

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Mathématiques



THESE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle et Mathématiques Discrètes
(ROMAD)

Par : BOUCHOUIKA SABRINA

Sujet

**Sur le nombre de domination broadcast supérieur de
quelques classes de graphes**

Soutenue publiquement, le , devant le jury composé de :

M. AIDER Méziane	Professeur, USTHB	<i>Président</i>
Mme. BOUCHEMAKH Isma	Professeur, USTHB	<i>Directrice de thèse</i>
M. SOPENA Éric	Professeur, Univ. de Bordeaux	<i>Co-Directeur de thèse</i>
M. BOUROUBI Sadek	Professeur, USTHB	<i>Examineur</i>
M. CHELLALI Mustapha	Professeur, Univ. de Blida	<i>Examineur</i>
M. KHEDDOUCI Hamamache	Professeur, Univ. Lyon 1	<i>Invité</i>

Remerciements

Je tiens à exprimer mes respectueux remerciements et toute ma gratitude à ma directrice de thèse, le Professeur Isma BOUCHEMAKH, pour sa disponibilité, ses précieux conseils et surtout pour la foi qu'elle avait en mes capacités de recherche. Durant toutes ces années de préparation de ma thèse, elle m'a encadrée, aidée et conseillée à chaque fois que j'en avais besoin, afin de mener à terme mes travaux de recherche.

Je tiens à exprimer mes respectueux remerciements et toute ma gratitude à mon co-directeur de thèse, le Professeur Éric SOPENA, pour sa bienveillance, ses précieux conseils et sa disponibilité à chacun de mes séjours au Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI). J'ai pu renforcer mes connaissances scientifiques et beaucoup appris des régulières séances de travail qu'on avait.

Je remercie le Professeur Méziane AIDER de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Ma gratitude va également aux examinateurs. Je suis honorée par la présence dans mon jury du Professeur Sadek BOUROUBI, Professeur à l'USTHB, Mustapha CHELLALI, Professeur à l'Université de Blida et Hamamache KHEDDOUCI, Professeur à l'Université Lyon 1.

Je tiens à remercier mes parents, mes deux piliers dans la vie, qui m'ont toujours épaulée et qui ont cru en moi. Je les remercie pour leur patience et leurs conseils. Les encouragements qu'ils ne cessaient de me prodiguer m'ont donné la force et le courage d'avancer.

Je remercie vivement mes frères (Youcef, Fayçal, Wassim) et ma soeur Manel qui ont toujours été là pour moi.

Je remercie mon mari Karim, qui trouve toujours les mots qu'il faut pour m'encourager et me soutenir.

Je remercie tous les enseignants de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, qui m'ont formée et sans lesquels, je n'aurais pu arriver à ce niveau.

Je remercie sincèrement mes amies : Amel SAFRI, Ibtihel KACI, Imène BENRABIA, Inès BRAHIMI, Assia Medjerredine et Manar BENOUMHANI pour leurs encouragements constants et leurs présences mémorables.

Enfin, je remercie toute personne ayant participé de près ou de loin à l'élaboration et l'évaluation de ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Généralités sur les graphes	4
1.1 Définitions	4
1.2 Quelques graphes particuliers	8
2 Notions sur la domination broadcast	14
2.1 Domination sur les graphes	14
2.2 Domination broadcast sur les graphes	17
2.2.1 Définitions et notations	18
2.2.2 Broadcast dominant	20
2.2.2.1 Résultats sur le nombre de domination broadcast γ_b	21
2.2.2.2 Résultats sur le nombre de domination broadcast supérieur Γ_b	26
2.2.3 Broadcast non-redondant	28
2.2.4 Broadcast indépendant	30
2.2.5 Broadcast de packing	31
3 Invariants de broadcast des chaînes et des cycles	33
3.1 Conjecture d’Ahmadi et al. [1]	33
3.2 Nombres de domination broadcast supérieur et de non-redondance broadcast supérieur	35
3.3 Nombres d’indépendance broadcast et d’indépendance broadcast inférieur	40
3.4 Nombres de non-redondance broadcast et de domination broadcast	53
3.5 Nombres de packing broadcast et de packing broadcast inférieur	58

4	Nombre de domination broadcast supérieur sur les chenilles sans troncs	70
4.1	Définitions et notations	70
4.2	Résultats sur les chenilles sans sommets troncs	73
4.3	Exemple	125
	Conclusion	128
	Bibliographie	130

Table des figures

1.1	Le cycle subdivisé $S(C_5)$ et l'étoile 2-subdivisée $S_2(K_{1,3})$	10
1.2	La couronne du cycle $C_5 \odot K_1$	12
1.3	La 3-couronne du cycle C_5	13
2.1	Exemple de broadcast	19
2.2	Exemples de broadcast dominants minimaux	22
2.3	Exemple d'un broadcast non-redondant maximal	28
2.4	Exemple d'un broadcast indépendant maximal	30
2.5	Exemple d'un broadcast de packing maximal	32
3.1	Représentation d'une chaîne et d'un cycle	35
3.2	Un broadcast non-redondant illustratif du Théorème 3.4.	40
3.3	Un broadcast indépendant maximal illustratif de la preuve du Fait B, Cas 1.	44
3.4	Un broadcast indépendant maximal illustratif de la preuve du Fait B, Cas 2.	45
3.5	Un broadcast indépendant maximal illustratif de la preuve du Fait C, Cas 1.	46
3.6	Un broadcast indépendant maximal illustratif de la preuve du Fait C, Cas 2.	48
3.7	Des broadcasts non-redondant maximaux illustratifs pour la preuve du Théorème 3.12.	55
3.8	Des broadcasts de packing illustratifs de la preuve du Lemme 3.15, Cas 1.	60
3.9	Des broadcasts de packing illustratifs pour la preuve du Lemme 3.15, Cas 2.	63
4.1	Représentation de la chenille $CT(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 3)$ et la sous-chenille $CT[3, 5]$	71
4.2	Exemples de Γ_b -broadcasts pour $n = 1, 2$	74
4.3	Exemples du broadcast f défini au Lemme 4.6	77

4.4	Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 1.	82
4.5	Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 1.	84
4.6	Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 2.(i).	85
4.7	Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 2.(ii).	86
4.8	Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 2.(iii) et $i_0 = 0$	88
4.9	Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 2.(iii) et $i_0 > 0$	89
4.10	Illustration de la preuve du Lemme 4.14, Cas (1.a) et Cas 2.	92
4.11	La fonction θ_i^j , pour les différentes valeurs de j	94
4.12	Illustration de la preuve du Lemme 4.15, Cas 1.	95
4.13	Illustration de la preuve du Lemme 4.16, Cas 1 $i = 0$, Cas (a) et (b).	98
4.14	Illustration de la preuve du Lemme 4.16, Cas 1 $i \neq 0$, Cas (a)-(d).	99
4.15	Illustration pour la preuve du Lemme 4.16, Cas 2 $i \neq 0$, Cas (a)	102
4.16	Illustration pour la preuve du Lemme 4.16, Cas 2 $i \neq 0$, Cas (b)-(e).	103
4.17	Illustration de la preuve du Lemme 4.24, Point 1	113
4.18	Illustration de la preuve du Lemme 4.24, Point 2	115
4.19	Illustration de la preuve du Lemme 4.24, Point 3	117
4.20	Illustration de la preuve du Lemme 4.24, Point 4	119
4.21	Détermination de CT_4^r	126
4.22	Γ_b -broadcast sur CT	127

Introduction

La domination est une branche de la théorie des graphes, qui a connu une croissance rapide au cours de ces dernières décennies. Dans un graphe G , un *ensemble dominant* est un sous-ensemble D de sommets de G tel que tout sommet du graphe est soit dans D , soit adjacent à un sommet de D et la cardinalité minimale d'un ensemble dominant dans G , notée $\gamma(G)$, est le *nombre de domination* de G .

La domination trouve son origine au 19^e siècle avec les jeux d'échecs lorsque De Jaenisch [35] posa le problème du placement d'un nombre minimum de reines sur un échiquier de telle sorte que chaque case est soit occupée par une reine soit peut être occupée par un seul mouvement d'une des reines. La domination ne devient un domaine théorique qu'en 1956 avec Claude Berge où cet invariant est appelé *coefficient de stabilité externe*, puis renommé *nombre de domination* par Ore en 1962 mais elle ne prend véritablement son essor qu'une vingtaine d'années plus tard, sous l'impulsion des travaux de Cockayne et Hedetniemi [29].

La domination dans les graphes a suscité un intérêt particulier pour la communauté scientifique grâce à la richesse des champs d'application. En 1968, Liu a discuté le concept de domination dans les réseaux de communication où un ensemble dominant représente un ensemble de cités ayant des stations de diffusion (broadcast) pouvant transmettre des messages vers toutes les cités du réseau, en supposant que chaque station abritant une station ne peut transmettre des messages que vers les cités voisines. Ainsi, le plus petit nombre de stations permettant de couvrir tout le réseau n'est autre que le nombre de domination.

En 2001, Erwin fut le premier à introduire un modèle de domination inspiré du modèle de Liu, appelé *la domination broadcast*. Dans cette variante, il associe à chaque station broadcast un coût (puissance d'émission, disons en watts) qui peut être supérieur à un, ce

qui permet de transmettre des messages à n'importe quelle cité du réseau. Formellement, un *broadcast* f sur un graphe $G = (V, E)$ est une fonction de pondération sur les sommets définie par $f : V \mapsto \{0, \dots, \text{diam}(G)\}$, où chaque sommet $v \in V$ satisfait $f(v) \leq e_G(v)$, où $\text{diam}(G)$ est le diamètre de G et $e_G(v)$ est l'excentricité du sommet v . Le coût d'un broadcast f est $\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ et le coût minimum sur l'ensemble des broadcasts dominants sur G , noté $\gamma_b(G)$, est le *nombre de domination broadcast*.

Erwin a pu enrichir ce concept, en introduisant d'autres paramètres de broadcast. Plusieurs résultats de ses travaux sont publiés dans l'article de Dunbar et al. [25], qui contient de plus, une étude comparative de ces paramètres et traite quelques classes de graphes en déterminant soit des valeurs exactes, soit des bornes pour ces paramètres.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à trois classes de graphes : les chaînes, les cycles et les chenilles sans sommets troncs où une *chenille* est un arbre dont la suppression des sommets pendants engendre une chaîne. Chaque sommet de cette chaîne est appelé *support* s'il est adjacent à un sommet pendent et *tronc* sinon.

La thèse est composée de quatre chapitres, en plus de l'introduction et de la conclusion.

Nous énonçons dans le premier chapitre des définitions de base sur les graphes. Ensuite, nous énumérons dans le deuxième chapitre quelques résultats sur la domination, la domination broadcast et leurs invariants.

Nous consacrons le troisième chapitre à l'étude de la conjecture d'Ahmadi et al. [1], concernant la valeur de huit invariants de la domination broadcast des chaînes et des cycles. Il s'agit des nombres de domination broadcast γ_b , de domination broadcast supérieur Γ_b , de non-redondance broadcast ir_b , de non-redondance broadcast supérieur IR_b , d'indépendance broadcast β_b , d'indépendance broadcast inférieur i_b , de packing broadcast inférieur p_b et de packing broadcast P_b .

En déterminant la valeur de chacun de ces invariants, nous infirmons plusieurs égalités de la conjecture. Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une publication dans la revue *Discrete Applied Mathematics* [9].

Nous étudions dans le quatrième chapitre le nombre de domination broadcast supérieur des chenilles sans sommets troncs. Pour ce faire, nous établissons plusieurs lemmes d'existence d'un broadcast dominant minimum avec des valeurs bien spécifiques des sommets, puis nous

procédons à des transformations de la chenille pour pouvoir arriver à la détermination de Γ_b .
Les résultats énoncés dans ce chapitre ont été soumis pour publication.
Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale et quelques perspectives de recherche.

Chapitre 1

Généralités sur les graphes

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure d'un ensemble en exprimant les relations possibles entre ses éléments. Dans ce chapitre, nous introduisons quelques définitions de base ainsi que des notations usuelles de la théorie des graphes.

1.1 Définitions

Un *graphe* non orienté G est un couple composé d'un ensemble de sommets $V(G)$ et d'un ensemble d'arêtes $E(G)$, où une *arête* est une paire de sommets (non nécessairement distincts) de G , appelés les *extrémités* de l'arête. Une arête e est notée simplement par uv (ou vu), au lieu de $\{u, v\}$. Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont identiques, par exemple uu .

Un graphe est *fini* si son ensemble de sommets et son ensemble d'arêtes sont finis. Dans un graphe fini G , le nombre de sommets et le nombre d'arêtes sont appelés respectivement l'*ordre* et la *taille* de G et notés communément par n et m respectivement. Un graphe *vide* est un graphe de taille $m = 0$ et un graphe *trivial* est un graphe d'ordre $n = 1$.

Adjacence et incidence

Si $e = uv$ est une arête de G , alors on dit que

- e relie u à v ,
- les sommets u et v sont *adjacents* ou *voisins*, et

— l'arête e est *incidente* au sommet u et au sommet v .

Si deux arêtes ont une extrémité commune, elles sont dites *adjacentes* ou *voisines*, sinon elles sont dites *disjointes*.

Deux arêtes, ou plus, peuvent avoir les mêmes extrémités u et v . Dans ce cas, on dit qu'elles sont *parallèles* ou bien qu'il y a une arête *multiple* joignant u et v .

Un graphe *simple* est un graphe sans boucle et sans arête multiple.

Dans ce qui suivra, nous noterons brièvement V (resp. E), au lieu de $V(G)$ (resp. $E(G)$), lorsqu'il n'y a aucun risque d'ambiguïté sur G , et tous les graphes considérés sont supposés finis, simples et non triviaux.

Chaîne - Cycle

Une *chaîne* P dans un graphe $G = (V, E)$, est une séquence finie de sommets v_1, v_2, \dots, v_k telle que $v_i v_{i+1} \in E$, pour tout $1 \leq i \leq k - 1$.

1. La *longueur* de la chaîne P est le nombre de ses arêtes, c'est-à-dire $k - 1$.
2. Les sommets v_1 et v_k sont les *extrémités* de P .
3. La chaîne v_1, v_2, \dots, v_k *relie* les sommets v_1 et v_k .

Une chaîne est *élémentaire* si tous ses sommets sont deux à deux distincts.

Une chaîne est *simple* si toutes ses arêtes sont deux à deux distinctes.

Une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne est une *corde*.

Une *chaîne minimale* induite par n sommets, notée P_n , est une chaîne élémentaire sans cordes.

Une (u, v) -*géodésique* dans un graphe G est une plus courte chaîne reliant u à v .

Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont identiques. Un *cycle élémentaire induit par n sommets*, noté C_n , est un cycle dont les sommets sont distincts. La *longueur* du cycle C_n est le nombre de ses arêtes, c'est-à-dire n .

Stable - Clique

Soit G un graphe.

Un ensemble de sommets K , $K \neq \emptyset$, est une *clique* de G si les sommets de K sont deux à deux adjacents.

Un ensemble de sommets S , $S \neq \emptyset$, est un *stable* ou un ensemble *indépendant* de G , si les sommets de S deux à deux non adjacents.

Voisinage - Voisinage privé

Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $v \in V$.

Le *voisinage ouvert* de v est l'ensemble des voisins de v

$$N(v) = \{u \in V : uv \in E\}.$$

Le *voisinage fermé* de v est l'ensemble

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}.$$

Soit $S \subseteq V$.

Le *voisinage ouvert* de S est

$$N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v),$$

et le *voisinage fermé* de S est

$$N[S] = N(S) \cup S.$$

Le *S-voisinage ouvert privé* de v est

$$PN(v, S) = \{w \in V : N(w) \cap S = \{v\}\},$$

et le *S-voisinage privé* de v est

$$PN[v, S] = \{w \in V : N[w] \cap S = \{v\}\}.$$

Les sommets du *S-voisinage privé* de v sont les *voisins privés* de v relatifs à S .

Degré d'un sommet

Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $v \in V$.

Le *degré* de v , noté $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v dans G . En d'autres termes, $d_G(v) = |N(v)|$.

Les nombres $\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$ et $\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$ désignent le degré minimum et le degré maximum du graphe G , respectivement. S'il n'y a pas de confusion, on écrira simplement $d(v)$, δ et Δ au lieu de $d_G(v)$, $\delta(G)$ et $\Delta(G)$.

Soit r un entier naturel. Le graphe G est *régulier* de degré r , ou simplement *r -régulier*, si $\delta(G) = \Delta(G) = r$.

Un sommet *isolé* de G est un sommet de degré 0 et un sommet *pendant* ou une *feuille* de G , est un sommet de degré 1.

Un sommet *support* est un sommet adjacent à un sommet pendant et une arête *pendante* est une arête incidente à un sommet pendant. Un *support fort* est un sommet adjacent à au moins deux sommets pendants, sinon c'est un *support faible*.

Connexité

Un graphe G est *connexe* si pour toute paire de sommets distincts u, v , il existe une chaîne qui relie u et v .

Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe connexe maximal (au sens de l'inclusion).

Distance, excentricité, rayon et diamètre

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et soient $u, v \in V$.

La *distance* entre deux sommets u et v , notée $d_G(u, v)$ ou simplement $d(u, v)$ s'il n'y a pas de risque de confusion, est la longueur de la plus courte chaîne reliant u à v , si $u \neq v$ et $d(u, v) = 0$, sinon.

Par convention, si le graphe G n'est pas connexe, alors $d(u, v) = \infty$, lorsque les sommets u et v appartiennent à des composantes connexes différentes.

La *distance* entre un sommet u et un ensemble $S \subseteq V$ est définie par :

$$d(u, S) = \min\{d_G(u, v) : v \in S\}$$

L'*excentricité* d'un sommet u , noté $e_G(u)$, est :

$$e_G(u) = \max\{d_G(u, v) : v \in V\}$$

En particulier,

— Le *rayon* du graphe G , noté $\text{rad}(G)$, est l'entier

$$\text{rad}(G) = \min\{e_G(v) : v \in V\}.$$

— Le *diamètre* d'un graphe, noté $\text{diam}(G)$, est l'entier

$$\text{diam}(G) = \max\{e_G(v) : v \in V\}.$$

Un sommet *central* (resp. *diamétral*) est un sommet d'excentricité minimale (maximale), c'est-à-dire égale au rayon (resp. diamètre) du graphe G .

Plus généralement, l'*excentricité* d'un ensemble S , est :

$$e_G(S) = \max\{d_G(v, S) : v \in V\}.$$

Produit cartésien de deux graphes

Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes.

Le *produit cartésien* de G_1 et G_2 , noté $G_1 \square G_2$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est $V_1 \times V_2$ et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents dans $G_1 \square G_2$ si et seulement si, $u_1 u_2 \in E(G_1)$ et $v_1 = v_2$, ou $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E(G_2)$.

1.2 Quelques graphes particuliers

Graphe complet

Le graphe *complet* d'ordre n ($n \geq 3$), noté K_n , est un graphe dont tous les sommets sont deux à deux adjacents.

Graphe complémentaire

Le *complémentaire* d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$, où $\bar{V} = V$ et pour toute paire de sommets $u, v \in \bar{V}$,

$$uv \in \bar{E} \iff uv \notin E.$$

Sous-graphe - Sous-graphe induit

Un *sous-graphe* H d'un graphe G , noté $H \prec G$, est un graphe défini par un ensemble de sommets $V(H) \subseteq V(G)$ et un ensemble d'arêtes $E(H) \subseteq E(G)$. En particulier, si $V(H) = V(G)$ alors H est appelé *sous-graphe couvrant*.

Un sous-graphe de G est un *sous-graphe induit* de G si, pour toute paire de sommets de H , $uv \in E(H) \iff uv \in E(G)$. En particulier, si $S = V(H)$, alors H est appelé le *sous-graphe induit par S* et est noté par $G[S]$ ou $\langle S \rangle$.

Graphe biparti et graphe biparti complet

Un graphe est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous-graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ sont vides. Un graphe *biparti complet* est noté $K_{p,q}$, où $|V_1| = p$, $|V_2| = q$ et $E(K_{p,q}) = \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$.

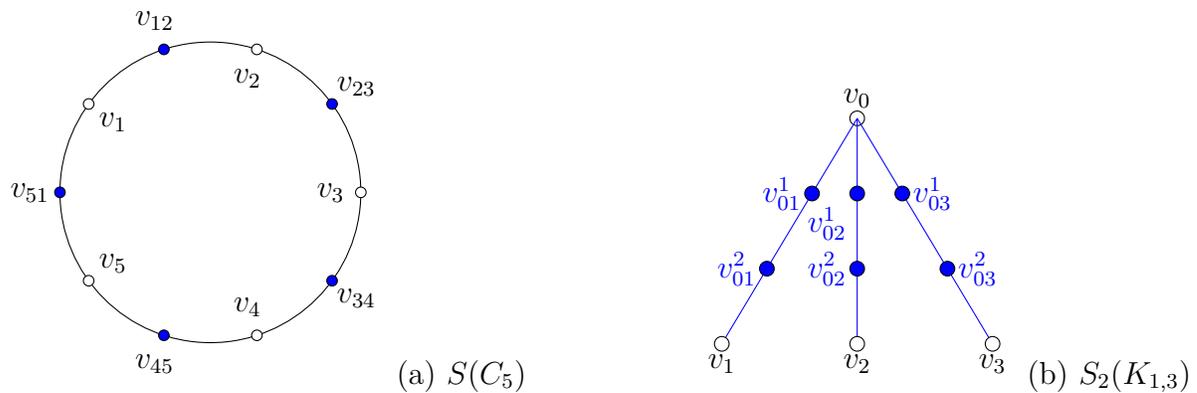
Une étoile est un graphe biparti complet $K_{p,q}$, avec $p = 1$ ou $q = 1$.

Graphe subdivisé

Le *graphe subdivisé* d'un graphe G , noté $S(G)$, est le graphe obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête $e = v_i v_j$ de G par un nouveau sommet v_{ij} et deux arêtes $v_i v_{ij}$ et $v_{ij} v_j$. Autrement dit, en insérant un nouveau sommet sur chaque arête de G .

Pour un entier positif k , le *graphe k -subdivisé* d'un graphe G , noté $S_k(G)$, est le graphe obtenu à partir de G en insérant k nouveaux sommets sur chaque arête de G . En particulier, $S_1(G) = S(G)$.

Nous illustrons à travers la Figure 1.1, le cycle subdivisé $S(C_5)$, et l'étoile $K_{1,3}$ 2-subdivisée.

FIGURE 1.1 – Le cycle subdivisé $S(C_5)$ et l'étoile 2-subdivisée $S_2(K_{1,3})$.

Arbres

Un *arbre* T est un graphe connexe sans cycles.

Il existe plusieurs caractérisations des arbres, qui sont énoncées dans le théorème ci-dessous :

Théorème 1.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. T est un arbre d'ordre n .
2. T est un graphe connexe de taille $n - 1$.
3. T est un graphe sans cycles de taille $n - 1$.
4. Pour toute paire de sommets distincts u et v , il existe une unique chaîne reliant u et v .

Arbre couvrant

Un *arbre couvrant* d'un graphe G , est un sous-graphe couvrant qui est un arbre. Un graphe G contient un arbre couvrant si et seulement si G est connexe. Notons que l'arbre couvrant d'un arbre T est T lui-même.

Chenilles

Une *chenille*, notée CT , est un arbre tel que si on supprime tous les sommets pendants le graphe résultant est une chaîne $C = x_0x_1x_2 \dots x_n$.

La chaîne C est appelée *épine dorsale* et ses sommets sont appelés *épines*.

Si un sommet épine x_i est adjacent à au moins un sommet pendant, alors x_i est un sommet *support*, sinon, x_i est un *tronc*.

Pour une chenille CT à n épines, on suppose sans perte de généralité, que les extrémités x_0 et x_n , de l'épine dorsale de CT , sont des sommets supports.

Il n'est pas difficile de voir que le diamètre d'une chenille est $\text{diam}(CT) = 1$ si $(m, n) = (1, 0)$ et $\text{diam}(CT) = n + 2$, sinon. Concernant le rayon, il est tout aussi simple de voir que $\text{rad}(CT) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil$.

Une chenille CT à n sommets épines est notée $CT(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$, où ℓ_i désigne le nombre de sommets pendants adjacents au sommet épine x_i , avec $\ell_0 \neq 0$ et $\ell_n \neq 0$.

En particulier, l'étoile $K_{1,m}$, $m \geq 1$, est notée $CT(m)$.

On peut aussi utiliser une notation exponentielle pour indiquer les séquences répétées dans la chenille. Par exemple, la chenille $CT(1, 0, 0, 0, 2, 2)$ est notée simplement $CT(10^32^2)$ et la chaîne P_n est notée $CT(10^{n-2}1)$ si $n \geq 4$, et $CT(n-1)$ si $n \in \{2, 3\}$.

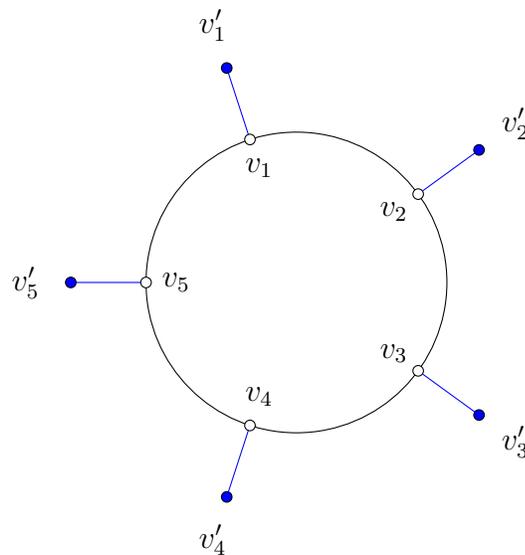
Homard

Un *homard* est un arbre tel que, si l'on supprime tous ses sommets pendants, le graphe résultant est une chenille.

Araignée

Une *araignée* est un arbre ayant au plus un sommet de degré supérieur à 2, appelé *centre de l'araignée* (s'il n'existe pas de sommet de degré supérieur à 2, alors chaque sommet peut être le centre). Une *patte* d'une araignée est une chaîne reliant le centre de l'araignée à un sommet de degré 1. Une araignée d'ordre n est notée par $S(n_1, \dots, n_d)$, où $n_1 + \dots + n_d = n - 1$, et P_{n_1}, \dots, P_{n_d} sont des chaînes d'ordre n_1, \dots, n_d respectivement, qui sont toutes rattachées au centre (sommet de degré d).

On note l'araignée $S(k, \dots, k)$ par $S(k^d)$, qui représente l'étoile k -subdivisée $S_k(K_{1,d})$.

FIGURE 1.2 – La couronne du cycle $C_5 \odot K_1$.

Grille, cylindre et tore

Soient m et n deux entiers positifs.

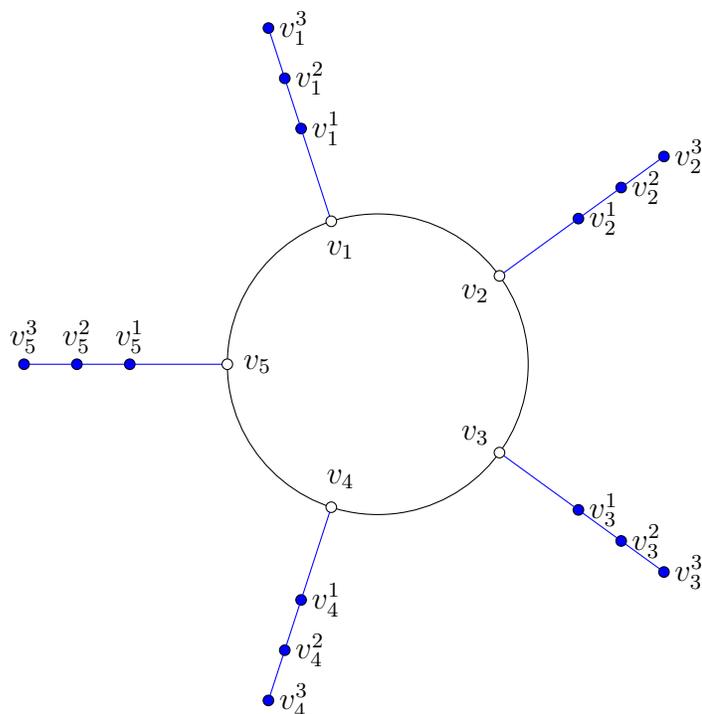
La grille de dimension $m \times n$, notée $G_{m,n}$, est le produit cartésien $P_m \square P_n$ des deux chaînes P_m et P_n .

Un *cylindre* est le produit cartésien d'une chaîne par un cycle et un *tore* est le produit cartésien de deux cycles.

Couronne généralisée d'un graphe

La *couronne* d'un graphe G , notée $G \odot K_1$, est le graphe obtenu à partir d'une copie de G en attachant un sommet pendant à chaque sommet de G . Plus généralement, pour un entier positif p , la *couronne généralisée* d'un graphe G , notée $G \odot pK_1$, est le graphe obtenu à partir d'une copie de G en attachant p voisins pendants à chaque sommet de G .

Nous illustrons à travers la Figure 1.2, la couronne du cycle C_5 , noté $C_5 \odot K_1$.

FIGURE 1.3 – La 3-couronne du cycle C_5 .

La p -couronne d'un graphe

La p -couronne d'un graphe G est le graphe obtenu à partir d'une copie de G , où pour tout sommet $v \in V(G)$, p nouveaux sommets v^1, v^2, \dots, v^p et p arêtes $vv^1, v^1v^2, \dots, v^{p-1}v^p$ sont ajoutés. Autrement dit, en insérant $p - 1$ nouveaux sommets sur chaque arête pendante de la couronne de G .

Nous illustrons à travers la Figure 1.3, la 3-couronne du cycle C_5 .

Chapitre 2

Notions sur la domination broadcast

Il existe des dizaines de paramètres de domination qui combinent la notion de domination avec des propriétés de graphes. Nous nous restreignons dans ce manuscrit à ceux qui nous sont utiles dans nos travaux de recherche.

La première partie de ce chapitre est dédiée aux généralités sur la domination et quelques paramètres de domination. Quant à la seconde partie, elle est consacrée à la domination broadcast et quelques invariants relatifs à cette variante de domination.

2.1 Domination sur les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe non trivial et simple.

Un ensemble de sommets $S \subseteq V$ est dit *dominant* de G , si tout sommet qui n'appartient pas à S possède un voisin dans S . En d'autres termes, $N[S] = V$ ou encore, pour tout sommet $u \in V - S$, $N(u) \cap S \neq \emptyset$.

Un ensemble de sommets S est dit *minimal* (resp. *maximal*) pour une propriété \mathcal{P} s'il n'existe aucun sous-ensemble de sommets $S' \subsetneq S$ (resp. $S \subsetneq S'$) tel que S' satisfait la propriété \mathcal{P} .

Le *nombre de domination* est

$$\gamma(G) = \min\{|S| : S \text{ est un ensemble dominant de } G\}$$

Notons que l'on peut se restreindre aux ensembles dominants minimaux dans la définition précédente puisque tout dominant minimum est forcément minimal.

