qui est également une  $(\min\{\Delta, \Delta^- + 2\}, 2)$ -adst-coloration de  $H'$ . La coloration  $f$  est donc une  $(\min\{\Delta, \Delta^- + 2\}, 2)$ -adst-coloration partielle de  $H$ . Nous montrons alors comment étendre cette coloration partielle de  $H$  à une  $(\min\{\Delta, \Delta^- + 2\}, 2)$ -adst-coloration de  $H$ . L'existence d'une telle coloration  $f$  de  $H$  prouve que  $H$  ne contient aucune des configurations considérées.

**Lemme 4.36.** *Le graphe  $H$  est connexe.*

**Preuve.** Supposons que  $H = H_1 \uplus H_2$  (union disjointe) où  $H_1$  et  $H_2$  ne sont pas des graphes vides. Par minimalité de  $H$ , les graphes  $H_1$  et  $H_2$  admettent donc respectivement une  $(\min\{\Delta, \Delta^- + 2\}, 2)$ -adst-coloration  $f_1$  et  $f_2$  qui peuvent facilement être étendues à une  $(\min\{\Delta, \Delta^- + 2\}, 2)$ -adst-coloration  $f = f_1 \cup f_2$  de  $H$ .  $\square$

**Lemme 4.37.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 1-sommet.*

**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne un 1-sommet  $u$ . Soient  $v$  son unique voisin et  $H' = H \setminus u$ .

*Cas 1 :  $\overrightarrow{vu} \in A(H)$*

Si  $d^+(v) \neq 0$ , nous choisissons  $f(\overrightarrow{uv}) \in C_f^+(v)$  et par conséquent nous n'augmentons pas le cardinal de l'ensemble  $C_f^+(v)$ . Sinon, puisque  $d^-(v) \leq \Delta - 1$  et  $d^-(v) \leq \Delta^-$ , nous avons  $|F^f(\overrightarrow{vu})| = |C_f^-(v)| = d^-(v) \leq \min\{\Delta - 1, \Delta^-\}$ ; de plus, il est clair que toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{vu}$  est acceptable pour  $\overrightarrow{vu}$ . Nous pouvons donc choisir  $f(\overrightarrow{vu}) \notin F^f(\overrightarrow{vu})$  et nous aurons  $|C_f^+(\overrightarrow{vu})| = 1 \leq 2$ .

*Cas 2 :  $\overrightarrow{uv} \in A(H)$*

Puisque  $|F^f(\overrightarrow{uv})| = |C_f(v)| \leq \Delta - 1$ ,  $|C_f^-(v)| = d^-(v) - 1 \leq \Delta^- - 1$  (l'arc  $\overrightarrow{uv}$  est non colorié) et  $|C_f^+(v)| \leq 2$  (par hypothèse), nous obtenons  $|F^f(\overrightarrow{uv})| \leq \min\{\Delta - 1, \Delta^- + 1\}$ ; de plus, il est clair que toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{uv}$  est acceptable pour  $\overrightarrow{uv}$ . Nous pouvons donc choisir  $f(\overrightarrow{uv}) \notin F^f(\overrightarrow{uv})$ ; de plus,  $C_f^+(v)$  reste inchangé et donc  $|C_f^+(v)| \leq 2$ .

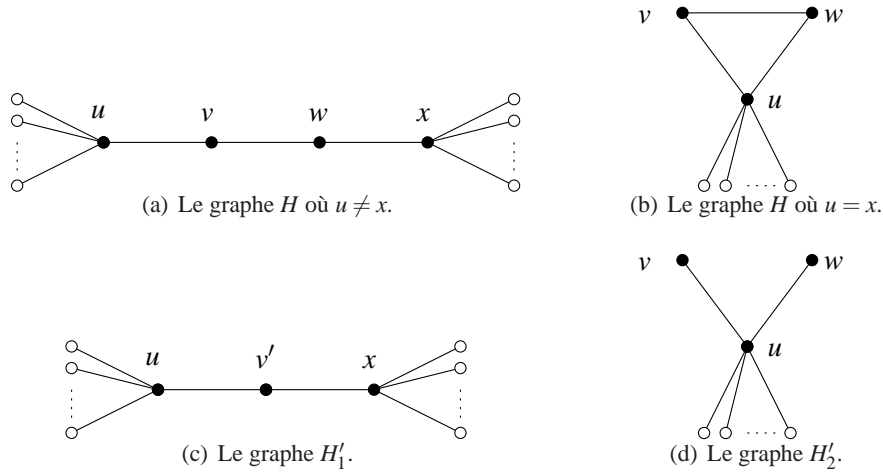


FIG. 4.6 – Configurations interdites du lemme 4.39 et leurs réductions.

□

**Lemme 4.38.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de 2-source.*

**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne un 2-source  $u$  et soit  $\Gamma(u) = \{v_1, v_2\}$ . Soit  $H' = H \setminus \overrightarrow{uv_1}$ . Nous avons  $F^f(\overrightarrow{uv_1}) = C_f^-(u) \cup C_f(v_1) = C_f(v_1)$  : en utilisant les mêmes arguments que dans le cas 2 du lemme 4.37, nous montrons qu'il existe au moins une couleur acceptable pour  $\overrightarrow{uv_1}$ . □

**Remarque.** Par hypothèse, le graphe  $H$  n'est pas un circuit. D'après les lemmes 4.36, 4.37 et 4.38, nous savons à présent que  $H$  n'est ni un chemin, ni un cycle. Nous pouvons donc considérer dans la suite que  $\Delta \geq 3$ .

**Lemme 4.39.** *Le graphe  $H$  ne contient pas deux 2-sommets adjacents.*

**Preuve.** Supposons que le graphe  $H$  contienne deux 2-sommets adjacents  $v$  et  $w$  (voir les figures 4.6(a) et 4.6(b)). Nous considérons deux cas suivant que les sommets  $u$  et  $x$  sont confondus ou non.

*Cas 1 :  $u \neq x$  (voir la figure 4.6(a))*

Soit  $H'_1$  le graphe obtenu à partir de  $H$  en contractant l'arc  $vw$  (voir la figure 4.6(c)). D'après le lemme 4.38, nous avons  $f(uv') \neq f(v'x)$ . Nous posons alors  $f(uv) = f(uv')$ ,  $f(wx) = f(v'x)$  et d'après l'observation 4.4, toute couleur disponible pour  $vw$  est également acceptable pour  $vw$ . Nous avons  $|F^f(vw)| = 2 < \min\{\Delta, \Delta^- + 2\}$  puisque  $\Delta \geq 3$ . Nous pouvons donc choisir  $f(vw) \notin F^f(vw)$ .

*Cas 2 :  $u = x$  (voir la figure 4.6(b))*

L'arc  $vw$  n'appartient à aucun circuit élémentaire de longueur paire. Par conséquent, toute couleur disponible pour  $vw$  est également acceptable. Nous avons  $|F^f(vw)| = \{f(uv), f(uw)\} \leq 2 \leq \min\{\Delta - 1, \Delta^- + 1\}$ . Nous pouvons donc choisir  $f(\overrightarrow{vw}) \notin F^f(\overrightarrow{vw})$ .

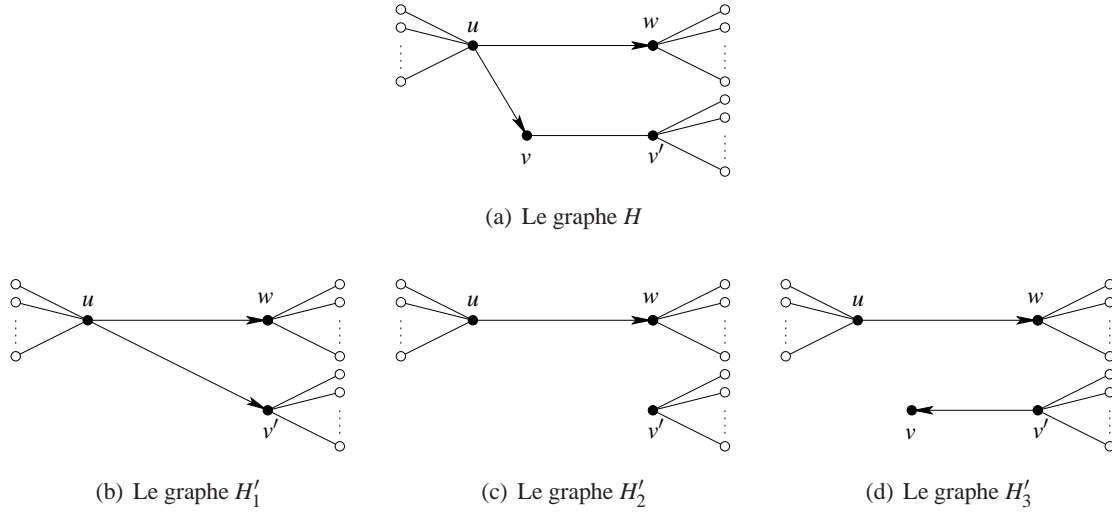


FIG. 4.7 – Configuration interdite du lemme 4.40 et ses réductions.

□

**Lemme 4.40.** *Le graphe  $H$  ne contient pas la configuration de la figure 4.7(a).*

**Preuve.** Supposons que le graphe  $H$  contienne trois sommets  $u$ ,  $v$  et  $w$  tels que  $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{uw} \in A(H)$  et  $d(v) = 2$  (voir la figure 4.7(a)). Les sommets  $v'$  et  $w$  ne sont pas nécessairement distincts.

Nous commençons par colorier l'arc  $vv'$ . Si  $\overrightarrow{vv'} \in A(H)$ , nous considérons le graphe  $H'_1$  obtenu à partir de  $H$  en contractant l'arc  $\overrightarrow{uv}$  (voir la figure 4.7(b)) si  $v' \neq w$ . Nous pouvons alors poser  $f(\overrightarrow{vv'}) = f(\overrightarrow{uv'})$ . En revanche, si  $v' = w$ , alors nous considérons le graphe  $H'_2 = H \setminus v$  (voir la figure 4.7(c)). Nous pouvons alors poser  $f(\overrightarrow{vv'}) = f(\overrightarrow{uw})$ . Si au contraire  $\overrightarrow{v'v} \in A(H)$ , nous considérons le graphe  $H'_3 = H \setminus \overrightarrow{uv}$  (voir la figure 4.7(d)) et dans ce cas,  $\overrightarrow{vv'}$  est déjà colorié.

Dans tous les cas, d'après l'observation 4.4, toute couleur disponible pour  $\overrightarrow{uv}$  est également acceptable pour  $\overrightarrow{uv}$ . Si  $f(\overrightarrow{uw}) \neq f(\overrightarrow{vv'})$ , nous posons  $f(\overrightarrow{uv}) = f(\overrightarrow{uw})$ ; puisque  $f(\overrightarrow{uw}) \in C_f^+(u)$ , nous n'augmentons pas le cardinal de cet ensemble de couleurs. Supposons à présent que  $f(\overrightarrow{uv}) = f(\overrightarrow{vv'})$ . Si  $|C_f^+(u)| = 2$ , nous choisissons  $f(\overrightarrow{uv}) \in C_f^+(u) \setminus \{f(\overrightarrow{uw})\}$ , et ainsi, le cardinal de l'ensemble  $C_f^+(u)$  n'augmente pas. Si  $C_f^+(u) = \{f(\overrightarrow{uw})\}$ , nous avons  $|F^f(\overrightarrow{uv})| = |C_f^-(u) \cup C_f(v)| = |C_f^-(u) \cup \{f(\overrightarrow{uw})\}| = d^-(u) + 1 \leq \Delta - 1$  et  $d^-(u) \leq \Delta^-$ ; par conséquent  $|F^f(\overrightarrow{uv})| \leq \min\{\Delta - 1, \Delta^- + 1\}$ . Nous pouvons donc choisir  $f(\overrightarrow{uv}) \notin F^f(\overrightarrow{uv})$ , et nous aurons  $|C_f^+(u)| = 2$ . □

**Remarque 4.41.** *D'après le lemme 4.40, si le graphe  $H$  contient un sommet  $u$  adjacent à un 2-sommet  $v$  tel que  $\overrightarrow{uv} \in A(H)$ , alors  $d^-(u) = d(u) - 1$  (i.e. tous les arcs incidents au sommet  $u$ , à l'exception de l'arc  $\overrightarrow{uv}$ , sont des arcs entrants).*

**Lemme 4.42.** *Le graphe  $H$  ne contient pas les configurations des figures 4.8(a) et 4.8(b).*

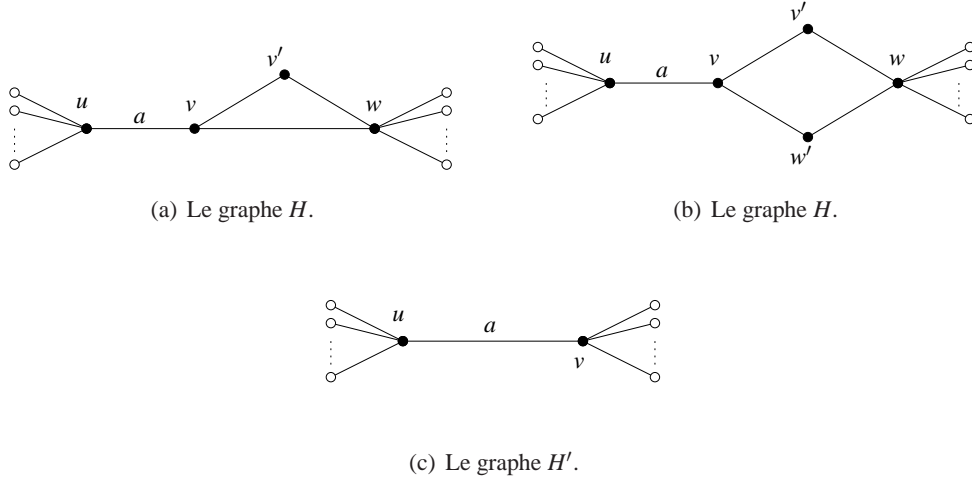


FIG. 4.8 – Configurations interdites du lemme 4.42 et leur réduction.

**Preuve.** Supposons que  $H$  contienne la configuration de la figure 4.8(a) (resp. de la figure 4.8(b)). Soit  $H'$  le graphe obtenu à partir de  $H$  en contractant le triangle  $(v, v', w, v)$  (resp. en contractant le carré  $(v, v', w, w', v)$ ). L'arc  $uv$  du graphe  $H'$  est orienté dans la même direction que dans le graphe  $H$ . Le graphe  $H'$  admet par conséquent une  $(\min\{\Delta, \Delta^- + 2\}, 2)$ -adst-coloration  $f$ , qui est une coloration partielle de  $H$ . Soit  $f(uv) = a$ .

(i) Configuration de la figure 4.8(a)

D'après l'observation 4.4, les couleurs disponibles pour chacun des arcs non encore coloriés de  $H$  sont également acceptables pour ces arcs.

- Supposons que  $\vec{vw'} \in A(H)$ . D'après la remarque 4.41,  $\vec{uv}$ ,  $\vec{wv}$ ,  $\vec{v'w} \in A(H)$ . Nous pouvons poser  $f(\vec{v'w}) = a$  puisque  $a \notin C_f(w)$ . Si  $|C_f^+(w)| > 0$ , nous choisissons  $f(\vec{wv}) \in C_f^+(w)$ . Si  $|C_f^+(w)| = 0$ , nous avons  $|F^f(\vec{wv})| = |C_f^-(w) \cup C_f(v)| = |C_f^-(w)| = d(w) - 1 \leq \Delta - 1$  et  $d^-(w) \leq \Delta^-$ , ce qui implique  $|F^f(\vec{wv})| \leq \min\{\Delta - 1, \Delta^-\}$ . Nous choisissons donc  $f(\vec{wv}) \notin F^f(\vec{wv})$  et nous aurons ainsi  $|C_f^+(w)| = 1$ . Finalement, il est aisé de vérifier qu'il reste au moins une couleur pour colorier l'arc  $\vec{vv'}$ .
- Supposons que  $\vec{v'v} \in A(H)$ . D'après le lemme 4.38, nous avons  $\vec{wv'} \in A(H)$ ; alors, d'après le lemme 4.40, tous les arcs incidents au sommet  $w$ , à l'exception de l'arc  $\vec{wv'}$ , sont des arcs entrants du sommet  $w$ ; en particulier,  $\vec{wv} \in A(H)$ . Nous pouvons poser  $f(\vec{wv'}) = a$  puisque  $a \notin C_f(w)$ . Nous avons  $|F^f(\vec{wv})| = |C_f^-(w) \cup C_f(v)| = |C_f^-(w)| = d(w) - 1 \leq \Delta - 1$  et  $d^-(w) \leq \Delta^-$ , ce qui implique  $|F^f(\vec{wv})| \leq \min\{\Delta - 1, \Delta^-\}$ . Nous choisissons donc  $f(\vec{wv}) \notin F^f(\vec{wv})$ . Finalement, il est aisé de vérifier qu'il reste au moins une couleur pour colorier l'arc  $\vec{v'v}$ .

(ii) Configuration (b) (voir la figure 4.8(b))

Sans perte de généralité, d'après le lemme 4.38, nous avons  $\vec{ww'} \in A(H)$ ; alors, d'après le lemme 4.40, tous les arcs incidents au sommet  $w$ , à l'exception de l'arc  $\vec{ww'}$ , sont des arcs

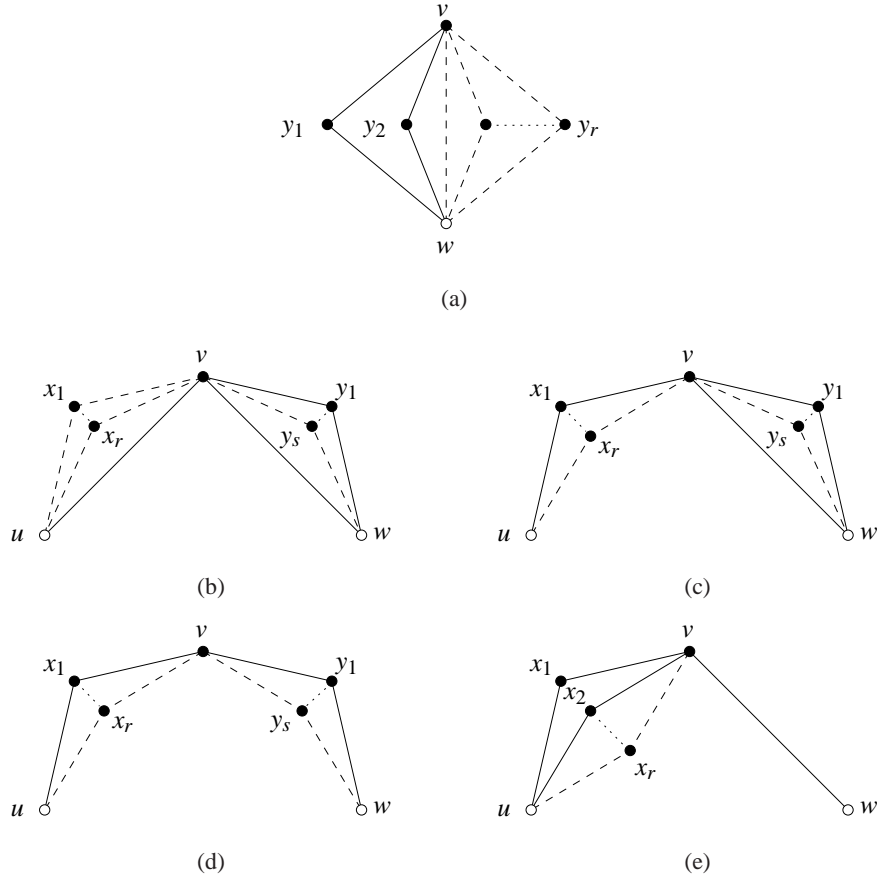


FIG. 4.9 – Configurations interdites du lemme 4.43 (les arcs en pointillés représentent des arcs possiblement présents dans  $H$ ).

entrants du sommet  $w$ ; en particulier,  $\overrightarrow{v'w} \in A(H)$ . De plus, nous avons  $\overrightarrow{w'v}, \overrightarrow{vw'}, \overrightarrow{uw'} \in A(H)$ . D'après l'observation 4.4, le seul circuit de  $H$  pouvant être bicolore est le circuit  $[v, v', w, w', v]$ . Nous pouvons poser  $f(\overrightarrow{v'w}) = a$  puisque  $a \notin C_f(w)$ . Nous avons  $|F^f(\overrightarrow{ww'})| = |C_f^-(w) \cup C_f(w')| = |C_f^-(w)| = d(w) - 1 \leq \Delta(H) - 1$  et  $d^-(w) \leq \Delta^-$ ; par conséquent  $|F^f(\overrightarrow{ww'})| \leq \min\{\Delta - 1, \Delta^-\}$ . Nous choisissons alors  $f(\overrightarrow{ww'}) \notin F^f(\overrightarrow{ww'})$  et nous posons  $f(\overrightarrow{vw'}) = f(\overrightarrow{ww'})$ . Finalement, il est facile de vérifier qu'il reste au moins une couleur pour choisir  $f(\overrightarrow{w'v}) \notin F^f(\overrightarrow{w'v})$  (notons que le circuit  $[v, v', w, w', v]$  est alors colorié avec trois couleurs).