Le nombre de domination supérieur est

$$\Gamma(G) = \max\{|S| : S \text{ est un ensemble dominant minimal de } G\}.$$

Dans la littérature, les différents types de domination imposent des conditions supplémentaires (souvent des propriétés de graphes) sur le sous-graphe induit par l'ensemble dominant D , ou sur le sous-graphe induit par $V - S$, ou bien sur les arêtes reliant S à $V - S$. Il existe énormément de paramètres de domination, nous ne citons ici que quelques-uns parmi eux, à savoir : la domination stable, la domination non-redondante, la domination de packing et la domination efficace, qui nous seront utiles dans la suite.

Domination stable

Le nombre de domination stable de G est

$$i(G) = \min\{|S| : S \text{ est un ensemble stable maximal de } G\},$$

et le nombre de stabilité (ou nombre d'indépendance) de G est

$$\beta_0(G) = \max\{|S| : S \text{ est un ensemble stable de } G\}.$$

Une caractérisation des ensembles stables maximaux est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.1 ([11]). *Un ensemble de sommets S d'un graphe G est un stable maximal si et seulement si, il est stable et dominant.*

Ainsi, nous pouvons définir l'invariant $i(G)$ comme suit :

$$i(G) = \min\{|S| : S \text{ est un ensemble stable et dominant de } G\}.$$

D'autre part, tout ensemble stable maximal vérifie la propriété suivante.

Proposition 2.2 ([11]). *Tout ensemble stable maximal de G est un ensemble dominant minimal de G .*

La Proposition 2.2 permet d'établir la chaîne d'inégalités suivante :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G). \tag{2.1}$$

Ensemble non-redondant

Un ensemble de sommets $S \subseteq V$ est *non-redondant* de G , si tout sommet v dans S admet un voisin privé relatif à S , c'est-à-dire, pour tout $v \in S$, $PN[v, S] \neq \emptyset$.

Le *nombre de non-redondance* de G est

$$ir(G) = \min\{|S| : S \text{ est un ensemble non-redondant maximal de } G\},$$

et le *nombre de non-redondance supérieur* est

$$IR(G) = \max\{|S| : S \text{ est un ensemble non-redondant de } G\}.$$

Notons que l'on peut se restreindre aux ensembles non-redondants maximaux dans la définition précédente puisque tout ensemble non-redondant maximum est maximal.

Cockayne et al. [22] ont caractérisé la minimalité d'un ensemble dominant par sa non-redondance.

Proposition 2.3 ([22]). *Un ensemble dominant S de G est minimal si et seulement si, il est dominant et non-redondant.*

Ils ont aussi proposé une condition suffisante pour qu'un ensemble soit non-redondant maximal de G .

Proposition 2.4 ([22]). *Tout ensemble dominant minimal de G est un ensemble non-redondant maximal de G .*

La Proposition 2.4 permet de rallonger la chaîne d'inégalités (2.1) :

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G). \quad (2.2)$$

Ensemble de packing

Un ensemble de sommets $S \subseteq V$ est *de packing* de G , si tout sommet v dans S est dominé au plus une fois. En d'autres termes, $|N[v] \cap S| \leq 1$, pour tout sommet v dans S , ou encore, $N[u] \cap N[v] = \emptyset$, pour toute paire de sommets distincts u et v de S .

Le *nombre de packing inférieur* de G est

$$p(G) = \min\{|S| : S \text{ est un ensemble de packing maximal de } G\},$$

et le *nombre de packing* de G est

$$P(G) = \max\{|S| : S \text{ est un ensemble de packing de } G\}.$$

Notons que l'on peut se restreindre aux ensembles packing maximaux dans la définition précédente puisque tout ensemble de packing maximum est maximal.

Comme tout ensemble de packing de G est un ensemble indépendant de G , on obtient

$$p(G) \leq P(G) \leq i(G).$$

Domination efficace

Un ensemble de sommets S est un dominant *efficace* si tout sommet de G est dominé exactement une seule fois par un élément de S . En d'autres termes, $|N[v] \cap S| = 1$, pour tout sommet v de G .

L'existence d'un dominant efficace n'est pas assurée pour tout graphe (puisque les cycles impairs d'ordre n , $n \geq 5$ et $n \neq 0[3]$ n'admettent pas de dominant efficace), néanmoins, si un graphe admet un ensemble dominant efficace, alors forcément, cet ensemble est un dominant minimum.

Proposition 2.5 ([5, 6]). *Si G admet un ensemble dominant efficace S , alors $|S| = \gamma(G)$.*

Comme tout ensemble dominant efficace est un ensemble de packing, nous pouvons à nouveau rallonger la chaîne d'inégalités (2.2) :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G). \quad (2.3)$$

2.2 Domination broadcast sur les graphes

En 2001, Erwin [26] introduit la domination broadcast comme une variante de la domination. Dans cette variante, on peut associer à chaque sommet un poids quelconque (généralement un entier naturel), de sorte que chaque sommet v de poids k , $k \in \mathbb{N}^*$, est en mesure de dominer tous les sommets à distance au plus égale à k du sommet v . Comme pour

la domination, la théorie de la broadcast domination a été enrichie par Erwin, où plusieurs paramètres de broadcast ont été introduits et étudiés. Plusieurs de ses résultats sont publiés dans [25].

2.2.1 Définitions et notations

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et connexe.

Une fonction $f : V \rightarrow \{0, \dots, \text{diam}(G)\}$ est un *broadcast* sur G si, pour tout sommet $v \in V$, $f(v) \leq e_G(v)$, où $e_G(v)$ représente l'excentricité du sommet v .

La valeur $f(v)$ est appelée la *f-valeur* de v . Si $f(v) > 0$, alors v est appelé un *f-sommet broadcast*. Nous notons l'ensemble de tous les *f-sommets broadcast* par V_f^+ .

Le *coût d'un broadcast* f sur un graphe G , noté $\sigma(f)$, est :

$$\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v).$$

Un broadcast f est *radial* (resp. *diamétral*), si $\sigma(f) = \text{rad}(G)$ (resp. $\sigma(f) = \text{diam}(G)$).

Soient $u \in V$ et $v \in V^+$. Si $d_G(u, v) \leq f(v)$, on dit que v *f-domine* u , u est *f-dominé* par v ou encore u *entend le broadcast de* v .

Le *voisinage broadcast* de v , noté N_f , est l'ensemble de tous les sommets *f-dominés* par v

$$N_f(v) = \{u \in V : d_G(u, v) \leq f(v)\}$$

et le *voisinage broadcast* de f est l'ensemble de tous les sommets *f-dominés* par V_f^+

$$N_f(V) = N_f(V_f^+) = \bigcup_{v \in V_f^+} N_f(v).$$

L'ensemble de tous les *f-sommets broadcast* que u peut entendre, noté $H_f(u)$, est

$$H_f(u) = \{v \in V_f^+ : d_g(u, v) \leq f(v)\}.$$

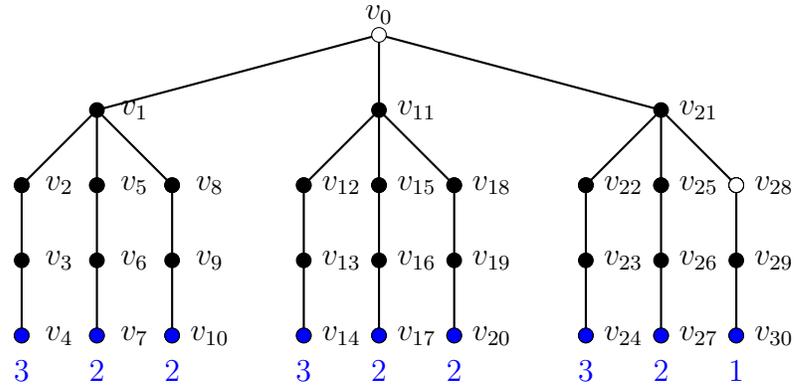


FIGURE 2.1 – Exemple de broadcast

Un sommet $u \in V$ est dit f -voisin privé de v si $H_f(u) = \{v\}$.

L'ensemble des f -voisins privés de v est l'ensemble des sommets qui entendent uniquement v , c'est-à-dire

$$PN_f(v) = \{u \in V : H_f(u) = \{v\}\}.$$

La f -frontière d'un f -sommet broadcast v est

$$B_f(v) = \{u \in V : d(u, v) = f(v)\}$$

et la f -frontière privée d'un f -sommet broadcast v est

$$PB_f(v) = \begin{cases} \{v\} & \text{si } f(v) = 1 \text{ et } PN_f(v) = \{v\}, \\ \{u \in PN_f(v) : d_G(u, v) = f(v)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tout sommet de $PB_f(v)$ est un f -voisin privé frontière de v . En particulier, si $f(v) = 1$ et $PN_f(v) = \{v\}$ alors v est son propre f -voisin privé frontière.

S'il n'y a pas un risque de confusion, on peut omettre la lettre " f " quand elle est présente comme indice (par exemple dans : V_f^+ , H_f, \dots) ou attachée à un mot donné (par exemple dans : f -valeur, f -sommet broadcast, \dots).

Nous illustrons à travers la Figure 2.1, les différentes notions de broadcast citées ci-dessus. Nous considérons un arbre à 31 sommets et le broadcast f défini par : $f(v_4) = f(v_{14}) = f(v_{24}) = 3$, $f(v_7) = f(v_{17}) = f(v_{27}) = f(v_{10}) = f(v_{20}) = 2$, $f(v_{30}) = 1$ et $f(u) = 0$, sinon.

Le coût de f est : $\sigma(f) = 20$. L'ensemble des f -sommets broadcast est :

$V_f^+ = \{v_4, v_7, v_{10}, v_{14}, v_{17}, v_{20}, v_{24}, v_{27}, v_{30}\}$. Nous avons coloré les f -sommets broadcast (de poids strictement positif) en bleu, et les sommets dominés qui ne sont pas des f -sommets broadcast en noir. Les sommets v_0 et v_{28} (en blanc), ne sont ni des sommets broadcast ni des sommets dominés, et donc $H_f(v_0) = H_f(v_{28}) = \emptyset$.

Nous avons :

- L'ensemble des sommets dominés par v_4 est $N_f(v_4) = \{v_4, v_3, v_2, v_1\}$.
- $B_f(v_4) = \{v_1\}$ et $B_f(v_{30}) = \{v_{29}\}$.
- $PB_f(v_4) = \{v_1\}$, $PB_f(v_{30}) = \{v_{30}, v_{29}\}$.

Plusieurs types de broadcast ont été définis en relation avec la domination, la non-redondance, la stabilité ou le packing. Ceci a entraîné l'introduction d'invariants de broadcast sur les graphes, qui correspondent soit à un coût minimum d'un broadcast (de type donné) maximal soit à un coût maximum d'un broadcast (de type donné) minimal.

Un broadcast f sur un graphe G , d'un certain type, est dit *minimal* (resp. *maximal*) s'il n'existe pas un autre broadcast g sur G du même type, vérifiant $g(u) \leq f(u)$ (resp. $g(u) \geq f(u)$) pour tout sommet $u \in V$.

Introduisons maintenant quelques types de broadcast sur les graphes.

2.2.2 Broadcast dominant

Un broadcast f sur G est appelé *un broadcast dominant* si tout sommet de $V - V_f^+$ est f -dominé par un sommet de V_f^+ ou, d'une manière équivalente, $|H_f(v)| \geq 1$, pour tout sommet $v \in V$.

Notons que si f est un broadcast dominant minimal sur G tel que $f(v) = 1$ pour tout $v \in V_f^+$, alors V_f^+ est un *ensemble dominant minimal* dans G .

À titre d'exemple, soit pour tout u , le broadcast f_u défini par $V_{f_u}^+ = \{u\}$ et,

$$f_u(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \neq u \\ e_G(u) & \text{si } v = u \end{cases}$$

f_u est un broadcast dominant minimal de coût $\sigma(f_u) = e_G(u)$. En particulier, si $e_G(u) = \text{rad}(G)$, f_u est radial et si $e_G(u) = \text{diam}(G)$, f_u est diamétral.

Le nombre de domination broadcast est

$$\gamma_b(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast dominant sur } G\}.$$

Un broadcast dominant de coût égal à $\gamma_b(G)$ est un *broadcast optimal*, appelé aussi $\gamma_b(G)$ -broadcast. Nous utiliserons une notation similaire pour les autres types de broadcast.

Le nombre de domination broadcast supérieur est

$$\Gamma_b(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast dominant minimal sur } G\}.$$

Le broadcast f considéré précédemment dans la Figure 2.1, n'est pas dominant car il existe deux sommets non dominés sur T . Nous représentons dans la Figure 2.2, deux broadcast dominants minimaux sur l'arbre T , de coût $\gamma_b(T) = 4$ et $\Gamma_b(T) = 20$ respectivement.

La première caractérisation des broadcast dominants minimaux est donnée par Erwin [27].

Proposition 2.6 (Erwin [27]). *Soit G un graphe connexe et soit f un broadcast dominant sur G . Alors f est minimal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Tout sommet v avec $f(v) \geq 2$, admet un f -voisin privé u de v tel que $d(u, v) = f(v)$,
et*
2. *tout sommet v avec $f(v) = 1$, admet un f -voisin privé dans $N[v]$.*

Cette caractérisation est exprimée en termes des f -frontières privées des f -sommets broadcast, par Mynhardt et Roux [39].

Proposition 2.7 (Mynhardt et Roux en [39]). *Un broadcast dominant f est un broadcast dominant minimal si et seulement si, pour tout $v \in V_f^+$, $PB_f(v) \neq \emptyset$.*

2.2.2.1 Résultats sur le nombre de domination broadcast γ_b

Erwin [27] a déterminé une borne inférieure pour le nombre de domination broadcast en fonction du diamètre de G .

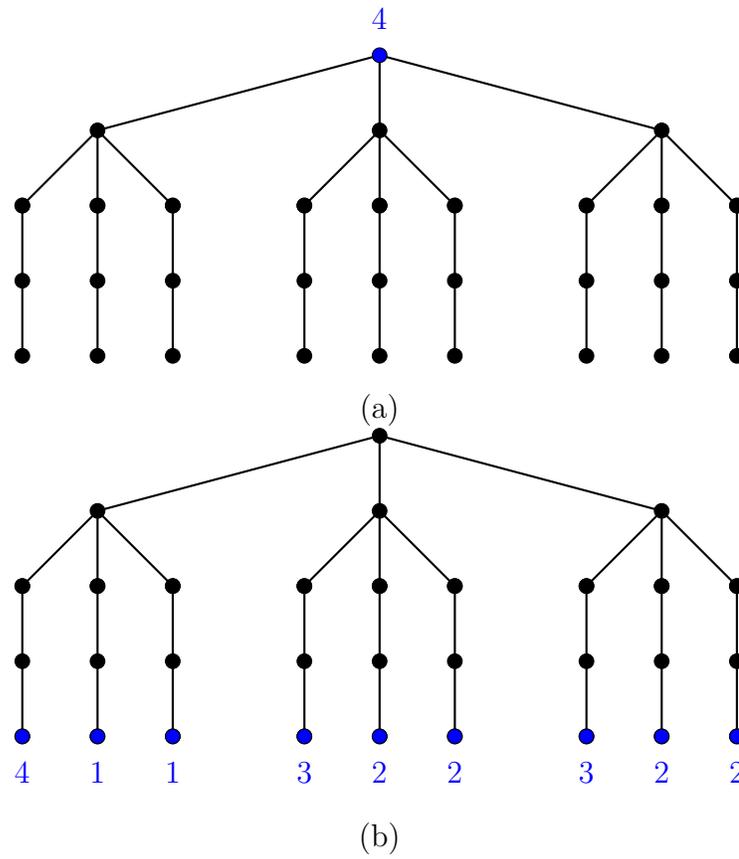


FIGURE 2.2 – Exemples de broadcast dominants minimaux

Théorème 2.8 (Erwin [27]). *Pour tout graphe G , $\gamma_b(G) \geq \left\lceil \frac{\text{diam}(G)+1}{3} \right\rceil$.*

Cette borne est atteinte pour les chaînes d'ordre n .

Corollaire 2.9 (Erwin [27]). *Pour tout entier positif n ,*

$$\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

La fonction caractéristique d'un ensemble dominant est un broadcast dominant et le broadcast radial f_u est un broadcast dominant minimal. Cette observation permet d'obtenir une borne supérieure pour le nombre de domination broadcast, en fonction du rayon et du nombre de domination du graphe G .

Proposition 2.10 (Erwin [27]). *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma_b(G) \leq \min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\}.$$

La borne $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\}$ pour $\gamma_b(G)$ peut être très mauvaise comme elle peut être très bonne. En effet, il existe une famille de graphes pour laquelle, la différence entre $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\}$ et $\gamma_b(G)$ est aussi grande que l'on veut.

Proposition 2.11 (Erwin [27]). *Pour tout entier positif t , il existe un graphe connexe pour lequel $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} - \gamma_b(G) \geq t$.*

Néanmoins, cette borne peut aussi être atteinte.

Théorème 2.12 (Erwin [27]). *Pour tout graphe G ,*

1. $\gamma_b(G) = 1$ si et seulement si $\text{rad}(G) = 1$.
2. $\gamma_b(G) = 2$ si et seulement si $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = 2$.

Par ailleurs, Erwin [27] a montré que l'implication "si $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = k$, alors $\gamma_b(G) = k$ " est vérifiée pour $k \in \{1, 2, 3\}$, mais elle n'est pas vraie pour $k = 4$. En effet, en considérant le graphe G obtenu en joignant un sommet pendant de l'étoile subdivisée $S(K_{1,4})$ à une extrémité de la chaîne P_3 , on obtient $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = 4$ et $\gamma_b(G) = 3$.

Proposition 2.13 (Erwin [27]). *Pour tout graphe G et pour tout entier $1 \leq k \leq 3$, si $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = k$, alors $\gamma_b(G) = k$.*

En se basant sur l'inégalité établie dans la Proposition 2.10, on peut partitionner les graphes en 3 classes :

1. Les graphes de type 1 : Ce sont les graphes G pour lesquels $\gamma_b(G) = \gamma(G)$.
2. Les graphes de type 2 (ou graphes radiaux) : Ce sont les graphes G pour lesquels $\gamma_b(G) = \text{rad}(G)$.
3. Les graphes de type 3 : Ce sont les graphes G pour lesquels $\gamma_b(G) < \min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\}$.

Les graphes de type 1 sont entièrement caractérisés par Erwin dans le Théorème suivant.

Théorème 2.14 (Erwin [27]). *Pour tout graphe G , $\gamma_b(G) = \gamma(G)$ si et seulement si, il existe un broadcast dominant f sur G tel que V_f^+ est un ensemble dominant.*

Seager [44] s'est intéressée à la caractérisation des chenilles de type 1. Dans son article, elle note une chenille CT , non pas en termes du nombre de sommets pendants adjacents aux sommets épines, qui se présentent le long de l'épine dorsale de CT , mais en termes du type de ses sommets ("s" pour support et "t" pour tronc), qu'elle appelle la *forme* de la chenille CT . Par exemple, la forme de la chaîne P_6 est *stts*. Seager a utilisé la notation exponentielle pour indiquer les séquences répétées dans les chenilles. Par exemple, une chenille de forme *stststts* est notée $(st)^3ts$.

Théorème 2.15 (Seager [44]). *Soit CT une chenille. Alors $\gamma_b(CT) = \gamma(CT)$ si et seulement si entre chaque paire de séquences de la forme $st^p s$ et $st^q s$ tel que $p \equiv q \equiv 0[3]$, il existe au moins une séquence (avec possibilité de chevauchement) de la forme $st^r s$, où $r \equiv 2[3]$.*

Avant d'énoncer la caractérisation des arbres de type 1 ($\gamma_b(G) = \gamma(G)$), définissons la notion d'ensemble P -scindé.

Soit P une chaîne diamétrale d'un arbre T . Un ensemble M d'arêtes de P est dit P -scindé si les extrémités de ses arêtes sont de degré 2 dans T et pour chaque composante T' de $T \setminus M$, la chaîne $T' \cap P$ est une chaîne diamétrale de T' , de longueur positive paire. Un ensemble scindé de T est un ensemble P -scindé pour une chaîne diamétrale P de T .

Théorème 2.16 (Cockayne, Herke et Mynhardt [23]). *Un arbre T est de type 1 si et seulement si T admet un ensemble scindé M tel que T_i est de type 1, pour toute composante T_i de $T \setminus M$.*

Parmi les graphes de type 2 (radiaux), on trouve les grilles, des arbres particuliers et les graphes dont les arbres couvrants sont de type 2. Dunbar et al. ont prouvé que les grilles $G_{m,n}$ ($2 \leq m \leq n$) et les étoiles subdivisées sont radiales.

Théorème 2.17 (Dunbar et al. [25]). *Pour toute paire d'entiers m et n , avec $2 \leq m \leq n$,*

$$\gamma_b(G_{m,n}) = \text{rad}(G_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Théorème 2.18 (Dunbar et al. [25]). *Pour tout entiers $k \geq 0$ et $t \geq 5$,*

$$\gamma_b(S_{k,t}) = \text{rad}(S_{k,t}) = k + 1.$$

Pour les autres valeurs de t , Bouchemakh et Sahbi [17] ont prouvé que $S_{k,t}$ reste radial.

Proposition 2.19 (Bouchemakh et Sahbi [17]). *Pour tout entiers $k \geq 0$ et $t \geq 3$,*

$$\gamma_b(S_{k,t}) = \text{rad}(S_{k,t}) = k + 1.$$

La caractérisation des chenilles de type 2 est donnée par Seager [44].

Théorème 2.20 (Seager [44]).

1. *Une chenille de diamètre impair est de type 2 si et seulement si la suppression d'une arête reliant deux sommets troncs implique qu'au moins une des composantes connexes résultantes est de diamètre impair.*
2. *Une chenille de diamètre pair est de type 2 si et seulement si la suppression de deux arêtes disjointes, où chaque arête relie deux sommets troncs, implique qu'au moins une des trois composantes connexes est de diamètre impair.*

Plus généralement, Herke et Mynhardt [36] ont caractérisé les arbres de type 2.

Théorème 2.21 (Herke et Mynhardt [36]). *Un arbre T est radial si et seulement si T n'admet pas un ensemble non vide P -scindé.*

Herke [35] a prouvé que pour tout graphe connexe G , il existe un arbre couvrant T tel que $\gamma_b(G) = \gamma_b(T)$.

Proposition 2.22 (Herke [35]). *Pour tout graphe connexe G ,*

$$\gamma_b(G) = \min\{\gamma_b(T) : T \text{ est un arbre couvrant de } G\}.$$

De la Proposition 2.22, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.23 (Herke [35]). *Soit G un graphe connexe. Si tous les arbres couvrants T de G sont radiaux, alors G est radial.*

Pour la classe des arbres, Herke et Mynhardt [36] ont déterminé une autre borne supérieure, dépendant seulement de l'ordre du graphe.

Théorème 2.24 (Herke et Mynhardt [36]). *Si T est un arbre d'ordre n , alors*

$$\gamma_b(T) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

En se basant sur la Proposition 2.22, la borne établie dans le Théorème 2.24 est généralisée pour tous les graphes connexes.

Corollaire 2.25 (Herke et Mynhardt [36]). *Pour tout graphe connexe G d'ordre n ,*

$$\gamma_b(G) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

2.2.2.2 Résultats sur le nombre de domination broadcast supérieur Γ_b

Pour des raisons similaires à celles qui ont permis d'établir la borne dans la Proposition 2.10, Erwin a déterminé une borne inférieure pour le nombre de domination broadcast supérieur en fonction du diamètre et du nombre de domination supérieur Γ , vu que la fonction caractéristique d'un ensemble dominant est un broadcast dominant et le broadcast diamétral f_u est un broadcast dominant minimal.

Proposition 2.26 (Erwin [27]). *Pour tout graphe G ,*

$$\Gamma_b(G) \geq \max\{\text{diam}(G), \Gamma(G)\}.$$

Un graphe G est *diamétral* si $\Gamma_b(G) = \text{diam}(G)$.

Dunbar *et al.* ont prouvé que la différence entre $\max\{\Gamma(G), \text{diam}(G)\}$ et $\Gamma_b(G)$ peut être arbitrairement grande. Ils ont considéré une famille de graphes, notée H_k , où pour tout entier $k \geq 1$, H_k est le graphe construit en joignant un sommet pendant de $S(K_{1,2+k})$ à une extrémité de la chaîne P_{2k} . Pour tout entier positif k , ils ont montré que, $\Gamma(H_k) = 2k + 3$, $\text{diam}(H_k) = 2k + 4$ et $\Gamma_b(H_k) \geq 3k + 3$, ce qui justifie le résultat ci-dessous.

Observation 2.27 (Dunbar *et al.* [25]). *Pour tout entier positif k ,*

$$\Gamma_b(H_k) - \max\{\Gamma(H_k), \text{diam}(H_k)\} \geq k - 1.$$

Ils ont aussi prouvé que la taille d'un graphe G représente une borne supérieure pour $\Gamma_b(G)$ et cette borne est atteinte. Par la suite, cette borne été améliorée par Bouchemakh et Fergani [16].

Théorème 2.28 (Dunbar *et al.* [25]). *Pour tout graphe G de taille m , $\Gamma_b(G) \leq m$. De plus, $\Gamma_b(G) = m$ si et seulement si G est une chaîne ou une étoile non triviale.*

Théorème 2.29 (Bouchemakh et Fergani [16]). *Si G est un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G)$, alors $\Gamma_b(G) \leq n - \delta(G)$, et cette borne est atteinte.*

Soit f un broadcast dominant minimal sur un graphe G . D'après la Proposition 2.7, chaque sommet broadcast $v \in V^+$ possède un f -voisin privé (noté v^p) tel que soit v^p est à distance $f(v)$ de v , soit $v^p = v$ si $f(v) = 1$ et $PN_f(v) = \{v\}$. Soit ϵ une fonction définie sur V^+ comme suit : $\epsilon(v) = \{e_v\}$, où e_v est l'une des arêtes adjacentes à v , si $PB_f(v) = \{v\}$, tandis que $\epsilon(v)$ est l'ensemble de toutes les arêtes des (v, v^p) -géodésiques, si v^p est à distance $f(v)$ de v , reliant v à v^p si v^p est à distance $f(v)$ de v . Dans la preuve du Théorème 2.28, Dunbar *et al.*, ont prouvé que les ensembles $\epsilon(v)$ sont deux à deux disjoints.

Lemme 2.30 (Dunbar, Erwin, Haynes, Hedetniemi and Hedetniemi [25], preuve du Théorème 5). *Pour toute paire de f -sommets broadcast u et v , $\epsilon(u) \cap \epsilon(v) = \emptyset$.*

Le Lemme 2.30 sera fréquemment utilisé dans les preuves de nos résultats du Chapitre 4.

Une caractérisation des chenilles diamétrales est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.31 (Gemmrich et Mynhardt [28]). *Une chenille CT , de chaîne diamétrale $P_d = v_0v_1 \dots, v_d$, est diamétrale si et seulement si*

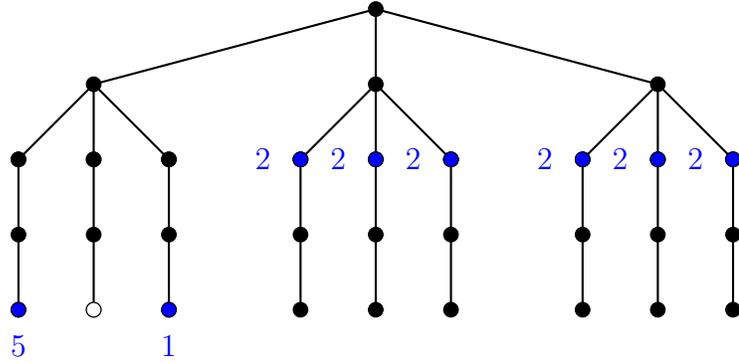


FIGURE 2.3 – Exemple d’un broadcast non-redondant maximal

1. Chaque $v_i, i \in \{1, \dots, d - 1\}$, est adjacent à au plus deux sommets pendants,
2. pour chaque $i \in \{1, \dots, d - 2\}$, $\min\{deg_{CT}(v_i), deg_{CT}(v_{i+1})\} = 2$, et
3. à chaque fois que v_i et $v_j, i < j$ sont des supports forts, il existe un indice $k, i < k < j$, tel que $deg_{CT}(v_k) = deg_{CT}(v_{k+1}) = 2$.

Neilson a déterminé la valeur exacte du nombre de domination broadcast supérieur d’une autre classe d’arbres, à savoir la classe des araignées $S(2^k)$, où $k \geq 3$.

Proposition 2.32 (Neilson [43]). *Pour tout entier $k \geq 3$,*

$$\Gamma_b(S(2^k)) = k + 1.$$

2.2.3 Broadcast non-redondant

Un broadcast f sur G est appelé *un broadcast non-redondant* si $PB_f(v) \neq \emptyset$ pour tout sommet $v \in V_f^+$.

Nous illustrons à travers la Figure 2.3, un exemple d’un broadcast non-redondant maximal sur T .

Le *nombre de non-redondance broadcast* est

$$ir_b(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast non-redondant maximal sur } G\}.$$

Le *nombre de non-redondance broadcast supérieur* est

$$IR_b(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast non-redondant sur } G\}.$$

Mynhardt et Roux [39] ont prouvé que $ir_b(G)$ et $ir(G)$ sont incomparables mais que le ratio ir_b/ir est borné.

Théorème 2.33 (Brewster, C.Mynhardt et Teshima [21]). *Pour tout graphe G , $ir_b \leq \gamma_b(G) \leq \frac{3}{2}ir(G)$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}^+$ il existe un graphe connexe G_k tel que $ir(G_k) = 2k$ et $\gamma_b(G_k) = 3k$.*

Le ratio γ_b/ir_b est borné aussi.

Théorème 2.34 (Mynhardt et Roux [39]). *Pour tout graphe G , $\gamma_b(G) \leq \frac{5}{4}ir_b(G)$.*

En utilisant la Proposition 2.7 et la définition d'un broadcast non-redondant maximal, le corollaire ci-dessous devient immédiat.

Corollaire 2.35 (Ahmadi *et al.* [1]). *Tout broadcast dominant minimal est un broadcast non-redondant maximal.*

Du Corollaire 2.35 et du fait que la fonction caractéristique d'un ensemble dominant minimal est un broadcast dominant minimal, on déduit la chaîne d'inégalités (4).

Corollaire 2.36 (Ahmadi *et al.* [1]). *Pour tout graphe G ,*

$$ir_b(G) \leq \gamma_b(G) \leq \gamma(G) \leq \Gamma(G) \leq \Gamma_b(G) \leq IR_b(G). \quad (2.4)$$

Dans [39], Mynhardt et Roux ont caractérisé les broadcasts non-redondants maximaux, ayant comme conséquence le corollaire ci-dessous.

Corollaire 2.37 (Mynhardt et Roux [39]). *Si un broadcast non-redondant est dominant, alors il est non-redondant maximal et dominant minimal.*

Pour la relation liant le nombre de domination broadcast et le nombre de non-redondance supérieur, Mynhardt et Roux ont comparé ces invariants. ils ont prouvé que le ratio IR_b/Γ_b est non borné et que la différence $IR_b - \Gamma_b$ peut être aussi grande que l'on veut pour la classe des arbres. Néanmoins, cela n'exclut pas la possibilité d'avoir l'égalité $IR_b(G) = \Gamma_b(G)$, comme nous le verrons au Chapitre 3.

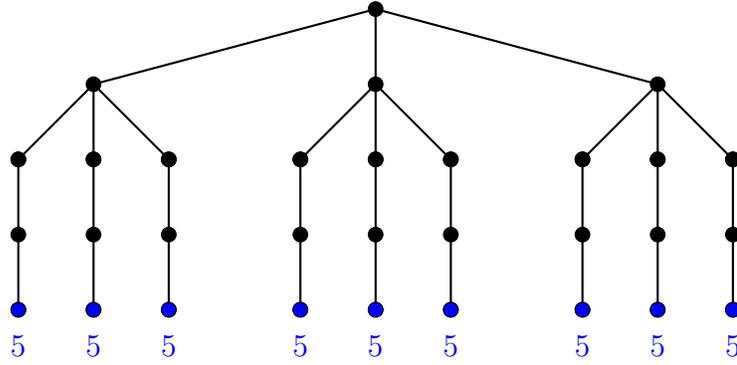


FIGURE 2.4 – Exemple d'un broadcast indépendant maximal

2.2.4 Broadcast indépendant

Un broadcast f est appelé un *broadcast indépendant* si aucun sommet broadcast n'est f -dominé par un autre sommet broadcast. En d'autres termes, $|H_f(v)| = 1$, pour tout sommet broadcast $v \in V_f^+$.

Sur la Figure 2.4, nous donnons un broadcast indépendant maximal sur l'arbre T .

Le nombre d'indépendance broadcast est

$$\beta_b(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast indépendant sur } G\}.$$

Le nombre d'indépendance broadcast inférieur est

$$i_b(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast indépendant maximal sur } G\}.$$

En particulier, si f est un broadcast indépendant sur G tel que $f(v) = 1$ pour tout $v \in V_f^+$, alors V_f^+ est un ensemble stable maximal dans G .

Comme pour les autres invariants de broadcast précédemment cités, il existe une caractérisation des broadcasts indépendants maximaux. Avant de l'énoncer, notons, pour un sommet $v \in V_f^+$,

$$d^+(v) = \min\{d(v, u) : u \in V_f^+ \setminus \{v\}\}.$$

Théorème 2.38 (Erwin [26]). *Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G . Si $V^+ = \{v\}$, alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e_G(v)$. D'un autre côté, si $|V_f^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. f est un ensemble dominant, et
2. pour tout $v \in V_f^+$, $f(v) = d^+(v) - 1$.

Du Théorème 2.38, on déduit que $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$.

Bien qu'un indépendant broadcast maximal soit un dominant, il n'est pas forcément un dominant minimal. Pour le voir, il suffit de considérer la chaîne $P_4 = v_1, v_2, v_3, v_4$, où $f_b(v_1) = f_b(v_4) = 2$ et $f_b(v_2) = f_b(v_3) = 0$. Le broadcast f_b est un indépendant maximal mais n'est pas un dominant minimal. En revanche, $\beta_b(G)$ et $\Gamma_b(G)$ sont en général incomparables, puisque pour la chaîne P_4 et le graphe de Petersen¹ PG , on a $\beta_b(P_4) = 4 > \Gamma_b(P_4) = 3$ et $\beta_b(PG) = 4 < \Gamma_b(PG) = 5$.

Dunbar *et al.* [25] ont prouvé une autre chaîne d'inégalités donnée dans la Proposition suivante.

Proposition 2.39 (Dunbar *et al.* [25]). *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \beta_b(G) \geq i(G) \geq \gamma(G) \geq \gamma_b(G).$$

2.2.5 Broadcast de packing

Un broadcast f est appelé un *broadcast de packing* si chaque sommet broadcast entend au plus un sommet broadcast. En d'autres termes, $|H_f(v)| \leq 1$, pour tout $v \in V$.

Nous représentons sur la Figure 2.5, un broadcast de packing maximal sur l'arbre T .

Le *nombre de packing broadcast inférieur* est

$$p_b(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast de packing maximal sur } G\}.$$

Le *nombre de packing broadcast* est

$$P_b(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast de packing sur } G\}.$$

Notons que la fonction caractéristique d'un packing maximal n'est pas forcément un broadcast de packing maximal. Pour le voir, il suffit de considérer la chaîne

1. On appelle graphe de Petersen le graphe $PG = (V, E)$ où $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+2}, i = 1, \dots, 5\}$, où les indices sont pris modulo 5.

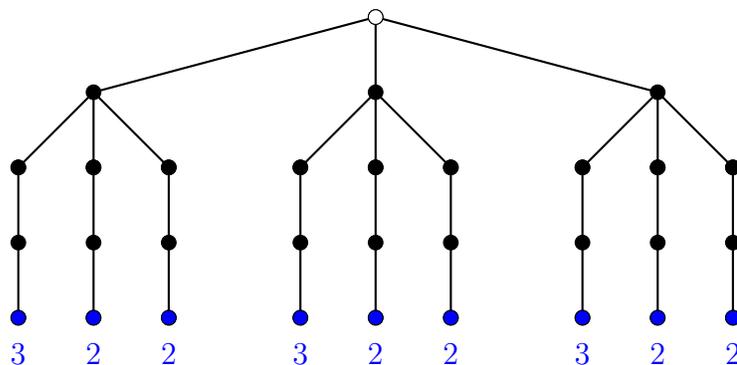


FIGURE 2.5 – Exemple d'un broadcast de packing maximal

$P_5 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$. L'ensemble $S = \{v_3\}$ est un packing maximal dont la fonction caractéristique n'est pas un broadcast de packing maximal puisque la valeur 1 peut être augmentée à 2.

Dunbar *et al.* [25] ont montré que $P(G)$ et $p(G)$ sont incomparables à $p_b(G)$, mais qu'on a les relations : $p(G) \leq P(G) \leq P_b(G)$ et $p_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq P_b(G) \leq \beta_b(G)$.

Chapitre 3

Invariants de broadcast des chaînes et des cycles

Dans ce chapitre, nous déterminons les valeurs exactes de huit invariants de la domination broadcast des chaînes et des cycles. Il s'agit des nombres de domination broadcast γ_b , de domination broadcast supérieur Γ_b , de non-redondance broadcast ir_b , de non-redondance broadcast supérieur IR_b , d'indépendance broadcast β_b , d'indépendance broadcast inférieur i_b , de packing broadcast inférieur p_b et de packing broadcast P_b . Nous répondons ainsi à une conjecture posée par Ahmadi et al. dans [1]. Les résultats démontrés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication dans la revue *Discrete Applied Mathematics* [9].

3.1 Conjecture d'Ahmadi et al. [1]

En 2015, Ahmadi et al. publient un article sur le nombre de non-redondance broadcast dans les graphes et posent une conjecture sur les valeurs de plusieurs invariants de la domination broadcast des chaînes et des cycles. Cette conjecture est présentée dans la Table 3.1.

	ir_b	γ_b	i_b	Γ_b	IR_b	β_b
P_n	$\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$ [27]	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$n-1$ [25]	$2n-4$	$2n-4$ [26]
C_n	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

TABLE 3.1 – Conjecture d’Ahmadi et al.

Le nombre de broadcast domination γ_b et le nombre de stabilité supérieur β_b étaient initialement étudiés par Erwin 2004 [27] et en 2001 [26] respectivement. Concernant le nombre de broadcast domination supérieur sur les chaînes, il a été déterminé par Dunbar et al. en 2006 [25]. Dans ce qui suivra, nous prouverons plusieurs résultats qui sont récapitulés dans la Table 3.2.

	$\gamma_b = ir_b$	i_b	$\Gamma_b = IR_b$	β_b	p_b	P_b
P_n	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$ Th. 3.12	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$, $n \neq 3$ Th. 3.7	$n-1$, $n \geq 2$ Th. 3.1	$2n-4$, $n \geq 3$ [26]	$\frac{n}{4}$ if $n \equiv 0 \pmod{8}$ $2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 1$ if $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{8}$ $2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 2$ otherwise Th. 3.16	$n-1$ Th. 3.14
C_n	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$ Th. 3.13	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$, $n \neq 3$ Th. 3.8	$2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$, $n \geq 4$ Th. 3.4, 3.2	$n-2$, $n \geq 3$ Th. 3.5	$\frac{n}{4}$ if $n \equiv 0 \pmod{8}$ $2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 1$ if $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{8}$ $2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 2$ otherwise Th. 3.17	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Th. 3.14

TABLE 3.2 – Invariants de broadcast sur les chaînes et cycles

Nous noterons par $P_n = x_1x_2 \dots x_n$, $n \geq 2$, la chaîne d’ordre n , et par $C_n = x_0x_1x_2 \dots x_{n-1}$, $n \geq 3$, le cycle d’ordre n . De plus, nous supposons que tous les indices des sommets de C_n sont pris modulo n .

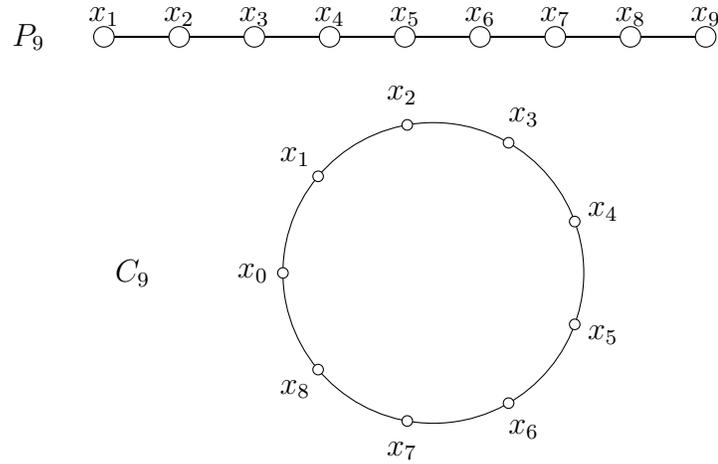


FIGURE 3.1 – Représentation d’une chaîne et d’un cycle

3.2 Nombres de domination broadcast supérieur et de non-redondance broadcast supérieur

Nous montrons dans le théorème suivant que pour toute chaîne d’ordre $n \geq 2$, le nombre de non-redondance broadcast supérieur est égal au nombre de domination broadcast supérieur.

Théorème 3.1. *Pour tout entier $n \geq 2$, $IR_b(P_n) = \Gamma_b(P_n) = \text{diam}(P_n) = n - 1$*

Preuve. D’après le Corollaire 2.36 et le Théorème 2.28, on a : $IR_b(P_n) \geq \Gamma_b(P_n) = n - 1$. Pour montrer l’égalité, il suffit de montrer l’inégalité dans l’autre sens, c’est-à-dire : $IR_b(P_n) \leq \Gamma_b(P_n)$.

Soit f un broadcast non-redondant sur P_n , et soient $V_f^+ = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$, avec $i_1 < \dots < i_t$, $t \geq 1$ l’ensemble des sommets broadcast.

Par définition d’un broadcast non-redondant, nous affirmons que :

- Pour tout sommet broadcast $x_{i_j} \in V_f^+$ de poids $f(x_{i_j}) \geq 2$, il existe un sommet $x_{i_j}^p$ tels que $H_f(x_{i_j}^p) = \{x_{i_j}\}$ et $d_{P_n}(x_{i_j}, x_{i_j}^p) = f(x_{i_j})$, et
- pour tout sommet broadcast $x_{i_j} \in V_f^+$ de poids $f(x_{i_j}) = 1$, il existe un sommet $x_{i_j}^p \in N_{P_n}[x_{i_j}]$ vérifiant $H_f(x_{i_j}^p) = \{x_{i_j}\}$.

Soit t' un entier, $0 \leq t' \leq t$, le nombre de sommets broadcast x_{i_j} qui sont leur propre voisin privé frontière, donc $x_{i_j}^p = x_{i_j}$ (ceci implique $f(x_{i_j}) = 1$), et sans perte de généralité,

supposons que ces sommets sont $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{t'}}\}$.

On a donc $\sum_{j=1}^{t'} t' f(x_{i_j}) = t'$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} |V(P_n)| &\geq t' + \sum_{j=t'+1}^t (d_{P_n}(x_{i_j}, x_{i_j}^p) + 1) \\ &\geq \sum_{j=1}^{t'} f(x_{i_j}) + \sum_{j=t'+1}^t (f(x_{i_j}) + 1) \\ &= IR_b(P_n) + t - t', \end{aligned}$$

qui implique que $IR_b(P_n) \leq n - (t - t')$.

Nous considérons deux cas :

Cas 1 Si $0 \leq t' < t$, alors $t - t' \geq 1$ alors $IR_b(P_n) \leq n - 1$.

Cas 2 Si $t' = t$, alors tous les sommets broadcast sont de poids unitaire et chaque sommet broadcast x_{ij} est son propre voisin privé frontière ($x_{ij} = x_{ij}^p$) et $d_{P_n}(x_{ij}, x_{i_{j+1}}) = 2$, $\forall j = 1, \dots, t$.

Ainsi, l'ensemble des sommets broadcast V_f^+ contient tous les sommets dont les indices sont pairs ou, V_f^- contient tous les sommets dont les indices sont impairs, et dans les deux cas, on a : $\sigma(f) = IR_b(P_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq n - 1$.

Ainsi, pour tout $0 \leq t' \leq t$, on a : $IR_b(P_n) \leq n - 1$.

□

Nous étudions maintenant les cycles. Nous commençons par la détermination du nombre de domination broadcast supérieur. Il est évident que pour $n = 3$, $\Gamma_b(C_3) = 1$. Pour $n \geq 4$, le nombre de domination broadcast supérieur sur C_n est donné par le Théorème suivant.

Théorème 3.2. *Pour tout entier $n \geq 4$, $\Gamma_b(C_n) = 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)$.*

Preuve. D'après le Théorème 2.29, et puisque $\delta(C_n) = 2$, on a pour tout $n \geq 4$, $\Gamma_b(C_n) \leq n - 2$.

Considérons le broadcast f défini par :

$$f(x_i) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 & \text{si } i \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le broadcast f est un dominant minimal sur C_n , de coût

$$\sigma(f) = 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right) = \begin{cases} n - 2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n - 3 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

D'où $\sigma(f) \leq \Gamma_b(C_n)$.

En utilisant les deux inégalités précédentes, on obtient : $\sigma(f) \leq \Gamma_b(C_n) \leq n - 2$ et par conséquent :

Si n est pair,

$$\Gamma_b(C_n) = n - 2 \tag{3.1}$$

et si n est impair,

$$n - 3 \leq \Gamma_b(C_n) \leq n - 2. \tag{3.2}$$

Ainsi, la preuve est terminée pour le cas où n est pair et il nous reste à discuter le cas où n est impair. Il est facile de vérifier que $\Gamma_b(C_5) = 2$. Supposons que $n \geq 7$, $n \equiv 1[2]$ et soit g un Γ_b -broadcast sur C_n avec $V_g^+ = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$, $i_1 < \dots < i_t$, $t \geq 1$. Montrons d'abord le fait suivant.

Fait A. $t = 2$.

Preuve. Si $t = 1$, alors il existe un unique sommet broadcast $x_1 \in V_g^+$, et par suite, $\Gamma_b(C_n) = g(x_1) = e_{C_n}(x_1) = \frac{n-1}{2} < n - 3$, une contradiction avec l'équation (3.2). Ainsi, $t \geq 2$.

D'après la Proposition 2.7, nous savons que chaque g -sommet broadcast $x_i \in V_g^+$ possède un sommet privé frontière, noté x_i^p , avec la possibilité que $x_i^p = x_i$ (qui implique dans ce cas que $g(x_i) = 1$).

Notons par Q_{x_i} l'ensemble des arêtes définies comme suit :

- Si $g(x_i) \geq 2$, alors Q_{x_i} est l'ensemble des arêtes de l'unique (x_i, x_i^p) -géodésique,
- Si $g(x_i) = 1$ et $x_i^p \in \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ est un g -sommet frontière privé de x_i , alors Q_{x_i} est le singleton $\{x_i x_i^p\}$,
- Si $g(x_i) = 1$ et x_i est un g -sommet frontière privé de lui-même, alors Q_{x_i} est le singleton $\{x_i x_{i+1}\}$.

Il est facile de vérifier que, $g(x_i) = |Q_{x_i}|$ pour tout $x_i \in V_g^+$, et $Q_{x_i} \cap Q_{x_j} = \emptyset$ pour toute paire de sommets $x_i, x_j \in V_g^+$ ($i \neq j$). Par ailleurs, pour tout ensemble $Q_{x_i} =$

$\{x_i x_{i+1}, \dots, x_{i+t-1} x_{i+t}\}$ (resp. $Q_{x_i} = \{x_{i-t} x_{i-t+1}, \dots, x_{i-1} x_i\}$), $t \geq 1$, l'arête $x_{i+t} x_{i+t+1}$ (resp. $x_i x_{i+1}$), qui succède Q_{x_i} , n'appartient à aucun ensemble $Q_{x_{i'}}$, avec $x_{i'} \in V_g^+$. C'est une conséquence directe des observations suivantes :

- (a) Chaque g sommet broadcast x_i appartient à une unique chaîne, notée Q_{x_i} .
- (b) Chaque g sommet frontière privé appartient au plus à une chaîne Q .
- (c) Soit x_j l'extrémité d'une chaîne Q . Le sommet x_j n'est ni un g -sommet broadcast ni un g -sommet frontière privé si et seulement si $Q = Q_{x_{j-1}}$, x_{j-1} est un g -sommet broadcast, de coût $g(x_j) = 1$ et x_j est l'unique g -sommet frontière privé de lui-même.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_b(C_n) &= \sum_{x_i \in V_g^+} g(x_i) \\ &= \sum_{x_i \in V_g^+} |Q_{x_i}| = |\cup_{x_i \in V_g^+} Q_{x_i}| \\ &\leq n - |V_g^+| = n - t. \end{aligned}$$

Si $t > 3$, alors $\Gamma_b(C_n) < n - 3$, une contradiction avec l'équation (3.2) et ainsi, $2 \leq t \leq 3$.

Supposons que $t = 3$ et soit $V_g^+ = \{x_a, x_b, x_c\}$, avec $a < b < c$. Comme $\Gamma_b(C_n) = n - 3$, alors entre chaque paire de chaînes de Q_{x_a} , Q_{x_b} et Q_{x_c} , il existe une unique arête qui les sépare.

Sans perte de généralité, supposons d'abord que l'un des sommets broadcast, disons x_c , est un sommet de coût $g(x_c) = 1$ et x_c est son unique g -voisin privé, tel que $Q_{x_c} = x_c x_{c+1}$. Dans ce cas, x_{c-1} n'est ni un g -sommet broadcast ni un g -voisin privé frontière, ce qui implique, en utilisant l'Observation (c) précédemment citée, que $x_b = x_{c-2}$, $g(x_b) = 1$ et x_b est son unique voisin privé frontière. En utilisant le même argument, on obtient $x_a = x_{b-2}$, $g(x_a) = 1$, x_a est son propre g -voisin privé frontière, et $x_c = x_{a-2}$, ce qui implique que $n = 6$, une contradiction avec la supposition que $n \geq 7$.

Ainsi, chaque extrémité de chacune des chaînes Q_{x_a} , Q_{x_b} et Q_{x_c} est soit un g -sommet broadcast soit un g -voisin privé frontière du g -sommet broadcast sur la chaîne considérée. Mais comme on a trois chaînes, successives et séparées entre elles par une seule arête, alors forcément l'un des g -sommets broadcast x_a , x_b ou x_c est adjacent à un g -voisin privé frontière d'un autre g -sommet broadcast, une contradiction avec la minimalité de g .

Ainsi, dans le cas où $n \geq 7$ et n est impair, il est impossible d'avoir $t = 3$ et $\sigma(g) = n - 3$. D'où, si $t = 3$ alors $\sigma(g) < n - 3$, une contradiction avec l'équation (3.2). Ainsi, $t = 2$. \square

Du Fait A, nous pouvons supposer que $V_g^+ = \{x_a, x_b\}$, qui implique que $|PB_g(x_a)| = |PB_g(x_b)|$, et comme g est un Γ_b -broadcast, alors $1 \leq |PB_g(x_a)| \leq 2$ et $1 \leq |PB_g(x_b)| \leq 2$.

Si $|PB_g(x_a)| = |PB_g(x_b)| = 2$, alors $n = 2g(x_a) + 1 + 2g(x_b) + 1 = 2(g(x_a) + g(x_b) + 1)$, une contradiction car n est impair. Nous avons donc $|PB_g(x_a)| = |PB_g(x_b)| = 1$, et les g -voisins privés frontières x_a^p de x_a , et x_b^p de x_b sont adjacents.

De plus, sans perte de généralité, si nous supposons que $x_a x_{a+1} \dots x_b$ est une chaîne (x_a, x_b) -géodésique, alors $d_{C_n}(x_a, x_b) = b - a \leq 2$ car sinon la fonction h obtenue à partir de g en posant $h(x_a) = 0$, $h(x_b) = 0$, $h(x_{a+1}) = g(x_a) + 1$ et $h(x_{b-1}) = g(x_b) + 1$, sera un broadcast dominant minimal de coût $\Gamma_b(h) = \Gamma_b(g) + 2$, ce qui contredit l'optimalité de g . Ainsi, nous avons $d_{C_n}(x_a, x_b) \leq 2$. Si x_a et x_b sont reliés par une arête, alors forcément $g(x_a) = g(x_b)$, et par conséquent n est pair, ce qui contredit notre supposition que n est impair.

Ainsi, nous avons $d_{C_n}(x_a, x_b) = 2$, et donc $g(x_a) = g(x_b) = \frac{n-3}{2}$, qui implique que $\sigma(g) = n - 3$. \square

Nous considérons maintenant l'étude du nombre de non-redondance broadcast sur les cycles. Nous commençons d'abord par montrer que sur un IR_b -broadcast, il n'existe pas une paire de deux sommets consécutifs non dominés.

Lemme 3.3. *Soit f un IR_b -broadcast sur C_n . S'il existe un sommet x_i tel que $H_f(x_i) = \emptyset$, alors $H_f(x_{i-1}) \neq \emptyset$ et $H_f(x_{i+1}) \neq \emptyset$.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde, et sans perte de généralité, supposons que $H_f(x_{i-1}) = \emptyset$, donc le sommet x_{i-1} n'est pas f -dominé, ce qui implique en particulier que $f(x_{i-2}) = 0$. Par conséquent, il existe un f -sommet broadcast x_j , $j < i - 2$, qui f -domine x_{i-2} , car sinon nous pourrions poser $f(x_{i-1}) = 1$, ce qui contredit l'optimalité de f . Ainsi, nous avons forcément $d_{C_n}(x_j, x_{i-2}) = f(x_j)$. Mais, dans ce cas, la fonction g obtenue à partir de f en posant $g(x_j) = 0$ and $g(x_{j+1}) = f(x_j) + 1$ serait un broadcast non-redondant sur C_n de coût $\sigma(g) = \sigma(f) + 1 > \sigma(f)$, ce qui contredit l'optimalité de f . Il s'ensuit donc, $H_f(x_{i-1}) \neq \emptyset$ et par symétrie, $H_f(x_{i+1}) \neq \emptyset$. \square

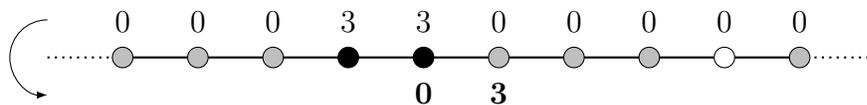


FIGURE 3.2 – Un broadcast non-redondant illustratif du Théorème 3.4.

En utilisant le Lemme 3.3, nous prouvons maintenant l'égalité entre le nombre de non-redondance broadcast supérieur et le nombre de domination broadcast supérieur sur les cycles.

Théorème 3.4. *Pour tout entier $n \geq 3$, $IR_b(C_n) = \Gamma_b(C_n)$.*

Preuve. D'après le Corollaire 2.36, on a $IR_b(C_n) \geq \Gamma_b(C_n)$. Ainsi, pour montrer l'égalité, il nous suffit de montrer : $IR_b(C_n) \leq \Gamma_b(C_n)$. Pour ce faire, il suffit de construire de tout IR_b -broadcast non dominant sur C_n un broadcast non-redondant dominant (qui sera donc un broadcast dominant minimal, voir Corollaire 2.37) de coût $IR_b(C_n)$.

Soit f un IR_b -broadcast non dominant sur C_n . Donc, il existe $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $H_f(x_i) = \emptyset$. Du Lemme 3.3, on a $H_f(x_{i-1}) \neq \emptyset$ et $H_f(x_{i+1}) \neq \emptyset$.

Comme x_i n'est pas f -dominé, on sait que x_{i-1} est f -dominé par un unique f -sommet broadcast, noté x_j , $j < i-1$, tel que $f(x_j) = d_{C_n}(x_j, x_{i-1})$, ce qui implique $|PB_f(x_j)| \geq 1$. Nous affirmons que $|PB_f(x_j)| = 1$. En effet, si $|PB_f(x_j)| = 2$, alors nous pourrions poser $f(x_{j+1}) = f(x_j)$, ce qui contredit l'optimalité de f .

Soit g la fonction obtenue à partir de f en posant $g(x_j) = 0$ et $g(x_{j+1}) = f(x_j)$. La fonction g est un broadcast non-redondant de coût $\sigma(g) = \sigma(f)$, tel que x_i est g -dominé, et tous les sommets qui étaient f -dominés restent g -dominés (voir Figure 3.2).

En répétant la même transformation pour chaque sommet non dominé, nous pourrions construire un broadcast dominant minimal sur C_n de coût $IR_b(C_n)$. Ainsi, $IR_b(C_n) \leq \Gamma_b(C_n)$. \square

3.3 Nombres d'indépendance broadcast et d'indépendance broadcast inférieur

Dunbar *et al.* [25] ont observé que le nombre de domination broadcast supérieur $\Gamma_b(G)$ et le nombre d'indépendance broadcast $\beta_b(G)$ d'un graphe G sont incomparables en général.

Sur les chaînes, Erwin [26] a montré que pour tout entier $n \geq 3$, $\beta_b(P_n) = 2(n-2)$, et donc, par le Théorème 3.1, on obtient $\beta_b(P_n) > \Gamma_b(P_n)$, pour tout entier $n \geq 3$. Sur les cycles, nous avons montré que $\Gamma_b(C_n) = 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\right)$ (Théorème 3.2), et nous prouverons dans le Théorème suivant que $\beta_b(C_n) = \Gamma_b(C_n)$, pour tout entier $n \geq 3$.

Théorème 3.5. *Pour tout entier $n \geq 3$, $\beta_b(C_n) = 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\right)$.*

Preuve. Il est facile de vérifier que $\beta_b(C_3) = 1$ et $\beta_b(C_4) = 2$. Supposons que $n \geq 5$. Par construction, la fonction f définie par

$$f(x_i) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 & \text{si } i \in \left\{0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est un broadcast indépendant sur C_n de coût $\sigma(f) = 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$, ce qui implique que

$$\beta_b(C_n) \geq 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\right).$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Soit g un β_b -broadcast sur C_n .

Si $|V_g^+| = 1$, c'est-à-dire $V_g^+ = \{x_i\}$, pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$, alors

$$\sigma(g) = g(x_i) = e_{C_n}(x_i) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right),$$

et, si $|V_g^+| = 2$, alors l'optimalité du coût de g impose que les deux g -sommets broadcast sont antipodaux, ce qui nous donne $\sigma(g) = 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$.

Supposons que $|V_g^+| \geq 3$. Notons par $V_g^+ = \{x_{i_0}, \dots, x_{i_{k-1}}\}$, $k \geq 3$, l'ensemble des g -sommets broadcast. Puisque g est un broadcast indépendant, alors $d_{C_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) \geq g(x_{i_j}) + 1$ pour tout j , $0 \leq j \leq k-1$ (les indices de i sont pris modulo k). Ainsi, nous obtenons

$$\beta_b(C_n) = \sigma(g) = \sum_{x_{i_j} \in V_g^+} g(x_{i_j}) \leq \sum_{x_{i_j} \in V_g^+} (d_{C_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) - 1) = n - |V_g^+| \leq n - 3 \leq 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right).$$

□

Avant de déterminer la valeur du nombre d'indépendance broadcast inférieur sur les chaînes et les cycles, établissons quelques propriétés de cet invariant pour la classe des chaînes.

Lemme 3.6. *Si f est un i_b -broadcast sur P_n , $n \geq 3$, avec $V_f^+ = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$, $i_1 < \dots < i_t$, $t \geq 2$, alors :*

1. $f(x_{i_1}) \geq f(x_{i_2})$ et $f(x_{i_t}) \geq f(x_{i_{t-1}})$,
2. $d_{P_n}(x_1, x_{i_1}) \leq f(x_{i_1})$ et $d_{P_n}(x_{i_t}, x_n) \leq f(x_{i_t})$,
3. Pour tout j , $1 \leq j \leq t-1$, $\max\{f(x_{i_j}), f(x_{i_{j+1}})\} + 1 \leq d_{P_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) \leq f(x_{i_j}) + f(x_{i_{j+1}}) + 1$,
4. $d_{P_n}(x_{i_1}, x_{i_2}) = f(x_{i_1}) + 1$ et $d_{P_n}(x_{i_{t-1}}, x_{i_t}) = f(x_{i_t}) + 1$.

Preuve. Si le premier point n'est pas satisfait, alors on pourra incrémenter la valeur de $f(x_1)$ ou $f(x_n)$ par 1, ce qui contredit la maximalité du broadcast f .

Si le deuxième point n'est pas satisfait, alors on pourra poser $f(x_1) = 1$, ou $f(x_n) = 1$, ce qui contredit la maximalité du broadcast f .

Pour le troisième point, l'inégalité $\max\{f(x_{i_j}), f(x_{i_{j+1}})\} + 1 \leq d_{P_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}})$ est une conséquence directe de la définition d'un broadcast indépendant.

Finalement, si $d_{P_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) > f(x_{i_j}) + f(x_{i_{j+1}}) + 1$, alors on peut poser $f(x_{i_j+f(x_{i_j})+1}) = 1$, ce qui contredit la maximalité du broadcast f .