□

**Lemme 4.43.** *Le graphe  $H$  ne contient pas de  $\geq 3$ -sommet  $v$  tel que  $D_H(v) \leq 2$  (i.e. une des configurations de la figure 4.9).*

**Preuve.** Supposons que le graphe  $H$  contienne un  $\geq 3$ -sommet  $v$  tel que  $D_H(v) \leq 2$ . Nous considérons deux cas suivant la valeur de  $D_H(v)$ .

*Cas 1* :  $D_H(v) = 1$  (Configuration de la figure 4.9(a))

Soit  $y_1, y_2, \dots, y_r$  les  $r$  2-voisins de  $v$  et du  $k$ -sommets  $w$ . Sachant que  $v$  est un  $\geq 3$ -sommets, nous avons nécessairement  $r \geq 2$ . D'après le lemme 4.38, aucun des sommets  $y_i$  ( $i \in [1, r]$ ) est un sommets source. Supposons qu'au moins un des  $y_i$  est un sommets puits, disons  $y_1$ . Dans ce cas, d'après le lemme 4.40, les sommets  $y_2, y_3, \dots, y_r$  sont des 2-sources, ce qui est interdit par le lemme 4.38. Par conséquent, pour tout  $i \in [1, r]$ , nous avons soit  $\overrightarrow{vy_i}, \overrightarrow{y_iw} \in A(H)$ , soit  $\overrightarrow{wy_i}, \overrightarrow{y_iv} \in A(H)$ . D'après le lemme 4.40, on ne peut avoir deux entiers  $i, j \in [1, r], i \neq j$ , tels que soit  $\overrightarrow{vy_i}, \overrightarrow{y_iw}, \overrightarrow{vy_j}, \overrightarrow{y_jw} \in A(H)$ , soit  $\overrightarrow{wy_i}, \overrightarrow{y_iv}, \overrightarrow{wy_j}, \overrightarrow{y_jv} \in A(H)$  (*i.e.* les deux 2-chemins sont orientés dans la même direction). Ainsi,  $r = 2$ , le graphe contient nécessairement l'arc  $vw$  puisque  $v$  est un  $\geq 3$ -sommets, et sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $[w, y_1, v, y_2, w]$  est un circuit de  $H$ . Cependant, quelle que soit l'orientation de l'arc  $vw$ , le graphe  $H$  contient la configuration interdite d'après le lemme 4.40.

*Cas 2* :  $D_H(v) = 2$  (Configurations des figures 4.9(b), 4.9(c), 4.9(d) et 4.9(e))

– Configurations des figures 4.9(b) et 4.9(c) :

La configuration de la figure 4.8(a), qui est interdite d'après le lemme 4.42, est un sous-graphe des configurations des figures 4.9(b) et 4.9(c).

– Configurations des figures 4.9(d) et 4.9(e) :

La configuration de la figure 4.8(b), qui est interdite d'après le lemme 4.42, est un sous-graphe des configurations des figures 4.9(d) et 4.9(e) (notons que puisque  $v$  est un  $\geq 3$ -sommets, nous avons  $r \geq 2$  ou  $s \geq 2$  sur la figure 4.9(d)).

□

**Preuve du théorème 4.35.** D'après les lemmes 4.37, 4.39 et 4.43, le graphe  $H$  ne contient pas de 1-sommets, ni deux 2-sommets adjacents, ni de  $\geq 3$ -sommets  $v$  tel que  $D_H(v) \leq 2$ . Par conséquent, d'après le lemme 4.34, le graphe  $H$  n'est pas un 2-arbre partiel, ce qui est une contradiction. □

## 4.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié une nouvelle notion de coloration : l'étoile coloration orientée acircuitique. Cette notion est une extension naturelle de la notion d'étoile coloration dirigée.

Nous avons introduit cette notion dans l'optique d'obtenir des bornes pour l'indice chromatique orienté (étudié dans le chapitre 3). Cependant, les bornes que nous avons obtenues pour l'étoile arboricité orientée acircuitique ne nous ont pas permis d'améliorer les bornes que nous connaissions déjà pour l'indice chromatique orienté.

**Graphes de degré au plus trois.** Dans [Bur79], Burnstein a montré que tout graphe de degré maximum 4 admet une 5-sommets-coloration acyclique. Sachant que le graphe représentatif des arêtes d'un graphe de degré au plus 3 est un graphe de degré au plus 4, nous obtenons que tout graphe de degré



au plus trois admet une 5-arête-coloration acyclique, et par conséquent une 5-adst-coloration. Notre résultat a donc montré que cette borne pouvait être ramenée à 4 lorsque que nous considérons directement l'étoile coloration orientée acircuitique de graphes orientés.

Nous avons également exhibé un graphe cubique (une orientation de  $K_4$ ) dont l'étoile arboricité orientée acircuitique est 4. Notre résultat est donc optimal. Cependant, nous ne connaissons pas d'autres graphes cubiques n'admettant pas de 3-adst-coloration. Nous pouvons alors nous poser la question suivante :

**Question 4.44.** *Avons nous  $\text{adst}(G) \leq 3$  pour tout graphe  $G$  connexe de degré au plus trois non isomorphe à  $K_4$  ?*

**Graphes de faible densité.** Nous avons également considéré les graphes de faible densité dans le but d'obtenir des bornes pour certaines classes de graphes planaires de maille donnée.

Pour ce faire, nous avons étudié les graphes de degré moyen maximum borné et avons tenté de déterminer, pour un graphe  $G$ , le plus petit entier  $k$  tel que si  $\text{mad}(G) < k$ , alors  $G$  admet une  $\Delta(G)$ -adst-coloration ou une  $(\Delta(G) + 1)$ -adst-coloration. Nous avons montré que tout graphe  $G$  tel que  $\text{mad}(G) < \frac{7}{3}$  admet une  $\Delta(G)$ -arête-coloration acyclique et donc une  $\Delta(G)$ -adst-coloration ; de plus, cette borne est clairement optimale. Nous avons également montré que tout graphe  $G$  tel que  $\text{mad}(G) < \frac{133}{41}$  admet une  $(\Delta(G) + 1)$ -adst-coloration. En revanche, nous ne savons pas si cette dernière borne est optimale : en effet, nous ne connaissons pas de tels graphes n'admettant pas de  $\Delta$ -adst-colorations.

Ces résultats nous ont ensuite permis d'obtenir en corollaire des bornes pour l'étoile arboricité orientée acircuitique de certaines classes de graphes planaires de maille donnée. En effet, tout graphe planaire  $G$  de maille 14 (resp. 6) admet une  $\Delta(G)$ -adst-coloration (resp.  $(\Delta(G) + 1)$ -adst-coloration).

Nous pouvons remarquer que montrer qu'un graphe  $G$  tel que  $\text{mad}(G) < \frac{10}{3}$  admet une  $\Delta(G)$ -adst-coloration permet d'obtenir en corollaire que tout graphe planaire  $G$  de maille 5 admet une  $\Delta(G)$ -adst-coloration. Actuellement, nous avons seulement réussi à montrer que tout graphe  $G$  tel que  $\text{mad}(G) < \frac{133}{41}$  admet une  $\Delta(G)$ -adst-coloration. Pour améliorer notre corollaire, l'écart qui reste à combler est très faible ( $\frac{11}{123}$ ). Il serait donc intéressant d'essayer d'améliorer l'ensemble des configurations interdites considérées pour obtenir un meilleur résultat.

**2-arbres partiels.** Nous avons aussi étudié l'étoile arboricité orientée acircuitique de la classe des 2-arbres partiels. Nous avons montré que tout 2-arbre partiel  $G$  possède une étoile arboricité orientée acircuitique d'au plus  $\min\{\Delta(G), \Delta^-(G) + 2\}$ . Sachant que seuls les arcs entrants d'un même sommet doivent avoir des couleurs différentes, exprimer l'étoile arboricité orientée acircuitique en fonction du degré entrant maximum du graphe permet d'obtenir de meilleures bornes. C'est d'ailleurs ce que font Amini, Havet, Huc et Thomassé [AHHT06] lorsqu'ils étudient l'étoile arboricité dirigée : il ont en particulier montré que, pour un digraphe  $G$  donné,  $\text{dst}(G) \leq 2\Delta^-(G) + 1$ .

**Une borne générale en fonction de  $\Delta$ ?** Rappelons premièrement que, pour un graphe orienté  $G$ , toute arête-coloration acyclique du graphe sous-jacent de  $G$  impose que toutes les arêtes incidentes à un même sommet doivent obtenir des couleurs différentes ; en revanche, dans le cas d'une étoile coloration orientée acircuitique de  $G$ , seuls les arcs entrants d'un même sommet doivent avoir des couleurs différentes. D'ailleurs, nous avons vu que  $\text{adst}(G) \leq \chi'_a(G)$ .

Alon, Sudakov et Zaks [ASZ01] ont conjecturé que  $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$  pour tout graphe  $G$ .

Dans ce chapitre, pour chacune des classes de graphes que nous avons étudiées, l'étoile coloration orientée acircuitique est au plus  $\Delta + 1$ . De plus, nos multiples tentatives ne nous ont pas permis de construire de graphes n'admettant pas de  $(\Delta + 1)$ -adst-coloration. Aux vues des remarques précédentes, nous pouvons alors nous poser naturellement la question suivante :

**Question 4.45.** *Avons nous  $\text{adst}(G) \leq \Delta(G) + 1$  pour tout graphe orienté  $G$  ?*

# Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressé à trois types de colorations de graphes orientés : la *sommet-coloration orientée*, l'*arc-coloration orientée* et l'*étoile-coloration orientée acircuitique*.

Dans chaque chapitre, nous avons fait un bilan des résultats obtenus et avons suggéré un certain nombre de problèmes ou de questions en relation directe avec nos travaux.

Dans cette conclusion générale, nous rappelons certains de ces résultats ou questions, puis présentons des axes de recherche plus larges.

\* \* \*

Le nombre chromatique orienté de nombreuses classes de graphes a été considéré dans la littérature durant les dix dernières années. Pour un certain nombre de classes, des résultats optimaux ont été prouvés ; pour d'autres, seuls des encadrements ont été obtenus.

Dans le second chapitre, nous avons étudié ce paramètre. Nous avons répondu à certaines questions posées et avons également obtenu des résultats pour quelques classes de graphes qui n'avaient pas été considérées auparavant.

En particulier, nous avons entièrement résolu le cas des graphes planaires extérieurs de maille donnée.

D'autre part, nous avons amélioré la borne supérieure du nombre chromatique orienté des graphes planaires de maille au moins 11 en prouvant que ces derniers admettent une 6-sommet-coloration orientée. Cependant, nous ne savons pas si cette borne est optimale :

**Question.** Le nombre chromatique orienté des graphes planaires de maille au moins 11 est-il 5 ou 6 ?

Rappelons que le nombre chromatique orienté de la classe des graphes planaires (de maille 3) est d'au moins 17 et d'au plus 80. La borne supérieure semble éloignée de la borne optimale. Cependant, malgré de nombreuses tentatives, personne n'est parvenu à l'améliorer. D'autre part, l'obtention de la borne inférieure est complexe. L'amélioration de l'une de ces deux bornes constitue donc aujourd'hui un véritable challenge.

Nous rappelons ici deux conjectures :

**Conjecture.** [Sop97] *Le nombre chromatique orienté de la classe des graphes connexes de degré au plus trois est 7.*

**Conjecture.** [FRR03] *Le nombre chromatique orienté des grilles à deux dimensions est 7.*

Bien que le tournoi  $QR_7$  (le tournoi construit à partir des résidus quadratiques non nuls de 7) soit à première vue un “bon candidat” pour tenter de prouver les deux précédentes conjectures, nous avons pu voir qu’il existe des graphes connexes de degré au plus trois n’admettant pas d’homomorphisme vers  $QR_7$  (voir chapitre 2, § 2.5, figure 2.32), ainsi qu’une grille  $G_{5,33}$  à deux dimensions (à 5 colonnes et 33 lignes, voir chapitre 2, § 2.5, figure 2.34) n’admettant pas d’homomorphisme vers  $QR_7$ .

Alors, existe-t-il un graphe cible universel à 7 sommets pour la classe des graphes connexes de degré au plus trois ? Existe-t-il un graphe cible universel à 7 sommets pour la classe des grilles à deux dimensions ?

En collaboration avec Édita Máčajová de l’Université Comenius de Bratislava, nous avons construit le tournoi  $T_7$  à 7 sommets (voir chapitre 2, § 2.5, figure 2.33) qui permet de colorier tous les graphes cubiques ayant au plus 18 sommets. Ce tournoi permet également de colorier la grille  $G_{5,33}$  ; de plus, nous n’avons pas réussi à construire de grille n’admettant pas d’homomorphisme vers  $T_7$ . Nous pouvons alors poser les deux questions suivantes :

**Question.** Tout graphe connexe de degré au plus trois admet-il un homomorphisme vers  $T_7$  ?

**Question.** Toute grille à deux dimensions admet-elle un homomorphisme vers  $T_7$  ?

\* \* \*

Dans le troisième chapitre, nous avons introduit la nouvelle notion d’*arc-coloration orientée*.

Nous avons proposé une étude générale de cette notion en abordant plusieurs questions : étude de complexité, obtention de bornes en fonction de paramètres déjà étudiés dans la littérature ou encore étude de l’indice chromatique orienté d’un certain nombre de classes de graphes.

Nous avons notamment montré que tout graphe orienté d’indice chromatique orienté  $k$  a un nombre chromatique orienté d’au plus  $(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2)2^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$  ; de plus, nous avons construit, pour tout  $k \geq 1$ , un graphe orienté d’indice chromatique orienté  $k$  et de nombre chromatique orienté au moins  $\alpha \cdot 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} - 1$  où  $\alpha = 2$  si  $k$  est pair et  $\alpha = \frac{13}{4\sqrt{2}}$  sinon. La borne optimale du nombre chromatique orienté d’un graphe orienté  $G$  en fonction de l’indice chromatique orienté de  $G$  est donc de l’ordre de  $2^{\frac{\chi_o(G)}{2}}$ .

Nous avons par ailleurs déterminé de façon exacte l’indice chromatique orienté des graphes planaires extérieurs de maille donnée.

Nous avons montré que l’indice chromatique orienté de la classe des graphes planaires est d’au moins 10 et d’au plus 38. Cependant, l’écart entre la borne inférieure et la borne supérieure est relativement important, et pour l’instant nous ne connaissons pas de méthode nous permettant d’obtenir un encadrement plus fin.

Nous avons d'autre part montré que l'indice chromatique orienté de la classe des graphes de degré au plus trois est d'au moins 6 et d'au plus 7.

Il serait intéressant d'étudier à présent l'indice chromatique orienté de classes de graphes que nous n'avons pas encore considérées. Dans un premier temps, nous pourrions nous restreindre aux classes de graphes pour lesquelles une borne supérieure est déjà connue pour le nombre chromatique orienté. Sachant que l'indice chromatique orienté de tout graphe orienté  $G$  est d'au plus le nombre chromatique orienté de  $G$ , nous pourrions alors avoir un point de départ et ainsi une première borne à essayer d'améliorer.

La notion de sommet-coloration orientée est maintenant étudiée depuis quelques années. Plusieurs auteurs ont proposé des extensions de cette notion et nous pouvons notamment citer la "*J-sommet-coloration orientée*" (*oriented game vertex-coloring* en anglais) ou encore la *sommet-coloration orientée par liste*. Ces deux extensions peuvent bien évidemment être considérées dans le cas de l'arc-coloration orientée.

Le nombre *J-chromatique orienté* a été introduit et étudié par Nešetřil et Sopena [NS01] en 2001. Ils ont notamment montré qu'il est d'au plus 7 pour les chaînes (cette borne est optimale), et d'au plus 19 pour les arbres.

Cette notion s'étend naturellement à la coloration d'arcs. La *J-arc-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  peut se définir comme suit. Soit  $H$  un graphe cible orienté fixé dont les sommets vont être utilisés en tant que couleurs. Nous considérons un jeu à deux joueurs (Alice et Bob) qui jouent de façon alternée, Alice jouant la première. Le but d'Alice est d'obtenir une  $H$ -arc-coloration de  $G$ , alors que le but de Bob est d'empêcher Alice d'arriver à ses fins. Un *coup* consiste à choisir un arc non colorié  $\vec{uv}$  et à lui assigner une couleur  $\alpha \in V(H)$  de telle sorte que :

1. si  $w$  est un sommet de  $G$  tel que  $\vec{vw}$  (resp.  $\vec{wu}$ ) est un arc de  $G$  colorié avec  $\beta$ , alors  $\vec{\alpha\beta}$  (resp.  $\vec{\beta\alpha}$ ) est un arc de  $H$ ,
2. si  $\vec{wx}$  est un arc de  $G$  colorié avec  $\beta$  tel que  $\vec{xu} \in A(G)$  (resp.  $\vec{vw} \in A(G)$ ), alors  $\alpha \neq \beta$ .

Si après  $|A(G)|$  coups, le graphe est colorié, alors Alice a gagné, sinon Bob a gagné. En d'autres termes, Bob gagne s'il mène Alice dans une impasse, *i.e.* plus aucun arc non colorié ne peut l'être sans contredire les deux contraintes ci-dessus. L'*indice J-chromatique orienté* de  $G$  est alors le plus petit ordre d'un graphe orienté  $H$  tel qu'Alice ait une stratégie gagnante.

Nous avons vu que l'indice chromatique orienté de tout graphe orienté  $G$  est d'au plus le nombre chromatique orienté de  $G$ . En revanche, la preuve nous permettant d'obtenir cette relation précédente ne s'adapte pas à la version "jeu". Il est donc, dans ce cas, beaucoup moins évident que cette relation reste vraie. Il serait par conséquent intéressant de considérer cette version du problème, en vérifiant notamment si une borne supérieure de l'indice *J-chromatique orienté* de tout graphe orienté  $G$  peut être obtenue en fonction du nombre *J-chromatique orienté* de  $G$ .