Considérons maintenant le quatrième point. D'après les points 1 et 3, nous avons : $f(x_{i_1}) + 1 \leq d_{P_n}(x_{i_1}, x_{i_2})$ et $f(x_{i_t}) + 1 \leq d_{P_n}(x_{i_{t-1}}, x_{i_t})$. Si l'une des inégalités est stricte, alors on peut incrémenter la f -valeur du f -sommet broadcast concerné par 1, ce qui contredit la maximalité du broadcast f . \square

Dans la suite, par commodité, nous utiliserons souvent pour définir une fonction f sur la chaîne P_n (resp. sur le cycle C_n) le mot $f(x_1) \dots f(x_n)$ (resp. $f(x_0) \dots f(x_{n-1})$), utilisant une notation standard de la Théorie des Langages. En particulier, rappelons que lorsqu'on écrit $(a_1 \dots a_k)^q$ pour un certain entier $q \geq 0$, on désigne que la séquence $a_1 \dots a_k$ est répétée q fois (en particulier, si $q = 0$, alors $(a_1 \dots a_k)^q$ est le mot vide ε).

Le nombre d'indépendance broadcast inférieur est donné par le Théorème suivant.

Théorème 3.7. *Pour tout entier $n \geq 2$, $i_b(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$.*

Preuve. Soit $n = 5q + r$, où $q \geq 0$, $0 \leq r \leq 4$ et $5q + r \geq 2$. Il est facile de vérifier que les fonctions 10, 010 et 0101 sont des i_b -broadcasts sur P_n , de coût $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$, quand $n = 2, 3$ et 4, respectivement.

Supposons que $n \geq 5$.

Selon la valeur du reste r , $0 \leq r \leq 4$, définissons les broadcasts f_r sur P_n comme suit :

$$f_0(P_n) = (01010)^q, \quad f_1(P_n) = (01010)^q 1, \quad f_2(P_n) = (01010)^q 10, \\ f_3(P_n) = (01010)^q 101, \quad \text{et} \quad f_4(P_n) = (01010)^q 0101.$$

Il est facile de vérifier pour tout $0 \leq r \leq 4$, la fonction f_r est un broadcast indépendant maximal sur C_{5q+r} , si $q \geq 1$, et son coût est $\sigma(f_r) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$, donc

$$i_b(P_n) \leq \lceil \frac{2n}{5} \rceil \quad (3.3)$$

Examinons maintenant l'inégalité dans l'autre sens.

Soit f un i_b -broadcast sur P_n . Si $|V_f^+| = 1$, alors $i_b(P_n) = \text{rad}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, qui implique $n \in S = \{1, \dots, 9, 11, 13\}$, car sinon nous aurions $i_b(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor > \lceil \frac{2n}{5} \rceil$, ce qui contredirait l'inégalité (3.3).

Nous observons aussi que pour tout $n \in S$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$ est vraie, donc $i_b(P_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Ainsi, il nous reste à traiter le cas où $n \notin S$, qui implique $|V_f^+| \geq 2$. Notons $V_f^+ = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$, $i_1 < \dots < i_t$, avec $t \geq 2$. Les deux faits suivants prouvent qu'on pourra toujours choisir f tel que $f(x_{i_j}) = 1$ pour tout f -sommet broadcast $x_{i_j} \in V_f^+$.

Fait B. *Il existe un i_b -broadcast g sur P_n tel que $g(x_{i_1}) = g(x_{i_2}) = g(x_{i_{t-1}}) = g(x_{i_t}) = 1$.*

Preuve. Nous démontrons d'abord qu'il existe un i_b -broadcast g_0 sur P_n tel que $g_0(x_{i_1}) = g_0(x_{i_2}) = 1$.

Si $f(x_{i_1}) = f(x_{i_2}) = 1$, alors nous posons $g_0 := f$ et nous avons terminé.

Donc, supposons qu'on a $f(x_{i_1}) + f(x_{i_2}) \geq 3$.

Si $|V_f^+| = 2$, alors, d'après le Lemme 3.6(4), $d_{P_n}(x_{i_1}, x_{i_2}) = f(x_{i_1}) + 1 = f(x_{i_2}) + 1$.

Par ailleurs, en utilisant les Lemmes 3.6(2) et (3), nous obtenons

$$n = d_{P_n}(x_1, x_{i_1}) + d_{P_n}(x_{i_1}, x_{i_2}) + d_{P_n}(x_{i_2}, x_n) + 1 \leq 3f(x_{i_1}) + 2,$$

et ainsi, $\sigma(f) = 2f(x_{i_1}) \geq \frac{2(n-2)}{3}$. Rappelons que le broadcast indépendant maximal f_r , où $r = n \pmod{5}$, défini ci-dessus vérifie $\sigma(f_r) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$. Puisque $n \geq 10$, ceci contredit l'optimalité de f . Ainsi, le nombre de f -sommet broadcast $|V_f^+| \geq 3$.

Nous considérons deux cas, selon la parité de $d_{P_n}(x_{i_2}, x_{i_3})$.

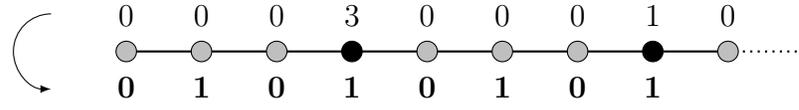
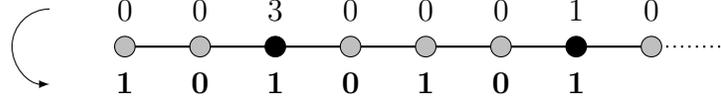
(a) i_2 est pair (8 dans cet exemple)(b) i_2 est impair (7 dans cet exemple)

FIGURE 3.3 – Un broadcast indépendant maximal illustratif de la preuve du Fait B, Cas 1.

1. $f(x_{i_3}) + 1 \leq d_{P_n}(x_{i_2}, x_{i_3}) \leq f(x_{i_3}) + 2$.

Soit g la fonction obtenue de f en remplaçant les f -valeurs

$0^{i_1-1}f(x_{i_1})0^{i_2-i_1-1}f(x_{i_2})$ de $x_1 \dots x_{i_1} \dots x_{i_2}$ par $(01)^{\frac{i_2}{2}}$ si i_2 est pair, ou par $1(01)^{\frac{i_2-1}{2}}$ si i_2 est impair (voir Figure 3.3). Dans les deux cas, nous obtenons $g(x_{i_2}) = 1$, ce qui implique que g broadcast indépendant maximal sur P_n . Ainsi, nous avons

$$\sigma(g) - \sigma(f) = \left\lceil \frac{i_2}{2} \right\rceil - f(x_{i_1}) - f(x_{i_2}).$$

Du Lemme 3.6(2) et (4), nous avons

$$i_2 = d_{P_n}(x_1, x_{i_1}) + d_{P_n}(x_{i_1}, x_{i_2}) + 1 \leq 2f(x_{i_1}) + 2,$$

et par conséquent

$$\sigma(g) - \sigma(f) \leq f(x_{i_1}) + 1 - f(x_{i_1}) - f(x_{i_2}) = 1 - f(x_{i_2}).$$

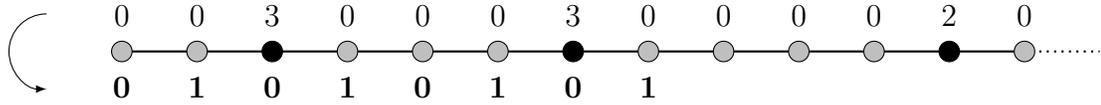
L'optimalité de f implique $f(x_{i_2}) = 1$, tel que $\sigma(g) = \sigma(f)$ et nous poserons $g_0 := g$.

2. $d_{P_n}(x_{i_2}, x_{i_3}) \geq f(x_{i_3}) + 3$.

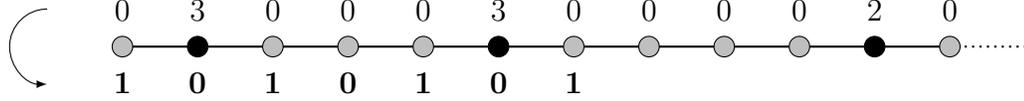
Soit g le broadcast obtenu de f en remplaçant les f -valeurs

$$0^{i_1-1}f(x_{i_1})0^{i_2-i_1-1}f(x_{i_2})0^{i_3-i_2-f(x_{i_3})-2}$$

de $x_1 \dots x_{i_1} \dots x_{i_2} \dots x_{i_3-f(x_{i_3})-2}$ par $(01)^{\frac{i_3-f(x_{i_3})-2}{2}}$ si $i_3 - f(x_{i_3}) - 2$ est pair, ou par $1(01)^{\frac{i_3-f(x_{i_3})-3}{2}}$ si $i_3 - f(x_{i_3}) - 2$ est impair (voir Figure 3.4).



(a) $i_3 - f(x_{i_3}) - 2$ est pair ($12 - 2 - 2 = 8$ dans cet exemple)



(b) $i_3 - f(x_{i_3}) - 2$ est impair ($11 - 2 - 2 = 7$ dans cet exemple)

FIGURE 3.4 – Un broadcast indépendant maximal illustratif de la preuve du Fait B, Cas 2.

Dans les deux cas, tous les sommets sont g -dominés et g est évidemment un broadcast indépendant maximal sur P_n .

Ainsi, nous avons

$$\sigma(g) - \sigma(f) = \left\lceil \frac{i_3 - f(x_{i_3}) - 2}{2} \right\rceil - f(x_{i_1}) - f(x_{i_2}).$$

Par le Lemme 3.6(2) et (4), nous obtenons

$$i_2 = d_{P_n}(x_1, x_{i_1}) + d_{P_n}(x_{i_1}, x_{i_2}) + 1 \leq 2f(x_{i_1}) + 2,$$

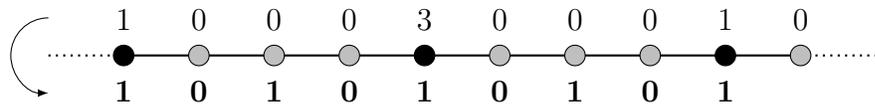
et ainsi, $i_3 - f(x_{i_3}) - 2 \leq 2f(x_{i_1}) + f(x_{i_2}) + 1$. Nous obtenons alors

$$\sigma(g) - \sigma(f) \leq f(x_{i_1}) + \left\lceil \frac{f(x_{i_2}) + 1}{2} \right\rceil - f(x_{i_1}) - f(x_{i_2}) = \left\lceil \frac{1 - f(x_{i_2})}{2} \right\rceil.$$

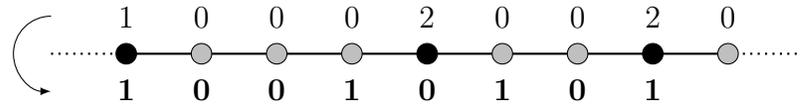
L'optimalité de f entraîne alors $f(x_{i_2}) \leq 2$, et par conséquent $\sigma(g) = \sigma(f)$ et nous posons $g_0 := g$.

Nous remarquons que dans les deux cas précédents, nous avons $g_0(x_{i_j}) = f(x_{i_j})$ pour tout j , $3 \leq j \leq t$. De plus, en utilisant la symétrie et en commençant la modification sur g_0 au lieu de f , nous pouvons construire de façon similaire un i_b -broadcast g sur P_n avec $g(x_{i_1}) = g(x_{i_2}) = g(x_{i_{t-1}}) = g(x_{i_t}) = 1$. □

Fait C. *Il existe un i_b -broadcast g sur P_n tel que $g(x_i) = 1$ pour tout g -sommets broadcast $x_i \in V_g^+$.*



(a) $d = d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_{j+1}})$ est pair (8 dans cet exemple)



(b) $d = d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_{j+1}})$ est impair (7 dans cet exemple)

FIGURE 3.5 – Un broadcast indépendant maximal illustratif de la preuve du Fait C, Cas 1.

Preuve. Du Fait B, nous pouvons supposer que

$$f(x_{i_1}) = f(x_{i_2}) = f(x_{i_{t-1}}) = f(x_{i_t}) = 1.$$

Si $f(x_i) = 1$ pour tout sommet $x_i \in V_f^+$, on n'a rien à prouver. Supposons que ce n'est pas le cas, ce qui implique que $t \geq 5$, et soit x_{i_j} , $3 \leq j \leq t - 2$, le f -sommet broadcast le plus à gauche qui vérifie $f(x_{i_j}) \geq 2$.

Nous allons prouver qu'on peut toujours construire un i_b -broadcast f' sur P_n tel que le nombre de f' -sommets broadcast dont le poids est au plus deux est strictement inférieur au nombre des f -sommets broadcast dont le poids est au plus deux.

Selon la valeur de $d_{P_n}(x_{i_{j+1}}, x_{i_{j+2}})$, nous considérons deux cas possibles :

1. $f(x_{i_{j+2}}) + 1 \leq d_{P_n}(x_{i_{j+1}}, x_{i_{j+2}}) \leq f(x_{i_{j+2}}) + 2$.

Soit $d = i_{j+1} - i_{j-1} = d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_{j+1}}) = d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_j}) + d_{P_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}})$, et f' la fonction de pondération obtenue de f en remplaçant les f -valeurs

$$f(x_{i_{j-1}})0^{i_j - i_{j-1} - 1} f(x_{i_j})0^{i_{j+1} - i_j - 1} f(x_{i_{j+1}})$$

de $x_{i_{j-1}} \dots x_{i_j} \dots x_{i_{j+1}}$ par $1(01)^{\frac{d}{2}}$ si d est pair, ou par $10(01)^{\frac{d-1}{2}}$ si d est impair (voir Figure 3.5).

Quelle que soit la parité de d , $f'(x_{i_{j-1}}) = 1$ et $f'(x_{i_{j+1}}) = 1$, ce qui entraîne que f' est un broadcast indépendant maximal sur P_n . De plus, dans les deux cas, nous obtenons

$$\sigma(f') - \sigma(f) = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - f(x_{i_j}) - f(x_{i_{j+1}}).$$

En utilisant le fait que $f(x_{i_{j-1}}) = 1 < f(x_{i_j})$, et d'après le Lemme 3.6(3), nous obtenons

$$f(x_{i_j}) + 1 \leq d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_j}) \leq f(x_{i_j}) + 2.$$

Nous considérons deux sous-cas selon la valeur de $d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_j})$.

(a) $d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_j}) = f(x_{i_j}) + 1.$

Du Lemme 3.6(3), on a

$$\begin{aligned} d &= d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_j}) + d_{P_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) \\ &\leq f(x_{i_j}) + 1 + f(x_{i_j}) + f(x_{i_{j+1}}) + 1 = 2f(x_{i_j}) + f(x_{i_{j+1}}) + 2, \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \sigma(f') - \sigma(f) &\leq f(x_{i_j}) + \left\lfloor \frac{f(x_{i_{j+1}})}{2} \right\rfloor + 1 - f(x_{i_j}) - f(x_{i_{j+1}}) = \left\lfloor \frac{2 - f(x_{i_{j+1}})}{2} \right\rfloor \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

L'optimalité de f garantit l'optimalité de f' , et le nombre de f' -sommets broadcast dont le poids est au plus deux est strictement inférieur au nombre de f -sommets broadcast dont le poids est au plus deux.

(b) $d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_j}) = f(x_{i_j}) + 2.$

Comme f est maximal, nous avons nécessairement

$$d_{P_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) = f(x_{i_j}) + 1$$

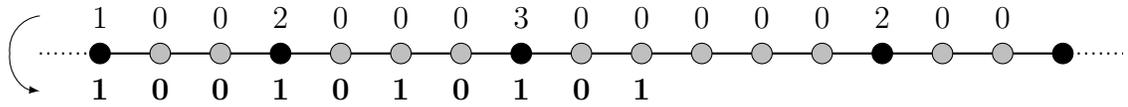
car sinon on pourrait incrémenter la valeur $f(x_{i_j})$ par 1 et par conséquent,

$$d = d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_j}) + d_{P_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) = 2f(x_{i_j}) + 3,$$

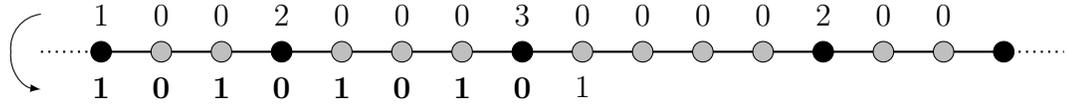
donc,

$$\begin{aligned} \sigma(f') - \sigma(f) &= f(x_{i_j}) + 1 - f(x_{i_j}) - f(x_{i_{j+1}}) \\ &= 1 - f(x_{i_{j+1}}) \leq 0. \end{aligned}$$

L'optimalité de f garantit une fois de plus l'optimalité de f' , et le nombre de f' -sommets broadcast dont le poids est au plus deux est strictement inférieur au nombre de f -sommets broadcast dont le poids est au plus deux.



(a) $d' = i_{j+2} - i_{j-1} - f(x_{i_{j+2}}) - 3$ est pair ($13 - 2 - 3 = 8$ dans cet exemple)



(b) $d' = i_{j+2} - i_{j-1} - f(x_{i_{j+2}}) - 3$ est impair ($12 - 2 - 3 = 7$ dans cet exemple)

FIGURE 3.6 – Un broadcast indépendant maximal illustratif de la preuve du Fait C, Cas 2.

2. $d_{P_n}(x_{i_{j+1}}, x_{i_{j+2}}) \geq f(x_{i_{j+2}}) + 3$.

Posons

$$\begin{aligned} d' &= d_{P_n}(x_{i_{j+2}-f(x_{i_{j+2}})-2}, x_{i_{j-1}+1}) = i_{j+2} - f(x_{i_{j+2}}) - 2 - i_{j-1} - 1 \\ &= i_{j+2} - i_{j-1} - f(x_{i_{j+2}}) - 3, \end{aligned}$$

et soit f' l'application obtenue à partir de f en remplaçant les f -valeurs

$$f(x_{i_{j-1}})0^{i_j-i_{j-1}-1}f(x_{i_j})0^{i_{j+1}-i_j-1}f(x_{i_{j+1}})0^{i_{j+2}-f(x_{i_{j+2}})-2-i_{j+1}}$$

de $x_{i_{j-1}} \dots x_{i_j} \dots x_{i_{j+1}} \dots x_{i_{j+2}-f(x_{i_{j+2}})-2}$ par $10(01)^{\frac{d'}{2}}$ si d' est pair, ou par $1(01)^{\frac{d'+1}{2}}$ si d' est impair (voir Figure 3.6).

Comme $i_{j+2} - i_{j+1} \leq f(x_{i_{j+1}}) + f(x_{i_{j+2}}) + 1$ et $i_{j+1} - i_{j-1} \leq 2f(x_{i_j}) + f(x_{i_{j+1}}) + 2$, alors

$$i_{j+2} - i_{j-1} \leq 2f(x_{i_j}) + 2f(x_{i_{j+1}}) + f(x_{i_{j+2}}) + 3.$$

Par conséquent, $d' \leq 2f(x_{i_j}) + 2f(x_{i_{j+1}})$. Ainsi, l'application f' est un broadcast indépendant maximal sur P_n et :

$$\begin{aligned} \sigma(f') - \sigma(f) &= \left\lceil \frac{d'}{2} \right\rceil - f(x_{i_j}) - f(x_{i_{j+1}}) \\ &\leq \left\lceil \frac{2f(x_{i_j}) + 2f(x_{i_{j+1}})}{2} \right\rceil - f(x_{i_j}) - f(x_{i_{j+1}}) = 0. \end{aligned}$$

L'optimalité de f garantit l'optimalité de f' , et le nombre de f' -sommets broadcast dont le poids est au plus deux est strictement inférieur au nombre de f -sommets broadcast dont le poids est au plus deux.

Dans chaque cas, nous avons pu construire un i_b -broadcast f' dont le nombre des f' -sommets broadcast dont le poids est au plus deux est strictement inférieur au nombre de f -sommets broadcast dont le poids est au plus deux.

On répète cette construction jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sommet broadcast de coût deux, et nous obtenons finalement un i_b -broadcast g qui satisfait $g(x_{i_j}) = 1$ pour tout g -sommet broadcast x_{i_j} . Ceci complète la preuve du Fait C. \square

Du Fait C, nous pouvons maintenant supposer qu'il existe i_b -broadcast f où $f(x_{i_j}) = 1$ pour tout f -sommet broadcast x_{i_j} . Il nous reste à prouver que pour tout $n \geq 5$, $\sigma(f) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Afin de prouver ceci, nous démontrons d'abord le Fait suivant. Notons par w_f le mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ défini par $w_f = f(x_1) \dots f(x_n)$.

Fait D. *Il existe i_b -broadcast f sur P_n , $n \geq 5$, où $f(x_{i_j}) = 1$ pour tout f -sommet broadcast x_{i_j} , qui satisfait les propriétés suivantes :*

- (1) w_f ne contient pas le facteur 000,
- (2) w_f ne contient pas le facteur 1001001,
- (3) 0101 est un préfixe de w_f , et
- (4) soit 101 soit 1010 est un suffixe de w_f .

Preuve. 1. Si $f(x_{i-1})f(x_i)f(x_{i+1}) = 000$, alors on peut poser $f(x_i) = 1$, ce qui contredit la maximalité du broadcast f , et ainsi le point (1) est vérifié.

2. Similairement au cas précédent, si $f(x_{i-3}) \dots f(x_i) \dots f(x_{i+3}) = 1001001$, alors on peut poser $f(x_i) = 2$, ce qui contredit aussi la maximalité de f , et ainsi le point (2) est vérifié.

3. Maintenant, nous remarquons que le cas où $f(x_1)f(x_2) = 00$, ne peut pas exister car sinon nous pourrions poser $f(x_1) = 1$, ni le cas où $f(x_1) \dots f(x_4) = 0100$, car sinon nous pourrions poser $f(x_2) = 2$, ni aussi $f(x_1) \dots f(x_4) = 1001$, car sinon nous pourrions poser $f(x_1) = 2$, ce qui contredirait dans chaque cas la maximalité de f . Par conséquent, soit 0101 soit 1010 est un préfixe de w_f .

Dans le premier cas, nous avons terminé la preuve, donc supposons maintenant que 1010 est un préfixe de w_f . Supposons que w_f contient le facteur 100 et considérons sa première occurrence, donc supposons que $(10)^k 100$ est un préfixe de w_f pour un certain $k \geq 1$. Dans ce cas, nous pouvons remplacer les f -valeurs $(10)^k 100$ de $x_1 \dots x_{2k+3}$ par $0(10)^k 10$ et ainsi, nous avons fini. Si w_f ne contient pas le facteur 100, donc forcément, nous avons soit $w_f = (10)^{\frac{n}{2}}$ ou $w_f = (10)^{\frac{n-1}{2}} 1$, ce qui donne $\sigma(f) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil > \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$, une contradiction avec l'optimalité de f . Ceci est la preuve du point (3).

4. Par symétrie du point (3), et en utilisant le même argument cité dans le point précédent, nous obtenons le fait qu'aucun de 00, 0010, ou 1001 ne peut être un suffixe de w_f . Ainsi, soit 1010 soit 0101 est un suffixe de w_f , ce qui démontre le point (4).

□

Par le point (3) du Fait D, on note w'_f le mot défini par $w_f = 0101w'_f$.

Nous allons maintenant décomposer w'_f en facteurs (ou blocs) w_1, \dots, w_q , $q \geq 0$ (en particulier, $q = 0$ signifie qu'un tel bloc n'existe pas), dont la longueur de chaque bloc $w_j, j \in \{1, \dots, q\}$ est 2 ou 5, défini comme suit.

- Si 01 est un préfixe de w'_f , alors $w_1 = 01$.
- Si 00101 est un préfixe de w'_f , alors $w_1 = 00101$.
- Si $w'_f = w_1 \dots w_{k-1} w''$ et 01 est un préfixe de w'' , alors $w_k = 01$.
- Si $w'_f = w_1 \dots w_{k-1} w''$ et 00101 est un préfixe de w'' , alors $w_k = 00101$.

Nous avons ainsi, soit $w_f = 0101w''$ et $q = 0$, soit $w_f = 0101w_1 \dots w_q w''$, pour un certain $q \geq 1$, avec w'' est soit vide ou bien 0 (nous observons que w'' ne peut pas commencer par un 1, et rappelons que 00 ne peut pas être un suffixe de w_f), et, si $q > 0$, alors $w_i \in \{01, 00101\}$ pour tout i , $1 \leq i \leq q$.

Nous remarquons que si $w_i = 01$ et $w_{i+1} = 00101$ pour un certain i , $1 \leq i \leq q - 1$, alors l'application g définie par $w_g = 0101w_1 \dots w_{i-1}.00101.01.w_{i+2} \dots w''$ restera un i_b -broadcast sur P_n . Ainsi, on peut choisir f de sorte qu'il existe un entier $q_0 \leq q$ tel que $w_i = 00101$ si et seulement si $i \leq q_0$.

Notons que f peut être choisi de telle manière que nous avons au plus deux blocs de "01" ie. $q - q_0 \leq 2$. En effet, si nous ajoutons au moins trois blocs, alors soit 1010101 or 10101010

est un suffixe de w_f . Dans le premier cas, 1010101 peut être remplacé par 1001010, ce qui contredirait l'optimalité f . Dans l'autre cas, nous devons remplacer 10101010 par 10010101, tel que $q - q_0 = 2$.

Finalement, nous obtenons que la structure de w_f (rappelons que $n \geq 5$) est soit

$$01010, 010101, 0101010, 01010101, \text{ ou } 0101w_1 \dots w_{q_0}w',$$

avec $q_0 \geq 1$, $w_i = 00101$ pour tout entier i , $1 \leq i \leq q_0$, et $w' \in \{\varepsilon, 0, 01, 010, 0101, 01010\}$. Il est facile de vérifier que pour chaque cas, on a $\sigma(f) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$, ce qui donne $i_b(P_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$ pour tout entier $n \geq 3$. Ceci complète la preuve. \square

En utilisant le Théorème 3.7, nous pouvons démontrer un résultat similaire sur le nombre d'indépendance broadcast inférieur sur les cycles.

Théorème 3.8. *Pour tout entier $n \geq 3$, $i_b(C_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.*

Preuve. Nous observons d'abord que 010 et 0101 sont des i_b -broadcasts sur C_n de coût $\lceil \frac{2n}{5} \rceil$, quand $n = 3, 4$, respectivement, et que les cinq fonctions f_0, \dots, f_4 , définies dans la démonstration du 3.7, sont aussi des i_b -broadcasts sur C_n , $n \geq 5$, de coût $\lceil \frac{2n}{5} \rceil$. Nous avons ainsi, $i_b(C_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$ si $n = 3, 4$, et $i_b(C_n) \leq \lceil \frac{2n}{5} \rceil$ pour tout entier $n \geq 5$.

Nous démontrons maintenant l'inégalité dans l'autre sens, quand $n \geq 5$. Soit f un i_b -broadcast sur C_n , $n \geq 5$.

En supposant que $|V_f^+| = 1$, nous obtenons $i_b(C_n) = \text{diam}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Comme vu dans la preuve du Théorème 3.7, et en tenant compte de l'inégalité précédemment établie, ce cas de figure peut apparaître si et seulement si $n \in S = \{1, \dots, 9, 11, 13\}$.

Supposons que $n \notin S$, donc $|V_f^+| \geq 2$ et, en particulier, $n \geq 10$. Nous affirmons maintenant que le nombre de f -sommets broadcast $|V_f^+| \geq 3$. En effet, supposons le contraire, donc $|V_f^+| = 2$, et soit $V_f^+ = \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$. Nous notons par $Q_1 = x_{i_1}x_{i_1+1} \dots x_{i_2}$, et $Q_2 = x_{i_2}x_{i_2+1} \dots x_{i_1}$ les deux chaînes joignant x_{i_1} et x_{i_2} . Comme f est maximal, alors sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $|Q_1| = d_{C_n}(x_{i_1}, x_{i_2}) = f(x_{i_1}) + 1 = f(x_{i_2}) + 1$, ce qui conduit $f(x_{i_1}) = f(x_{i_2})$.

Puisque le point 3 du Lemme 3.6 est aussi valable pour les cycles, nous avons $|Q_2| \leq f(x_{i_1}) +$

$f(x_{i_2}) + 1 = 2f(x_{i_1}) + 1$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} n &= |Q_1| + |Q_2| \\ &\leq f(x_{i_1}) + 1 + 2f(x_{i_1}) + 1 = 3f(x_{i_1}) + 2. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi $f(x_{i_1}) \geq \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$, et donc $i_b(C_n) = 2f(x_{i_1}) \geq 2 \cdot \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$, en contradiction avec l'inégalité établie précédemment car $2 \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil > \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil, \forall n \geq 10$.

Nous pouvons maintenant supposer que $|V_f^+| \geq 3$, et soit $V_f^+ = \{x_{i_0}, \dots, x_{i_{t-1}}\}$, $t \geq 3$.

Nous affirmons d'abord qu'il existe un entier j , $0 \leq j \leq t-1$, tel que $d_{C_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) = f(x_{i_j}) + f(x_{i_{j+1}}) + 1$ (les indices sont pris modulo t). En effet, si cette égalité n'est pas vérifiée, nous obtenons

$$n = \sum_{0 \leq j \leq t-1} d_{C_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) \leq 2 \sum_{0 \leq j \leq t-1} f(x_{i_j}) = 2i_b(C_n),$$

ce qui implique $i_b(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, en contradiction avec l'inégalité $i_b(C_n) \leq \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$ établie précédemment, comme $n \notin S$.

Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité, que $d_{C_n}(x_{i_1}, x_{i_2}) = f(x_{i_1}) + f(x_{i_2}) + 1$, qui implique que $d_{C_n}(x_{i_2}, x_{i_3}) = f(x_{i_2}) + 1$ (nous devons avoir $x_{i_3} = x_{i_0}$) et, similairement, que $d_{C_n}(x_{i_0}, x_{i_1}) = f(x_{i_1}) + 1$.

Pour éviter tout risque de confusion, notons $P_n = y_0 y_1 \dots y_{n-1}$, avec $y_{f(x_{i_2})} = x_{i_2}$, et soit g la fonction définie par $g(y_j) = f(x_{j-f(x_{i_2})+i_2})$ pour tout j , $0 \leq j \leq n-1$ (les indices sont pris modulo n). Nous observons que les deux sommets y_0 et y_{n-1} sont g -dominés, puisque tous les sommets se trouvant entre x_{i_1} et x_{i_2} sont f -dominés dans C_n . En plus, nous ne pouvons augmenter ni la g -valeur de $y_{f(x_{i_2})}$ (le g -sommet broadcast le plus à gauche dans P_n) car $d_{C_n}(x_{i_2}, x_{i_3}) = f(x_{i_2}) + 1$, ni la valeur de $y_{n-f(x_{i_1})-1}$ (le g -sommet broadcast le plus à droite dans P_n) car $d_{C_n}(x_{i_0}, x_{i_1}) = f(x_{i_1}) + 1$.