La notion de *sommet-coloration orientée par liste* a été introduite par Sali et Simonyi [SS99] en 1999. En 2001, Tuza et Voigt [TV01] ont considéré la classe des couplages et ont montré que tout couplage de taille au plus 11 a un nombre chromatique orienté par liste égal à 2. Il ont également montré que tout couplage de taille au moins 12 a un nombre chromatique orienté par liste d'au moins 3. À travers cette étude, nous pouvons nous rendre compte que ce problème est beaucoup plus complexe que dans la version classique (sans liste).

Cette notion s'étend naturellement à la coloration d'arcs. Un graphe orienté  $G$  est *L-liste arc-coloriable* s'il est possible de trouver, pour tout arc  $\vec{uv} \in A(G)$ , une couleur  $f(\vec{uv}) \in L(u)$  telle que :

1. pour tout  $w \in \Gamma^-(u)$  (resp.  $w \in \Gamma^+(v)$ ), on a  $f(wu) \neq f(uv)$  (resp.  $f(uv) \neq f(vw)$ ),
2. pour tout  $w \in \Gamma^-(u)$  (resp.  $w \in \Gamma^+(v)$ ) et pour tous  $x, y, z \in V(G)$  tels que  $f(\vec{wu}) = \beta$  (resp.  $f(\vec{vw}) = \alpha$ ), et  $\vec{xy}$  et  $\vec{yz}$  sont deux arcs de  $G$  avec  $f(\vec{xy}) = \alpha$  et  $f(\vec{yz}) = \beta$ , on a  $f(\vec{uv}) \neq \alpha$  (resp.  $f(\vec{vw}) \neq \beta$ ).

Nous dirons alors que  $G$  est *k-liste arc-coloriable* si  $G$  est *L-liste arc-coloriable* pour toute assignation de listes  $L$  telle que  $|L(v)| \geq k$  pour tout sommet  $v \in V(G)$ .

L'*indice chromatique orienté par liste* d'un graphe *non orienté*  $G$  est défini comme le plus petit entier  $k$  pour lequel il existe une orientation de  $G$  qui soit *k-liste arc-coloriable*.

Dans le cas non orienté, nous pouvons citer la célèbre *conjecture de coloration par liste* :

**Conjecture.** *Pour tout graphe non orienté  $G$ , l'indice chromatique de  $G$  est égal à l'indice chromatique par liste de  $G$ .*

Il serait alors intéressant de se poser la question dans le cas orienté :

**Question.** *Quelle relation avons nous entre l'indice chromatique orienté et l'indice chromatique orienté par liste d'un graphe  $G$  ?*

\* \* \*

Nous avons enfin introduit la notion d'étoile-coloration orientée acircuitique dans le quatrième et dernier chapitre.

L'étude de cette notion provient de l'étude de l'arc-coloration orientée. En effet, nous avons borné l'indice chromatique orienté en fonction de l'étoile arboricité orientée acircuitique. Cependant, les résultats que nous avons obtenus sur l'étoile arboricité orientée acircuitique n'ont pas permis d'améliorer les bornes obtenues sur l'indice chromatique orienté.

Nous avons notamment montré que l'étoile arboricité orientée acircuitique des graphes de degré au plus trois est 4. Cependant, seul un graphe nous permet d'obtenir l'optimalité du résultat : une orientation du graphe complet à quatre sommets. Nous pouvons alors nous poser la question suivante :

**Question.** L'étoile arboricité orientée acircuitique de tout graphe connexe de degré au plus trois non isomorphe à  $K_4$  est-elle égale à 3 ?

Nous avons également étudié l'étoile arboricité orientée acircuitique des graphes de faible densité. Les résultats obtenus nous ont permis de montrer que tout graphe planaire de maille 14 (resp. 6) admet une  $\Delta$ -étoile-coloration orientée acircuitique (resp.  $(\Delta + 1)$ -étoile-coloration orientée acircuitique). De plus, la borne obtenue pour la maille 14 est optimale.

En règle générale, peu de résultats sont connus pour l'étoile arboricité dirigée, et a fortiori pour l'étoile arboricité orientée acircuitique. Il serait donc intéressant d'étudier ces deux paramètres pour certaines classes de graphes qui n'ont pas encore été considérées.





# Bibliographie

- [AA89] I. Algor and N. Alon. The star arboricity of graphs. *Discrete Math.*, 75 :11–22, 1989.
- [AH77] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 1, discharging. *Illinois J. Math.*, 21 :429–490, 1977.
- [AHHT06] O. Amini, F. Havet, F. Huc, and S. Thomassé. Wdm and directed star arboricity. Preprint, 2006.
- [AHK77] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. *Illinois J. Math.*, 21 :491–567, 1977.
- [AK85] J. Akiyama and M. Kano. *Path factors of a graph*, pages 1–21. F. Harary and J. Maybee, eds., in *Graphs and Applications : Proc. First Colorado Sympos. on Graph Theory*, Wiley, 1985.
- [AMR91] N. Alon, C. J. H. McDiarmid, and B. Reed. Acyclic coloring of graphs. *Random Structures and Algorithms*, 2(3) :277–288, 1991.
- [AMR92] N. Alon, C. J. H. McDiarmid, and B. Reed. Star arboricity. *Combinatorica*, 12 :375–380, 1992.
- [Aok90] Y. Aoki. The star-arboricity of the complete regular multipartite graphs. *Discrete Math.*, 81 :115–122, 1990.
- [AS92] N. Alon and J. H. Spencer. *Probabilistic method*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1992.
- [ASZ01] N. Alon, B. Sudakov, and A. Zaks. Acyclic edge colorings of graphs. *J. Graph Theory*, 37 :157–167, 2001.
- [Ber72] J. L. Berggren. An algebraic characterization of finite symmetric tournaments. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 6 :53–59, 1972.
- [Ber87] C. Berge. *Graphes*. Gauthiers-Villars, 3rd edition edition, 1987.
- [BGRS05] O. V. Borodin, A. N. Glebov, A. Raspaud, and M. R. Salavatipour. Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable. *J. Comb. Theory Ser. B*, 93 :303–311, 2005.
- [BHB06] S. Bessy, F. Havet, and E. Birmelé. Arc-chromatic number of digraphs in which each vertex has bounded outdegree or bounded indegree. *J. Graph Theory*, to appear, 2006.

- [BI05a] O. V. Borodin and A. O. Ivanova. An oriented 7-colouring of planar graphs with girth at least 7. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2 :222–229, 2005.
- [BI05b] O. V. Borodin and A. O. Ivanova. An oriented colouring of planar graphs with girth at least 4. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2 :239–249, 2005.
- [BKN<sup>+</sup>99] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, J. Nešetřil, A. Raspaud, and É. Sopena. On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph. *Discrete Math.*, 206 :77–89, 1999.
- [Bor79] O. V. Borodin. On acyclic colorings of planar graphs. *Discrete Math.*, 25 :211–236, 1979.
- [Bro41] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 37 :194–197, 1941.
- [BSV99] P. Boiron, É. Sopena, and L. Vignal. Acyclic improper colorings of graphs. *J. Graph Theory*, 32(1) :97–107, 1999.
- [Bur79] M. I. Burnstein. Every 4-valent graph has an acyclic 5-coloring. *Soobšč. Akad. Nauk Gruzin*, SSR 93 :21–24, 1979.
- [CCW86] L. J. Cowel, R. H. Cowel, and D. R. Woodall. Defective colorings of graphs in surfaces : partitions into subgraphs of bounded valency. *J. Graph Theory*, 10 :187–195, 1986.
- [CD06] J.-F. Culus and M. Demange. Oriented coloring : complexity and approximation. In J. Wiedermann et al., editor, *SOFSEM*, volume 3831 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 226–236, Dec 2006.
- [CGJ97] L. J. Cowel, W. Goddard, and C. E. Jesurum. Defective colorings revisited. *J. Graph Theory*, 24(3) :205–219, 1997.
- [Cou94] B. Courcelle. The monadic second order-logic of graphs VI : on several representations of graphs by relational structures. *Discrete Appl. Math.*, 54 :117–149, 1994.
- [Duf65] R. J. Duffin. Topology of series parallel graphs. *J. Math. Anal. Appl.*, 10 :303–318, 1965.
- [EH99] N. Eaton and T. Hull. Defective list colorings of planar graphs. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 25 :79–87, 1999.
- [EMP06] L. Esperet, C. J. H. McDiarmid, and A. Pinlou. Acyclic improper choosability of graphs with bounded maximum degree. Preprint, may 2006.
- [EO07] L. Esperet and P. Ochem. Oriented coloring of 2-outerplanar graphs. *Inform. Process. Lett.*, to appear, 2007.
- [EP06] L. Esperet and A. Pinlou. Acyclic improper choosability of outerplanar graphs. Research Report RR-1405-06, LaBRI, Université Bordeaux 1, may 2006.
- [EP07] L. Esperet and A. Pinlou. Acyclic improper choosability of graphs. In *Sixth Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications*, *Elect. Notes in Discrete Math.*, to appear, 2007.

- [Fri70] E. Fried. On homogeneous tournaments. *Combinatorial Theory and its Applications*, 2 :467–476, 1970.
- [FRR03] G. Fertin, A. Raspaud, and A. Roychowdhury. On the oriented chromatic number of grids. *Inform. Process. Lett.*, 85(5) :261–266, 2003.
- [Grö59] H. Grötzsch. Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie netze auf der kugel. *Math. Naturwiss. Reihe*, 8, 1959.
- [Grü73] B. Grünbaum. Acyclic colourings of planar graphs. *Israel J. Math.*, 14 :390–408, 1973.
- [GS71] R. L. Graham and J. H. Spencer. A constructive solution to a tournament problem. *Canad. Math. Bull.*, 14 :45–48, 1971.
- [GSR05] D. Gonçalves, M. A. Shalu, and A. Raspaud. On oriented labelling parameters. Preprint, 2005.
- [Gui97] B. Guiduli. On incidence coloring and star arboricity of graphs. *Discrete Math.*, 163 :275–278, 1997.
- [HB78] R. L. Hemminger and L. W. Beineke. *Selected Topics in Graph Theory*, chapter Line graphs and line digraphs, pages 271–306. L. W. Beineke and R.J. Wilson, editors. Academic Press, London, 1978.
- [HD05] M. Hosseini Dolama. *Contribution à l'étude de quelques problèmes de coloration de graphes (in french)*. Phd thesis, Université Bordeaux 1, feb 2005.
- [HDS06] M. Hosseini Dolama and É. Sopena. On the oriented chromatic number of halin graphs. *Inform. Process. Lett.*, 98(6) :247–252, 2006.
- [HE72] C. C. Harner and R. C. Entringer. Arc colorings of digraphs. *J. Comb. Theory Ser. B*, 13 :219–225, 1972.
- [HME96] S. L. Hakimi, J. Mitchem, and E. Schmeichel. Star arboricity of graphs. *Discrete Math.*, 149 :93–98, 1996.
- [HN04] P. Hell and J. Nešetřil. *Graphs and homomorphisms*, volume 28 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, 2004.
- [Jae88] F. Jaeger. *Selected topics in graph theory*, volume 3, chapter Nowhere zero-flow problems, pages 71–95. L. W. Beineke and R. J. Wilson, editors. Academic Press, 1988.
- [JT95] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph Colouring Problems*. John Wiley & Sons, Inc., Wiley Interscience edition, 1995.
- [KM04] W. F. Klostermeyer and G. MacGillivray. Homomorphisms and oriented colorings of equivalence classes of oriented graphs. *Discrete Math.*, 274(1-3) :161–172, 2004.
- [KSZ97] A. V. Kostochka, É. Sopena, and X. Zhu. Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs. *J. Graph Theory*, 24 :331–340, 1997.
- [Kur30] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15 :271–283, 1930.

- [LWZ03] K. W. Lih, W. F. Wang, and X. Zhu. Coloring the square of  $K_4$ -minor free graph. *Discrete Math.*, 269 :303–309, 2003.
- [Mar01] T. H. Marshall. On  $\mathcal{P}$ -universal graphs. Research Report 2001-510, KAM-DIMATIA Series, 2001.
- [Mar06] T. H. Marshall. Antisymmetric flows on planar graphs. *J. Graph Theory*, 52(3) :200–210, 2006.
- [McK06] Brendan McKay. The nauty page. <http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty/>, 2006.
- [MNS05] R. Muthu, N. Narayanan, and C. R. Subramanian. Improved bounds on acyclic edge colouring. *Elect. Notes in Discrete Math.*, 19 :171–177, 2005.
- [Moo68] J. W. Moon. *Topics on tournaments*. Holt, Rinehart and Winston, New York, NY, USA, 1968.
- [MOP06] M. Montassier, P. Ochem, and A. Pinlou. Strong oriented chromatic number of planar graphs without short cycles. Research Report RR-1380-06, LaBRI, Université Bordeaux 1, 2006.
- [NR99] J. Nešetřil and A. Raspaud. Antisymmetric flows and strong colourings of oriented graphs. *Annales de l'Institut Fourier*, 49 :1037–1056, 1999.
- [NRS97] J. Nešetřil, A. Raspaud, and É. Sopena. Colorings and girth of oriented planar graphs. *Discrete Math.*, 165-166 :519–530, 1997.
- [NS01] J. Nešetřil and É. Sopena. On the oriented game chromatic number. *Elect. J. Comb.*, 8(2), 2001.
- [NW05] J. Nešetřil and C. Wormald. The acyclic edge chromatic number of a random  $d$ -regular graph is  $d + 1$ . *J. Graph Theory*, 49 :69–74, 2005.
- [Och04] P. Ochem. Oriented colorings of triangle-free planar graphs. *Inform. Process. Lett.*, 92 :71–76, 2004.
- [OPS06] P. Ochem, A. Pinlou, and É. Sopena. On the oriented chromatic index of oriented graphs. Research Report RR-1390-06, LaBRI, Université Bordeaux 1, 2006.
- [Pin03] A. Pinlou. Arc-coloration orientée de graphes orientés. Master thesis, Université Bordeaux 1, Jun 2003.
- [Pin06] A. Pinlou. On oriented arc-coloring of subcubic graphs. *Elect. J. Comb.*, 13(1), 2006.
- [PR81] S. Poljak and V. Rödl. On the arc-chromatic number of a digraph. *J. Comb. Theory Ser. B*, 31(2) :190–198, 1981.
- [PS05] A. Pinlou and É. Sopena. The acircuitic directed star arboricity of planar graphs with large girth. Research Report RR-1371-05, LaBRI, Université Bordeaux 1, 2005.
- [PS06a] A. Pinlou and É. Sopena. The acircuitic directed star arboricity of subcubic graphs is at most four. *Discrete Math.*, 306(24) :3281–3289, 2006.

- [PS06b] A. Pinlou and É. Sopena. Oriented vertex and arc colorings of outerplanar graphs. *Inform. Process. Lett.*, 100(3) :97–104, 2006.
- [RB78] K. B. Reid and L. W. Beineke. *Selected Topics in Graph Theory*, chapter Tournaments, pages 169–204. L. W. Beineke and R. J. Wilson, editors. Academic Press, London, 1978.
- [RS94] A. Raspaud and É. Sopena. Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs. *Inform. Process. Lett.*, 51(4) :171–174, 1994.
- [RSST97] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas. The four-color theorem. *J. Comb. Theory Ser. B*, 70(1) :2–44, 1997.
- [Šám03] R. Šámal. Antisymmetric flows and strong oriented coloring of planar graphs. *Discrete Math.*, 273(1-3) :203–209, 2003.
- [Sop97] É. Sopena. The chromatic number of oriented graphs. *J. Graph Theory*, 25 :191–205, 1997.
- [Sop01] É. Sopena. Oriented graph coloring. *Discrete Math.*, 229(1-3) :359–369, 2001.
- [Sop02] É. Sopena. There exist oriented planar graphs with oriented chromatic number at least sixteen. *Inform. Process. Lett.*, 81 :309–312, 2002.
- [SS99] A. Sali and G. Simonyi. Oriented list colourings of undirected graphs. In R. Graham, J. Kratochvíl, J. Nešetřil, and F. Roberts, editors, *Contemporary Trends in Discrete Mathematics : From DIMACS and DIMATIA to the Future*, volume 49, pages 307–317, 1999.
- [ST04] A. Szepietowski and M. Targan. A note on the oriented chromatic number of grids. *Inform. Process. Lett.*, 92(2) :65–70, 2004.
- [SV96] É. Sopena and L. Vignal. A note on the chromatic number of graphs with maximum degree three. Technical Report RR-1125-96, LaBRI, Université Bordeaux 1, 1996.
- [TV01] Zs. Tuza and M. Voigt. Oriented list colorings of graphs. *J. Graph Theory*, 36(4) :217–229, 2001.
- [Vig97] L. Vignal. *Homomorphismes et colorations de graphes orientés (in french)*. Phd thesis, Université Bordeaux 1, 1997.
- [Viz64] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz*, 3 :23–30, 1964.
- [Woo90] D. R. Woodall. Improper colorings of graphs. In R. Nelson and R. J. Wilson, editors, *Graph colourings*, volume 218 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, chapter 4, pages 45–63. Longman Scientific and Technical, 1990.
- [Woo04] D. R. Wood. A note on the oriented chromatic number. Preprint, 2004.
- [Woo05] D. R. Wood. Acyclic, star and oriented colourings of graph subdivisions. *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, 7(1) :37–50, 2005.