Comme f est un broadcast indépendant maximal sur C_n , alors g sera un broadcast indépendant maximal sur P_n , ce qui implique $i_b(P_n) \leq i_b(C_n)$, et donc $i_b(C_n) \geq \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$. \square

3.4 Nombres de non-redondance broadcast et de domination broadcast

Erwin a prouvé dans [27] que $\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil n/3 \rceil$. En connaissant la valeur de $\gamma_b(P_n)$, nous pouvons déduire la valeur de $\gamma_b(C_n)$. En effet, Brešar et Špacapan ont prouvé dans [19] que, pour tout graphe connexe G , il existe un arbre couvrant T de G tel que $\gamma_b(G) = \gamma_b(T)$. Comme tous les arbres couvrants d'un cycle C_n sont tous isomorphes à la chaîne P_n , nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 3.9. *Pour tout entier $n \geq 3$, $\gamma_b(C_n) = \gamma_b(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Nous considérons maintenant le nombre de non-redondance broadcast des chaînes. Nous commençons d'abord par prouver les deux lemmes suivants.

Lemme 3.10. *Soit f un broadcast non-redondant maximal sur P_n . S'il existe un sommet x_i tel que $H_f(x_i) = \emptyset$, alors $N_{P_n}(x_i) \cap N_f(V_f^+) \neq \emptyset$.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $N_{P_n}(x_i) \cap N_f(V_f^+) = \emptyset$. Dans ce cas, nous pourrions poser $f(x_i) = 1$, ce qui contredit la maximalité de f . \square

Lemme 3.11. *Pour tout entier $n \geq 3$, les affirmations suivantes sont vérifiées.*

1. *Si f est un broadcast non-redondant maximal sur P_n , alors $H_f(x_2) \neq \emptyset$ et $H_f(x_{n-1}) \neq \emptyset$.*
2. *Il existe un ir_b -broadcast f sur P_n qui satisfait $H_f(x_1) \neq \emptyset$ et $H_f(x_n) \neq \emptyset$.*

Preuve. Nous prouverons les deux affirmations séparément.

1. Si $H_f(x_2) = \emptyset$, alors x_2 n'est pas f -dominé, et par conséquent x_1 est aussi non f -dominé. Nous avons donc, $N_{P_n}(x_1) \cap N_f(V_f^+) = \emptyset$, ce qui contredit le Lemme 3.10. Le cas $H_f(x_{n-1}) = \emptyset$ est similaire au cas précédent.
2. Soit g un ir_b -broadcast sur P_n . Si $H_g(x_1) \neq \emptyset$ et $H_g(x_n) \neq \emptyset$, alors nous posons $f := g$ et nous avons terminé.

Supposons que $H_g(x_1) = \emptyset$. En utilisant le précédent point, nous affirons que x_2 est g -dominé par un sommet broadcast, noté, x_i , $i > 2$, tel que $f(x_i) = d_{P_n}(x_2, x_i)$. Ainsi, nous avons forcément $|PB_g(x_i)| = 1$ si $g(x_i) \geq 2$, et $x_i \notin PN_g(x_i)$ si $g(x_i) = 1$, car

sinon nous pourrions poser $g(x_1) = 1$, ce qui contredirait l'optimalité de g .

Maintenant, nous remarquons que la fonction h obtenue à partir de g en posant $h(x_i) = 0$ et $h(x_{i-1}) = g(x_i)$ est un broadcast non-redondant maximal sur P_n , de coût $\sigma(h) = \sigma(g) = ir_b(P_n)$, et qui satisfait $H_h(x_1) \neq \emptyset$.

Si $H_h(x_n) \neq \emptyset$, alors on pose $f := h$ et nous avons terminé. Sinon, en utilisant le même raisonnement (par symétrie), nous affirmons qu'on peut construire un ir_b -broadcast f sur P_n qui vérifie $H_f(x_1) \neq \emptyset$ et $H_f(x_n) \neq \emptyset$. Par ailleurs, si $H_g(x_1) = \emptyset$ et $H_g(x_n) = \emptyset$, alors $|V_g^+| \neq 2$ car sinon nous pourrions incrémenter la g -valeur de x_{i_1} et x_{i_2} par 1, ce qui contredirait la maximalité de g .

Par conséquent, si g satisfait $H_g(x_1) = \emptyset$ et $H_g(x_n) = \emptyset$, alors l'optimalité de g implique $|V_g^+| \geq 3$, de sorte que la modification de h n'affecte pas $h(x_i)$, et donc x_1 reste f -dominé.

□

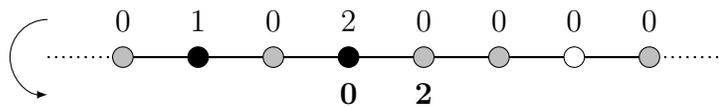
Nous allons maintenant déterminer la valeur du nombre de non-redondance broadcast et le nombre de domination broadcast des chaînes à l'aide des deux lemmes précédents.

Théorème 3.12. *Pour tout entier $n \geq 2$, $ir_b(P_n) = \gamma_b(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.*

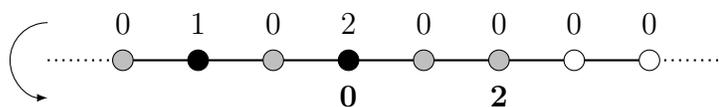
Preuve. D'après le Corollaire 2.36 et la Proposition 3.9, on a $\gamma_b(P_n) \geq ir_b(P_n)$. Donc, nous avons uniquement besoin de prouver que $\gamma_b(P_n) \leq ir_b(P_n)$. Pour ceci, il suffit de construire de tout ir_b -broadcast non dominant, un ir_b -broadcast dominant.

Soit f un ir_b -broadcast sur P_n . Du Lemme 3.11, nous pouvons affirmer que les sommets x_1, x_2, x_{n-1} et x_n sont f -dominés. Si f est un dominant, alors nous avons terminé. Donc, supposons que f n'est pas un dominant, et soit $x_i, 3 \leq i \leq n-2$, le sommet non dominé le plus à gauche. Nous allons prouver qu'il existe un broadcast non-redondant maximal g sur P_n , de coût $\sigma(g) = \sigma(f) = ir_b(P_n)$, tel que le nombre de sommets qui ne sont pas g -dominés est strictement inférieur au nombre de sommets qui ne sont pas f -dominés.

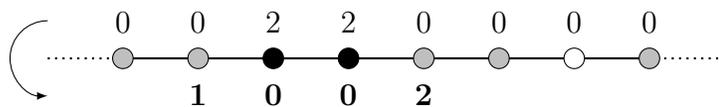
Soit $x_j, j \leq i-2$, le f -sommet broadcast qui domine x_{i-1} . Comme x_i est non f -dominé, alors on a forcément $x_{i-1} \in PB(x_j)$. Observons que $|PB(x_j)| = 1$, c'est-à-dire que le f -voisin privé frontière de x_j est x_{i-1} , car sinon, nous pourrions poser $f(x_{i-1}) = 1$, ce qui contredirait la maximalité de f .



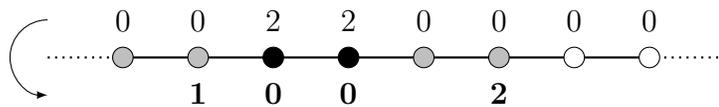
(a) $x_{j'} = x_{j'p+1}$ et x_{i+1} est f -dominé



(b) $x_{j'} = x_{j'p+1}$ et x_{i+1} n'est pas f -dominé



(c) $x_{j'} \neq x_{j'p+1}$ et x_{i+1} est f -dominé



(d) $x_{j'} \neq x_{j'p+1}$ et x_{i+1} n'est pas f -dominé

FIGURE 3.7 – Des broadcasts non-redondant maximaux illustratifs pour la preuve du Théorème 3.12.

Notons aussi que x_1 n'est pas f -dominé par x_j , donc x_j n'est pas le f -sommet broadcast le plus à gauche, car sinon nous pourrions incrémenter la f -valeur de x_j par 1, ce qui contredirait aussi la maximalité de f . Notons par $x_{j'}$, $j' < j$, le plus proche f -sommet broadcast à gauche de x_j , et par x_{j^p} , $j^p < j'$, le f -voisin privé frontière de $x_{j'}$.

Comme x_{j^p} est le f -voisin privé frontière de $x_{j'}$, alors nécessairement, $d_{P_n}(x_{j^p}, x_j) \geq f(x_j) + 1$. De plus, $d_{P_n}(x_{j^p}, x_j) = f(x_j) + 1$, car sinon nous pourrions incrémenter la valeur de $f(x_j)$ par 1 (x_i sera le f -voisin privé frontière de x_j), ce qui contredirait la maximalité de f . Par conséquent, nous avons $d_{P_n}(x_{j^p}, x_j) = f(x_j) + 1$, et ainsi

$$\begin{aligned} d_{P_n}(x_{j^p}, x_i) &= d_{P_n}(x_{j^p}, x_j) + d_{P_n}(x_j, x_i) \\ &= f(x_j) + 1 + f(x_j) + 1 = 2f(x_j) + 2. \end{aligned}$$

Considérons la fonction g définie à partir de f , en posant

$$\begin{cases} g(x_j) = 0, \\ g(x_{j^p+1}) = 1 \text{ et } g(x_{j'}) = 0 & \text{si } x_{j'} \neq x_{j^p+1}, \\ g(x_{j+1}) = f(x_j) & \text{si } x_{i+1} \text{ est } f\text{-dominé,} \\ \text{ou } g(x_{j+2}) = f(x_j) & \text{si } x_{i+1} \text{ n'est pas } f\text{-dominé (voir Figure 3.7).} \end{cases}$$

Nous remarquons que x_{j^p} est un g -voisin privé frontière de x_{j^p+1} , et que deux cas peuvent se présenter : Soit x_i est un g -voisin privé frontière de x_{j+1} (si x_{i+1} est f -dominé), soit x_{i+1} est un g -voisin frontière privé de x_{j+2} (si x_{i+1} n'est pas f -dominé).

De plus, tous les sommets x_1, \dots, x_i sont g -dominés. D'où, g est un broadcast non-redondant maximal de coût

$$\begin{aligned} \sigma(g) &= \sigma(f) - f(x_j) - f(x_{j'}) + f(x_j) + 1 \\ &= \sigma(f) - f(x_{j'}) + 1. \end{aligned}$$

L'optimalité de f implique alors $f(x_{j'}) = 1$, et ainsi, g sera un ir_b -broadcast sur P_n vérifiant que le nombre de sommets qui ne sont pas g -dominés est strictement inférieur au nombre de sommets qui ne sont pas f -dominés.

On réitère cette modification tant qu'il existe un sommet non dominé. Nous obtenons au final un ir_b -broadcast dominant sur P_n , ce qui achève la preuve. \square

En utilisant le Théorème 3.12, nous démontrons un résultat similaire sur les cycles.

Théorème 3.13. *Pour tout entier $n \geq 3$, $ir_b(C_n) = \gamma_b(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.*

Preuve. D'après la Proposition 3.9, nous avons $\gamma_b(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, donc il nous reste à prouver la formule suivante : $ir_b(C_n) = \gamma_b(C_n)$.

Du Corollaire 2.36, nous avons une première inégalité, c'est-à-dire, $\gamma_b(C_n) \geq ir_b(C_n)$, donc pour montrer l'égalité, il nous suffit de prouver l'inégalité dans l'autre sens, à savoir $ir_b(C_n) \geq \gamma_b(C_n)$ ou bien $ir_b(C_n) \geq ir_b(P_n)$, car $\gamma_b(C_n) = ir_b(P_n)$ (l'égalité est déduite de la Proposition 3.9 et le Théorème 3.12).

Notons que 010, 0200 et 00200 sont des ir_b -broadcasts dominants pour C_3 , C_4 et C_5 , respectivement, de coût $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Ainsi, nous considérons que le cas où $n \geq 6$.

Soit f un ir_b -broadcast sur C_n , $n \geq 6$. Si f est dominant, alors la preuve est terminée. Donc, supposons que f n'est pas un dominant. Nous affirmons que $|V_f^+| \geq 2$. En effet, si $|V_f^+| = 1$, alors la maximalité de f implique $\sigma(f) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, et donc $ir_b(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = \gamma_b(C_n)$, qui contredit le Corollaire 2.36 car $n \geq 6$. Ainsi, nous avons $|V_f^+| \geq 2$. Comme f est maximal, il est impossible d'avoir trois sommets consécutifs non f -dominés. En plus, comme f est non dominant, nous pouvons supposer sans perte de généralité, que le sommet x_0 n'est pas f -dominé et que le sommet x_1 est f -dominé par un f -sommet broadcast x_{i_1} , $i_1 > 1$. Notons que le sommet x_{n-1} peut être f -dominé ou non.

Pour éviter tout risque de confusion, soit $P_n = y_0 y_1 \dots y_{n-1}$. Soit g l'application définie par $g(y_i) = f(x_i)$ pour tout i , $0 \leq i \leq n-1$. Comme dans C_n , x_0 n'est pas g -dominé, x_1 est g -dominé par x_{i_1} , et $g(x_{i_1})$ ne peut pas augmenter car sinon $f(x_{i_1})$ pourrait être augmenté, ce qui contredit l'hypothèse de la maximalité de f .

Similairement, la g -valeur du g -sommet broadcast le plus à droite dans P_n ne peut pas augmenter car sinon, sa f -valeur pourrait être augmenté (car x_0 est non f -dominé, tandis que x_{n-1} peut être f -dominé ou non), ce qui contredirait encore la maximalité de f .

Nous pouvons appliquer le même raisonnement si x_{n-1} est non g -dominé, ce qui implique que x_{n-1} n'est pas f -dominé. Donc, le fait que f soit un ir_b -broadcast sur C_n , nous permet d'assurer que g est un broadcast non-redondant maximal sur P_n , et par conséquent $ir_b(C_n) = \sigma(f) = \sigma(g) \geq ir_b(P_n)$, comme souhaité. \square

3.5 Nombres de packing broadcast et de packing broadcast inférieur

Nous établissons maintenant la valeur du nombre de packing broadcast sur les chaînes et les cycles.

Théorème 3.14. *Pour tout $n \geq 2$, $P_b(P_n) = \text{diam}(P_n) = n - 1$ et, pour tout $n \geq 3$, $P_b(C_n) = \text{diam}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Preuve. Nous considérons d'abord l'étude de la chaîne P_n , $n \geq 2$. Nous observons que la fonction f définie par $f(x_1) = n - 1$ et $f(x_i) = 0$ pour tout i , $2 \leq i \leq n$ est un broadcast de packing maximal de coût $n - 1 = \text{diam}(P_n)$, ce qui implique que $\text{diam}(P_n) \leq P_b(P_n)$. L'inégalité dans l'autre sens résulte directement du Théorème 3.1 et du fait que tout broadcast de packing est un broadcast non-redondant. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $P_b(P_n) = \text{diam}(P_n) = n - 1$.

Nous considérons maintenant le cas du cycle C_n , $n \geq 3$.

Nous observons que la fonction f définie par $f(x_0) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $f(x_i) = 0$ pour tout i , $1 \leq i \leq n - 1$ est un broadcast de packing maximal de coût $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \text{diam}(C_n)$, ce qui nous permet d'obtenir, $\text{diam}(C_n) \leq P_b(C_n)$.

Pour établir l'inégalité dans l'autre sens, il suffit de prouver une fois de plus que pour tout P_b -broadcast f sur C_n , $|V_f^+| = 1$. Similairement au cas précédent, si nous supposons que chaque P_b -broadcast f sur C_n vérifie $|V_f^+| \geq 2$, alors nous obtenons $\sum_{x_i \in V_f^+} (2f(x_i) + 1) \leq n$, ce qui nous donne $2P_b(C_n) + |V_f^+| \leq n$, et donc

$$\begin{aligned} P_b(C_n) &\leq \frac{n - |V_f^+|}{2} \leq \frac{n - 2}{2} \\ &< \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \text{diam}(C_n), \end{aligned}$$

une contradiction de plus. □

Avant de déterminer la valeur de $p_b(P_n)$, pour tout $n \geq 1$, nous commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme 3.15. *Pour tout entier $n \geq 2$, il existe un p_b -broadcast f sur P_n tel que $f(x_i) = 1$ pour tout f -sommet broadcast x_i .*

Preuve. Nous remarquons que 10, 010, 1001 et 10010 définissent des p_b -broadcasts sur P_n , $n = 2, 3, 4, 5$, respectivement, qui satisfont l'énoncé du Lemme. Supposons à présent que $n \geq 6$ et soit g un p_b -broadcast sur P_n . Si $g(x_i) = 1$ pour tout g -sommet broadcast x_i , alors nous posons $f := g$ et nous avons terminé.

Dans le cas contraire, soit $V_g^+ = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$, $i_1 < \dots < i_t$, $t \geq 1$.

Nous démontrons en premier lieu que $t \geq 2$. En effet, si $t = 1$, nous aurons

$$p_b(P_n) = g(x_{i_1}) = \text{rad}(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

tandis que la fonction g' définie par $g'(x_i) = 1$, $1 \leq i \leq n$, si et seulement si $i \equiv 1 \pmod{3}$ est un broadcast de packing maximal de coût $\sigma(g') = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, une contradiction.

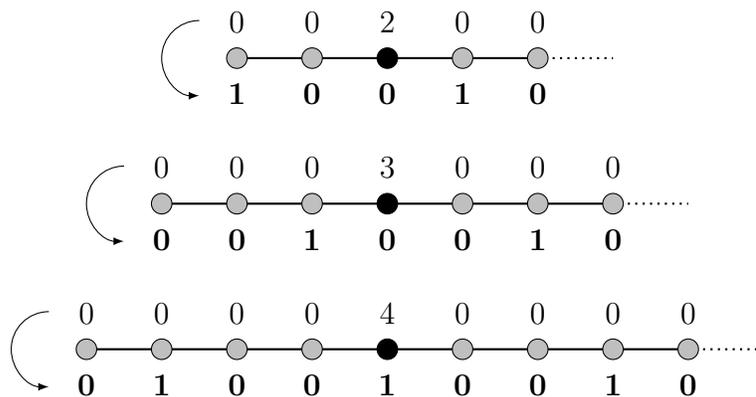
Nous avons donc $|V_g^+| \geq 2$. Notons par x_{i_j} , $1 \leq j \leq t$, le g -sommet broadcast tel que i_j est le plus petit indice qui satisfait $g(x_{i_j}) \geq 2$. Dans la suite, nous considérons trois cas selon la valeur de l'indice i_j . Dans chaque cas, nous prouverons que soit le cas ne peut avoir lieu dans un p_b -broadcast, soit que nous pouvons contruire un p_b -broadcast g' sur P_n , de coût $\sigma(g') = \sigma(g)$, de sorte que l'indice du g' -sommet broadcast le plus à gauche de coût au moins 2, s'il existe, est strictement supérieur au g -sommet broadcast le plus à gauche de coût au moins 2.

1. $i_j = i_1$ or $i_j = i_t$.

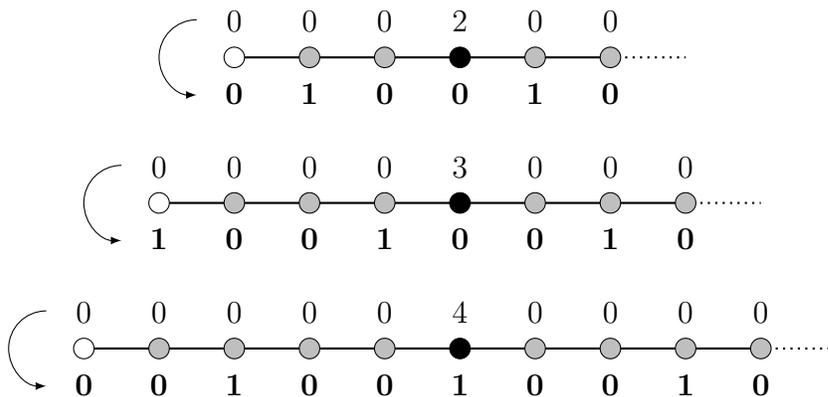
Supposons que $i_j = i_1$, le cas $i_j = i_t$ est similaire par symétrie. Nous démontrons d'abord que $g(x_{i_1}) \in \{i_1 - 2, i_1 - 1\}$ est vérifiée. En effet, si $g(x_{i_1}) \geq i_1$, alors la fonction h définie à partir de g en posant $h(x_{i_1}) = 0$ et $h(x_{i_1+1}) = g(x_{i_1}) - 1$ est un broadcast de packing maximal de coût $\sigma(h) = \sigma(g) - 1$, ce qui contredit l'optimalité de g . De plus, si $g(x_{i_1}) \leq i_1 - 3$, alors nous pourrions poser $g(x_1) = 1$, ce qui contredirait donc la maximalité de g . Ainsi, nous avons deux sous-cas à considérer.

- (a) $g(x_{i_1}) = i_1 - 1$, et donc $i_1 \geq 3$.

Soit g_1 la fonction définie à partir de g , en modifiant les g -valeurs de $x_1, \dots, x_{2g(x_{i_1})+1}$ comme suit :



(a) $g(x_{i_1}) = i_1 - 1$



(b) $g(x_{i_1}) = i_1 - 2$

FIGURE 3.8 – Des broadcasts de packing illustratifs de la preuve du Lemme 3.15, Cas 1.

$$g_1(x_1 \dots x_{2g(x_{i_1})+1}) = \begin{cases} (010)^\alpha, & \text{si } 2g(x_{i_1}) + 1 \equiv 0 \pmod{3}, \\ 0(010)^\alpha, & \text{si } 2g(x_{i_1}) + 1 \equiv 1 \pmod{3}, \\ 10(010)^\alpha, & \text{si } 2g(x_{i_1}) + 1 \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

où $\alpha = \lfloor \frac{2g(x_{i_1})+1}{3} \rfloor$ (voir Figure 3.8(a)).

Il n'est pas difficile de vérifier que g_1 est un broadcast de packing maximal et que

$$\begin{aligned} \sigma(g_1) - \sigma(g) &= \left(\left\lfloor \frac{2g(x_{i_1}) - 1}{3} \right\rfloor + 1 \right) - g(x_{i_1}) \\ &= \left\lfloor \frac{2 - g(x_{i_1})}{3} \right\rfloor. \end{aligned}$$

On a alors $\sigma(g_1) - \sigma(g) < 0$ si $g(x_{i_1}) \neq 2$. Par conséquent, $g(x_{i_1}) = g(x_3) = 2$ et nous pouvons donc définir g' à partir de g en posant $g'(x_1 \dots x_5) = 10010$.

(b) $g(x_{i_1}) = i_1 - 2$, et donc $i_1 \geq 4$.

Par similarité au cas précédent, notons par g_2 la fonction obtenue à partir de g en modifiant les g -valeurs de $x_1, \dots, x_{2g(x_{i_1})+2}$ comme suit :

$$g_2(x_1 \dots x_{2g(x_{i_1})+2}) = \begin{cases} (010)^\alpha, & \text{si } 2g(x_{i_1}) + 2 \equiv 0 \pmod{3}, \\ 0(010)^\alpha, & \text{si } 2g(x_{i_1}) + 2 \equiv 1 \pmod{3}, \\ 10(010)^\alpha, & \text{si } 2g(x_{i_1}) + 2 \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

où $\alpha = \lfloor \frac{2g(x_{i_1})+2}{3} \rfloor$ (voir Figure 3.8(b)).

Une fois de plus, il n'est pas difficile de vérifier que g_2 est un broadcast de packing maximal tel que

$$\begin{aligned} \sigma(g_2) - \sigma(g) &= \left(\left\lfloor \frac{2g(x_{i_1})}{3} \right\rfloor + 1 \right) - g(x_{i_1}) \\ &= \left\lfloor \frac{3 - g(x_{i_1})}{3} \right\rfloor, \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'avoir $\sigma(g_2) - \sigma(g) < 0$ quand $g(x_{i_1}) \neq 2$ et $g(x_{i_1}) \neq 3$. Par conséquent, soit $g(x_{i_1}) = g(x_4) = 2$ et nous pouvons donc définir g' à partir de g en posant $g'(x_1 \dots x_6) = 010010$, soit $g(x_{i_1}) = g(x_5) = 3$ et nous pouvons ainsi définir g' à partir de g en posant $g'(x_1 \dots x_8) = 10010010$.

2. $i_j \in \{i_2, \dots, i_{t-1}\}$.

Puisque g est un broadcast de packing maximal, alors nous avons nécessairement

$$1 \leq d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_j}) - g(x_{i_{j-1}}) - g(x_{i_j}) \leq 3.$$

Ensuite, nous avons soit $d_{P_n}(x_{i_{j-1}}, x_{i_j}) = g(x_{i_{j-1}}) + g(x_{i_j}) + 1$,

soit $d_{P_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) = g(x_{i_j}) + g(x_{i_{j+1}}) + 1$.

Dans la suite, nous considérons quatre sous-cas, qui dépendent de la valeur de $2g(x_{i_j}) + 1 \pmod{3}$, et du nombre de sommets non g -dominés p se situant entre $x_{i_{j-1}}$ et x_{i_j} , ou entre x_{i_j} et $x_{i_{j+1}}$.

Puisque g est broadcast packing maximal, nous avons (i) $p = 0$, ou (ii) $p = 1$ et l'un des deux sommets $\{x_{i_j - g(x_{i_j}) - 1}, x_{i_j + g(x_{i_j}) + 1}\}$ n'est pas g -dominé, ou (iii) $p = 2$ et soit les deux sommets $\{x_{i_j - g(x_{i_j}) - 2}, x_{i_j - g(x_{i_j}) - 1}\}$, ou les deux sommets $\{x_{i_j + g(x_{i_j}) + 1}, x_{i_j + g(x_{i_j}) + 2}\}$, ne sont pas g -dominés.

(a) $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 0 \pmod{3}$.

Soit g_0 la fonction définie à partir de g en posant,

$$g_0(x_{i_j - g(x_{i_j})} \cdots x_{i_j + g(x_{i_j})}) = (010)^\alpha, \text{ avec } \alpha = \frac{2g(x_{i_j}) + 1}{3} \text{ (voir Figure 3.9(a)).}$$

Puisque g est maximal, alors g_0 est aussi maximal et nous obtenons ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma(g_0) - \sigma(g) &= \frac{2g(x_{i_j}) + 1}{3} - g(x_{i_j}) \\ &= \frac{1 - g(x_{i_j})}{3} < 0, \end{aligned}$$

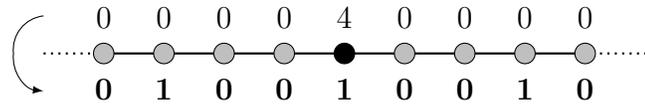
ce qui contredit l'optimalité de g .

(b) $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ et $p = 2$, ou $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ et $1 \leq p \leq 2$.

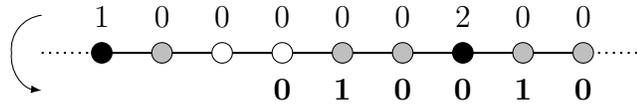
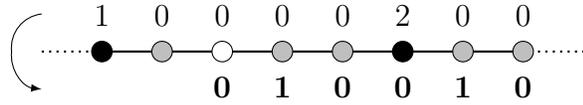
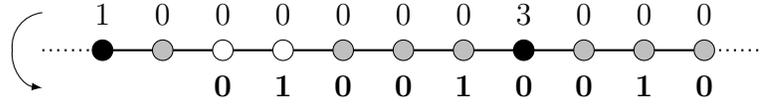
Supposons que $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, et $x_{i_j - g(x_{i_j}) - 2}, x_{i_j - g(x_{i_j}) - 1}$ ne sont pas g -dominés, ou que $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 2 \pmod{3}$, et $x_{i_j - g(x_{i_j}) - 1}$ n'est pas g -dominé. (Les cas restants sont similaires.)

Soit g' la fonction obtenue de g en posant

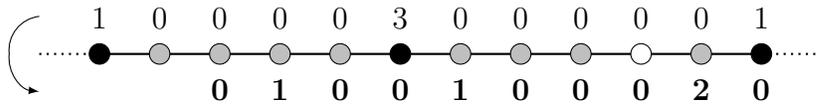
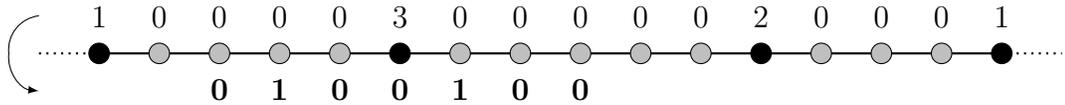
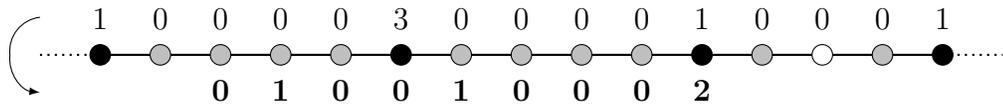
$$\begin{aligned} g'(x_{i_j - g(x_{i_j}) - 2} \cdots x_{i_j + g(x_{i_j})}) &= (010)^\alpha, \text{ si } 2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 1 \pmod{3}, \\ g'(x_{i_j - g(x_{i_j}) - 1} \cdots x_{i_j + g(x_{i_j})}) &= (010)^\alpha, \text{ si } 2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 2 \pmod{3}, \end{aligned}$$



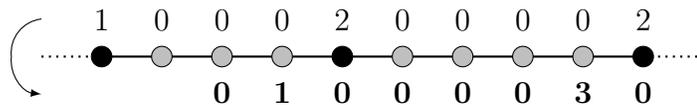
(a) $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ (9 dans cet exemple)



(b) $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ (7 dans cet exemple) et $p = 2$,
 ou $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ (5 dans cet exemple) et $p = 1$,
 ou $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ (5 dans cet exemple) et $p = 2$



(c) $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ (7 dans cet exemple) et $p = 0$,
 ou $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ (7 dans cet exemple), $p = 0$,
 et les deux sommets $x_{i_j+g(x_{i_j})+1}$ et $x_{i_{j+1}+g(x_{i_{j+1})}+1}$ sont g -dominés,
 ou $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ et $p = 1$



(d) $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ (5 dans cet exemple) et $p = 0$

où $\alpha = \left\lfloor \frac{2g(x_{i_j})+p+1}{3} \right\rfloor$ (voir Figure 3.9(b)). Comme g est maximal, alors g' est aussi maximal et on a

$$\begin{aligned}\sigma(g') - \sigma(g) &= \frac{2g(x_{i_j}) + p + 1}{3} - g(x_{i_j}) \\ &= \frac{p + 1 - g(x_{i_j})}{3} \leq 0.\end{aligned}$$

L'optimalité de g implique alors soit $p = 1$ et $g(x_{i_j}) = 2$, soit $p = 2$ et $g(x_{i_j}) = 3$. Dans chaque cas, g' est aussi optimal et l'indice du g' -sommet broadcast le plus à gauche avec une g' -valeur au moins 2, s'il existe, est strictement plus grand que l'indice du g -sommet broadcast le plus à gauche avec une g -valeur au moins 2.

(c) $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ et $0 \leq p \leq 1$.

Dans ce cas, $x_{i_j-g(x_{i_j})-2}$ et $x_{i_j+g(x_{i_j})+2}$ sont g -dominés, et au plus l'un des deux sommets $x_{i_j-g(x_{i_j})-1}$ et $x_{i_j+g(x_{i_j})+1}$ n'est pas g -dominé.