# Table des symboles

$A(G)$	ensemble des arcs de $G$	23
$E(G)$	ensemble des arêtes de $G$	23
$F(G)$	ensemble des faces du graphe $G$	32
$G^{-1}$	graphe inverse de $G$	24
$H \subset G$	$H$ sous-graphe propre de $G$	26
$H \subseteq G$	$H$ sous-graphe (partiel) de $G$	26
$K_n$	graphe complet d'ordre $n$	29
$L(G)$	graphe représentatif des arêtes de $G$	27
$LD(G)$	graphe représentatif des arcs de $G$	27
$QR_q$	graphe complet construit à partir des résidus quadratique non nuls de $q$	30
$SP_G(C)$	ensemble des 2-sources et 2-puits du cycle $C$ dans $G$	112
$V(G)$	ensemble des sommets de $G$	23
$\Delta(G)$	degré maximum de $G$	25
$\Gamma_G(v)$	ensemble des voisins de $v$ dans $G$	24
$\Gamma_G^+(v)$	ensemble des extrémités terminales de $v$ dans $G$	25
$\Gamma_G^-(v)$	ensemble des extrémités initiales de $v$ dans $G$	25
$\mathcal{D}_k$	classe des graphes de degré maximum au plus $k$	33
$\mathcal{G}(i, j)$	ensemble des grilles orientées à $i$ lignes et $j$ colonnes	42
$\mathcal{O}$	classe des graphes planaires extérieurs	33
$\mathcal{O}_g$	classe des graphes planaires extérieurs de maille au moins $g$	33
$\mathcal{P}$	classe des graphes planaires	33
$\mathcal{P}_g$	classe des graphes planaires de maille au moins $g$	33
$\mathcal{T}^k$	classe des $k$ -arbres partiels	33
$\mathcal{T}_g^k$	classe des $k$ -arbres partiels de maille au moins $g$	33
$\chi'(G)$	indice chromatique de $G$	35
$\chi'_a(G)$	indice chromatique acyclique de $G$	36
$\chi'_o(G)$	indice chromatique orienté de $G$	88
$\chi(G)$	nombre chromatique de $G$	34
$\chi_a(G)$	nombre chromatique acyclique de $G$	35

---

$\chi_o(G)$	nombre chromatique orienté de $G$	39
$\chi_s(G)$	nombre chromatique orienté fort de $G$	55
$\delta(G)$	degré minimum de $G$	25
$C_f^-(u)$	ensemble des couleurs présentes sur les arcs entrant de $u$ par la coloration $f$	88
$C_f^+(u)$	ensemble des couleurs présentes sur les arcs sortants de $u$ par la coloration $f$	88
$d_G(v)$	degré de $v$ dans $G$	25
$d_G^+(v)$	degré sortant de $v$ dans $G$	25
$d_G^-(v)$	degré entrant de $v$ dans $G$	25
$r(f)$	rang de la face $f$	32
$\text{adst}(G)$	étoile arboricité orientée acircuitique	128
$\text{dst}(G)$	étoile arboricité dirigée	127
$\text{mad}(G)$	degré moyen maximum	32



# Index

<b>A</b>	
arête . . . . .	23
arbre . . . . .	31
$k$ -arbre . . . . .	31
arbre épais . . . . .	42
arc . . . . .	23
arc entrant . . . . .	24
arc sortant . . . . .	24
arcs consécutifs . . . . .	24
inversion . . . . .	24
automorphisme . . . . .	28
<b>B</b>	
biparti . . . . .	32
<b>C</b>	
chaîne . . . . .	25
$\geq k$ -chaîne . . . . .	25
$\leq k$ -chaîne . . . . .	25
$k$ -chaîne . . . . .	25
chaîne alternée . . . . .	25
longueur . . . . .	25
chemin . . . . .	25
$\geq k$ -chemin . . . . .	25
$\leq k$ -chemin . . . . .	25
$k$ -chemin . . . . .	25
longueur . . . . .	25
circuit . . . . .	25
clique . . . . .	29
coloration	
étoile-coloration . . . . .	127
étoile-coloration dirigée . . . . .	37
étoile-coloration orientée acircuitique . . . . .	38, 128
arête-coloration acyclique . . . . .	36
arête-coloration propre . . . . .	35
arc-coloration orientée . . . . .	38, 87–88
bonne $QR_7$ -arc-coloration . . . . .	112
bonne $T_4$ -arc-coloration . . . . .	100
étoile-coloration dirigée . . . . .	127
sommet-coloration acyclique . . . . .	35
sommet-coloration orientée . . . . .	36, 39–41
sommet-coloration orientée forte . . . . .	55
sommet-coloration propre . . . . .	34
connexe . . . . .	26
$k$ -arête-connexe . . . . .	27
$k$ -arc-connexe . . . . .	27
$k$ -connexe . . . . .	27
composante connexe . . . . .	27
composante fortement connexe . . . . .	27
fortement connexe . . . . .	26
contraction . . . . .	29
corde . . . . .	26
couleur acceptable . . . . .	128
couleur disponible . . . . .	128
cycle . . . . .	25
cycle spécial . . . . .	111
<b>D</b>	
degré . . . . .	24
degré entrant . . . . .	25
degré maximum . . . . .	25
degré minimum . . . . .	25
degré moyen maximum . . . . .	32
degré sortant . . . . .	25
digraphe . . . . .	23
digraphe de Cayley . . . . .	55

- distance . . . . . 25
- E**
- échelle . . . . . 42
- étoile arboricité . . . . . 127
- étoile arboricité dirigée . . . . . 37
- étoile source . . . . . 37, 127
- extrémité . . . . . 24
- extrémité initiale . . . . . 24
- extrémité terminale . . . . . 24
- F**
- face . . . . . 32
- $\geq k$ -face . . . . . 32
- $\leq k$ -face . . . . . 32
- $k$ -face . . . . . 32
- feuilles . . . . . 31
- forêt . . . . . 31
- G**
- graphe  $k$ -dégénéré . . . . . 33
- graphe  $p$ -parti . . . . . 32
- graphe cible . . . . . 37
- graphe complet . . . . . 29
- graphe de Cayley . . . . . 55
- graphe inverse . . . . . 24
- graphe mineur . . . . . 29
- graphe non orienté . . . . . 23
- graphe orienté . . . . . 23
- graphe planaire . . . . . 32
- graphe planaire extérieur . . . . . 33
- graphe régulier . . . . . 25
- graphe représentatif des arêtes . . . . . 27
- graphe représentatif des arcs . . . . . 27
- graphe sous-jacent . . . . . 24
- H**
- homomorphisme . . . . . 28
- I**
- indice chromatique . . . . . 35
- indice chromatique acyclique . . . . . 36
- indice chromatique orienté . . . . . 88
- isomorphisme . . . . . 28
- isthme . . . . . 115
- M**
- maille . . . . . 26
- N**
- nombre chromatique . . . . . 34
- nombre chromatique acyclique . . . . . 35
- nombre chromatique orienté . . . . . 40
- nombre chromatique orienté fort . . . . . 55
- O**
- ordre . . . . . 24
- orientation . . . . . 24
- P**
- prédécesseur . . . . . 24
- puits . . . . . 25
- R**
- rang . . . . . 32
- S**
- sommet . . . . . 23
- $\geq k$ -sommet . . . . . 25
- $\leq k$ -sommet . . . . . 25
- $k$ -sommet . . . . . 25
- sommet interne . . . . . 31
- sommet isolé . . . . . 25
- sommet puits . . . . . 25
- sommet source . . . . . 25
- source . . . . . 25
- sous-graphe . . . . . 26
- sous-graphe induit . . . . . 26
- sous-graphe propre . . . . . 26
- sous-graphe partiel . . . . . 26
- stable . . . . . 29
- successeur . . . . . 24

**T**

taille.....	24
tournoi.....	29
arc-transitif.....	31
tournoi de Paley.....	30
tournoi transitif.....	30

**V**

voisin.....	24
$\geq k$ -voisin.....	25
$\leq k$ -voisin.....	25
$k$ -voisin.....	25



# **Annexes**



## Annexe A

# Coloration impropre acyclique par listes des graphes planaires extérieurs

**Résumé :** Nous considérons les colorations *impropres* (parfois appelées colorations *généralisées* ou colorations *relaxées*) de graphes telles que chaque classe de couleurs possède un degré borné.

Nous étudions une extension naturelle de la notion de coloration impropre, à savoir *la coloration impropre acyclique par listes*. En utilisant un algorithme en temps linéaire, nous montrons que les graphes planaires extérieurs sont acycliquement  $(2,5)^*$ -liste coloriables (*i.e.* ils sont acycliquement 2-liste coloriables avec des classes de couleurs induisant des graphes de degré au plus cinq). Ce résultat est optimal. Nous prouvons également que la coloration acyclique par liste et la coloration impropre acyclique par liste des graphes planaires sont deux notions équivalentes.

Cet article est actuellement soumis pour publication [EP06].

# Acyclic improper choosability of outerplanar graphs\*

Louis Esperet,<sup>†</sup> Alexandre Pinlou<sup>‡</sup>  
*LaBRI UMR CNRS 5800, Université Bordeaux I,*  
*351 Cours de la Libération,*  
*33405 Talence Cedex*  
 France

June 28, 2006

## Abstract

We consider *improper* colorings (sometimes called *generalized*, *defective* or *relaxed* colorings) of graphs in which every color class has a bounded degree.

We study a natural extension of improper colorings: *acyclic improper choosability*. Using a linear time algorithm, we prove that outerplanar graphs are acyclically  $(2, 5)^*$ -choosable (i.e. they are acyclically 2-choosable with color classes of maximum degree five). This result is optimal. We also prove that acyclic choosability and acyclic improper choosability of planar graphs are equivalent notions.

**Keywords:** Improper coloring, acyclic coloring, choosability, outerplanar graphs.

**AMS Subject Classification:** 05C15

## 1 Introduction

All graphs considered in this paper are finite, simple and undirected. Let  $G$  be a graph and let  $V(G)$  and  $E(G)$  be its vertex set and its edge set, respectively.

Many variations and extensions of graph colorings have been considered. In particular, *improper* colorings (sometimes called *generalized*, *defective* or *relaxed* colorings) have been extensively studied (see [15] for a survey). A *t-improper k-coloring* of  $G$ , or simply a  $(k, t)^*$ -coloring, is a partition of  $V(G)$  into  $k$  color classes  $V_1, V_2, \dots, V_k$  such that each  $V_i$  induces a graph with maximum degree  $t$ ; in other words, each vertex has at most  $t$  neighbors of the same color as itself. The *t-improper chromatic number* of  $G$  is therefore defined as the smallest integer  $k$  such that  $G$  is  $(k, t)^*$ -colorable. Notice that 0-improper coloring corresponds to the usual notion of proper coloring: a  $(k, 0)^*$ -coloring of  $G$  is a proper  $k$ -coloring of  $G$ , and the 0-improper chromatic number of  $G$  is the chromatic number of  $G$ .

$t$ -improper colorings were introduced by Cowel *et al.* [8]. They proved that every planar graph is  $(3, 2)^*$ -colorable and every outerplanar graph is  $(2, 2)^*$ -colorable. They also showed, without using

---

\*Part of this work has been supported by the European training network COMBSTRU (Combinatorial Structure of Intractable Problems), grant HPRN CT 2002 00278.

<sup>†</sup>*esperet@labri.fr*

<sup>‡</sup>*pinlou@labri.fr*



the Four-Color Theorem, that every planar graph is  $(4, 1)^*$ -colorable. In the last past years, several authors studied this coloring and the problem of bounding the  $t$ -improper chromatic number has been investigated for various classes of graph (see e.g. [9, 16, 17]).

A graph  $G$  is  $L$ -colorable if for a given list-assignment  $L = \{L(v) : v \in V(G)\}$ , there exists a proper coloring  $f$  of  $G$  such that  $f(v) \in L(v)$  for every  $v \in V(G)$ . If  $G$  is  $L$ -colorable for any list-assignment  $L$  with  $|L(v)| \geq l$  for every  $v$ , then we say that  $G$  is  $l$ -choosable. The *list chromatic number* is then defined as the smallest integer  $l$  such that  $G$  is  $l$ -choosable. Notice that a graph which is  $l$ -choosable is obviously  $l$ -colorable. Thomassen [13] proved that every planar graph is 5-choosable and Voigt [14] showed the tightness of this bound.

Eaton and Hull [10] generalized the notion of choosability to *improper* choosability: a graph  $G$  is  $t$ -improper  $l$ -choosable, or simply  $(l, t)^*$ -choosable, if for any list-assignment  $L$  such that  $|L(v)| \geq l$  for every  $v$ , there exists a  $t$ -improper coloring  $f$  of  $G$  such that  $f(v) \in L(v)$  for every  $v$ . For planar graphs, Eaton and Hull [10], and independently Škrekovski [12], proved that every planar graph is  $(3, 2)^*$ -choosable, which improves the above-mentioned Cowel *et al.*'s result. This result is sharp in a certain way since there exist planar graphs which are not  $(3, 1)^*$ -colorable and planar graphs which are not  $(2, t)^*$ -colorable for every  $t$ . Moreover, Eaton and Hull, and Škrekovski, both conjectured that every planar graph is  $(4, 1)^*$ -choosable.

Recall that an *acyclic coloring* of  $G$  is a coloring  $f$  of  $G$  such that for any two distinct colors  $i$  and  $j$ , the edges  $uv$  such that  $f(u) = i$  and  $f(v) = j$  induce a forest. A cycle is said *alternating* if it is properly colored with two colors. Notice that a coloring of  $G$  is acyclic if and only if  $G$  does not contain any alternating cycle. We can also note that improper bicolored cycles are not necessarily alternating cycles.

*Acyclic choosability* was recently introduced by Borodin *et al.* in [6]. A graph is acyclically  $l$ -choosable if for any list-assignment  $L$  such that  $|L(v)| \geq l$  for every  $v$ , there exists an acyclic coloring  $f$  of  $G$  such that  $f(v) \in L(v)$ . Borodin *et al.* [6] proved that every planar graph is acyclically 7-choosable. They also conjectured that every planar graph is acyclically 5-choosable.

Boiron *et al.* [3] extended in a natural way the notion of acyclic coloring to the notion of acyclic improper coloring as follows. An *acyclic  $t$ -improper  $k$ -coloring*, or simply an acyclic  $(k, t)^*$ -coloring, of  $G$  is a  $(k, t)^*$ -coloring which is acyclic, that is  $G$  contains no alternating cycle. The main motivation in the study of acyclic improper coloring is the link with oriented coloring (see [3] for more details). Boiron *et al.* [2] proved that every outerplanar graph is acyclically  $(2, 5)^*$ -colorable and constructed outerplanar graphs which are not acyclically  $(2, 4)^*$ -colorable. They also proved that for every  $k \geq 0$ , there exist planar graphs which are not acyclically  $(4, k)^*$ -colorable.

In a natural way, one can define *acyclic improper choosability* of graphs: a graph  $G$  is *acyclically  $t$ -improper  $L$ -colorable* if for a given list-assignment  $L = \{L(v) : v \in V(G)\}$ , there exists an acyclic  $t$ -improper coloring  $f$  such that  $f(v) \in L(v)$  for every  $v$ . If  $G$  is acyclically  $t$ -improper  $L$ -colorable for any list-assignment  $L$  with  $|L(v)| \geq l$  for every  $v$ , then we say that  $G$  is *acyclically  $t$ -improper  $l$ -choosable*, or simply *acyclically  $(l, t)^*$ -choosable*. The *acyclic  $t$ -improper list chromatic number* of  $G$  is therefore defined as the smallest integer  $l$  such that  $G$  is acyclically  $(l, t)^*$ -choosable.

Our main result concerns outerplanar graphs:

**Theorem 1** *Every outerplanar graph is acyclically  $(2, 5)^*$ -choosable.*

Notice that this theorem extends the above-mentioned result of Boiron *et al.* [3].

In a companion paper [11], we investigate improper acyclic choosability of graphs with bounded maximum degree. We prove that the asymptotic lower bound given in [1] for the acyclic chromatic number is still valid for the acyclic  $t$ -improper chromatic number if  $t = O((\frac{n}{\log n})^{3/4})$ .

We also prove the following result:

**Theorem 2** [11] *Every subcubic graph is acyclically  $(3, 1)^*$ -choosable.*

This paper is organised as follows. In Section 2, we give some notation that will be used later, and in Section 3 we prove Theorem 1. In Section 4, we make some final remarks about the acyclic improper choosability of planar graphs.

## 2 Notation and convention

In the rest of the paper, we will use the following notation. The degree of a vertex  $v$  is denoted by  $d(v)$ . A  $k$ -vertex (resp. a  $\leq k$ -vertex) is a vertex of degree  $k$  (resp. degree at most  $k$ ). A  $k$ -cycle (resp. a  $\geq k$ -cycle) is a cycle containing  $k$  vertices (resp. at least  $k$  vertices).

For a graph  $G$  and a vertex  $v \in V(G)$ , we denote by  $G \setminus \{v\}$  the graph obtained from  $G$  by removing  $v$  together with the set of its incident edges; for an edge  $uv \in E(G)$ ,  $G \setminus \{uv\}$  denotes the graph obtained from  $G$  by only removing the edge  $uv$ . These notions are extended to sets of vertices and edges in a standard way.

Let  $G$  be a graph and  $f$  be a coloring of  $G$ . For a given vertex  $v$  of  $G$ , we denote by  $im_f(v)$ , or simply  $im(v)$  when the coloring is clear from the context, the *impropriety* of the vertex  $v$ , which is the number of neighbors of  $v$  having the same color as itself.

In all the figures depicting configurations, we shall use the following drawing convention: a vertex whose neighbors are totally specified will be white, whereas a vertex whose neighbors are partially specified will be black.

## 3 Acyclic $(2, 5)^*$ -choosability of outerplanar graphs

### 3.1 Decomposition of outerplanar graphs

An *outerplanar graph* is a graph having a planar representation such that all the vertices are on the outer face. If there is a planar representation such that every face (except possibly the outer face) is a triangle, then the graph is said to be *near-triangulated*.

Let  $T$  be a rooted tree and let  $v_1, v_2, \dots, v_n$  be its vertices ordered according to some depth-first search walk in  $T$ . Let  $\phi: V(T) \rightarrow V(T)$  be the function defined as follows:

$$\phi: v_i \mapsto \begin{cases} \phi(v_{i-1}), & \text{if } v_{i-1} \text{ is } v_i \text{'s father,} \\ v_j & \text{a brother of } v_i \text{ with } j \text{ the maximum index smaller than } i, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Observe that the function  $\phi$  is not defined for the vertices  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ , where  $k$  is the smallest integer such that  $v_{k-1}$  is not  $v_k$ 's father: we denote this set of vertices by  $W$ .

In [4], Bonichon *et al.* proved that for any outerplanar graph  $G$ , we can find an order  $v_1, \dots, v_n$  on the vertices of  $G$  and a rooted spanning tree  $T_G$  of  $G$  such that

- the order  $v_1, \dots, v_n$  is a depth-first search order in  $T_G$ ,

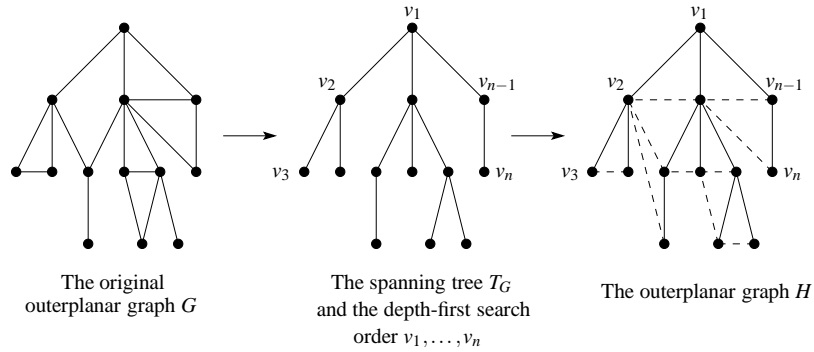


Figure 1: The Bonichon *et al.*'s outerplanar graph decomposition

- let  $\phi$  be defined as above by the rooted tree  $T_G$  and the order  $v_1, \dots, v_n$ . The graph  $H$  obtained from  $T_G$  by adding the set of transversal edges  $M = \{v\phi(v), v \in V(T_G)\}$  is a near-triangulated outerplanar graph such that  $V(G) = V(H)$  and  $G \subseteq H$ .

Figure 1 shows an example of decomposition of  $G$ . The transversal edges are dashed for more clarity. Observe that in this example,  $W = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

Notice that this decomposition is very close from the ordered breadth first search described by Calamoneri and Petreschi in [7].

Observe that for every  $i$ , there is at most one integer  $j < i$  such that  $v_i v_j$  is a transversal edge. This means that in any greedy coloring algorithm according to the order  $v_1, \dots, v_n$ , at each step  $i$ , the vertex  $v_i$  will be adjacent to at most two already colored vertices: its father and possibly  $\phi(v_i)$ .

Let  $p^k$  be the function defined as  $p^k(v) = v$  if  $k = 0$ , and  $p^k(v)$  equals to  $p^{k-1}(v)$ 's father otherwise. In other words,  $p^k(v)$  is the ancestor of  $v$  at distance  $k$  in  $T_G$ . Again,  $p^k$  is not defined for every vertex of  $V$  and every  $k$ .

Let  $v_i$  be a vertex of  $G$  with at least  $k$  children in  $T_G$ . For  $k \geq 1$ , the  $k$ -th child of  $v_i$ , denoted by  $s_k(v_i)$ , is  $v_{i+1}$  if  $k = 1$  and is  $v_j$  otherwise with  $j$  being the smallest integer such that  $\phi(v_j)$  is  $v_i$ 's  $(k - 1)$ -th child (see Figure 2 for an example).

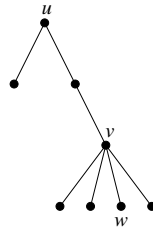


Figure 2: In this tree,  $w = s_3(v)$ ,  $u = p^2(v) = p^3(w)$  and  $v = p^1(w)$ .