Soit g' la fonction définie à partir de g (voir Figure 3.9(c)) en posant

- $g'(x_{i_j-g(x_{i_j})} \dots x_{i_j+g(x_{i_j})}) = (010)^\alpha 0$, où $\alpha = \frac{2g(x_{i_j})}{3}$
- $g'(x_{i_{j+1}}) = 0$, $g'(x_{i_{j+1}-1}) = g(x_{i_{j+1}}) + 1$, si $x_{i_j+g(x_{i_j})+1}$ n'est pas g -dominé, et
- $g'(x_{i_{j+1}}) = g(x_{i_{j+1}}) + 1$, si $i_j = i_{t-1}$
ou $x_{i_j+g(x_{i_j})+1}$ est g -dominé, et $x_{i_{j+1}+g(x_{i_{j+1})}+1}$ n'est pas g -dominé,

Notons que nous avons nécessairement l'un des cas ci-dessus, car sinon g' serait un broadcast de packing maximal avec $\sigma(g') < \sigma(g)$, ce qui contredit l'optimalité de g . Puisque g est maximal, alors g' est maximal aussi et nous obtenons

$$\begin{aligned}\sigma(g') - \sigma(g) &= \frac{2g(x_{i_j})}{3} + 1 - g(x_{i_j}) \\ &= \frac{3 - g(x_{i_j})}{3} \leq 0.\end{aligned}$$

(Rappelons que comme $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, nous avons $g(x_{i_j}) \geq 3$.) L'optimalité de g implique $g(x_{i_j}) = 3$.

Nous obtenons alors que g' est optimal aussi et l'indice le plus à gauche g' -sommet broadcast avec g' -valeur au moins 2, s'il existe, est strictement plus grand que l'indice du g -sommet broadcast avec g -valeur au moins 2, ce qui est demandé.

(d) $2g(x_{i_j}) + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ and $p = 0$.

Soit g' la fonction obtenu de g en posant $g'(x_{i_j-g(x_{i_j})} \dots x_{i_j+g(x_{i_j})}) = (010)^\alpha 00$, où $\alpha = \frac{2g(x_{i_j})-1}{3}$, $g'(x_{i_{j+1}}) = 0$, et $g'(x_{i_{j+1}-1}) = g(x_{i_{j+1}}) + 1$ (voir Figure 3.9(d)).

Comme g est maximal, alors g' est maximal

$$\sigma(g') - \sigma(g) = \frac{2g(x_{i_j}) - 1}{3} + 1 - g(x_{i_j}) = \frac{2 - g(x_{i_j})}{3} \leq 0.$$

L'optimalité de g implique que $g(x_{i_j}) = 2$. Par conséquent, g' est aussi optimal et l'indice du g' -sommet broadcast le plus à gauche avec une g' -valeur au moins 2, s'il existe, est strictement supérieur que l'indice du g -sommet broadcast le plus à gauche avec une g -valeur au moins 2, et ainsi le dernier point est démontré.

En répétant la même transformation pour chaque sommet ayant une g -valeur est au moins 2, nous construisons finalement un p_b -broadcast g' sur P_n où tous ses g' -sommets broadcast ont une g' -valeur 1. Le lemme est maintenant complètement démontré. \square

Nous pouvons maintenant déterminer le nombre de packing broadcast inférieur sur les chaînes.

Théorème 3.16. *Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$p_b(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{4} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{8}, \\ 2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 1 & \text{si } n \equiv 1, 2, 3 \pmod{8}, \\ 2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 2 & \text{si } n \equiv 4, 5, 6, 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

Preuve. Observons d'abord que 10, 010, 1001, 01001, 001001, 0010010 et 00100100 définissent des p_b -broadcasts sur P_n pour tout entier $n \in \{2, \dots, 8\}$, respectivement, et leur coût sont ceux énoncés par le Théorème 3.16.

Supposons maintenant que $n \geq 9$ et soit $n = 8q + r$, avec $q \geq 1$ et $0 \leq r \leq 7$. Pour chaque r , nous définissons les broadcasts f_r , $0 \leq r \leq 7$, sur P_n , comme suit :

$$f_0(P_n) = (00100100)^q, \quad f_1(P_n) = (00100100)^q 1, \quad f_2(P_n) = (00100100)^q 10,$$

$$f_3(P_n) = (00100100)^q 100, \quad f_4(P_n) = (00100100)^q 1001, \quad f_5(P_n) = (00100100)^q 01001,$$

$$f_6(P_n) = (00100100)^q 001001, \quad \text{et } f_7(P_n) = (00100100)^q 0010010.$$

Il est facile de vérifier que chaque f_r est un broadcast de packing maximal sur P_{8q+r} , $8q+r \geq 9$, de coût

$$\sigma(f_r) = \begin{cases} \frac{n}{4} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{8}, \\ 2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 1 & \text{si } n \equiv 1, 2, 3 \pmod{8}, \\ 2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 2 & \text{si } n \equiv 4, 5, 6, 7 \pmod{8}, \end{cases}$$

ce qui implique $p_b(P_n) \leq \sigma(f_r)$, et $p_b(P_n)$ ne peut dépasser la valeur énoncée par le Théorème 3.16.

Nous prouvons maintenant l'inégalité dans l'autre sens. Le Lemme 3.15, nous affirme qu'il existe un p_b -broadcast dont le poids de chaque sommet broadcast est égal à 1. Notons par g un tel broadcast.

Pour tout k , $0 \leq k \leq q-1$, soit $\sigma_k = g(x_{8k+1}) + \dots + g(x_{8k+8})$.

D'après la définition d'un broadcast de packing, nous déduisons que pour toute chaîne P_n , la distance entre chaque paire de g -sommets broadcast consécutifs (de poids 1) vaut 3, 4 ou 5, ce qui implique $2 \leq \sigma_k \leq 3$ pour tout k , $0 \leq k \leq q-1$. Observons à présent que x_2 et x_{n-1} doivent être g -dominés, car sinon nous pourrions poser $g(x_1) = 1$ ou $g(x_n) = 1$, ce qui contredirait la maximalité de g . De même, on a, $d_{P_n}(x_{i_1}, x_{i_2}) = d_{P_n}(x_{i_{t-1}}, x_{i_t}) = 3$, car sinon nous pourrions augmenter la valeur de $g(x_{i_1})$ ou $g(x_{i_t})$, ce qui contredirait la maximalité de g .

Nous considérons maintenant, selon la valeur de r , trois cas possibles, et nous prouverons dans chaque cas que le coût de g est égal à la valeur donnée dans l'énoncé du Théorème 3.16.

1. $r = 0$.

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} p_b(P_n) &= \sigma(g) = \sum_{k=0}^{q-1} \sigma_k \\ &\geq 2q = \frac{2n}{8} = \frac{n}{4}. \end{aligned}$$

2. $r \in \{1, 2, 3\}$.

S'il existe k , $0 \leq k \leq q-1$, tel que $\sigma_k = 3$, alors

$$\begin{aligned} p_b(P_n) = \sigma(g) &\geq \sum_{k=0}^{q-1} \sigma_k \\ &\geq 2(q-1) + 3 = 2q + 1 = 2 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1, \end{aligned}$$

et nous avons terminé.

Si $\sigma_k = 2$ pour tout k , $0 \leq k \leq q-1$, alors $p_b(P_n) \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $p_b(P_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$. Ceci implique que $g(x_{n-r+1}) = \dots = g(x_n) = 0$. Si $r = 3$, alors nous avons une contradiction car x_{n-1} doit être g -dominé. D'où, $r \in \{1, 2\}$.

Puisque x_{n-1} doit être g -dominé et $d_{P_n}(x_{i_{t-1}}, x_{i_t}) = 3$, nous avons nécessairement $\sigma_{q-1} \in \{00001001, 00010010\}$ si $r = 1$, et $\sigma_{q-1} = 00001001$ si $r = 2$.

Comme g est maximal, nous ne pouvons pas avoir trois sommets consécutifs non g -dominés, et donc, pour tout j , $0 \leq j \leq q-1$, $\sigma_j \in \{00001001, 00010010\}$ si $r = 1$, et $\sigma_j = 00001001$ si $r = 2$, une contradiction car dans tous les cas, x_2 n'est pas g -dominé. Ainsi, nous avons $p_b(P_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1$.

3. $r \in \{4, 5, 6, 7\}$.

Notons d'abord que nous avons nécessairement $g(x_{n-r+1}) + \dots + g(x_n) \geq 1$. Ainsi, si $\sigma_k = 3$ et k , $0 \leq k \leq q-1$, alors

$$\begin{aligned} p_b(P_n) = \sigma(g) &\geq \sum_{k=0}^{q-1} \sigma_k + 1 \\ &\geq 2(q-1) + 3 + 1 = 2q + 2 = 2 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 2, \end{aligned}$$

et nous avons terminé ce cas.

Supposons maintenant que $\sigma_k = 2$ pour tout k , $0 \leq k \leq q-1$, et que $p_b(P_n) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1$. On a donc $g(x_{n-r+1}) + \dots + g(x_n) = 1$ car x_{n-1} doit être g -dominé.

Pour $r = 6$ ou $r = 7$, nous avons une contradiction car $d_{P_n}(x_{i_{t-1}}, x_{i_t}) = 3$. Donc, $r \in \{4, 5\}$. Puisque x_{n-1} doit être g -dominé et $d_{P_n}(x_{i_{t-1}}, x_{i_t}) = 3$, nous avons nécessairement

$$\sigma_{q-1} \in \{00100001, 00001001, 01000010, 00100010, 00010010\}, \text{ si } r = 4, \text{ et}$$

$$\sigma_{q-1} \in \{00100001, 00001001\}, \text{ si } r = 5.$$

De plus, puisque g est maximal, alors chaque sommet g -broadcast doit être à distance 3 d'un autre sommet g -broadcast. Ainsi, nous obtenons pour tout j , $0 \leq j \leq q-1$,

$$\sigma_j \in \{00100001, 00001001, 01000010, 00100010, 00010010\},$$

qui est une contradiction car x_2 doit être g -dominé et $d(x_{i_1}, x_{i_2}) = 3$ doit être satisfaite.

Nous obtenons donc, $p_b(P_n) = 2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 2$.

Ceci complète la preuve. □

En utilisant le Théorème 3.16, nous obtenons un résultat similaire sur les cycles.

Théorème 3.17. *Pour tout entier $n \geq 3$,*

$$p_b(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{4} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{8}, \\ 2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 1 & \text{if } n \equiv 1, 2, 3 \pmod{8}, \\ 2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 2 & \text{if } n \equiv 4, 5, 6, 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

Preuve. Remarquons d'abord que les broadcasts f_0, \dots, f_7 , définis dans la preuve du Théorème 3.16, sont aussi des broadcasts de packing maximaux pour tout $n \geq 3$, $n = 8q + r$ et $0 \leq r \leq 7$, et par conséquent, on obtient $p_b(C_n) \leq \sigma(f_r)$.

Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Observons d'abord que 010, 2000, 20000 et 001001 sont des solutions optimales pour C_3 , C_4 , C_5 et C_6 , respectivement, et leur coût est égal à la valeur énoncée par le Théorème 3.17.

Nous pouvons donc supposer que $n \geq 7$. Soit f un p_b -broadcast sur C_n , $n \geq 7$. Nous démontrons d'abord que $|V_f^+| \geq 2$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons sans perte de généralité que $V_f^+ = \{x_0\}$. Puisque f est maximal, alors $\sigma(f) = f(x_0) = e(x_0) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, d'où $p_b(C_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, ce qui contredit l'inégalité que nous avons précédemment établie pour $n \geq 7$. Nous avons donc $|V_f^+| \geq 2$.

Soit $V_f^+ = \{x_{i_0}, \dots, x_{i_{t-1}}\}$, $t \geq 2$.

Puisque f est maximal, alors pour tout j , $0 \leq j \leq t-1$, on a,

$$f(x_{i_j}) + f(x_{i_{j+1}}) + 1 \leq d_{C_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) \leq f(x_{i_j}) + f(x_{i_{j+1}}) + 3.$$

De plus, si $d_{C_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) \geq f(x_{i_j}) + f(x_{i_{j+1}}) + 2$, alors, $d_{C_n}(x_{i_{j+1}}, x_{i_{j+2}}) = f(x_{i_{j+1}}) + f(x_{i_{j+2}}) + 1$ ($i_j = i_{j+2}$ peut être vérifiée), car sinon nous pourrions incrémenter la valeur de $f(x_{i_{j+1}})$ par 1.

Considérons les deux cas suivants.

1. Si tous les sommets dans C_n sont f -dominés, alors pour tout j , $0 \leq j \leq t - 1$, on a $d_{C_n}(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) = f(x_{i_j}) + f(x_{i_{j+1}}) + 1$. Afin d'éviter tout risque de confusion, nous posons $P_n = y_0 y_1 \dots y_{n-1}$ avec $y_0 = x_{i_0 + f(x_{i_0}) + 1}$. Maintenant, notons par g la fonction définie par $g(y_j) = f(x_{j + i_0 + f(x_{i_0}) + 1})$ pour tout j , $0 \leq j \leq n - 1$. Il est évident que les deux sommets y_0 et y_{n-1} sont g -dominés. Puisque f est un broadcast de packing maximal sur C_n , alors g est aussi un broadcast de packing maximal sur P_n , ce qui nous donne $p_b(P_n) \leq p_b(C_n)$.
2. Si C_n contient au moins un sommet non f -dominé, alors nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x_{i_1 + f(x_{i_1}) + 1}$ n'est pas f -dominé, ce qui implique $d_{C_n}(x_{i_0}, x_{i_1}) = f(x_{i_0}) + f(x_{i_1}) + 1$ et $d_{C_n}(x_{i_2}, x_{i_3}) = f(x_{i_2}) + f(x_{i_3}) + 1$ (on peut avoir $x_{i_0} = x_{i_2}$ et $x_{i_1} = x_{i_3}$). Pour éviter encore tout risque de confusion, posons $P_n = y_0 y_1 \dots y_{n-1}$ où $y_0 = x_{i_1 + f(x_{i_1}) + 2}$. Soit g la fonction définie par $g(y_j) = f(x_{j + i_1 + f(x_{i_1}) + 2})$ pour tout j , $0 \leq j \leq n - 1$. Puisque $d_{C_n}(x_{i_0}, x_{i_1}) = f(x_{i_0}) + f(x_{i_1}) + 1$ et $d_{C_n}(x_{i_2}, x_{i_3}) = f(x_{i_2}) + f(x_{i_3}) + 1$, les valeurs du g -sommet broadcast le plus à gauche et du g -sommet broadcast le plus à droite dans P_n ne peuvent pas être augmentées. Comme f est un broadcast de packing maximal sur C_n , alors g est aussi un broadcast de packing maximal sur P_n , et ceci implique $p_b(P_n) \leq p_b(C_n)$.

Nous avons donc démontré que $p_b(P_n) \leq p_b(C_n)$ dans chaque cas possible et l'égalité est ainsi établie. □

Chapitre 4

Nombre de domination broadcast supérieur sur les chenilles sans troncs

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude du nombre de domination broadcast supérieur sur les chenilles sans sommets troncs. La détermination de cet invariant pour tout type de chenille nous a paru difficile, c'est pourquoi, nous avons restreint notre étude à la classe des chenilles sans troncs. Les résultats exposés dans ce chapitre ont été soumis pour publication.

4.1 Définitions et notations

Rappelons qu'une *chenille*, notée CT , est un arbre tel que si on supprime tous les sommets pendants, le graphe résultant est une chaîne $C = x_0x_1x_2 \dots x_n$.

Cette chaîne est appelée *l'épine dorsale* et ses sommets sont appelés *épines*. Si le sommet épine x_i est adjacent à au moins un sommet pendent, alors x_i est un sommet *support*, sinon, x_i est un sommet *tronc*. Dans une chenille, on supposera sans perte de généralité que les extrémités de l'épine dorsale x_0 et x_n sont des sommets supports.

Le diamètre d'une chenille à n épines est : $\text{diam}(CT) = 1$ si $n = 0$ et $m = 1$, $\text{diam}(CT) = n + 2$ sinon. Le rayon d'une chenille à n épines est $\text{rad}(CT) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil$.

Notons par y_{ij} le $j^{\text{ème}}$ sommet pendent adjacent à x_i $j \in (1, \dots, \ell_i)$ et $L(x_i)$ l'ensemble de tous les sommets pendants adjacents au sommet épine x_i ($L(x_i) = \emptyset$ si x_i est un sommet

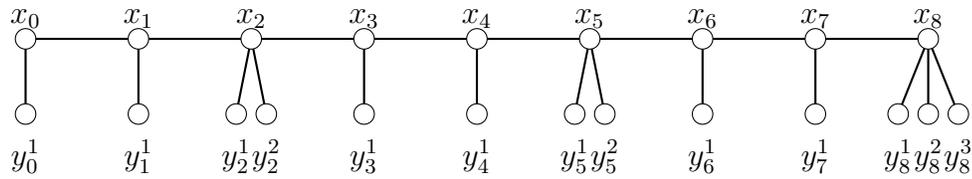
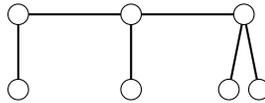

 $CT(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 3)$

 $CT[3, 5]$

FIGURE 4.1 – Représentation de la chenille $CT(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 3)$ et la sous-chenille $CT[3, 5]$

tronc).

Nous notons par $CT[i, j]$, la sous-chenille de CT induite par les sommets de l'épine dorsale x_i, \dots, x_j , et les sommets pendants adjacents à $\{x_i, \dots, x_j\}$, et $CT[i, j] = \emptyset$ sinon.

Nous représentons dans la Figure 4.1, la chenille $CT(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 3)$ et la sous-chenille $CT[3, 5]$.

On dit qu'un motif de longueur $p+1$, noté $\Pi = \pi_0 \dots \pi_p$, $p \geq 0$, $\pi_i \in \mathbb{N}$ pour tout i , $0 \leq i \leq p$ apparaît dans une chenille $CT = CT(\ell_0, \dots, \ell_n)$ s'il existe un indice i_0 , $0 \leq i_0 \leq n-p$, tel que $CT[i_0, i_0+p] = CT(\pi_0, \dots, \pi_p)$, c'est-à-dire, $\ell_{i_0+j} = \pi_j$ pour tout j , $0 \leq j \leq p$.

On dit aussi que la chenille CT contient le motif Π , et que la sous-chenille $CT(\ell_{i_0}, \dots, \ell_{i_0+p})$ de CT est une *occurrence* du motif Π .

Nous pouvons élargir la notation de motif sur les sommets, en considérant π_i^+ pour désigner un sommet support adjacent à au moins π_i sommets pendants.

Par exemple, sur la chenille considérée ci-dessus $CT(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 3)$, le motif $\Pi = 112$ de longueur 2 apparaît deux fois dans la chenille CT (où $CT[3, 5] = CT(1, 1, 2)$) et les sommets $\{x_2, x_5, x_8\}$ sont des 2^+ -sommets.

Nous montrons d'abord une propriété sur les Γ_b -broadcasts d'une chenille CT .

Lemme 4.1. *Pour toute chenille CT , il existe un Γ_b -broadcast tel que chaque sommet broad-*

cast est soit un sommet pendant soit un sommet tronc.

Preuve. Soit f un Γ_b -broadcast de CT . Supposons qu'il existe un sommet broadcast $x_i \in V_f^+, i \in \{1, \dots, n\}$, tel que x_i est un support. Montrons d'abord le fait suivant.

Fait E. *Si x_i est un support, alors $f(x_i) = 1$ et $PB_f(x_i)$ ne contient pas de tronc.*

Preuve. Si $f(x_i) > 1$, alors la minimalité du broadcast f implique que $f(y_i^j) = 0$ pour tout $j, j = 1, \dots, \ell_i$ et x_i possède un f -voisin privé frontière s qui satisfait $d(x_i, s) = f(x_i)$. Nous considérons le broadcast g défini à partir de f en remplaçant les f -valeurs de x_i et y_i^1 par $g(x_i) = 0$ et $g(y_i^1) = f(x_i) + 1$. L'application g est un broadcast dominant minimal de coût $\sigma(g) = \sigma(f) + 1 > \Gamma_b(CT)$, ce qui contredit l'optimalité de f . Par conséquent, $f(x_i) = 1$.

Si $f(x_i) = 1$ et l'ensemble $PB_f(x_i)$ ne contient pas de tronc, alors l'application g précédemment définie est un broadcast dominant minimal de coût $\sigma(g) = \sigma(f) + 1 > \Gamma_b(CT) + 1$, ce qui contredit à nouveau, l'optimalité de f . \square

Nous pouvons maintenant supposer que x_i est un support de poids $f(x_i) = 1$ et $PB_f(x_i)$ ne contient pas de tronc. Nous considérons le broadcast k défini à partir de f en remplaçant les f -valeurs de x_i et $y_i^1, \dots, y_i^{\ell_i}$ par $k(x_i) = 0$ et $k(y_i^j) = 1$ pour tout $j, j = 1, \dots, \ell_i$. Le broadcast k est un broadcast dominant minimal de coût $\sigma(k) = \sigma(f) + \ell_i - 1$. L'optimalité de f implique $\ell_i = 1$.

Nous pouvons répéter la transformation précédente sur k jusqu'à l'obtention d'un Γ_b -broadcast où chaque sommet broadcast est une feuille. \square

Soit $CT = CT(\ell_0, \dots, \ell_n)$ une chenille de longueur $n \geq 1$. Pour tout broadcast dominant minimal f sur CT , nous supposons dans la suite que $f(y_i^1) \geq \dots \geq f(y_i^{\ell_i})$ pour tout $i = 0, \dots, n$.

Observation 4.2. *Soit f un Γ_b -broadcast et soit v un f -sommet broadcast. D'après la Proposition 2.7, chaque sommet $v \in V^+$ possède un f -voisin privé frontière (noté v^p) tel que soit $d(v, v^p) = f(v)$ soit $v = v^p$ si $f(v) = 1$ et $PB_f(v) = \{v\}$.*

Notons par :

- P_v^f une chaîne (v, v^p) -géodésique si $d(v, v^p) = f(v)$ ou une arête incidente à v , e_v si $PB_f(v) = \{v\}$.

- $\mathcal{P}^f = \{P_v^f : v \in V_f^+(G)\}$
- $E_f = \cup_{v \in V_f^+} E(P_v^f)$ et $\overline{E}_f = E(G) \setminus E_f$.

Pour toute paire de sommets distincts u et v sur une chenille CT , il existe une unique chaîne reliant u et v (Théorème 1.1). D'après le Théorème 2.28 et le Lemme 2.30, nous déduisons :

Lemme 4.3. *Si CT est une chenille de longueur n , et f un Γ_b -broadcast, alors :*
pour toute paire de f -sommets broadcast u et v , $P_v^f \cap P_u^f = \emptyset$.

Ainsi,

$$\Gamma_b(G) = \sum_{v \in V_f^+} f(v) = |E_f| \leq m.$$

Comme $\Gamma_b(G) = m - |\overline{E}_f|$, alors il suffit de trouver une borne inférieure sur $|\overline{E}_f|$ pour obtenir une borne supérieure sur $\Gamma_b(G)$.

Dans la suite nous utilisons souvent cette idée pour conclure.

4.2 Résultats sur les chenilles sans sommets troncs

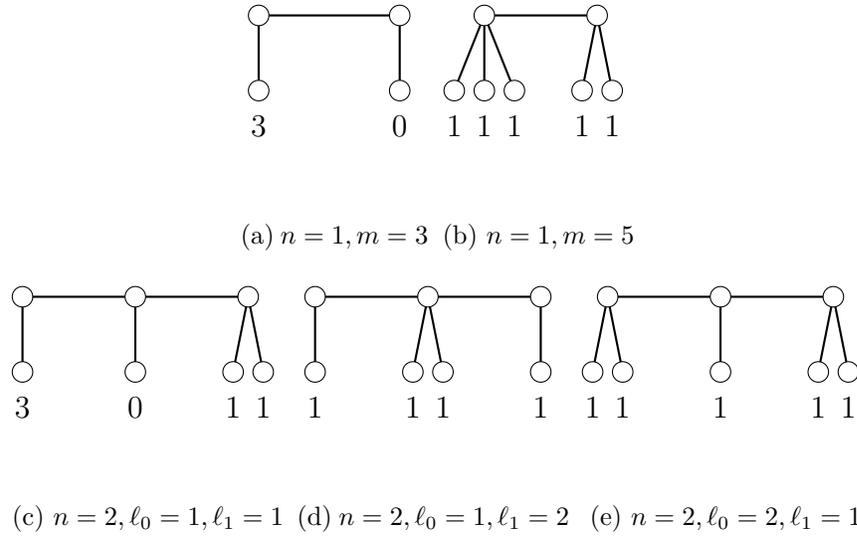
Une chenille *sans sommets troncs* est une chenille qui satisfait $\ell_i \geq 1$ pour tout i , $i = 0, \dots, n$.

Dans la suite, le *broadcast dominant unitaire* sur une chenille sans sommets troncs est le broadcast dominant μ défini par $\mu(u) = 1$ si u est une feuille et $\mu(u) = 0$ sinon. Comme chaque sommet support est μ -dominé par ses sommets pendants et $PB_\mu(v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in V_\mu^+$, alors μ est un broadcast dominant minimal de coût $\sigma(u) = \sum_{i=0}^n \ell_i$.

Nous montrons dans le lemme suivant que tout sommet broadcast de poids différent de 1 est un sommet pendent, et son f -voisin privé frontière est aussi un sommet pendent.

Lemme 4.4. *Si CT est une chenille sans sommets troncs, de longueur $n \geq 1$ et f est un Γ_b -broadcast sur CT , alors tout f -sommets broadcast v , de poids $f(v) \geq 2$, est un sommet pendent et tout f -voisin privé frontière de v est aussi un sommet pendent.*

Preuve. Soit CT une chenille sans sommets troncs, de longueur $n \geq 1$ et soit f un Γ_b -broadcast sur CT . Par la preuve du Lemme 4.1, et du Fait E, on sait que le poids de tout

FIGURE 4.2 – Exemples de Γ_b -broadcasts pour $n = 1, 2$

sommet support broadcast ne peut dépasser 1, donc tout f -sommet broadcast est un sommet pendant si $f(v) \geq 2$.

Supposons que $f(v) \geq 2$, v est un sommet pendant et il existe un sommet f -voisin privé frontière de v qui n'est pas un sommet pendant, disons x_i . Comme $f(v) \geq 2$, alors v n'est pas adjacent à x_i et pour tout $j = 1, \dots, \ell_i$, $y_i^j \notin V_f^+$. Donc pour tout $j = 1, \dots, \ell_i$, y_i^j n'est pas f -dominé, contradiction car f est un Γ_b -broadcast. \square

Nous déterminons d'abord la valeur de Γ_b pour les chenilles sans sommets troncs de longueur au plus 2.

Lemme 4.5. *Si CT est une chenille sans sommets troncs, de longueur $n \leq 2$ et de taille m , alors*

$$\Gamma_b(CT) = \begin{cases} m & \text{si } n = 1 \text{ et } m = 3, \\ m - 1 & \text{si } n = 1 \text{ et } m \geq 4, \text{ ou } n = 2 \text{ et } \ell_0 = \ell_1 = 1, \\ m - 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Soit CT une chenille sans sommets troncs, de longueur $n \leq 2$ et de taille m , et soit f un Γ_b -broadcast sur CT .

Si $n = 1$ et $m = 3$, alors CT est une chaîne et $\Gamma_b(CT) = m$ (voir Figure 4.2 (a)).

Si $n \geq 2$ ou $m \geq 4$, alors CT n'est ni une chaîne ni une étoile. Du Théorème 2.28, nous

obtenons $\Gamma_b(CT) \leq m-1$. D'autre part, considérons μ le broadcast unitaire sur CT . Comme μ est un broadcast dominant minimal de coût $m-n$, nous déduisons l'inégalité $\Gamma_b(CT) \geq m-n$.

Pour $n = 1$ et $m \geq 4$, nous obtenons $\Gamma_b(CT) \geq m-1$, et par conséquent $\Gamma_b(CT) = m-1$ (voir Figure 4.2 (b)).

Pour $n = 2$ et $\ell_0 = \ell_1 = 1$ (le cas $\ell_1 = \ell_2 = 1$ est similaire par symétrie), considérons le broadcast g défini par : $g(y_2^j) = 1$ pour tout j , $j = 1, \dots, \ell_2$, $g(y_0^1) = 3$, et $g(x) = 0$ sinon g est un broadcast dominant minimal de coût $m-1$. Ainsi, $\Gamma_b(CT) \geq m-1$, et il en découle l'égalité $\Gamma_b(CT) = m-1$ (voir Figure 4.2 (c)).

Pour établir l'inégalité $\Gamma_b(CT) \leq m-2$ si $n = 2$ et $\ell_0 \geq 2$ ou $\ell_1 \geq 2$, nous allons vérifier l'existence de deux arêtes (ou plus) dans $\overline{E_f}$.

Pour $n = 2$ et $\ell_1 \geq 2$, on a $m \geq 6$ et $\Gamma_b(CT) \geq m-2 \geq 4$. Étant donné que le poids de chaque sommet broadcast ne peut dépasser son excentricité, nous avons $f(y_1^1) \leq 3$. D'autre part, si $f(y_1^1) = 3$, alors $V_f^+ = \{y_1^1\}$ et $\sigma(f) = 3 < 4 \leq m-2$, contradiction avec l'optimalité de f . Ainsi, $f(y_1^1) \leq 2$. Nous distinguons trois cas selon la valeur du poids de $f(y_1^1)$.

1. $f(y_1^j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_1$.

Nous avons $PB_f(y_1^j) = \{y_1^j\}$, ceci implique que $P_{y_1^j} = y_1^j x_1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_1$ et x_1 n'appartient à aucune chaîne P_v^f , où v est un f -sommet broadcast de CT , $v \neq y_1^j$. Ainsi, les arêtes $x_0 x_1$ et $x_1 x_2$ appartiennent à $\overline{E_f}$.

2. $f(y_1^j) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_1$.

Par le Lemme 4.1, y_1^j est f -dominé par y_0^1 ou y_2^1 . Du Lemme 2.30, nous obtenons soit $PB_f(y_0^1) = L(x_1)$ soit $PB_f(y_2^1) = L(x_1)$. Ainsi, nous avons soit $P_{y_0^1} = y_0^1 x_0 x_1 y_1^j$ soit $P_{y_2^1} = y_2^1 x_2 x_1 y_1^j$, pour un certain $j \in \{1, \dots, \ell_1\}$, et l'ensemble $\overline{E_f}$ contient $\ell_1 - 1 \geq 1$ arêtes pendantes en plus de l'arête $x_0 x_1$ ou de l'arête $x_1 x_2$.

3. $f(y_1^1) = 2$.