### 3.2 Proof of Theorem 1

Let  $G$  be an outerplanar graph. Let  $L$  be a list-assignment for the vertices of  $G$  such that  $|L(v)| \geq 2$  for every  $v$ . We decompose  $G$  as described above: we obtain an order  $v_1, \dots, v_n$ , a rooted spanning tree

$T_G$ , a set of transversal edges  $M = \{v\phi(v), v \in V(G)\}$  and as a result a near-triangulated outerplanar graph  $H$ . Recall that  $W$  denotes the set of vertices for which the function  $\phi$  is not defined.

Let  $H_1, H_2, \dots, H_n$  be the sequence of graphs defined as  $H_i = H \setminus \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n\}$  for  $1 \leq i \leq n$ .

We color  $H$  greedily following the order  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . At Step 1, we color the graph  $H_1$  by assigning any color from  $L(v_1)$  to its unique vertex  $v_1$ . At Step  $2 \leq i \leq n$ , let  $f$  be the coloring of  $H_{i-1}$ , which is also a partial coloring of  $H_i$ . We use the following coloring rules to extend  $f$  to  $H_i$  (" $f(v_i) \in X$ " means that we choose any color  $c \in X$  and set  $f(v_i) = c$ ).

### Coloring rules:

R0 - If  $v_i \in W$ :  $f(v_i) \in L(v_i)$ .

R1 - If  $v_i$  is the first child of  $p^1(v_i)$  (in other words, if  $p^1(v_i) = v_{i-1}$ ):

- (a) if  $f(\phi(v_i)) \neq f(p^1(v_i))$ :  $f(v_i) \in L(v_i) \setminus \{f(\phi(v_i))\}$ ;
- (b) if  $f(\phi(v_i)) = f(p^1(v_i)) = a$ :
  - i. if  $f(p^2(v_i)) = a$ :
    - A. if  $p^2(v_i)$  and  $p^1(\phi(v_i))$  are the same vertex:
      - $\alpha$ . if  $\phi(v_i)$  is a leaf in  $T_G$  and belongs to  $W$ :  $f(v_i) \in L(v_i)$ ;
      - $\beta$ . if  $\phi(v_i)$  is a leaf in  $T_G$  or  $f(\phi^2(v_i)) \neq f(p^1(v_i))$ :  $f(v_i) \in L(v_i) \setminus \{f(\phi^2(v_i))\}$ ;
      - $\gamma$ . otherwise:  $f(v_i) \in L(v_i) \setminus \{f(s_1(\phi(v_i)))\}$ ;
    - B. if  $p^2(v_i)$  and  $p^1(\phi(v_i))$  are distinct vertices:  $f(v_i) \in L(v_i) \setminus \{f(p^3(v_i))\}$ ;
  - ii. if  $f(p^2(v_i)) \neq a$ :  $f(v_i) \in L(v_i) \setminus \{f(p^2(v_i))\}$ .

R2 - If  $v_i$  is the second child of  $p^1(v_i)$ :

- (a) if  $p^1(v_i) \in W$  or  $f(\phi(v_i)) \neq f(p^1(v_i))$ :  $f(v_i) \in L(v_i) \setminus \{f(p^1(v_i))\}$ ;
- (b) if  $f(\phi(v_i)) = f(p^1(v_i))$ :
  - i. if  $\phi(v_i)$  is a leaf in  $T_G$  or  $f(\phi^2(v_i)) \neq f(p^1(v_i))$  or  $f(p^2(v_i)) \neq f(p^1(v_i))$ :  $f(v_i) \in L(v_i) \setminus \{f(\phi(p^1(v_i)))\}$ ;
  - ii. otherwise:  $f(v_i) \in L(v_i) \setminus \{f(s_1(\phi(v_i)))\}$ .

R3 - If  $v_i$  is the  $k$ -th child of  $p^1(v_i)$  with  $k \geq 3$ :  $f(v_i) \in L(v_i) \setminus \{f(p^1(v_i))\}$ .

These rules ensure that the following claim is satisfied.

**Claim 3** Let  $1 \leq i \leq n$  and let  $\{v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+m-1}\} = \phi^{-1}(v_i)$  (the  $m$  vertices of  $H$  such that  $\phi(v_j) = \phi(v_{j+1}) = \dots = \phi(v_{j+m-1}) = v_i$ ). Then,  $f$  satisfies the following properties:

1.  $v_i$  has at most two children in  $T_G$  (the first and the second one) colored with  $f(v_i)$ .
2. If  $f(s_1(v_i)) \neq f(v_i)$ , then  $f(s_2(v_i)) \neq f(v_i)$ .
3. If  $f(v_i) = f(p^1(v_i)) = f(v_j) = f(v_{j+1}) = a$ , then  $f(v_{j+2}) \neq a$ .
4. If one of the vertices of  $\phi^{-1}(v_i)$ , say  $v_k$ , is such that  $f(v_k) \neq f(v_i)$ , then, for every  $v_{k'} \in \phi^{-1}(v_i)$  with  $k' > k$ ,  $f(v_{k'}) \neq f(v_i)$ .
5. At most three vertices of  $\phi^{-1}(v_i)$  ( $v_j, v_{j+1}$  and  $v_{j+2}$ ) are colored with  $f(v_i)$ .

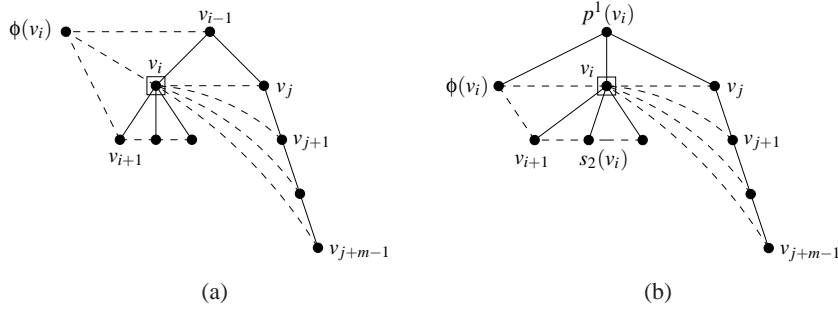


Figure 3: Configurations of Claim 3

6. Let us consider the configuration of Figure 3(a) where  $s_1(v_{i-1}) = v_i$  and  $s_1(v_i) = v_{i+1}$ . If  $f(v_i) = f(\phi(v_i)) = f(v_{i-1}) = f(v_{i+1}) = a$ , then  $f(v_{j+1}) \neq a$ .
7. Let us consider the configuration of Figure 3(b) where  $v_i$  is the  $k$ -th child of  $p^1(v_i)$  for  $k \geq 2$ . If  $f(v_i) = f(\phi(v_i)) = a$  and  $f(p^1(v_i)) \neq a$ , then  $f(s_2(v_i)) \neq a$ .

**Proof.**

1. Obvious by Rule R3.
2. Obvious by Rule R2(a).
3. Obvious by Rule R1(b)i.B.
4. If  $v_k = v_{j+m-1}$ , then  $v_k$  is a leaf in  $T_G$  and there is nothing to prove. Otherwise, observe that  $v_{k+1} \in \phi^{-1}(v_i)$  and  $v_{k+1} = s_1(v_k)$ . By Rule R1(a),  $f(v_{k+1}) \neq f(\phi(v_{k+1})) = f(v_i)$ .
5. Using Claim 3(4), we only have to prove that if  $v_j, v_{j+1}$  and  $v_{j+2}$  are colored with  $f(v_i)$ , then  $f(v_{j+3}) \neq f(v_i)$ . Rule R1(b)i.B ensures that this the case.
6. If  $f(v_j) \neq f(v_i)$ , then it is clear by Claim 3(4) that  $f(v_{k'}) \neq f(v_i)$  for every  $v_{k'} \in \phi^{-1}(v_i)$  such that  $k' > j$ . Suppose that  $f(v_i) = f(\phi(v_i)) = f(v_{i-1}) = f(v_{i+1}) = f(v_j)$ . By Rule R1(b)i.A. $\gamma$ ,  $f(v_{j+1}) \neq f(s_1(\phi(v_{j+1}))) = f(v_{i+1}) = f(v_i)$ .
7. If  $f(v_{i+1}) \neq f(v_i)$ , then by Claim 3(2), we have  $f(s_2(v_i)) \neq f(v_i)$ . Suppose that  $f(v_i) = f(\phi(v_i)) = f(v_{i+1}) = a$  and  $f(p^1(v_i)) \neq a$ . Then by Rule R2(b)i,  $f(s_2(v_i)) \neq f(\phi(v_i)) = f(v_i)$ .

□

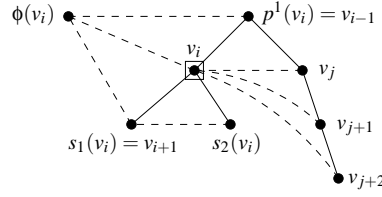
The previous claim allows us to state Lemmas 4 and 6.

**Lemma 4** *The coloring  $f$  is a 5-improper  $L$ -coloring of  $H$ .*

**Proof.** Let  $1 \leq i \leq n$  and let  $\{v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+m-1}\} = \phi^{-1}(v_i)$ .

- Suppose that  $v_i$  is a leaf in  $T_G$ .

Then,  $v_i$  has at most two neighbors in  $H$  that do not belong to  $\phi^{-1}(v_i)$ . By Claim 3(5), at most three vertices of  $\phi^{-1}(v_i)$  have the same color as  $v_i$ . Hence  $im(v_i) \leq 5$ .

Figure 4: Configuration of Lemma 4 (Case  $p^1(v_i) = v_{i-1}$ )

- Suppose that  $v_i$  is the first child of  $p^1(v_i) = v_{i-1}$  (see Figure 4).

Notice that in this case, if they exist,  $\phi(v_{i-1})$  and  $\phi(v_i)$  are the same vertex.

By Claim 3(1),  $v_i$  has at most two children colored with  $f(v_i)$ :  $s_1(v_i) = v_{i+1}$  and  $s_2(v_i)$ . By Claim 3(5), at most three vertices of  $\phi^{-1}(v_i)$  are colored with  $f(v_i)$ , namely  $v_j$ ,  $v_{j+1}$  and  $v_{j+2}$ . Therefore,  $v_i$  has at most seven neighbors colored with  $f(v_i)$ :  $p^1(v_i)$ ,  $\phi(v_i)$ ,  $s_1(v_i)$ ,  $s_2(v_i)$ ,  $v_j$ ,  $v_{j+1}$  and  $v_{j+2}$ . We show that actually at most five of them are colored with  $f(v_i)$ .

Suppose that  $f(p^1(v_i)) = f(\phi(v_i)) = f(v_i) = a$ . If  $f(s^1(v_i)) = a$ , then by Claims 3(6) and 3(4) the colors of  $v_{j+1}$  and  $v_{j+2}$  are distinct from  $f(v_i)$ . Otherwise ( $f(s_1(v_i)) \neq a$ ), by Claim 3(2),  $f(s_2(v_i)) \neq a$ . In both cases,  $im(v_i) \leq 5$ .

Notice that according to Rule R1(a), if  $f(p^1(v_i)) \neq f(\phi(v_i))$ , then  $f(v_i) \neq f(\phi(v_i))$ . Hence, the only remaining case is  $f(p^1(v_i)) = f(s_1(v_i)) = f(s_2(v_i)) = f(v_i)$  and  $f(\phi(v_i)) \neq f(v_i)$ . In this case, if  $v_j$  or  $v_{j+1}$  have a color distinct from  $f(v_i)$ , then  $im(v_i) \leq 4$ . Otherwise, by Claim 3(3),  $v_{j+2}$  has a color distinct from  $f(v_i)$  and then  $im(v_i) \leq 5$ .

- Suppose that  $v_i$  is the second child of  $p^1(v_i)$ .

As in the previous case,  $v_i$  has at most seven neighbors colored with  $f(v_i)$ :  $p^1(v_i)$ ,  $\phi(v_i)$ ,  $s_1(v_i)$ ,  $s_2(v_i)$ ,  $v_j$ ,  $v_{j+1}$  and  $v_{j+2}$ . We show that actually, at most five of them are colored with  $f(v_i)$ .

Suppose that  $f(p^1(v_i)) = f(v_i)$ ; then by Rule R3,  $f(v_j) \neq f(p^1(v_j)) = f(v_i)$ , and thus by Claim 3(4),  $v_{j+1}$  and  $v_{j+2}$  are distinct from  $f(v_i)$ . Hence,  $im(v_i) \leq 4$ .

Now suppose that  $f(p^1(v_i)) \neq f(v_i)$ . If  $\phi(v_i)$  or  $s_1(v_i)$  have colors distinct from  $f(v_i)$ , then clearly  $im(v_i) \leq 5$ . Otherwise,  $f(\phi(v_i)) = f(s_1(v_i)) = f(v_i)$  and then by Claim 3(7),  $f(s_2(v_i)) \neq f(v_i)$  and hence  $im(v_i) \leq 5$ .

- Suppose that  $v_i$  is the  $k$ -th child of  $p^1(v_i)$  with  $k \geq 3$ .

This case is equivalent to a subcase of the previous case where  $f(p^1(v_i)) \neq f(v_i)$ . Hence,  $im(v_i) \leq 5$ .

□

In order to prove Lemma 6, we use the following claim concerning the structure of cycles in  $H$ .

### Claim 5

1. If a  $\geq 4$ -cycle  $C$  in  $H_{i-1}$  contains the edge  $p^1(v_i)\phi(v_i)$ , then it also contains the vertex  $\phi^2(v_i)$ .
2. If for some vertex  $v \in H$ , a cycle  $C$  contains the vertex  $\phi(v)$  and the edge  $vs_k(v)$ , for some  $k$ , then  $C$  also contains all the vertices  $s_{k'}(v)$ ,  $1 \leq k' < k$ .

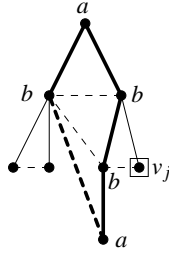


Figure 5: A dangerous quasi-alternating cycle in  $H_i$ , for some  $i < j$

**Proof.**

1. If  $C$  does not contain the edge  $\phi(v_i)\phi^2(v_i)$ , then it must contain some vertices among the descendants of  $\phi(v_i)$  in  $T_G$ . The graph  $H_{i-1}$  is outerplanar, so  $\phi(v_i)$ 's descendants are only connected to the rest of the graph  $H_{i-1}$  by  $\phi(v_i)$  and  $\phi^2(v_i)$ . Hence, the cycle  $C$  necessarily contains the vertex  $\phi^2(v_i)$ .
2. We prove by induction that  $C$  contains (in this order but not necessarily consecutively) the vertices  $s_k(v), s_{k-1}(v), \dots, s_1(v)$ . The cycle  $C$  does not contain the edge  $s_k(v)x$  for all  $x \in \phi^{-1}(s_k(v))$  since otherwise  $C$  would remain in the subgraph of  $H$  induced by the descendants of  $v$  in  $T_G$ , which is impossible since  $\phi(v) \in C$ . If the edge  $s_k(v)s_{k-1}(v)$  does not belong to  $C$ , then  $C$  contains a child of  $s_k(v)$ . Since the subgraph of  $H$  induced by the descendants of  $s_k(v)$  in  $T_G$  is only connected to the rest of the graph by  $s_k(v)$  and  $s_{k-1}(v)$ , the cycle  $C$  necessarily contains  $s_{k-1}(v)$ .  
Now suppose that  $C$  contains (in this order) the vertices  $s_k(v), s_{k-1}(v), \dots, s_{k-i+1}(v)$ . Since  $v$  and  $s_{k-i+1}(v)$  are in  $C$ , the cycle  $C$  contains either the edge  $s_{k-i+1}(v)s_{k-i}(v)$ , or the edge  $s_{k-i+1}(v)x$  where  $x$  is some child of  $s_{k-i+1}(v)$ . As in the previous case,  $C$  necessarily contains  $s_{k-i}(v)$ .

□

**Lemma 6** *The graph  $H$  does not contain any alternating cycle.*

**Proof.** An edge  $uv$  is *monochromatic* (resp. *bicolored*) if  $f(u) = f(v)$  (resp.  $f(u) \neq f(v)$ ). We define the *color* of a monochromatic edge as the color of its endpoints. We say that a cycle is a *quasi-alternating cycle* if it is a bicolored cycle with exactly one monochromatic edge. A monochromatic edge  $uv$  in  $H_i$  is *dangerous* if there exists a vertex  $v_j$  with  $j > i$  (i.e. at Step  $i$ ,  $v_j$  is still uncolored) such that  $v_j$  is adjacent to both  $u$  and  $v$  in  $H$ . A quasi-alternating cycle is *dangerous* in  $H_i$  if its monochromatic edge is dangerous (see Figure 5).

**Observation 7** *If we create an alternating  $\geq 6$ -cycle at Step  $j$ , then  $H_{j-1}$  necessarily contains a dangerous quasi-alternating  $\geq 5$ -cycle.*

We claim that after each step  $i$ :

1.  $H_i$  does not contain any alternating cycle.
2.  $H_i$  does not contain any dangerous quasi-alternating  $\geq 5$ -cycle.

These two properties are clearly satisfied at Step 1. We now inductively prove them at Step  $2 \leq i \leq n$ :

1. By induction,  $H_{i-1}$  does not contain any dangerous quasi-alternating  $\geq 5$ -cycle. So, by Observation 7,  $H_i$  does not contain any alternating  $\geq 6$ -cycle.

We now prove that  $H_i$  does not contain any alternating 4-cycle. By induction, an alternating 4-cycle in  $H_i$  necessarily contains  $v_i$ . There exist only four possible cases such that  $v_i$  belongs to a 4-cycle in  $H_i$ , the four depicted in Figure 6.

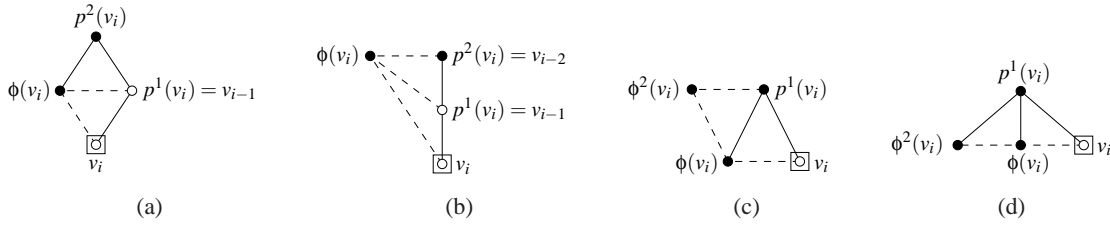


Figure 6: The four possible 4-cycles in  $H_i$  containing  $v_i$ .

Let us consider the case of Figure 6(a). If  $f(\phi(v_i)) = f(p^1(v_i))$ , then by Rule R1(b)iii, we color  $v_i$  such that  $f(v_i) \neq f(p^2(v_i))$ : this 4-cycle is not alternating.

Let us consider the case of Figure 6(b). To create an alternating cycle by coloring  $v_i$ , we clearly need  $f(\phi(v_i)) \neq f(p^2(v_i))$ . In this case, by Rule R1(a), we have  $f(p^1(v_i)) \neq f(\phi(v_i))$ . Hence, this 4-cycle is not alternating.

Let us consider the case of Figure 6(c). If  $f(\phi(v_i)) = f(p^1(v_i))$  and  $f(p^1(v_i)) \neq f(\phi^2(v_i))$ , then by Rule R2(b)i, we color  $v_i$  such that  $f(v_i) \neq f(\phi^2(v_i))$ , and this 4-cycle is not alternating.

Let us consider the case of Figure 6(d). To create an alternating cycle by coloring  $v_i$ , we clearly need  $f(\phi^2(v_i)) \neq f(p^1(v_i))$ . In this case, by Rule R2(a), we have  $f(p^1(v_i)) \neq f(\phi(v_i))$ . Hence, this 4-cycle cannot be alternating.

Hence, the graph  $H$  does not contain any alternating cycle.

2. By induction, for every  $j < i$ ,  $H_j$  contains no alternating cycle and no dangerous quasi-alternating  $\geq 5$ -cycle. So, any dangerous quasi-alternating  $\geq 5$ -cycle of  $H_i$  necessarily contains  $v_i$ . Hence, to create a dangerous quasi-alternating  $\geq 5$ -cycle in  $H_i$ ,  $H_{i-1}$  must contain a bicolored  $\geq 4$ -cycle with exactly two monochromatic edges, both being dangerous:  $p^1(v_i)\phi(v_i)$  and some edge  $uv$ . In the following, we assume that  $H_{i-1}$  contains such a cycle of minimum length, called  $\mathcal{C}$ , and we prove that the coloring of  $v_i$  ensures that no dangerous quasi-alternating  $\geq 5$ -cycle is created in  $H_i$ .

Notice that  $H$  necessarily contains a vertex  $v_j$  with  $j > i$  (i.e. at Step  $i$ ,  $v_j$  is still uncolored) adjacent to both endpoints of the dangerous monochromatic edge  $uv$  of  $\mathcal{C}$ ; thus, we have  $u = p^k(v_i)$  and  $v = p^{k+1}(v_i)$  for some  $k \geq 1$ .

We now prove that no dangerous quasi-alternating  $\geq 5$ -cycle is created in  $H_i$ .

- Suppose that  $v_i$  is the first child of  $p^1(v_i) = v_{i-1}$ . We consider two cases depending whether  $\phi(p^1(v_i))$  and  $\phi(p^2(v_i))$  are the same vertex (see Figure 7).



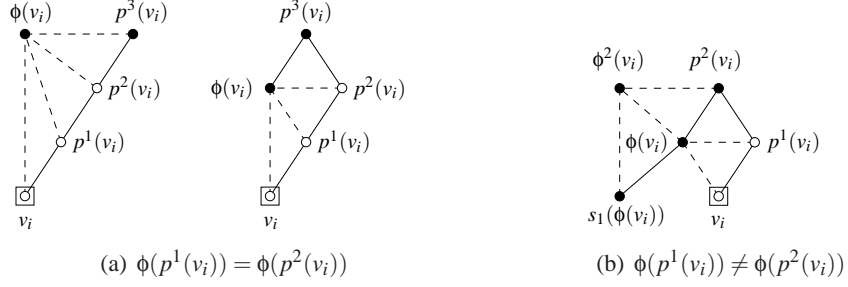


Figure 7: The vertex  $v_i$  is the first child of  $p^1(v_i)$ .

By hypothesis, we have  $f(p^1(v_i)) = f(\phi(v_i)) = a$ .

Let us consider the configurations of Figure 7(a) where  $\phi(p^1(v_i)) = \phi(p^2(v_i))$ . By Claim 3(4), we necessarily have  $f(p^2(v_i)) = a$  and therefore the two dangerous monochromatic edges of  $\mathcal{C}$  are  $p^2(v_i)p^1(v_i)$  and  $p^1(v_i)\phi(v_i)$ . The cycle  $\mathcal{C}$  necessarily contains  $p^3(v_i)$ . By Rule R1(b)i.B, we have  $f(v_i) \neq f(p^3(v_i))$ . This implies that  $H_i$  does not contain any dangerous quasi-alternating cycle.

Let us consider the configuration of Figure 7(b) where  $\phi(p^1(v_i)) \neq \phi(p^2(v_i))$ . Notice that  $\mathcal{C}$  necessarily contains  $p^2(v_i)$ .

Suppose that  $f(p^2(v_i)) = b$  with  $b \neq a$ . Then, by Rule R1(b)ii, we have  $f(v_i) \neq f(p^2(v_i))$ . This implies that  $H_i$  does not contain any dangerous quasi-alternating cycle. Hence, we may assume that  $f(p^2(v_i)) = a$ , which means that the two dangerous monochromatic edges of  $\mathcal{C}$  are the edges  $p^2(v_i)p^1(v_i)$  and  $p^1(v_i)\phi(v_i)$ . Thus  $f(p^2(v_i)) = f(p^1(v_i)) = f(\phi(v_i))$ , and therefore, by Rule R3,  $\phi(v_i)$  and  $p^1(v_i)$  are the first and the second children of  $p^2(v_i)$ , respectively.

By Claim 5(1), any  $\geq 4$ -cycle in  $H_{i-1}$  containing  $p^1(v_i)$  and  $\phi(v_i)$  also contains the vertex  $\phi^2(v_i)$ . If  $f(\phi^2(v_i)) = b \neq a$ , then by Rule R1(b)i.A.β, we have  $f(v_i) \neq b$ , which implies that  $H_i$  does not contain any dangerous quasi-alternating cycle.

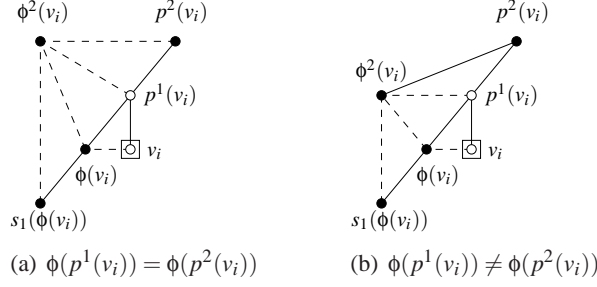
Now, suppose that  $f(\phi^2(v_i)) = a$ . In this case,  $\mathcal{C}$  is necessarily a  $\geq 6$ -cycle, since otherwise  $\mathcal{C}$  would contain three monochromatic edges. The cycle  $\mathcal{C}'$  obtained from  $\mathcal{C} \setminus \{p^1(v_i)\}$  by adding the edge  $p^2(v_i)\phi(v_i)$  is therefore a dangerous quasi-alternating cycle in  $H_{i-2}$ , which contradicts the induction hypothesis.

- Suppose that  $v_i$  is the second child of  $p^1(v_i)$  (see Figure 8). We handle at the same time the case  $\phi(p^1(v_i)) = \phi(p^2(v_i))$  (see Figure 8(a)) and the case  $\phi(p^1(v_i)) \neq \phi(p^2(v_i))$  (see Figure 8(b)).

By hypothesis, we have  $f(p^1(v_i)) = f(\phi(v_i)) = a$ . By Claim 5(1), the cycle  $\mathcal{C}$  contains the vertex  $\phi^2(v_i)$ . If  $f(\phi^2(v_i)) = b \neq a$ , then by Rule R2(b)i, we have  $f(v_i) \neq b$ . This implies that  $H_i$  does not contain any dangerous quasi-alternating cycle.

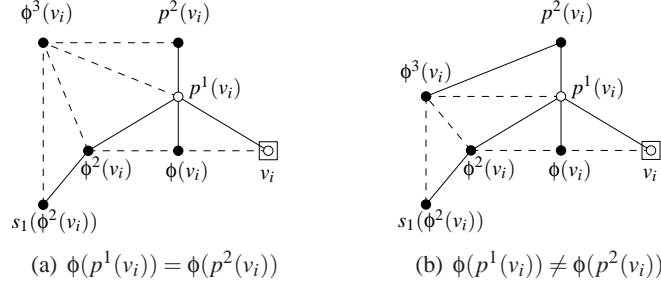
We may therefore assume that  $f(\phi^2(v_i)) = a$ . Suppose that  $f(p^2(v_i)) = b \neq a$ . Recall that the cycle  $\mathcal{C}$  contains two dangerous monochromatic edges, namely  $p^1(v_i)\phi(v_i)$  and  $p^k(v_i)p^{k+1}(v_i)$  for some  $k \geq 1$ . Thus,  $\mathcal{C}$  is clearly a  $\geq 5$ -cycle and  $p^2(v_i)\phi^2(v_i)$  is a bicolored chord of  $\mathcal{C}$ , which contradicts the minimality of  $\mathcal{C}$ .

We can therefore assume that  $f(p^2(v_i)) = a$ . It means that the two dangerous monochromatic edges of  $\mathcal{C}$  are the edges  $p^2(v_i)p^1(v_i)$  and  $p^1(v_i)\phi(v_i)$ . Since the edge  $\phi(v_i)\phi^2(v_i)$  is monochromatic,  $\mathcal{C}$  necessarily contains a child of  $\phi(v_i)$ . By Claim 5(2),  $\mathcal{C}$  also contains

Figure 8: The vertex  $v_i$  is the second child of  $p^1(v_i)$ .

$s_1(\phi(v_i))$ . By Claim 3(3) (case of Figure 8(a)) and by Claim 3(5) (case of Figure 8(b)),  $f(s_1(\phi(v_i))) = b \neq a$ , and thus by Rule R2(b)ii,  $f(v_i) \neq b$ . This implies that  $H_i$  does not contain any dangerous quasi-alternating cycle.

- Suppose that  $v_i$  is the third child of  $p^1(v_i)$  (see Figure 9). We handle at the same time the case  $\phi(p^1(v_i)) = \phi(p^2(v_i))$  (see Figure 9(a)) and the case  $\phi(p^1(v_i)) \neq \phi(p^2(v_i))$  (see Figure 9(b)).

Figure 9: The vertex  $v_i$  is the third child of  $p^1(v_i)$ .

By hypothesis, we have  $f(p^1(v_i)) = f(\phi(v_i)) = a$ , and by Claim 3(2),  $f(\phi^2(v_i)) = a$ .

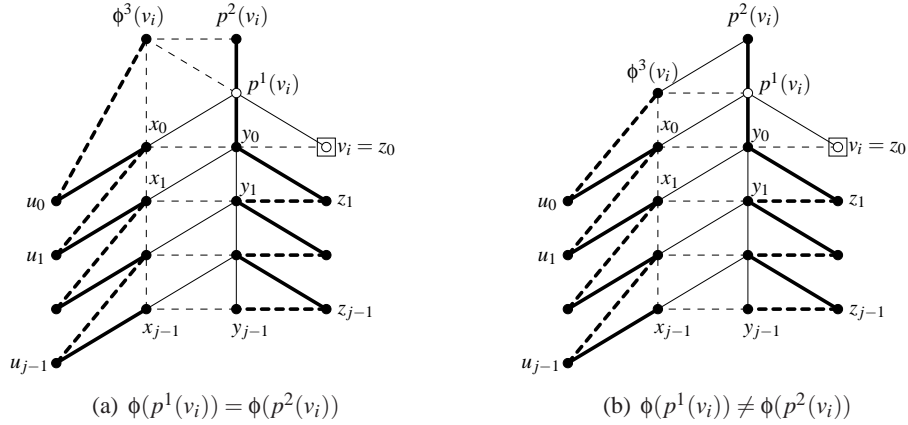
By Claim 5(1), the cycle  $\mathcal{C}$  contains  $\phi^2(v_i)$ . Moreover, the subgraph  $H'$  of  $H_{i-1}$  induced by  $p^1(v_i)$  and all its descendants in  $T_G$  is only connected to the graph  $H_{i-1} \setminus V(H')$  by the vertices  $p^2(v_i)$  and  $\phi^3(v_i)$ . Since the cycle  $\mathcal{C}$  contains an edge  $p^k(v_i)p^{k+1}(v_i)$  ( $k \geq 1$ ), it is not entirely contained in  $H'$  and therefore contains the vertices  $p^2(v_i)$  and  $\phi^3(v_i)$ . So, the cycle  $\mathcal{C}$  has length at least five.

By minimality of  $\mathcal{C}$ , we have  $f(\phi^3(v_i)) = a$ , since otherwise the edge  $p^1(v_i)\phi^3(v_i)$  would be a bicolored chord of  $\mathcal{C}$ .

Suppose now that  $f(p^2(v_i)) = b \neq a$ . In this case, the dangerous monochromatic edge  $p^k(v_i)p^{k+1}(v_i)$  of  $\mathcal{C}$  is such that  $k \geq 2$ , and then  $p^2(v_i)\phi^3(v_i)$  is a bicolored chord of  $\mathcal{C}$ , which contradicts the minimality of  $\mathcal{C}$ .

Therefore, we may assume that  $f(p^2(v_i)) = a$ , which implies that the two dangerous monochromatic edges of  $\mathcal{C}$  are the edges  $p^2(v_i)p^1(v_i)$  and  $p^1(v_i)\phi(v_i)$ .

By Rule R3, we have  $f(v_i) = b \neq a$ . Let  $x_0 = \phi^2(v_i)$ ,  $y_0 = \phi(v_i)$ ,  $z_0 = v_i$  and  $u_0 = s_1(x_0)$ . For every  $j \geq 1$ , we define the vertices  $x_j$ ,  $y_j$  and  $z_j$  as  $s_1(y_{j-1})$ ,  $s_2(y_{j-1})$  and  $s_3(y_{j-1})$ ,


 Figure 10: The thick edges belong to the cycle  $\mathcal{C}$ .

respectively, and the vertex  $u_j$  as  $s_1(x_j)$ . We prove by induction that for all  $j \geq 0$ , the vertices  $x_j, y_j, z_j$  and  $u_j$  are well defined and

$$\mathcal{C} = (y_0 z_1 y_1 z_2 y_2 \cdots z_{j-1} y_{j-1} z_j y_j \cdots x_j u_j x_{j-1} u_{j-1} \cdots x_2 u_2 x_1 u_1 x_0 u_0 \cdots y_0).$$

The edge  $\phi^2(v_i)\phi^3(v_i)$  is monochromatic and therefore does not belong to the cycle  $\mathcal{C}$ . Thus, the cycle  $\mathcal{C}$  contains one child of  $\phi^2(v_i)$ . Hence, the vertex  $u_0 = s_1(\phi^2(v_i))$  exists and by Claim 5(2)  $u_0$  belongs to the cycle  $\mathcal{C}$ . By Claim 3(5) (case of Figure 10(a)) or by Rule R1(b)i.B (case of Figure 10(b)), we have  $f(u_0) \neq a$ . Since  $u_0$  belongs to  $\mathcal{C}$ ,  $f(u_0) = b$ . The cycle  $\mathcal{C}$  is minimal, so the edge  $x_0 u_0$  belongs to  $\mathcal{C}$ . Therefore,  $\mathcal{C} = (y_0 \cdots x_0 u_0 \cdots y_0)$ .

Let  $j \geq 1$ . We assume that  $x_{j-1}, y_{j-1}, z_{j-1}$  and  $u_{j-1}$  are defined and  $\mathcal{C} = (y_0 z_1 y_1 z_2 y_2 \cdots z_{j-1} y_{j-1} \cdots x_{j-1} u_{j-1} \cdots x_2 u_2 x_1 u_1 x_0 u_0 \cdots y_0)$ . Since  $f(x_0) = f(y_0) = a$ , we have  $f(x_k) = f(y_k) = a$  and  $f(z_k) = f(u_k) = b$  for all  $k < j$ . Since the edge  $x_{j-1} y_{j-1}$  is monochromatic,  $\mathcal{C}$  contains a child of  $y_{j-1}$  and by Claim 5(2),  $s_1(y_{j-1}) = x_j$  exists and belongs to  $\mathcal{C}$ . By Rule R1(b)i.A. $\gamma$ , we have  $f(x_j) \neq f(u_{j-1}) = b$  and then  $f(x_j) = a$ . Thus, the vertex  $s_2(y_{j-1}) = y_j$  exists and belongs to  $\mathcal{C}$  by Claim 5(2).

The edge  $x_{j-1} u_{j-1}$  belongs to  $\mathcal{C}$ , and the edges  $x_{j-1} x_{j-2}, x_{j-1} y_{j-2}, x_{j-1} y_{j-1}$  and  $x_{j-1} x_j$  are monochromatic (if  $j = 1$ , we consider  $p^1(v_i)$  instead of  $y_{j-2}$ ); so the cycle  $\mathcal{C}$  contains the edge  $x_{j-1} t$  with  $t \in \phi^{-1}(x_{j-1}) \setminus \{x_j, y_{j-1}\}$  and therefore, the vertex  $u_j = s_1(x_j)$  exists. If two vertices of  $\phi^{-1}(x_j)$ , say  $s$  and  $t$ , are such that  $s x_j$  and  $x_j t$  belong to  $\mathcal{C}$ , then  $\mathcal{C}$  is entirely contained in the subgraph of  $H$  induced by  $x_j$  and the descendants of  $y_j$  in  $T_G$ . This is impossible since  $x_{j-1} \in \mathcal{C}$ . Hence,  $\mathcal{C}$  contains a child of  $x_j$  and by Claim 5(2), we have  $u_j \in \mathcal{C}$ . By Rule R1(b)i.B, we have  $f(u_j) \neq y_{j-2} = a$ , so  $f(u_j) = b$ , and by minimality of  $\mathcal{C}$ , the edges  $x_j u_j$  and  $u_j x_{j-1}$  belong to  $\mathcal{C}$ .

Since  $x_j$  is not a leaf in  $T_G$ , by Rule R2(b)ii  $f(y_j) \neq f(u_j) = b$ , so  $f(y_j) = a$  and the vertex  $s_3(y_{j-1}) = z_j$  exists and belongs to  $\mathcal{C}$  by Claim 5(2). By Rule R3,  $f(z_j) \neq f(y_{j-1}) = a$ , so  $f(z_j) = b$  and by minimality of  $\mathcal{C}$ , the edges  $y_{j-1} z_j$  and  $z_j y_j$  belong to  $\mathcal{C}$ . Hence,  $\mathcal{C} = (y_0 z_1 y_1 z_2 y_2 \cdots z_{j-1} y_{j-1} z_j y_j \cdots x_j u_j x_{j-1} u_{j-1} \cdots x_2 u_2 x_1 u_1 x_0 u_0 \cdots y_0)$ .

As a consequence, in this configuration, such a cycle  $\mathcal{C}$  contains an infinite number of vertices, which is a contradiction since  $H$  is finite.

- Suppose that  $v_i$  is the  $k$ -th child of  $p^1(v_i)$  for  $k \geq 4$ . By hypothesis, we have  $f(p^1(v_i)) = f(\phi(v_i))$ . Since  $\phi(v_i)$  is the  $(k-1)$ -th child of  $p^1(v_i)$ , this contradicts Rule R3.

□

Lemmas 4 and 6 imply that the coloring algorithm gives an acyclic 5-improper  $L$ -coloring of  $H$ , which is also an acyclic 5-improper  $L$ -coloring of  $G$ . That completes the proof of Theorem 1. Since the Bonichon *et al.* decomposition can be computed in linear time [4], this proof provides a linear time algorithm for finding a 2-improper coloring of any outerplanar graph given lists of size at least five.

The result of Theorem 1 is optimal. Indeed, it is clear that outerplanar graphs are not  $(1, t)^*$ -choosable for every  $t \geq 0$  and therefore are not acyclically  $(1, t)^*$ -choosable. Moreover, Boiron *et al.* [3] constructed outerplanar graphs which are not acyclically  $(2, 4)^*$ -colorable and therefore not acyclically  $(2, 4)^*$ -choosable.

## 4 Concluding remarks

As noted in Introduction, Borodin *et al.* [6] conjectured that every planar graph is acyclically 5-choosable. This result would imply Borodin's result on acyclic 5-coloring of planar graphs [5] and Thomassen's result on 5-choosability of planar graphs [13]. In the following, we prove that acyclic choosability and acyclic improper choosability of planar graphs are equivalent.