Nous avons $PB_f(y_1^1) = \{y_1^2, \dots, y_1^{\ell_1}\}$, car sinon les sommets pendants adjacents à x_0 ou à x_2 ne seraient pas dominés. Donc $P_{y_1^1} = y_1^1 y_1^j$ pour un certain $j \in \{2, \dots, \ell_1\}$ et x_1 n'appartient à aucune chaîne P_v^f , où v est un f -sommet broadcast différent de y_1^1 . Ainsi, les deux arêtes $x_0 x_1$ et $x_1 x_2$ appartiennent à $\overline{E_f}$.

Pour $n = 2$ et $\ell_0 \geq 2$, $\ell_1 = 1$ et $\ell_2 \geq 2$, on a $m \geq 7$ et $\Gamma_b(CT) \geq m-2 \geq 5$. Étant donné que le poids de chaque sommet broadcast ne peut dépasser son excentricité, nous avons

$f(y_0^1) \leq 4$, $f(y_1^1) \leq 3$, et $f(y_2^1) \leq 4$. D'autre part, si $|V_f^+| = 1$, alors $\sigma(f) \leq 4 < 5 \leq m - 2$ contradiction avec l'optimalité de f . Ainsi, $f(y_0^1) \leq 3$, $f(y_1^1) \leq 2$, $f(y_2^1) \leq 3$, et $f(y_0^1) \neq 0$. Nous distinguons cinq cas selon les valeurs de $f(y_0^1)$ et de $f(y_2^1)$.

1. $f(y_0^j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_0$, et $f(y_2^l) = 1$ pour tout $l = 1, \dots, \ell_2$.

Nous avons $PB_f(y_0^j) = \{y_0^j\}$ et $PB_f(y_2^l) = \{y_2^l\}$, donc $P_{y_0^j} = y_0^j x_0$ et $P_{y_2^l} = y_2^l x_2$. Ainsi, les deux arêtes $x_0 x_1$ et $x_1 x_2$ appartiennent à $\overline{E_f}$.

2. $f(y_0^j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_0$, et $f(y_2^l) = 2$ (le cas $f(y_0^1) = 2$ et $f(y_2^l) = 1$ pour tout $l = 1, \dots, \ell_2$ est similaire par symétrie).

Nous avons $PB_f(y_0^j) = y_0^j$ et $PB_f(y_2^l) = \{y_2^l, \dots, y_2^{\ell_2}\}$, ce qui implique $P_{y_0^j} = y_0^j x_0$ et $P_{y_2^l} = y_2^l y_2^l$ pour un certain $l \in \{2, \dots, \ell_2\}$. Ainsi, les deux arêtes $x_0 x_1$ et $x_1 x_2$ appartiennent à $\overline{E_f}$.

3. $f(y_0^j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_0$, et $f(y_2^l) = 3$ (le cas $f(y_0^1) = 3$ et $f(y_2^l) = 1$ pour tout $l = 1, \dots, \ell_2$ est similaire par symétrie).

Nous avons $PB_f(y_0^j) = \{y_0^j\}$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_0$, et $PB_f(y_2^l) = y_2^l$, ce qui implique $P_{y_0^j} = y_0^j x_0$ et $P_{y_2^l} = y_2^l x_2 x_1 y_1^k$ pour un certain $k \in \{1, \dots, \ell_1\}$. Ainsi, l'arête $x_0 x_1$ et les arêtes pendantes $y_2^l x_2$, $l = 2, \dots, \ell_2$ appartiennent à $\overline{E_f}$.

4. $f(y_0^1) = 2$ et $f(y_2^1) = 2$.

Nous avons $PB_f(y_0^1) = \{y_0^2, \dots, y_0^{\ell_0}\}$ et $PB_f(y_2^1) = \{y_2^2, \dots, y_2^{\ell_2}\}$, ce qui implique $P_{y_0^1} = y_0^1 y_0^j$ pour un certain $j \in \{2, \dots, \ell_0\}$, et $P_{y_2^1} = y_2^1 y_2^l$ pour un certain $l \in \{2, \dots, \ell_2\}$. Il s'ensuit, $f(y_1^1) = 1$ et $PB_f(y_1^1) = \{x_1\}$. Ainsi, les deux arêtes $x_0 x_1$ et $x_1 x_2$ appartiennent à $\overline{E_f}$.

5. $f(y_0^1) = 2$ et $f(y_2^1) = 3$ (le cas $f(y_0^1) = 3$ et $f(y_2^1) = 2$ est similaire par symétrie).

Nous avons $PB_f(y_0^1) = \{y_0^2, \dots, y_0^{\ell_0}\}$ et $PB_f(y_2^1) = \{y_2^1\}$, ce qui implique $P_{y_0^1} = y_0^1 y_0^j$ pour un certain $j \in \{2, \dots, \ell_0\}$, et $P_{y_2^1} = y_2^1 x_2 x_1 y_1^l$. Ainsi l'arête $x_0 x_1$ et les arêtes pendantes $y_2^l x_2$, $l = 2, \dots, \ell_2$ appartiennent à $\overline{E_f}$.

Dans chaque cas, nous avons prouvé l'existence d'au moins deux arêtes dans $\overline{E_f}$, et donc $\Gamma_b(CT) \leq m - 2$. Comme $\Gamma_b(CT) \geq m - n \geq m - 2$, nous déduisons l'égalité $\Gamma_b(CT) = m - 2$ (voir Figure 4.2 (d) et (e)). \square

Nous donnons dans le lemme suivant une borne inférieure au nombre de domination broadcast supérieur sur les chenilles sans troncs.

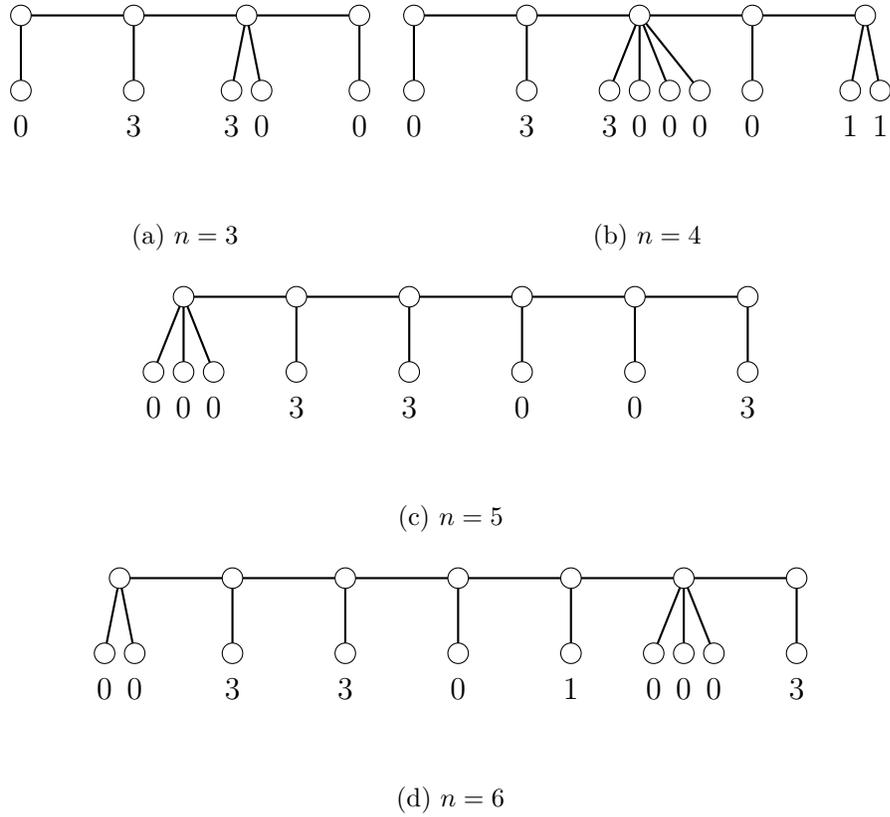


FIGURE 4.3 – Exemples du broadcast f défini au Lemme 4.6

Lemme 4.6. *Si CT est une chenille sans troncs, de longueur $n \geq 1$, alors $\Gamma_b(CT) \geq \lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor$.*

Preuve. Soit $CT = CT(\ell_0, \dots, \ell_n)$ une chenille sans troncs, de longueur n , où $n + 1 = 4q + r$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $r = 0, \dots, 3$. Définissons l'application f (voir Figure 4.3), en posant :

$$\begin{cases} f(y_i^1) = 3 & \text{si } i \in \{0, \dots, n - r\} \text{ et } i \equiv 1, 2[4] \\ f(y_n^j) = 1 \text{ pour tout } j = 1, \dots, \ell_n, & \text{si } r = 1 \\ f(y_n^1) = 3, & \text{si } r = 2 \\ f(y_n^1) = 3 \text{ et } f(y_{n-2}^j) = 1 \text{ pour tout } j = 1, \dots, \ell_{n-2}, & \text{si } r = 3 \end{cases}$$

et $f(u) = 0$, pour le reste des sommets.

Il est clair que l'application f est un broadcast dominant minimal de coût

$$\sigma(f) = \begin{cases} \frac{3(n+1)}{2}, & \text{si } r = 0, 2, \\ \frac{3n}{2} + \ell_n, & \text{si } r = 1, \\ \frac{3n}{2} + \ell_{n-2}, & \text{si } r = 3. \end{cases}$$

Par conséquent, $\sigma(f) \geq \lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor$, et $\Gamma_b(CT) \geq \lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor$. \square

Par le Lemme 4.6 et le Lemme 4.5, nous déduisons une caractérisation des chenilles sans troncs diamétrales.

Corollaire 4.7. *Si $CT = CT(\ell_0, \dots, \ell_n)$ est une chenille sans troncs, de longueur $n \geq 1$, alors CT est diamétrale si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. $n = 1$, $\ell_0 + \ell_1 \in \{2, 3\}$.
2. $n = 2$, $\ell_0 = \ell_2 = 1$ et $\ell_1 \in \{1, 2\}$.

Preuve. Soit $CT = CT(\ell_0, \dots, \ell_n)$ une chenille sans troncs de longueur $n \geq 1$, et de taille m . Du Lemme 4.6, nous obtenons $\Gamma_b(CT) \geq \lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor$. Comme $\text{diam}(CT) = n + 2$, nous déduisons $\Gamma_b(CT) \geq \lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor > \text{diam}(CT)$, si $n \geq 3$.

Si $n = 1$, alors $\text{diam}(CT) = 3$. Par le Lemme 4.5, nous avons $\Gamma_b(CT) = m$ si $m = 3$, et $\Gamma_b(CT) = m - 1$ si $m \geq 4$. Il s'ensuit, $\Gamma_b(CT) = \text{diam}(CT)$ si et seulement si $(\ell_0, \ell_1) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$. Si $n = 2$, alors $\text{diam}(CT) = 4$, et du même lemme, nous avons $\Gamma_b(CT) = m - 1$, si $\ell_0 = \ell_1 = 1$ (ou $\ell_1 = \ell_2 = 1$, par symétrie) et $\Gamma_b(CT) = m - 2$, sinon. Ainsi, nous obtenons $\Gamma_b(CT) = \text{diam}(CT)$ si et seulement si $(\ell_0, \ell_1, \ell_2) \in \{(1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$. \square

D'après le Corollaire 4.7, nous pouvons considérer dans la suite les chenilles CT de longueur $n \geq 3$. Ces chenilles ne sont donc pas diamétrales et tout Γ_b -broadcast f sur CT vérifie $|V_f^+| \geq 2$.

Nous déterminons dans la proposition suivante la valeur de Γ_b sur les chenilles qui vérifient $\ell_i \geq 2$ pour tout $i = 0, \dots, n$.

Proposition 4.8. *Si CT est une chenille de longueur $n \geq 3$, où $\ell_i \geq 2$ pour tout $i = 0, \dots, n$, alors $\Gamma_b(CT) = \sum_{i=0}^n \ell_i$*

Preuve. Etant donné que le coût d'un broadcast unitaire dominant (minimal) est $\sum_{i=0}^n \ell_i$, nous déduisons $\Gamma_b(CT) \geq \sum_{i=0}^n \ell_i$. Déterminons l'inégalité dans l'autre sens. Soit f un Γ_b -broadcast sur CT , où chaque f -sommet broadcast est un sommet pendant (un tel broadcast existe par le Lemme 4.1). Nous démontrons d'abord que $|\overline{E}_f| \geq n$. Pour cela, nous considérons une arête $x_i x_{i+1}$ $i \in \{0, \dots, n-1\}$ de l'épine dorsale $P_n = x_0 x_1 \dots x_n$. Si $x_i x_{i+1}$ est une arête d'une certaine chaîne $P_v^f \in \mathcal{P}^f$, alors du Lemme 4.4, v^p est aussi un sommet pendant non

adjacent à x_i . Ainsi, l'ensemble $\overline{E_f}$ contient soit $\ell_i \geq 2$ soit $\ell_i - 1 \geq 1$ arêtes incidentes à x_i selon que l'arête $x_{i-1}x_i$ appartient P_v^f ou non. Si aucune des chaînes de \mathcal{P}^f contient $x_i x_{i+1}$, alors $x_i x_{i+1} \in \overline{E_f}$. Par conséquent, $|\overline{E_f}| \geq n$, et ainsi, $\Gamma_b(CT) = |E(CT)| - |\overline{E_f}| \leq |E(CT)| - n = \sum_{i=0}^n \ell_i$. \square

Nous montrons dans le lemme suivant que pour les chenilles où $\ell_i = 1$ pour tout $i = 0, \dots, n$, tout Γ_b -broadcast sur CT satisfait $f(u) \neq 2$ pour tout $u \in V_f^+$.

Lemme 4.9. *Si CT est une chenille de longueur $n \geq 3$, où $\ell_i = 1$ pour tout $i = 0, \dots, n$, et f est un Γ_b -broadcast sur CT , alors $f(u) \neq 2$ pour tout f -sommet broadcast u .*

Preuve. Soit f un Γ_b -broadcast sur CT . Raisonnons par l'absurde, et supposons que $f(u) = 2$ pour un certain $u \in V_f^+$. Par le Lemme 4.4, u et son f -voisin privé frontière u^p sont pendants. Comme $f(u) = 2$, alors u et u^p sont adjacents au même sommet support, une contradiction car $\ell_i = 1$ pour tout $i = 0, \dots, n$. \square

La propriété des chenilles $CT = CT(1, 1, \dots, 1)$ établie dans le Lemme 4.9 nous permet d'avoir la valeur exacte du nombre de domination broadcast supérieur de CT .

Théorème 4.10. *Si CT est une chenille de longueur $n \geq 3$, où $\ell_i = 1$ pour tout $i = 0, \dots, n$, alors $\Gamma_b(CT) = \lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor$.*

Preuve. Du Lemme 4.6, nous avons $\Gamma_b(CT) \geq \lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor$. Pour l'inégalité dans l'autre sens, nous considérons un Γ_b -broadcast sur CT f qui satisfait $f(v) \neq 2$ pour tout f -sommet broadcast v . Grâce au Lemme 4.1 et le Lemme 4.9, nous pouvons garantir l'existence d'un tel broadcast. Soit $V_f^+ = \{v_1, \dots, v_s\}$ l'ensemble des f -sommets broadcast, ordonnés de telle sorte que pour tout $i, j = 1, \dots, s$, si $x_{i'}$ est le sommet support adjacent à v_i et $x_{j'}$ est le sommet support adjacent à v_j , alors $i < j$ si et seulement si :

1. Le sommet support $x_{i'}$ se situe à gauche du sommet support $x_{j'}$ dans l'épine dorsale $P_n = x_0 x_1 \dots x_n$ donc $i' < j'$, avec $i', j' = 0, \dots, n$, ou
2. les sommets v_i et v_j sont adjacents au même sommet support $x_{i'}$, c.à.d., $v_i = y_{i' k_1}$, $v_j = y_{i' k_2}$ et $k_1 < k_2$.

Ainsi, si $i < j$, alors soit $i' < j'$ soit $i' = j'$ et $k_1 < k_2$, avec $i', j' = 0, \dots, n$ et $k_1, k_2 = 1, \dots, \ell_{i'}$.

Etant donné que v_k est une feuille, nous avons $v_k = y_i^1$ pour un certain $i = 0, \dots, n$. Dans la suite, notons par e_j l'arête pendante $y_j^1 x_j$, $j \in \{0, \dots, n\}$.

Pour prouver l'énoncé, nous considérons deux cas.

1. $f(v_k) \geq 3$.

Du Lemme 4.4, nous affirmons que le f -voisin privé frontière v_k^p est un sommet pendant. Il s'ensuit que la chaîne géodésique reliant v_k à v_k^p noté P_{v_k} est la chaîne $v_k x_i x_{i+1} \dots x_{i+f(v_k)-2} v_k^p$ ou la chaîne $v_k x_i x_{i-1} \dots x_{i-f(v_k)+2} v_k^p$. Par conséquent, $\{e_{i+1}, \dots, e_{i+f(v_k)-3}\} \subset \overline{E_f}$ ou $\{e_{i-1}, \dots, e_{i-f(v_k)+3}\} \subset \overline{E_f}$. Dans le cas où $0 \leq k < s$, $\overline{E_f}$ contient de plus une autre arête, qui sera soit $x_{i+f(v_k)-2} x_{i+f(v_k)-1}$ ou $x_i x_{i+1}$, suivant la position de v_k et de v_k^p . Ainsi, $|\overline{E_f}| \geq f(v_k) - 3$ si $k = s$, et $|\overline{E_f}| \geq f(v_k) - 2$ sinon.

2. $f(v_k) = 1$.

Etant donné que $P_{v_k} = y_i^1 x_i$ (rappelons que $v_k = y_i^1$), nous déduisons que $x_i x_{i+1} \in \overline{E_f}$, et donc $|\overline{E_f}| \geq 1$, si $0 \leq k < s$.

Notons que si une arête $x_j x_{j+1}$, $j = 0, \dots, n-1$, de l'épine dorsale P_n , appartient à $\overline{E_f}$, alors x_j est adjacent au dernier sommet pendant, à savoir y_j^1 , d'une certaine chaîne de \mathcal{P}^f , et comme les chaînes de \mathcal{P}^f sont deux à deux disjointes (résultat du Lemme 2.30), alors

$$|\overline{E_f}| = \sum_{\substack{k=1 \\ f(v_k) \geq 3}}^{s-1} (f(v_k) - 2) + \sum_{\substack{k=1 \\ f(v_k)=1}}^{s-1} 1 + \begin{cases} f(v_s) - 3 & \text{si } f(v_s) \geq 3, \\ 0 & \text{si } f(v_s) = 1. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$|\overline{E_f}| = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ f(v_k) \geq 3}}^s (f(v_k) - 2) \right) + \sum_{\substack{k=1 \\ f(v_k)=1}}^s 1 - 1.$$

Il s'ensuit,

$$|\overline{E_f}| \geq \Gamma_b(CT) - 2|\{v_k : f(v_k) \geq 3\}| - 1.$$

Comme $\Gamma_b(CT) = |E(CT)| - |\overline{E_f}|$ et la taille de la chenille CT est $2n + 1$, nous déduisons

$$2\Gamma_b(CT) \leq |E(CT)| + 2|\{v_k : f(v_k) \geq 3\}| + 1 = (2n + 2) + 2|\{v_k : f(v_k) \geq 3\}|,$$

ce qui implique

$$\Gamma_b(CT) \leq n + 1 + |\{v_k : f(v_k) \geq 3\}|.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que dans chaque sous-chenille $CT[i, i + 3]$, $i = 0, \dots, n - 3$, le nombre des f -sommets broadcast de poids $f(v) \geq 3$ ne peut dépasser 2.

Ainsi, $|\{v_k : f(v_k) \geq 3\}| \leq \frac{n+1}{2}$ et $\Gamma_b(CT) \leq \frac{3(n+1)}{2}$. \square

Nous avons déterminé la valeur de Γ_b pour les chenilles où $\ell_i \geq 2$ pour tout $i = 0, \dots, n$ (Proposition 4.8), et pour les chenilles où $\ell_i = 1$ pour tout $i = 0, \dots, n$ (Théorème 4.10). Maintenant, nous considérons les chenilles qui contiennent le motif 1 et le motif 2^+ . Nous commençons par montrer que toute chenille admet un Γ_b -broadcast f avec $f(u) \neq 2$ pour tout $u \in V_f^+$.

Lemme 4.11. *Si CT est une chenille sans troncs, de longueur $n \geq 3$, alors CT admet un Γ_b -broadcast f avec $f(u) \neq 2$ pour tout $u \in V_f^+$.*

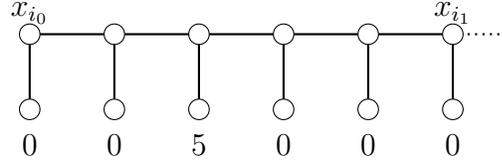
Preuve. Soit g un Γ_b -broadcast sur la chenille CT et soit $u \in V_g^+$, avec $g(u) = 2$. Par le Lemme 4.4, le sommet u et son g -voisin privé frontière u^p sont des sommets pendants. Comme $g(u) = 2$, alors $u = y_i^1$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$, et les deux sommets u et u^p sont adjacents au même sommet support x_i . Considérons l'application f obtenue à partir de g en remplaçant les g -valeurs de y_i^j , $j = 1, \dots, \ell_i$, par $f(y_i^j) = 1$, $j = 1, \dots, \ell_i$. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT de coût $\sigma(f) = \sigma(g) + \ell_i - 2$. L'optimalité de g implique $\ell_i = 2$, et donc $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Nous pouvons répéter cette transformation sur chaque f -sommet broadcast de poids 2, jusqu'à l'obtention d'un Γ_b -broadcast où le poids associé à chaque sommet broadcast est différent de 2. \square

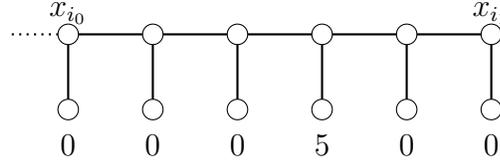
Nous démontrons dans le lemme suivant qu'il existe un Γ_b -broadcast f qui satisfait $f(u) \leq 3$ pour tout $u \in V_f^+$.

Lemme 4.12. *Si CT est une chenille sans troncs de longueur $n \geq 3$, alors CT admet un Γ_b -broadcast f où $f(u) \leq 3$ pour tout $u \in V_f^+$.*

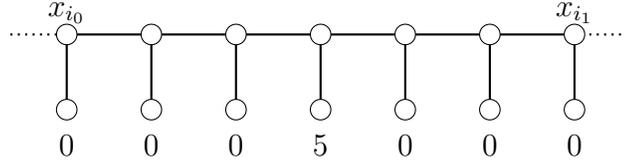
Preuve. Soit g un Γ_b -broadcast sur CT . Supposons qu'il existe un g -sommet broadcast $u = y_i^1$ pour un certain $i \in \{0, \dots, n\}$, avec $g(u) \geq 4$ et u est le g -sommet broadcast le plus à gauche qui satisfait cette propriété. Par le Lemme 4.4, u et son g -voisin privé frontière u^p sont des sommets pendants.



(a) $i = 2, g(u) = 5$ et $i - g(u) + 2 < 0$



(b) $i - g(u) + 2 \geq 0$ et $i + g(u) - 2 > n$



(c) $i - g(u) + 2 \geq 0$ et $i + g(u) - 2 \leq n$

FIGURE 4.4 – Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 1.

Nous considérons la sous-chenille $CT^* = CT[i_0, i_1]$, où i_0 et i_1 sont définis suivant les deux cas suivants.

1. Tout sommet pendant appartenant à la frontière broadcast $B_g(u)$ appartient à $PB_g(u)$.

Dans ce cas, nous posons :

$$\begin{cases} i_0 = 0 \text{ et } i_1 = i + g(u) - 2, & \text{si } i - g(u) + 2 < 0, \\ i_0 = i - g(u) + 2 \text{ et } i_1 = n, & \text{si } i + g(u) - 2 > n, \\ i_0 = i - g(u) + 2 \text{ et } i_1 = i + g(u) - 2, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{voir Figure 4.4})$$

Il est facile de vérifier que $i_0 < i_1$.

De plus, $i_1 - i_0 + 1 \leq 3$ est vraie si et seulement si ($i = 0$ et $g(u) = 4$) ou ($i = n$ et $g(u) = 4$).

En effet, si $i = 0$ et $g(u) = 4$, alors $i - g(u) + 2 = -2 < 0$, $i_0 = 0$ et $i_1 = i + g(u) - 2 = 2$, donc $i_1 - i_0 + 1 \leq 3$ et si $i = n$ et $g(u) = 4$, alors $i + g(u) - 2 = n + 2 > n$, $i_1 = n$ et $i_0 = i - g(u) + 2 = n - 2$, donc $i_1 - i_0 + 1 \leq 3$.

Inversement, supposons que $i_1 - i_0 + 1 \leq 3$ et $g(u) \geq 4$. Nous considérons trois cas.

Si $i - g(u) + 2 < 0$, alors $i_1 - i_0 + 1 = i + g(u) - 1 \leq 3$, et $i + 3 \leq 3$, c'est-à-dire $i = 0$, et $i - g(u) + 2 < 0$. Si $i + g(u) - 2 > n$, alors $i_1 - i_0 + 1 = n - i + g(u) - 1 \leq 3$, et par suite, $n - i + 3 \leq 3$, c'est-à-dire $i = n$, et $i + g(u) - 2 > n$. Si $i - g(u) + 2 \geq 0$ et $i + g(u) - 2 \leq n$, alors $i_1 - i_0 + 1 = 2g(u) - 3 \leq 3$ ce qui implique $g(u) \leq 3$, une contradiction.

Ainsi, $i_1 - i_0 + 1 \leq 3 \Leftrightarrow g(u) = 4$ et $i \in \{0, n\}$.

2. Il existe un sommet pendant v , tel que $v \in B_g(u)$ et $v \notin PB_g(u)$.

Dans ce cas, il existe un sommet broadcast u' , $u' \neq u$, tel que v est g -dominé par u et par u' avec $g(u') \geq 3$. Comme u' est un sommet pendant, $u' = y_j^1$ pour un certain $j > i$. Les g -voisins privé frontière de u et u' sont $PB_g(u) = L(x_{i-g(u)+2}^1)$ et $PB_g(u') = L(x_{j+g(u')-2}^1)$, respectivement.

Soient $i_0 = i - g(u) + 2$ et $i_1 = j + g(u') - 2$. L'inégalité $i_1 - i_0 + 1 \geq 4$ est toujours satisfaite dans ce cas, car $i_1 - i_0 + 1 = j - i + g(u) + g(u') - 4 + 1 \geq 5$, donc on peut écrire $i_1 - i_0 + 1 = 4q + r$, où $q \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq r \leq 3$.

Nous définissons une application h , définie à partir de g en modifiant seulement les g -valeurs des sommets pendants appartenant à la sous-chenille $CT^* = CT[i_0, i_1]$ (nous savons déjà que la h -valeur de chaque support est 0). Nous considérons deux cas selon la valeur de $i_1 - i_0 + 1$ (qui est la longueur de CT^*).

1. $i_1 - i_0 + 1 \leq 3$.

Dans ce cas, chaque sommet pendant de $B_g(u)$ appartient à $PB_g(u)$, $i = 0$ et $g(u) = 4$ (le cas $i = n$ et $g(u) = 4$ est similaire, par symétrie).

Si $i = 0$, nous posons $h(y_0^1) = 3$, $h(y_j^1) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_2$, et $h(z) = 0$ pour tout $z \in \{y_0^2, \dots, y_0^{\ell_0}, y_1^1, \dots, y_1^{\ell_1}\}$ (voir Figure 4.5).

L'application h est un broadcast dominant minimal de coût $\sigma(h) = \sigma(g) + 3 + \ell_2 - g(u) = \sigma(g) + \ell_2 - 1$. L'optimalité de g implique que $\ell_2 = 1$, ainsi $\sigma(h) = \sigma(g)$.

2. $i_1 - i_0 + 1 \geq 4$.

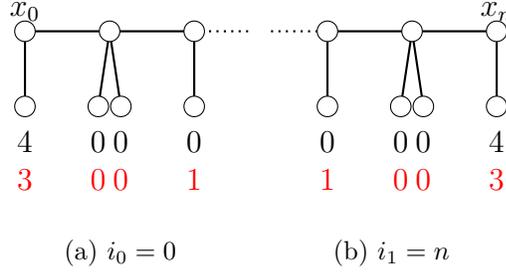


FIGURE 4.5 – Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 1.

Pour $t = i_0, \dots, i_1 - r$, nous posons $h(y_t^j) = 0$ pour tout $j = 2, \dots, \ell_t$ avec $\ell_t \geq 2$, et

$$h(y_t^1) = \begin{cases} 0, & \text{si } t - i_0 + 1 \equiv 0, 1[4], \\ 3, & \text{si } t - i_0 + 1 \equiv 2, 3[4]. \end{cases}$$

Dans le cas $r = 0$, tous les sommets de la chenille sont h -pondérés. Nous supposons maintenant que $r \neq 0$ et nous considérons deux sous-cas selon que $i_0 = 0$ ou non.

(a) $i_0 \neq 0$.

Nous posons $h(y_t^j) = 1$ pour tout $t = i_1 - r + 1, \dots, i_1$ et $j = 1, \dots, \ell_t$,

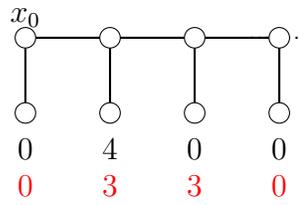
(b) $i_0 = 0$.

Nous posons

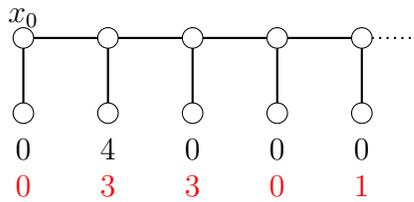
$$\left\{ \begin{array}{ll} h(y_{i_1}^j) = 1 \text{ pour tout } j = 1, \dots, \ell_{i_1}, & \text{si } r = 1 \\ h(y_{i_1-1}^j) = 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, \ell_{i_1-1}, h(y_{i_1}^1) = 3 \text{ et} \\ h(y_{i_1}^j) = 0 \text{ pour tout } j = 2, \dots, \ell_{i_1}, & \text{si } r = 2 \\ h(y_{i_1-2}^j) = 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, \ell_{i_1-2}, \\ h(y_{i_1-1}^j) = 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, \ell_{i_1-1}, \\ h(y_{i_1}^1) = 3 \text{ et } h(y_{i_1}^j) = 0 \text{ pour tout } j = 2, \dots, \ell_{i_1}, & \text{si } r = 3. \end{array} \right.$$

Nous déterminons maintenant le coût du broadcast dominant minimal h . Nous considérons trois cas.

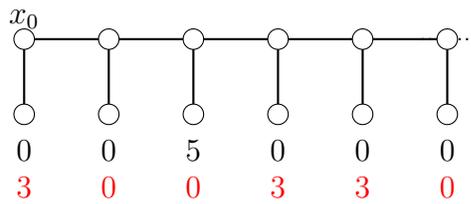
- (i) Tout sommet pendent de $B_g(u)$ appartient à $PB_g(u)$ et $i - g(u) + 2 < 0$.
(le cas $i + g(u) - 2 > n$ est similaire par symétrie).