**Proposition 8** *If for some  $t \geq 0$ , every planar graph is acyclically  $(l, t)^*$ -choosable, then every planar graph is acyclically  $l$ -choosable.*

**Proof.** Assume that for some  $t \geq 0$ , every planar graph is acyclically  $(l, t)^*$ -choosable. Let  $G$  be a planar graph and  $L$  a list-assignment such that  $|L(v)| \geq l$  for every  $v \in V(G)$ . Assume that for all  $v$ ,  $L(v) \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Let  $G'$  be the planar graph obtained from  $G$  by adding  $l+1$  2-paths between each pair of adjacent vertices in  $G$ , and let  $L'$  be the list-assignment of  $G'$  defined as follows: if  $v \in V(G)$ , then  $L'(v) = L(v)$ ; otherwise,  $L'(v) = \{M+1, M+2, \dots, M+l\}$ . Let  $f$  be an acyclic  $t$ -improper  $L'$ -coloring of  $G'$ . Let  $u$  and  $v$  be to adjacent vertices in  $G$  and  $u_1, \dots, u_{l+1}$  be the  $l+1$  vertices from  $V(G') \setminus V(G)$  adjacent to both  $u$  and  $v$ . Clearly, two of them receive the same color in any  $t$ -improper  $L'$ -coloring of  $G'$ . Thus,  $f(u) \neq f(v)$ , since otherwise  $G'$  would contain an alternating 4-cycle. Hence, the restriction of  $f$  to  $G$  is an acyclic 0-improper  $L$ -coloring of  $G$ , *i.e.* an acyclic  $L$ -coloring of  $G$ . □

As a consequence, proving that for some  $t \geq 0$ , every planar graph is acyclically  $(5, t)^*$ -choosable is equivalent to proving Borodin *et al.*'s conjecture.

Since there exist planar graphs which are not acyclically 4-choosable [14], Proposition 8 also implies that planar graphs are not acyclically  $(4, t)^*$ -choosable for all  $t \geq 0$  (which also follows from the results of Boiron *et al.* [3]).

## References

- [1] N. Alon, C. McDiarmid, and B. Reed. Acyclic coloring of graphs. *Random Structures and Algorithms*, 2(3):277–288, 1991.

- [2] P. Boiron, É. Sopena, and L. Vignal. Acyclic improper colorings of graphs with bounded degree. In *Dimacs/Dimatia conference "Contemporary Trends in Discrete Mathematics"*, volume 49 of *Dimacs Series*, pages 1–10. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 1997.
- [3] P. Boiron, É. Sopena, and L. Vignal. Acyclic improper colorings of graphs. *J. Graph Theory*, 32(1):97–107, 1999.
- [4] N. Bonichon, C. Gavoille, and N. Hanusse. Canonical decomposition of outerplanar maps and application to enumeration, coding, and generation. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2003)*, volume 2880 of *LNCS*, pages 81–92. Springer-Verlag, 2003.
- [5] O. V. Borodin. On acyclic colorings of planar graphs. *Discrete Math.*, 25:211–236, 1979.
- [6] O. V. Borodin, D. Fon-Der-Flass, A. V. Kostochka, A. Raspaud, and É. Sopena. Acyclic list 7-coloring of planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 40(2):83–90, 2002.
- [7] T. Calamoneri and R. Petreschi.  $L(h,1)$ -labeling subclasses of planar graphs. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 64:414–426, 2004.
- [8] L. J. Cowel, R. H. Cowel, and D. R. Woodall. Defective colorings of graphs in surfaces: partitions into subgraphs of bounded valency. *J. Graph Theory*, 10:187–195, 1986.
- [9] L. J. Cowel, W. Goddard, and C. E. Jesurum. Defective colorings revisited. *J. Graph Theory*, 24(3):205–219, 1997.
- [10] N. Eaton and T. Hull. Defective list colorings of planar graphs. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 25:79–87, 1999.
- [11] L. Esperet, C. McDiarmid, and A. Pinlou. Acyclic improper choosability of graphs with bounded maximum degree. Preprint, may 2006.
- [12] R. Škrekovski. List improper colourings of planar graphs. In *Combinatorics, Probability and Computing*, volume 8, pages 293–299. Cambridge University Press, 1999.
- [13] Carsten Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *J. Comb. Theory Ser. B*, 62(1):180–181, 1994.
- [14] M. Voigt. List colourings of planar graphs. *Discrete Math.*, 120(1-3):215–219, 1993.
- [15] D. R. Woodall. Improper colorings of graphs. In R. Nelson and R. J. Wilson, editors, *Graph colourings*, volume 218 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, chapter 4, pages 45–63. Longman Scientific and Technical, 1990.
- [16] D. R. Woodall. Defective choosability results for outerplanar and related graphs. *Discrete Math.*, 258(1-3):215–223, 2002.
- [17] D. R. Woodall. Defective choosability of graphs with no edge-plus-independent-set minor. *J. Graph Theory*, 45(1):51–56, 2004.



## Annexe B

# Coloration impropre acyclique par listes des graphes de degré borné

**Résumé :** Nous considérons les colorations *impropres* (parfois appelées colorations *généralisées* ou colorations *relaxées*) de graphes telles que chaque classe de couleurs possède un degré borné.

Nous étudions une extension naturelle de la notion de coloration impropre, à savoir *la coloration impropre acyclique par listes*. Nous prouvons que les graphes de degré au plus trois sont acycliquement  $(3, 1)^*$ -liste coloriable (*i.e.* ils sont acycliquement 3-liste coloriable avec des classes de couleurs induisant des graphes de degré au plus un) et nous proposons une borne inférieure asymptotique du nombre chromatique acyclique  $t$ -impropre des graphes de degré maximum  $d$ .

# Acyclic improper choosability of graphs with bounded maximum degree

Louis Esperet<sup>a,1,\*</sup>Colin McDiarmid<sup>b,†</sup>Alexandre Pinlou<sup>a,1,‡</sup><sup>a</sup> LaBRI, Université Bordeaux 1, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France<sup>b</sup> Department of Statistics, University of Oxford, 1 South Parks Road, Oxford OX1 3TG, UK

May 16, 2006

## Abstract

We consider *improper* colorings (sometimes called *generalized*, *defective* or *relaxed* colorings) in which every color class has a bounded maximum degree.

We propose a natural extension of improper colorings: *acyclic improper choosability*. We prove that subcubic graphs are acyclically  $(3, 1)$ -choosable (i.e. they are acyclically 3-choosable with color classes of maximum degree one) and investigate asymptotic lower bounds of acyclic  $t$ -improper chromatic number of graphs with maximum degree  $d$ .

**Keywords:** Improper coloring, acyclic coloring, choosability, cubic graphs.

**AMS Subject Classification:** 05C15

## 1 Introduction

All graphs considered in this paper are finite, simple and undirected. Let  $G$  be a graph and let  $V(G)$  and  $E(G)$  be its vertex set and its edge set, respectively.

Many variations and extensions of graph colorings have been considered. In particular, *improper* colorings (sometimes called *generalized*, *defective* or *relaxed* colorings) have been extensively studied (see [12] for a survey). A  $t$ -*improper*  $k$ -coloring of  $G$ , or simply a  $(k, t)$ -coloring, is a partition of  $V(G)$  into  $k$  color classes  $V_1, V_2, \dots, V_k$  such that each  $V_i$  induces a graph with maximum degree  $t$ ; in other words, each vertex has at most  $t$  neighbors of the same color as itself. The  $t$ -*improper chromatic number* of  $G$  is therefore defined as the smallest integer  $k$  such that  $G$  is  $(k, t)$ -colorable. Notice that 0-improper coloring corresponds to the usual notion of proper coloring: a  $(k, 0)$ -coloring of  $G$  is a proper  $k$ -coloring of  $G$ , and the 0-improper chromatic number of  $G$  is the chromatic number of  $G$ .

Improper colorings were introduced by Cowel *et al.* [5]. In the last past years, several authors studied this coloring and the problem of bounding the  $t$ -improper chromatic number has been investigated for various classes of graph.

<sup>1</sup>Part of this work has been supported by the European training network COMBSTRU

\*esperet@labri.fr

†cmd@stats.ox.ac.uk

‡pinlou@labri.fr



A graph  $G$  is  $L$ -colorable if for a given list-assignment  $L = \{L(v) : v \in V(G)\}$ , there exists a proper coloring  $f$  of  $G$  such that  $f(v) \in L(v)$  for every  $v \in V(G)$ . If  $G$  is  $L$ -colorable for any list-assignment  $L$  with  $|L(v)| \geq l$  for every  $v$ , then we say that  $G$  is  $l$ -choosable. The *list chromatic number* is then defined as the smallest integer  $l$  such that  $G$  is  $l$ -choosable. Notice that a graph which is  $l$ -choosable is obviously  $l$ -colorable. Thomassen [10] proved that every planar graph is 5-choosable and Voigt [11] showed the tightness of this bound.

Eaton and Hull [6] generalized the notion of choosability to *improper* choosability: a graph  $G$  is  $t$ -improper  $l$ -choosable, or simply  $(l, t)$ -choosable, if for any list-assignment  $L$  such that  $|L(v)| \geq l$  for every  $v$ , there exists a  $t$ -improper coloring  $f$  of  $G$  such that  $f(v) \in L(v)$  for every  $v$ . For planar graphs, Eaton and Hull [6], and independently Škrekovski [9], proved that every planar graph is  $(3, 2)$ -choosable. Moreover, Eaton and Hull, and Škrekovski, both conjectured that every planar graph is  $(4, 1)$ -choosable.

Recall that an *acyclic coloring* of  $G$  is a coloring  $f$  of  $G$  such that for any two distinct colors  $i$  and  $j$ , the edges  $uv$  such that  $f(u) = i$  and  $f(v) = j$  induce a forest. A cycle is said *alternating* if it is properly colored with two colors. Notice that a coloring of  $G$  is acyclic if and only if  $G$  does not contain any alternating cycle. We can also note that improper bicolored cycles are not necessarily alternating cycles.

*Acyclic choosability* was recently introduced by Borodin *et al.* in [4]. A graph is acyclically  $l$ -choosable if for any list-assignment  $L$  such that  $|L(v)| \geq l$  for every  $v$ , there exists an acyclic coloring  $f$  of  $G$  such that  $f(v) \in L(v)$ . Borodin *et al.* [4] proved that every planar graph is acyclically 7-choosable. They also conjectured that every planar graph is acyclically 5-choosable. Acyclic choosability of graph with bounded degree was also investigated, and Gonçalves and Montassier [8] showed that every subcubic graphs (graphs with maximum degree three) is acyclically 4-choosable.

Boiron *et al.* [3] extended in a natural way the notion of *acyclic coloring* to the notion of acyclic improper coloring as follows. An *acyclic  $t$ -improper  $k$ -coloring*, or simply an acyclic  $(k, t)$ -coloring, of  $G$  is a  $(k, t)$ -coloring which is acyclic, that is  $G$  contains no alternating cycle. The main motivation in the study of acyclic improper coloring is the link with oriented coloring (see [3] for more details). Boiron *et al.* [2] proved that every subcubic graph is acyclically  $(3, 1)$ -colorable and conjectured that every subcubic graph is acyclically  $(2, 2)$ -colorable. Moreover, they constructed subcubic graphs which are not acyclically  $(2, 1)$ -colorable.

In a natural way, one can define *acyclic improper choosability* of graphs: a graph  $G$  is *acyclically  $t$ -improper  $L$ -colorable* if for a given list-assignment  $L = \{L(v) : v \in V(G)\}$ , there exists an acyclic  $t$ -improper coloring  $f$  such that  $f(v) \in L(v)$  for every  $v$ . If  $G$  is acyclically  $t$ -improper  $L$ -colorable for any list-assignment  $L$  with  $|L(v)| \geq l$  for every  $v$ , then we say that  $G$  is *acyclically  $t$ -improper  $l$ -choosable*, or simply *acyclically  $(l, t)$ -choosable*. The *acyclic  $t$ -improper list chromatic number* of  $G$  is therefore defined as the smallest integer  $l$  such that  $G$  is acyclically  $(l, t)$ -choosable.

Our main result concerns subcubic graphs. Observe that some graphs with maximum degree  $\Delta$  are not acyclically  $(\Delta - 1, t)$ -choosable, for any  $t \geq 0$ :

**Observation 1** *For every  $\Delta$ , there exists a graph  $G_\Delta$  with maximum degree  $\Delta$  such that for every  $t \geq 0$ ,  $G_\Delta$  is not acyclically  $(\Delta - 1, t)$ -choosable.*

To see that, let  $\Delta \geq 2$  and consider the complete bipartite graph  $K_{\Delta, \Delta}$  of degree  $\Delta$ . We give the following list-assignment to the vertices of  $K_{\Delta, \Delta}$ : we assign the list  $\{1, 2, \dots, \Delta - 1\}$  to every vertex of the first

stable set and  $\{\Delta, \Delta + 1, \dots, 2\Delta - 2\}$  to every vertex of the second stable set. It is clear that two vertices of each stable set will get the same color, which creates an alternating cycle of length four.

Therefore, for any  $t \geq 0$ , the acyclic  $t$ -improper list chromatic number of the class of graphs with maximum degree  $\Delta$  is at least  $\Delta$ , and thus the above-mentioned conjecture of Boiron *et al.* [2] on acyclic improper coloring of subcubic graphs does not hold for choosability. We prove the following theorem:

**Theorem 2** *Every subcubic graph is acyclically  $(3, 1)$ -choosable.*

Notice that this theorem extends the above-mentioned result of Boiron *et al.* [2].

In a separate paper [7], we investigate acyclic improper choosability of outerplanar graphs and prove the following result:

**Theorem 3** [7] *Every outerplanar graphs is acyclically  $(2, 5)$ -choosable.*

This paper is organized as follows. In Section 2, we give some notation that will be used later and we prove Theorem 2 in Section 3. Finally, in Section 4, we investigate general bounds for graphs with maximum degree  $d$ .

## 2 Notation and convention

In the rest of the paper, we will use the following notation. The degree of a given vertex  $v$  is denoted by  $d(v)$ . A  $k$ -vertex (resp. a  $\leq k$ -vertex) is a vertex of degree  $k$  (resp. degree at most  $k$ ). We denote by  $N(v)$  the set of the neighbors of  $v$ . A  $k$ -cycle (resp. a  $\geq k$ -cycle) is a cycle containing  $k$  vertices (resp. at least  $k$  vertices).

For a graph  $G$  and a vertex  $v \in V(G)$ , we denote by  $G \setminus \{v\}$  the graph obtained from  $G$  by removing  $v$  together with the set of its incident edges; for an edge  $uv$  of  $E(G)$ ,  $G \setminus \{uv\}$  denotes the graph obtained from  $G$  by only removing the edge  $uv$ . These notions are extended to sets of vertices and edges in a standard way.

Let  $G$  be a graph and  $f$  be a coloring of  $G$ . For a given vertex  $v$  of  $G$ , we denote by  $im_f(v)$ , or simply  $im(v)$  when the coloring is clear from the context, the *impropriety* of the vertex  $v$ , which is the number of neighbors of  $v$  having the same color as itself.

In all the figures depicting configurations, we shall use the following drawing convention: a vertex whose neighbors are totally specified will be white, whereas a vertex whose neighbors are partially specified will be black.

## 3 Acyclic $(3, 1)$ -choosability of subcubic graphs

In this section, we prove Theorem 2. We consider a minimal counter-example to this theorem and show that it is a 2-connected cubic graph (Subsection 3.1). Then, in Subsection 3.2, we provide, for any 2-connected cubic graph  $G$  and any list-assignment  $L$  such that  $|L(v)| \geq 3$  for every  $v$  and  $L(u) \neq L(v)$  for some adjacent vertices  $u$  and  $v$ , a greedy algorithm giving an acyclic 1-improper  $L$ -coloring of  $G$ . This leads us to a contradiction, that will conclude the proof of Theorem 2. Notice that this proof technique was already used in [8].

Let  $H$  be a counter-example to Theorem 2 with minimum order, and  $L$  be a list-assignment, with  $|L(v)| \geq 3$  for every  $v \in V(H)$ , such that  $H$  is not acyclically 1-improper  $L$ -colorable.

### 3.1 $H$ is a 2-connected cubic graph

**Claim 4** *The graph  $H$  contains no 1-vertex.*

**Proof.** Let  $v$  be a 1-vertex, having  $u$  as a neighbor. By minimality of  $H$ , there exists an acyclic 1-improper  $L$ -coloring  $f$  of  $H' = H \setminus \{v\}$ . The coloring  $f$  can be extended to  $H$  by picking a color in  $L(v) \setminus \{f(u)\}$  to color the vertex  $v$ .  $\square$

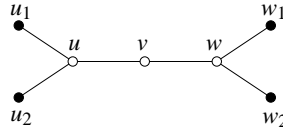


Figure 1: Configuration of Claim 5

**Claim 5** *The graph  $H$  contains no 2-vertex.*

**Proof.** Let  $v$  be a 2-vertex of  $H$  and let  $u$  and  $w$  be the two neighbors of  $v$ . We assume that  $d(u) = d(w) = 3$ , which is the worst case, and thus let  $u_1$  and  $u_2$  (resp.  $w_1$  and  $w_2$ ) be the neighbors of  $u$  (resp.  $w$ ) distinct from  $v$  (see Figure 1). If  $f(u) \neq f(w)$ , we can then extend  $f$  to  $H$  by picking any color  $f(v)$  in  $L(v) \setminus \{f(u), f(w)\}$ . We now suppose that  $f(u) = f(w) = a$ . It is clear that if we cannot extend  $f$ , it means w.l.o.g. that  $f(u_1) = f(w_1) = b$  (with  $b \neq a$ ) and  $f(u_2) = f(w_2) = c$  (with  $c \neq a$  and  $c \neq b$ ), the color  $a$  appears twice in  $N(u_1), N(u_2), N(w_1)$  and  $N(w_2)$ , and  $L(v) = \{a, b, c\}$ . We first try recolor  $u$  with a suitable color chosen in  $L(u) \setminus \{a\}$ . If it is possible, we obtain an acyclic 1-improper  $L$ -coloring of  $H$ . Otherwise, it means that  $L(u) = \{a, b, c\}$  and  $im(u_1) = im(u_2) = 1$ . Hence, it is possible to recolor  $u_1$  with a color picked in  $L(u_1) \setminus \{a, b\}$  and now we have  $im(u_1) = 0$ . Since we possibly created an alternating cycle containing  $u$ , we also recolor  $u$  with the color  $b$ ; clearly, this new partial coloring is acyclically 1-improper and  $f(u) \neq f(w)$ : so we can extend it to  $H$ .  $\square$

**Claim 6** *The graph  $H$  is 2-connected.*

**Proof.** The graph  $H$  is obviously connected. Suppose that  $H$  contains a cut-vertex  $u$ . Using the Claims 4 and 5,  $H$  is cubic. Thus, there is a vertex  $v$  such that  $uv$  is a bridge. Let  $H' = H \setminus \{uv\}$ , and let  $H'_1$  and  $H'_2$  be the two connected components of  $H'$  with  $u \in H'_1$  and  $v \in H'_2$ . By minimality of  $H$ , the graphs  $H'_1$  and  $H'_2$  are acyclically  $(3, 1)$ -choosable. Hence, there exist acyclic 1-improper  $L$ -colorings  $f_1$  and  $f_2$  of  $H'_1$  and  $H'_2$ , respectively. If we have  $f_1(u) \neq f_2(v)$ , or if we have  $f_1(u) = f_2(v)$  with  $im_{f_1}(u) = im_{f_2}(v) = 0$ , the coloring  $f = f_1 \cup f_2$  is an acyclic 1-improper  $L$ -coloring of  $H$ . Now, suppose  $f_1(u) = f_2(v)$  with  $im_{f_1}(u) = 1$  and let  $u_1$  and  $u_2$  be the two neighbors of  $u$  in  $H'_1$ . Clearly,  $f_1(u_1) \neq f_1(u_2)$ , and then we can recolor  $u$  with a color from  $L(u) \setminus \{f_1(u_1), f_1(u_2)\}$  without creating any alternating cycle in  $H'_1$ . We therefore have  $f_1(u) \neq f_2(v)$ , and, as previously, the coloring  $f = f_1 \cup f_2$  is now an acyclic 1-improper  $L$ -coloring of  $H$ .  $\square$

### 3.2 The greedy algorithm

Recall that Boiron *et al.* [3] proved that every subcubic graph is acyclically  $(3,1)$ -colorable. So, if the list-assignment  $L$  is such that  $L(v) = \{a,b,c\}$  for every vertex  $v$ ,  $H$  is clearly acyclically 1-improper  $L$ -colorable. We can therefore assume that  $H$  contains two adjacent vertices  $u^*$  and  $v^*$  such that  $L(u^*) \neq L(v^*)$ .

**Claim 7** *There exists an order  $x_1, x_2, \dots, x_n$  of the vertices of  $H$  such that  $x_1 = u^*$ ,  $x_n = v^*$  and for every  $1 \leq i < n$ , the vertex  $x_i$  is adjacent to some vertex  $x_j$  with  $j > i$ .*

**Proof.** The graph  $H' = H \setminus u^*$  is clearly connected since  $H$  is 2-connected. Consider a spanning tree  $T$  of  $H'$  rooted in  $v^*$ . Let  $x_1 = u^*$  and order the other vertices from  $x_2$  to  $x_n$  according to a post order walk on  $T$ . We obviously have  $x_n = v^*$  and each vertex  $x_i$  is adjacent to its father  $x_j$  ( $j > i$ ) in  $T$ .  $\square$

Let  $H_1, H_2, \dots, H_n$  be the sequence of graphs defined as  $H_i = H \setminus \{x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n\}$  for  $1 \leq i \leq n$ . Observe that  $H_1$  is the single vertex  $x_1$  and  $H_n$  is equal to the graph  $H$ .

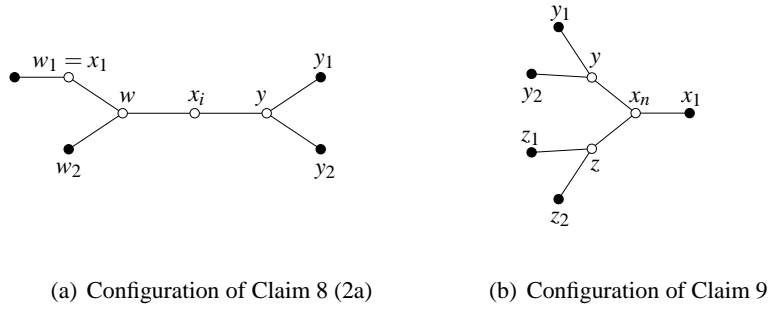


Figure 2: Configurations of Claims 8 and 9

**Claim 8** *Let  $i$  be an integer such that  $2 \leq i \leq n-1$ , and let  $f$  be an acyclic 1-improper  $L$ -coloring of  $H_{i-1}$ . Then  $f$  can be extended to  $H_i$  such that the color of  $x_1$  remains unchanged.*

**Proof.** All the vertices of  $H_i$  but  $x_i$  are colored by  $f$ . So we only need to find a suitable color for  $x_i$  in  $L(x_i)$ . Notice that  $x_i$  is a  $\leq 2$ -vertex in  $H_i$  by definition of the order  $x_1, \dots, x_n$ . The vertex  $x_1$  is also a  $\leq 2$ -vertex in  $H_i$  since it is adjacent to  $x_n$  in  $H$ . In the following, we assume that  $x_1$  and  $x_i$  are two 2-vertices, which is the worst case. We consider different cases depending on the adjacency of  $x_i$  and  $x_1$ .

1. Suppose that  $x_i$  and  $x_1$  are adjacent. Let  $w$  (resp.  $y$ ) be the other neighbor of  $x_i$  (resp.  $x_1$ ) in  $H_i$ . If  $f(w) \neq f(x_1)$ , it is easy to extend  $f$  to  $H$  by coloring  $x_i$  with a color distinct from  $f(w)$  and  $f(x_1)$ . Otherwise,  $f(w) = f(x_1)$  and we can extend  $f$  by coloring  $x_i$  with a color distinct from  $f(x_1)$  and  $f(y)$ , which forbids any alternating cycle containing  $x_i$ .
2. Now suppose that  $x_i$  and  $x_1$  are not adjacent. Let  $w$  and  $y$  be the two neighbors of  $x_i$ . We assume that  $d(w) = d(y) = 3$ , which is the worst case, and thus let  $w_1$  and  $w_2$  (resp.  $y_1$  and  $y_2$ ) be the other neighbors of  $w$  (resp.  $y$ ). We consider here two cases depending whether  $x_1$  is at distance two from  $x_i$ .

- (a) Suppose first that  $x_1 = w_1$  (see Figure 2(a)). As in the previous cases, the case  $f(w) \neq f(y)$  is straightforward. Assume that  $f(w) = f(y) = a$ . It is clear that if we cannot extend  $f$ , it means that w.l.o.g.  $f(x_1) = f(y_1) = b$  (with  $a \neq b$ ) and  $f(w_2) = f(y_2) = c$  (with  $c \neq a$  and  $c \neq b$ ), the color  $a$  appears twice in  $N(x_1), N(w_2), N(y_1)$  and  $N(w_2)$ , and  $L(x_i) = \{a, b, c\}$ . Since  $x_1$  is a 2-vertex, we clearly have  $im(x_1) = 0$ ; thus we can recolor  $w$  with a color from  $L(w) \setminus \{a, c\}$ . Hence, we have  $im(x_1) \leq 1$  and  $f(w) \neq f(y)$ : we can extend  $f$  to  $H$ .
- (b) Suppose that  $x_1$  is at distance at least three from  $x_i$ . The proof of this subcase is clearly the same as the one of Claim 5.

□

**Claim 9** *Let  $f$  be an acyclic 1-improper  $L$ -coloring of  $H_{n-1}$  such that  $f(x_1) \notin L(x_n)$ . Then  $f$  can be extended to  $H$ .*

**Proof.** Let  $y$  and  $z$  be the neighbors of  $x_n$  distinct from  $x_1$  and let  $y_1$  and  $y_2$  (resp.  $z_1$  and  $z_2$ ) be the neighbors of  $y$  (resp.  $z$ ) distinct from  $x_n$  (see Figure 2(b)). Let  $a = f(x_1)$ . We consider some cases depending on the colors appearing in the neighborhood of  $x_n$ .

1. If  $y, z$  and  $x_1$  have pairwise distinct colors,  $f$  can easily be extended to  $H$  since  $a \notin L(x_n)$
2. Now, suppose that exactly one color distinct from  $a$ , say  $b$ , appears in  $x_n$ 's neighborhood. We consider two cases depending on the colors of  $y$  and  $z$ .
  - (a) Suppose that  $f(y) = f(z) = b$ . Clearly, if we cannot choose a color in  $L(x_n)$  for  $x_n$  without creating an alternating cycle or having  $im(v) > 1$  for some  $v$ , we may assume w.l.o.g. that  $f(y_1) = f(z_1) = c, f(y_2) = f(z_2) = d$ , the color  $b$  appears twice in  $N(y_1), N(y_2), N(z_1)$  and  $N(z_2)$ , and  $L(x_n) = \{b, c, d\}$ . We first try to recolor  $y$  with a color distinct from  $b$  (notice that we cannot create any alternating cycle since  $f(y_1) \neq f(y_2)$ ). If it is possible, we then set  $f(x_n) = b$ . Otherwise, this means that  $L(y) = \{b, c, d\}$  and  $im(y_1) = im(y_2) = 1$ . Thus, we can recolor  $y_1$  with a color from  $L(y_1) \setminus \{b, c\}$ . Since we possibly created an alternating cycle containing  $y$ , we also recolor  $y$  with the color  $c$ ; now  $y, z$  and  $x_1$  have three distinct colors: this is the situation of Case 1.
  - (b) Now suppose that  $f(y) = a$  and  $f(z) = b$ . Clearly, if we cannot choose a color from  $L(x_n)$  for  $x_n$  without creating an alternating cycle or having  $im(v) > 1$  for some  $v$ , we may assume w.l.o.g. that  $im(z) = 1, f(y_1) = c, f(y_2) = d, L(x_n) = \{b, c, d\}$  and the color  $a$  appears twice in  $N(y_1)$  and  $N(y_2)$ . We first try to recolor  $y$  with a color distinct from  $a$  (notice that we cannot create any alternating cycle since  $f(y_1) \neq f(y_2)$ ). If it is possible, we are in the situation of Cases 1 or 2a. Otherwise, this means that  $L(y) = \{a, c, d\}$  and  $im(y_1) = im(y_2) = 1$ . Thus, we can recolor  $y_1$  with a color from  $L(y_1) \setminus \{a, c\}$ . Since we possibly created an alternating cycle containing  $y$ , we also recolor  $y$  with the color  $c$ ; we now have  $f(y) \neq f(z) \neq f(x_1) \neq f(y)$ : this is the situation of Case 1.
3. Finally, suppose that  $f(y) = f(z) = f(x_1) = a$ . We assume that  $L(x_n) = \{b, c, d\}$ . If no color from  $L(x_n)$  can be used to color  $x_n$ , this means that each of them creates an alternating cycle containing  $x_n$ : thus, w.l.o.g. we assume that  $f(y_1) = b, f(y_2) = c$  and the color  $a$  appears twice in  $N(y_1)$  and  $N(y_2)$ . We first try to recolor  $y$  with a color distinct from  $a$  (notice that we cannot create any alternating cycle since  $f(y_1) \neq f(y_2)$ ). If it is possible, the case is equivalent

to a previous one (a color appears twice in the neighborhood of  $x_n$ ). Otherwise, this means that  $L(y) = \{a, b, c\}$  and  $im(y_1) = im(y_2) = 1$ . Thus, we can recolor  $y_1$  by picking a color in  $L(y_1) \setminus \{a, b\}$ . Since we possibly created an alternating cycle containing  $y$ , we also recolor  $y$  with the color  $b$ ; we now have two distinct colors in the neighborhood of  $x_n$ : this is the situation of Case 2.

□

**Proof of Theorem 2.** We now define a greedy algorithm which colors  $H$ . At Step 1, we set  $f(x_1) = c$  for some  $c \in L(x_1) \setminus L(x_n)$  (since we assumed that  $L(u^*) \neq L(v^*)$ ,  $x_1 = u^*$  and  $x_n = v^*$ , we have  $L(x_1) \setminus L(x_n) \neq \emptyset$ ). Then, at Step  $2 \leq i \leq n-1$ , we color  $x_i$  thanks to Claim 8 without changing the color of  $x_1$ . At Step  $n$ , we color  $x_n$  thanks to Claim 9. The graph  $H$  is therefore acyclically 1-improper  $L$ -colorable, which is a contradiction. □

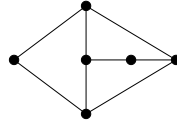


Figure 3: A subcubic graph which is not acyclically 3-colorable.

The result of Theorem 2 is optimal since, by Observation 1, there exist graphs which are not acyclically  $(2, k)$ -choosable for any  $k \geq 0$ . Moreover, the graph depicted on Figure 3 is clearly not acyclically 3-colorable and therefore not acyclically  $(3, 0)$ -choosable.

#### 4 Graphs with maximum degree $d$

Let  $\chi_a(G)$  denote the acyclic chromatic number of  $G$  and  $\chi_a^t(G)$  denote the acyclic  $t$ -improper chromatic number of  $G$ . Define  $\chi_a(d)$  (resp.  $\chi_a^t(d)$ ) as the maximum acyclic chromatic number (resp. acyclic  $t$ -improper chromatic number) over all graphs with maximum degree  $d$ . In [1], Alon, McDiarmid and Reed proved that  $\chi_a(d) = O(d^{4/3})$ . They also showed that  $\chi_a(d) = \Omega(d^{4/3}/(\log d)^{1/3})$ .

For any graph  $G$  and any  $t$ , an acyclic coloring of  $G$  is also an acyclic  $t$ -improper coloring of  $G$ . Conversely, observe that given an acyclic  $t$ -improper coloring of  $G$ , we can acyclically color the subgraphs induced by each color class with at most  $t^2 + 1$  new colors, and the coloring obtained is acyclic. Thus, we have

$$\frac{\chi_a(G)}{t^2 + 1} \leq \chi_a^t(G) \leq \chi_a(G)$$

As a consequence,  $\chi_a^t(d) = O(d^{4/3})$  and  $\chi_a^t(d) = \Omega\left(\frac{d^{4/3}}{(t^2+1)(\log d)^{1/3}}\right)$ .

We now prove that if  $t$  is not too large, the above-mentioned lower bound of  $\Omega(d^{4/3}/(\log d)^{1/3})$  still holds for acyclic  $t$ -improper coloring.

**Theorem 10** *There exists a constant  $\eta > 0$  such that if  $t \leq \eta \left(\frac{n}{\log n}\right)^{3/4}$ , then*

$$\chi_a^t(d) = \Omega\left(\frac{d^{4/3}}{(\log d)^{1/3}}\right).$$

**Proof.** Let  $V = \{1, \dots, n\}$  be a set of labelled vertices. Let  $p = c(\log n/n)^{1/4}$ , with  $c = 3$ , and let  $G = G_{n,p} = (V, E)$  be a random graph defined on  $V$  by choosing each pair of distinct elements of  $V$  independently to be an edge with probability  $p$ . Let  $d$  be the maximum degree of  $G$ .

It is known that  $d = \text{BIN}(n, p)$  and  $\mathbf{E}(d) = np = cn^{3/4}(\log n)^{1/4}$ . By studying the distribution of  $d$ , we obtain  $\Pr\left(n \geq \frac{1}{2c^{4/3}} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \frac{d^{4/3}}{(\log d)^{1/3}}\right) \rightarrow 1$  as  $n \rightarrow \infty$ . To complete the proof, we show that  $\Pr\left(\chi_a^t(G) > \frac{n}{2}\right) \rightarrow 1$  as  $n \rightarrow \infty$ . Taking  $\zeta = \frac{1}{4c^{4/3}} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}$ , this will imply that a.a.s.  $\chi_a^t(G) > \zeta \frac{d^{4/3}}{(\log d)^{1/3}}$ .

Let  $\alpha(G)$  (resp.  $\alpha_t(G)$ ) be the maximum size of an independent set of vertices in  $G$  (resp. an induced subgraph of  $G$  with maximum degree  $t$ ). We first show that  $\alpha_t(G) \leq \frac{n}{4}$  a.a.s. if  $t$  is sufficiently small.

$$\text{Let } k = \lfloor \frac{2}{c} n^{1/4} (\log n)^{3/4} \rfloor.$$

$$\begin{aligned} \Pr(\alpha(G) \geq k) &\leq \binom{n}{k} (1-p)^{\binom{k}{2}} \\ &\leq \left(\frac{ne}{k} (1-p)^{\frac{k-1}{2}}\right)^k \\ &\leq \exp\left(k \left(\log\left(\frac{ne}{k}\right) + \frac{1}{2}(k-1) \log(1-p)\right)\right) \end{aligned}$$

Since  $p = o(1)$ ,  $\log(1-p) \sim -p$ . Hence  $\frac{1}{2}(k-1) \log(1-p) \sim -\log n$ . Also  $\log\left(\frac{ne}{k}\right) \sim \frac{3}{4} \log n$ , so  $\Pr(\alpha(G) \geq k) \leq \exp\left(-\frac{k}{4}(1+o(1)) \log n\right) = o(1)$ . But  $\alpha_t(G) \leq (t+1)\alpha(G)$ , so a.a.s.  $\alpha_t(G) \leq (t+1)k$ .

So if  $t \leq \eta \left(\frac{n}{\log n}\right)^{3/4}$  then a.a.s.  $\alpha_t(G) \leq \frac{2\eta}{c} n$ . Thus we may take  $\eta = c/8$ .

Now consider a fixed partition  $V_1, \dots, V_r$  of  $V$  into  $r \leq \frac{n}{2}$  color classes, each of size at most  $s \leq \frac{n}{4}$ . Remove one vertex in each class of odd cardinality : there remain  $n' \geq \frac{n}{2}$  vertices, and the size of each class is now even. By partitioning each of these parts into disjoint parts of size 2, we obtain  $l \geq \frac{n}{4}$  pairwise disjoint subsets  $U_1, \dots, U_l$  of  $V$ , each of cardinality 2, and each a subset of some color class in the original partition.

The number of pairs of pairs from within the same class is at most the value when there are as many large classes as possible, so it is at most  $\frac{n'}{s} \binom{s/2}{2} \leq \frac{n's}{8}$ . Hence, the number of "cross" pairs of pairs (pairs of pairs of distinct colors) is at least  $\binom{n'/2}{2} - \frac{n's}{8} \sim \frac{n'}{8}(n' - s) \geq \frac{n^2}{64}$ . For each of these cross pairs of pairs  $\{\{x_i, x'_i\}, \{x_j, x'_j\}\}$ , the probability that the alternating 4-cycle  $x_i, x_j, x'_i, x'_j$  is not in  $G$  is equal to  $1 - p^4$ . So the probability that there is no alternating 4-cycle in  $G$  is at most  $(1 - p^4)^{n^2/64} \leq \exp\left(-\frac{n^2 p^4}{64}\right)$ .

Hence the probability that there is an acyclic  $t$ -improper coloring with at most  $\frac{n}{2}$  colors is at most:

$$\begin{aligned}
n^n \exp\left(-\frac{n^2 p^4}{64}\right) &= \exp\left(n \log n - n^2 c^4 \frac{\log n}{64n}\right) \\
&= \exp\left(\left(1 - \frac{c^4}{64}\right) n \log n\right) \\
&= o(1) \text{ if } c = 3
\end{aligned}$$

As a consequence,  $\chi_a^t(G) > \frac{n}{2}$  a.a.s., which completes the proof.  $\square$

## References

- [1] N. Alon, C. McDiarmid, and B. Reed. Acyclic coloring of graphs. *Random Structures and Algorithms*, 2(3):277–288, 1991.
- [2] P. Boiron, É. Sopena, and L. Vignal. Acyclic improper colorings of graphs with bounded degree. In *Dimacs/Dimatia conference "Contemporary Trends in Discrete Mathematics"*, volume 49 of *Dimacs Series*, pages 1–10. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 1997.
- [3] P. Boiron, É. Sopena, and L. Vignal. Acyclic improper colorings of graphs. *J. Graph Theory*, 32(1):97–107, 1999.
- [4] O. V. Borodin, D. Fon-Der-Flass, A. V. Kostochka, A. Raspaud, and É. Sopena. Acyclic list 7-coloring of planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 40(2):83–90, 2002.
- [5] L. J. Cowel, R. H. Cowel, and D. R. Woodall. Defective colorings of graphs in surfaces: partitions into subgraphs of bounded valency. *J. Graph Theory*, 10:187–195, 1986.
- [6] N. Eaton and T. Hull. Defective list colorings of planar graphs. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 25:79–87, 1999.
- [7] L. Esperet and A. Pinlou. Acyclic improper choosability of outerplanar graphs. Preprint, may 2006.
- [8] D. Gonçalves and M. Montassier. Acyclic choosability of graphs with small maximum degree. In D. Kratsch, editor, *WG 2005*, volume 3787 of *LNCS*, pages 239–248. Springer-Verlag, 2005.
- [9] R. Škrekovski. List improper colourings of planar graphs. In *Combinatorics, Probability and Computing*, volume 8, pages 293–299. Cambridge University Press, 1999.
- [10] Carsten Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *J. Comb. Theory Ser. B*, 62(1):180–181, 1994.
- [11] M. Voigt. List colourings of planar graphs. *Discrete Math.*, 120(1-3):215–219, 1993.
- [12] D. R. Woodall. *Graph colourings*, volume 218 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, chapter 4, Improper colorings of graphs, pages 45–63. Longman Scientific and Technical, 1990.