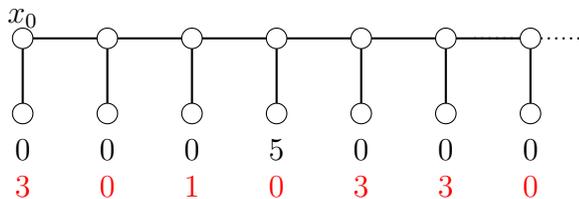
(a) $r = 0$



(b) $r = 1$



(c) $r = 2$



(d) $r = 3$

FIGURE 4.6 – Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 2.(i).

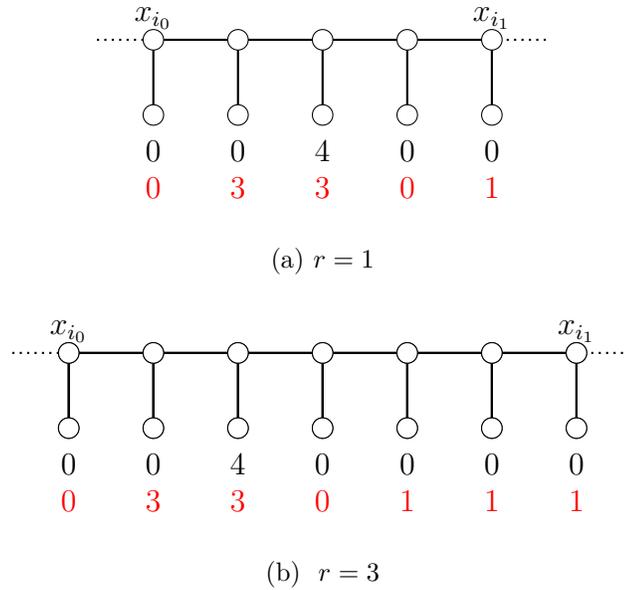


FIGURE 4.7 – Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 2.(ii).

Dans ce cas, $4 \leq i_1 - i_0 + 1 = i + h(u) - 1$, et par suite, $i + h(u) \geq 5$. Nous obtenons

$$\sigma(h) = \sigma(g) - g(u) + \begin{cases} \frac{3(i_1 - i_0 + 1)}{2}, & \text{si } r = 0, \\ \frac{3(i_1 - i_0)}{2} + 1, & \text{si } r = 1, \\ \frac{3(i_1 - i_0 - 1)}{2} + 3, & \text{si } r = 2, \\ \frac{3(i_1 - i_0 - 2)}{2} + 4, & \text{si } r = 3, \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\sigma(h) = \sigma(g) + \begin{cases} i + \frac{i+g(u)-3}{2}, & \text{si } r = 0, 2, \\ i + \frac{i+g(u)-4}{2}, & \text{si } r = 1, 3. \end{cases} \quad (\text{voir Figure 4.6})$$

Comme, $i + h(u) \geq 5$, nous obtenons $\sigma(h) \geq \sigma(g) + i + 1$ si $r = 0, 2$ et $\sigma(h) \geq \sigma(g) + i + \frac{1}{2}$, sinon, ce qui contredit l'optimalité de g .

- (ii) Tout sommet pendant de $B_g(u)$ appartient à $PB_g(u)$ et $0 \leq i - g(u) + 2 < i + g(u) - 2 \leq n$. Dans ce cas, $4 \leq i_1 - i_0 + 1 = 2h(u) - 3$ est impair.

Nous obtenons,

$$\sigma(h) = \sigma(g) - g(u) + \begin{cases} \frac{3(2g(u)-4)}{2} + 1, & \text{si } r = 1, \\ \frac{3(2g(u)-6)}{2} + 4, & \text{si } r = 3, \end{cases}$$

et donc $\sigma(h) = \sigma(g) + 2g(u) - 5 \geq \sigma(g) + 3$, ce qui contredit l'optimalité de g (voir Figure 4.7).

(iii) Les Points (i) et (ii) ne sont pas satisfaits.

Dans ce cas, nous avons $i_1 - i_0 + 1 = j - i + g(u') + g(u) - 3 \geq 6$. En effet, $g(u) \geq 4$, $g(u') \geq 3$, $j - i \geq 1$ et si $j - i = 1$, alors $g(u') = g(u) \geq 4$, car sinon u' g -dominerait u^p .

Pour $i_0 = 0$, nous obtenons

$$\sigma(h) = \sigma(g) - g(u) - g(u') + \begin{cases} \frac{3(i_1 - i_0 + 1)}{2}, & \text{si } r = 0, \\ \frac{3(i_1 - i_0)}{2} + 1, & \text{si } r = 1, \\ \frac{3(i_1 - i_0 - 1)}{2} + 3, & \text{si } r = 2, \\ \frac{3(i_1 - i_0 - 2)}{2} + 4, & \text{si } r = 3, \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\sigma(h) = \sigma(g) + \begin{cases} j - i + \frac{j - i + g(u') + g(u) - 9}{2}, & \text{si } r = 0, 2, \\ j - i + \frac{j - i + g(u') + g(u) - 10}{2}, & \text{si } r = 1, 3. \end{cases}$$

Donc, $\sigma(h) > \sigma(g)$, ce qui contredit l'optimalité de g (voir Figure 4.8).

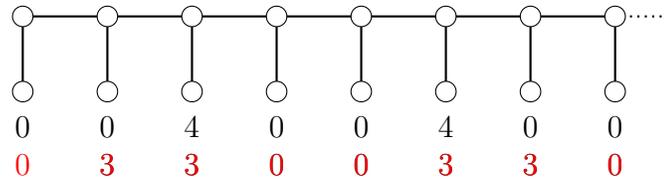
Pour $i_0 > 0$, nous obtenons

$$\sigma(h) = \sigma(g) - g(u) - g(u') + \begin{cases} \frac{3(i_1 - i_0 + 1)}{2}, & \text{si } r = 0, \\ \frac{3(i_1 - i_0)}{2} + \ell_{i_1}, & \text{si } r = 1, \\ \frac{3(i_1 - i_0 - 1)}{2} + \ell_{i_1 - 1} + \ell_{i_1}, & \text{si } r = 2, \\ \frac{3(i_1 - i_0 - 2)}{2} + \ell_{i_1 - 2} + \ell_{i_1 - 1} + \ell_{i_1}, & \text{si } r = 3, \end{cases}$$

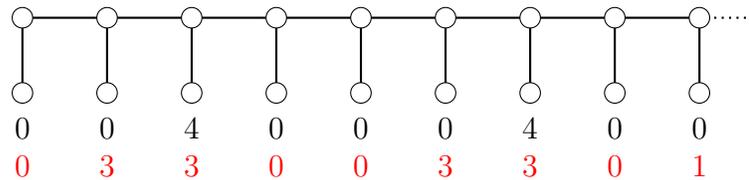
c'est-à-dire,

$$\sigma(h) = \sigma(g) + \begin{cases} j - i + \frac{j - i + g(u') + g(u) - 9}{2}, & \text{si } r = 0, \\ j - i + \frac{j - i + g(u') + g(u) - 12}{2} + \ell_{i_1}, & \text{si } r = 1, \\ j - i + \frac{j - i + g(u') + g(u) - 15}{2} + \ell_{i_1 - 1} + \ell_{i_1}, & \text{si } r = 2, \\ j - i + \frac{j - i + g(u') + g(u) - 18}{2} + \ell_{i_1 - 2} + \ell_{i_1 - 1} + \ell_{i_1}, & \text{si } r = 3. \end{cases} \quad (\text{voir Figure 4.9})$$

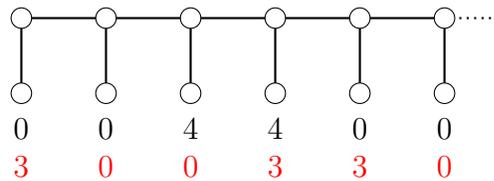
Si $r = 0$ ou $r = 1$, nous obtenons directement $\sigma(h) > \sigma(g)$, ce qui contredit l'optimalité de g .



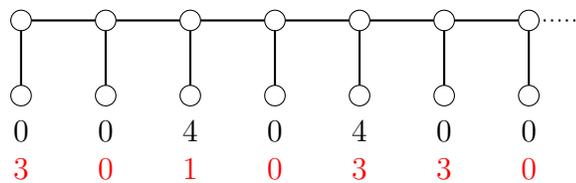
(a) $r = 0$



(b) $r = 1$



(c) $r = 2$



(d) $r = 3$

FIGURE 4.8 – Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 2.(iii) et $i_0 = 0$.

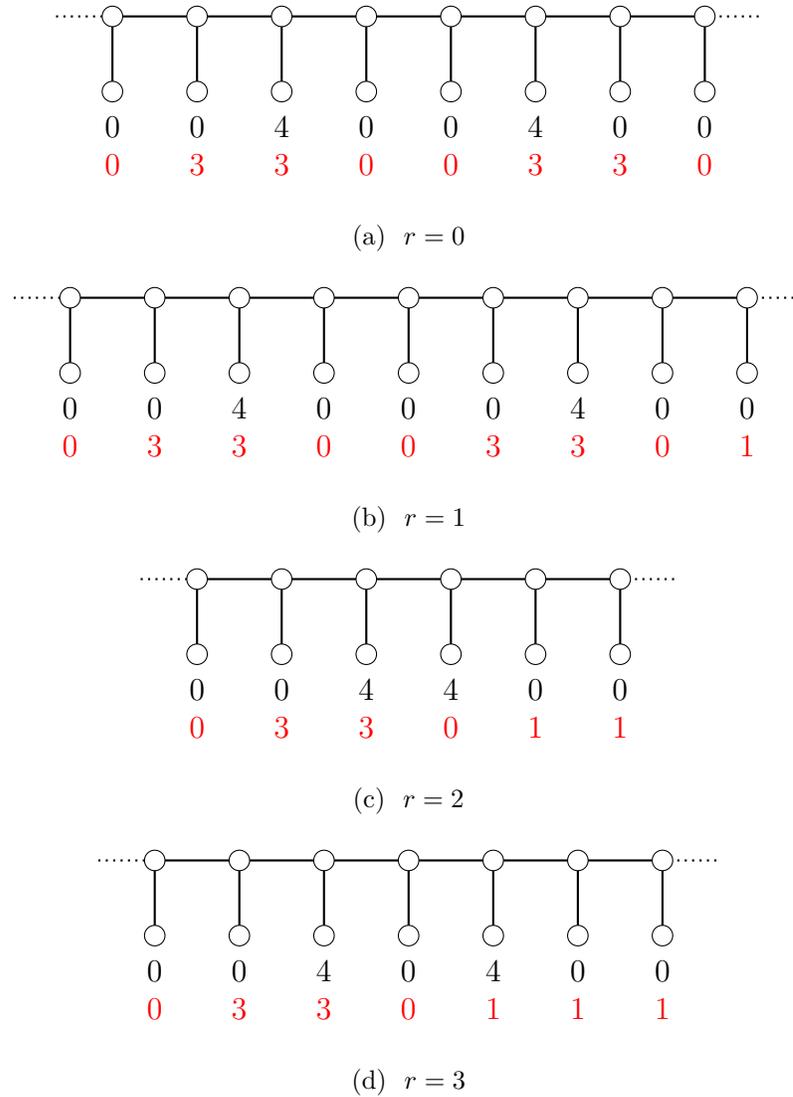


FIGURE 4.9 – Illustration de la preuve du Lemme 4.12, Cas 2.(iii) et $i_0 > 0$.

Si $r = 2$, alors $\sigma(h) = \sigma(g) + j - i + \frac{j-i+g(u')+g(u)-15}{2} + \ell_{i_1-1} + \ell_{i_1} \geq \sigma(g) - 2 + \ell_{i_1-1} + \ell_{i_1}$.
L'optimalité de g implique alors $\ell_{i_1-1} = \ell_{i_1} = 1$, et $\sigma(h) = \sigma(g)$ dans ce cas.

Si $r = 3$, alors $\sigma(h) = \sigma(g) + j - i + \frac{j-i+g(u')+g(u)-18}{2} + \ell_{i_1-2} + \ell_{i_1-1} + \ell_{i_1}$ et $j - i + g(u') + g(u)$ doit être pair. Ainsi,

$$\sigma(h) \geq \sigma(g) + (j - i) - 4 + \ell_{i_1-2} + \ell_{i_1-1} + \ell_{i_1} \geq \sigma(g) - 3 + \ell_{i_1-1} + \ell_{i_1}.$$

L'optimalité de g implique $\ell_{i_1-2} = \ell_{i_1-1} = \ell_{i_1} = 1$, et $\sigma(h) = \sigma(g)$ dans ce cas.

Nous répétons cette transformation sur chaque h -sommet broadcast de valeur supérieure à 3 jusqu'à l'obtention d'une application avec la condition requise. \square

Nous allons à présent, établir quelques propriétés sur les chenilles sans troncs.

Lemme 4.13. *Si CT est une chenille sans troncs, de longueur $n \geq 3$, alors CT admet un Γ_b -broadcast f , qui satisfait :*

1. *Si $\ell_0 + \ell_1 \geq 3$, alors $f(y_0^j) \neq 3$ pour tout j , $j = 1, \dots, \ell_0$ (ou, si $\ell_{n-1} + \ell_n \geq 3$, alors $f(y_n^j) \neq 3$ pour tout j , $j = 1, \dots, \ell_n$).*
2. *Si y_i^1 est un f -sommet broadcast pour un certain $i = 1, \dots, n$, avec $f(y_i^1) = 3$, alors l'ensemble $PB_f(y_i^1)$ est égal à $L(x_{i-1})$ ou $L(x_{i+1})$ (dans ce cas, on dit que y_i^1 admet un seul côté privé).*
3. *S'il existe un sommet pendant f -dominé par deux f -sommets broadcast u et u' , alors $d(u, u') = 3$.*

Preuve. Soit g un Γ_b -broadcast sur la chenille CT , satisfaisant les conditions des Lemmes 4.1, 4.11 et 4.12. Ainsi, chaque g -sommet broadcast u est un sommet pendant et sa g -valeur $g(u) \in \{1, 3\}$. Comme $n \geq 3$, du Corollaire 4.7, on déduit $|V_g^+| \geq 2$.

1. $\ell_0 + \ell_1 \geq 3$ et $g(y_0^1) = 3$.

Dans ce cas, nous considérons l'application f définie à partir de g en attribuant la valeur 1 à chaque sommet pendant appartenant à $CT[0, 1]$. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 3 + \ell_0 + \ell_1 \geq \Gamma_b(CT)$. L'optimalité de g implique $\ell_0 + \ell_1 = 3$, et par suite $\sigma(f) = \sigma(g)$. Par symétrie, nous obtenons aussi $f(y_n^j) = 1$ pour tout j , $j = 1, \dots, \ell_n$, si $\ell_{n-1} + \ell_n \geq 3$.

2. y_i^1 est f -sommet broadcast pour un certain $i = 1, \dots, n$, avec $f(y_i^1) = 3$.

Par la minimalité du broadcast dominant g , $PB_f(y_0^1) = L(x_1)$ (resp. $PB_f(y_n^1) = L(x_{n-1})$) si $g(y_0^1) = 3$ (resp. $g(y_n^1) = 3$). Supposons qu'il existe un g -sommet broadcast y_i^1 , $i = 2, \dots, n-1$, où $g(y_i^1) = 3$ et $PB_g(y_i^1) = L(x_{i-1}) \cup L(x_{i+1})$. Nous considérons l'application f définie à partir de g en remplaçant les g -valeurs des sommets pendants de $CT[i-1, i+1]$ par la valeur 1. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 3 + \ell_{i-1} + \ell_i + \ell_{i+1} \geq \Gamma_b(CT)$. L'optimalité de g implique $\ell_{i-1} + \ell_i + \ell_{i+1} = 3$, et par suite, $\sigma(f) = \sigma(g)$. Par symétrie, nous obtenons aussi $f(y_n^j) = 1$ pour tout j , $j = 1, \dots, \ell_n$, si $\ell_{n-1} + \ell_n \geq 3$.

3. IL existe un sommet pendant f -dominé par deux f -sommets broadcast u et u' .

Soient u et u' deux g -sommets broadcast tels que $N_f[u] \cap N_f[u']$ contient un sommet pendant, disons y_i^1 , et supposons que u est à gauche de u' . Ainsi, $g(u) = g(u') = 3$ et $d(u, u') \leq 4$ car sinon $N_f[u] \cap N_f[u'] = \emptyset$. Si $d(u, u') \neq 3$, alors forcément $d(u, u') = 4$, $PB_f(u) = L(x_{i-2})$ et $PB_f(u') = L(x_{i+2})$. Considérons l'application f définie par $f(y_{i-2}^j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, y_{i-2}^{\ell_{i-2}}$, $f(y_i^1) = f(y_{i+1}^1) = 3$, $f(y_{i-1}^j) = f(y_i^k) = f(y_{i+1}^l) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, y_{i-1}^{\ell_{i-1}}$, $k = 2, \dots, y_i^{\ell_i}$, $l = 2, \dots, y_{i+1}^{\ell_{i+1}}$, et $f(v) = g(v)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT de coût $\sigma(f) = \sigma(g) + \ell_{i-2}$, contradiction avec l'optimalité de g .

□

Soit CT_5^4 une chenille sans troncs de longueur 3, contenant cinq arêtes pendantes. La chenille CT_5^4 doit être l'une des chenilles $CT(2, 1, 1, 1)$, $CT(1, 2, 1, 1)$, $CT(1, 1, 2, 1)$, ou $CT(1, 1, 1, 2)$. Nous dirons qu'une chenille CT est CT_5^4 -libre si CT ne contient aucun des motifs suivants : 2111, 1211, 1121 ou 1112. Par ailleurs, nous dirons qu'un broadcast g sur une chenille CT est un *bon* Γ_b -broadcast si g est un Γ_b -broadcast satisfaisant les conditions des Lemmes 4.4, 4.11, 4.12 et 4.13.

Lemme 4.14. *Si CT est une chenille sans troncs, de longueur $n \geq 3$, alors CT admet un Γ_b -broadcast f tel que $f(y_i^j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_i$, quand $\ell_i \geq 3$, ou $\ell_i = 2$ si CT est une chenille CT_5^4 -libre.*

Preuve. Soit CT une chenille sans troncs de longueur $n \geq 3$, et soit g un bon Γ_b -broadcast

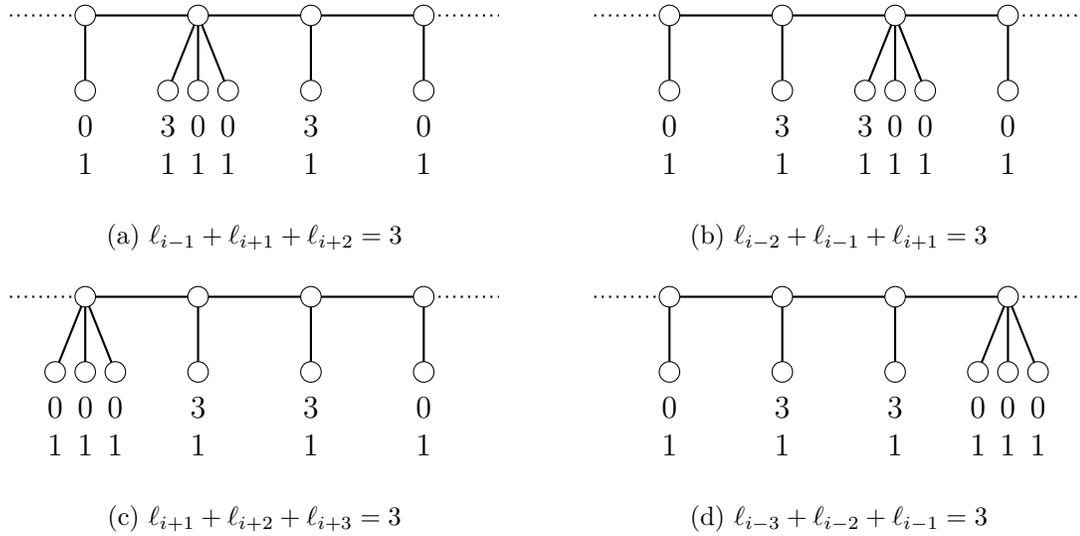


FIGURE 4.10 – Illustration de la preuve du Lemme 4.14, Cas (1.a) et Cas 2.

sur CT . Supposons qu'il existe un sommet support x_i tel que $\ell_i \geq 2$ et $g(y_i^1) \neq 1$ (c'est-à-dire, $g(y_i^j) \neq 1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_i$).

Si $i = 0$ (le cas $i = n$ est similaire, par symétrie), alors $\ell_0 + \ell_1 \geq 3$ et $g(y_0^1) \neq 3$ par le Lemme 4.13(1). Ainsi, $g(y_0^1) = 0$ et y_0^1 est g -dominé par y_1^1 avec une g -valeur $g(y_1^1) = 3$. En considérant la même application f définie dans la preuve du Lemme 4.13(1), nous pouvons vérifier que f satisfait l'énoncé du Lemme ci-dessus.

Supposons maintenant que $0 < i < n$. Nous avons soit $g(y_i^1) = 3$, soit $g(y_i^1) = 0$.

1. $g(y_i^1) = 3$.

D'après le Lemme 4.13(2), le sommet pendant y_i^1 possède un seul côté privé. Supposons sans perte de généralité, que $PB_g(y_i^1) = L(x_{i-1})$, ce qui implique $i + 1 \neq n$. Du Lemme 4.13(3), nous avons $g(y_{i+1}^1) = 3$ et du Lemme 4.13(2), nous avons aussi $PB_g(y_{i+1}^1) = L(x_{i+2})$.

Considérons l'application f définie à partir de g en remplaçant les g -valeurs des sommets pendants de $CT[i - 1, i + 2]$ par la valeur 1. L'application f est un broadcast dominant sur CT de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 6 + \ell_{i-1} + \ell_i + \ell_{i+1} + \ell_{i+2}$. Nous considérons deux cas selon la valeur de ℓ_i .

(a) $\ell_i \geq 3$.

Dans ce cas, l'optimalité de g implique $\ell_i = 3$ et $\ell_{i-1} = \ell_{i+1} = \ell_{i+2} = 1$, et par suite $\sigma(f) = \sigma(g)$ (voir Figure 4.10(a)).

(b) $\ell_i = 2$ et CT est CT_5^4 -libre.

Dans ce cas, la sous-chenille $CT[i-1, i+2]$ doit contenir au moins six arêtes pendantes, et donc $\sigma(f) = \sigma(g) - 6 + \ell_{i-1} + \ell_i + \ell_{i+1} + \ell_{i+2} \geq \sigma(g) = \Gamma_b(CT)$. L'optimalité de g implique $\ell_{i-1} + \ell_i + \ell_{i+1} + \ell_{i+2} = 6$, et donc l'existence de deux sommets supports doubles (adjacent à deux sommets pendants) et les autres sommets supports sont adjacents à un seul sommet pendent, ainsi nous obtenons $\sigma(f) = \sigma(g)$.

2. $g(y_i^1) = 0$.

Dans ce cas, y_i^1 est g -dominé par un g -sommet broadcast, disons sans perte de généralité y_{i+1}^1 , dont la g -valeur est $g(y_{i+1}^1) = 3$, et donc y_i^1 est un g -sommet privé frontière de y_{i+1}^1 par le Lemme 4.13(3). Puisque $\ell_i + \ell_{i+1} \geq 3$, alors $i+1 \neq n$, par le Lemme 4.13(1). De plus, $i+2 \neq n$, car sinon $y_n^1, \dots, y_n^{\ell_n}$ serait dans $PB_g(y_{i+1}^1)$, ce qui contredirait le Lemme 4.13(2). Il s'ensuit, comme dans le précédent cas, $PB_g(y_{i+1}^1) = L(x_i)$, $g(y_{i+2}^1) = 3$ et $PB_g(y_{i+2}^1) = L(x_{i+3})$. Nous considérons l'application f définie à partir de g en remplaçant les g -valeurs des sommets pendants de $CT[i, i+3]$ par la valeur 1 (voir Figure 4.10 (c) et (d)). L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 6 + \ell_i + \ell_{i+1} + \ell_{i+2} + \ell_{i+3}$ et nous concluons comme le cas précédent. \square

Soit CT une chenille sans troncs, d'ordre $n \geq 3$, et soit f un Γ_b -broadcast sur CT . Pour tout sommet support x_i , $i = 0, \dots, n$, avec $\ell_i = 2$, nous notons par $F_i^j = CT[i-j+1, i-j+4]$, $j = 1, \dots, 4$, une chenille de type CT_5^4 . Sur F_i^j , nous considérons une application θ_i^j , définie par $\theta_i^j(y_{i-j+2}^1) = \theta_i^j(y_{i-j+3}^1) = 3$ et $\theta_i^j(v) = 0$ sinon (voir Figure 4.11).

Lemme 4.15. *Si CT est une chenille de longueur $n \geq 3$ et x_i est un support avec $\ell_i = 2$ pour un certain $i \in \{0, \dots, n\}$, alors CT admet un Γ_b -broadcast f tel que*

1. *Si x_i n'apparaît pas dans chaque F_i^j , $j = 1, \dots, 4$, alors $f(y_i^1) = f(y_i^2) = 1$.*
2. *Si x_i est un support d'une sous-chenille CT' de CT , de type CT_5^4 , alors soit $f(y_i^1) = f(y_i^2) = 1$, soit $f(y_i^1) = \theta_i^j(y_i^1)$ et $f(y_i^2) = \theta_i^j(y_i^2)$ pour un certain $j \in \{1, \dots, 4\}$, où $CT' = F_i^j$ et la restriction de f sur CT' est θ_i^j .*

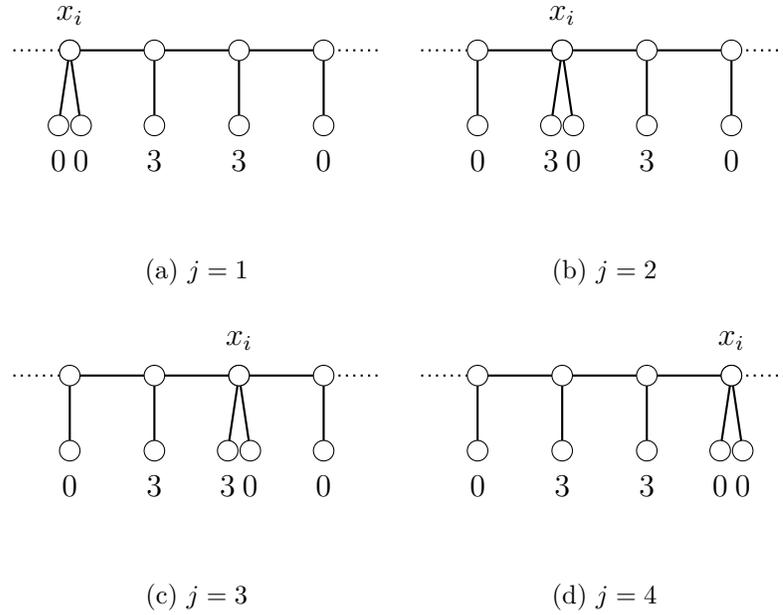


FIGURE 4.11 – La fonction θ_i^j , pour les différentes valeurs de j .

Preuve. Soit g un bon Γ_b -broadcast sur la chenille CT qui satisfait le Lemme 4.14. Si $g(y_i^1) = g(y_i^2) = 1$, nous n'avons rien à prouver et la preuve est terminée. Supposons maintenant que $g(y_i^1) \neq 1$, donc $(g(y_i^1), g(y_i^2)) \in \{(0, 0), (3, 0)\}$. Les sommets y_i^1 et y_i^2 sont g -dominés par un certain g -sommets broadcast u ($u = y_i^1$ est possible), avec $g(u) = 3$ (nous remarquons du Lemme 4.13(1), que $i \neq 0$). Par le Lemme 4.13(2), u possède un seul côté privé, et du Lemme 4.13(3), il existe un g -sommets broadcast u' , tel que $g(u') = 3$ et $d(u, u') = 3$. Soit $X = CT[i_0, i_0 + 3]$ une sous-chenille de CT , dont les sommets pendants sont g -dominés par u ou par u' dans CT . Nous considérons deux cas possibles selon l'appartenance ou non de x_i dans la sous-chenille F_i^j .

1. x_i n'appartient à aucune sous-chenille F_i^j , $j = 1, \dots, 4$.

Dans ce cas, X doit contenir au moins six arêtes pendants. Nous considérons l'application f obtenue à partir de g en remplaçant les g -valeurs des sommets pendants de X par la valeur 1. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 6 + \ell_{i_0} + \ell_{i_0+1} + \ell_{i_0+2} + \ell_{i_0+3} \geq \Gamma_b(CT)$. L'optimalité de g implique $\ell_{i_0} + \ell_{i_0+1} + \ell_{i_0+2} + \ell_{i_0+3} = 6$, de sorte que $\sigma(f) = \sigma(g)$ et f satisfait le Point 1 du

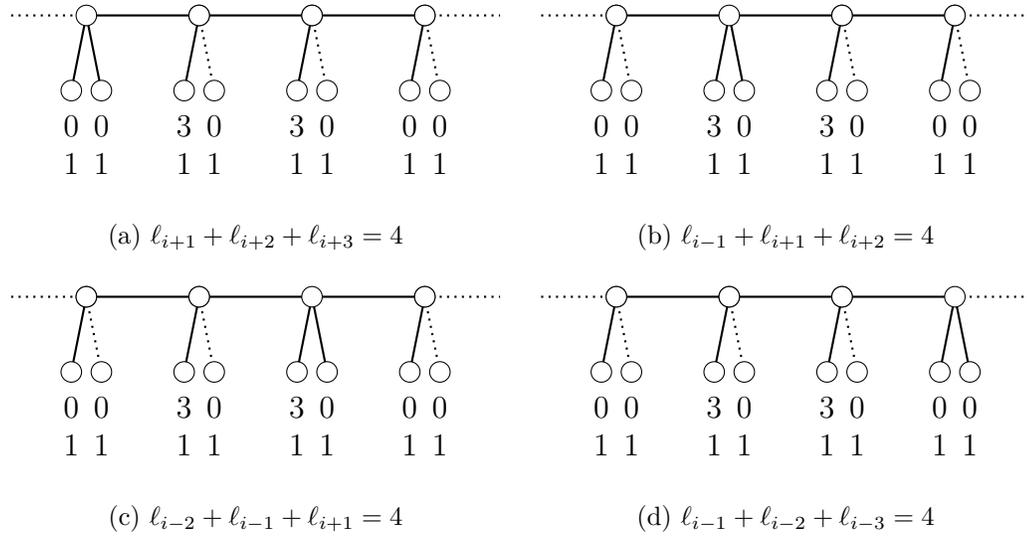


FIGURE 4.12 – Illustration de la preuve du Lemme 4.15, Cas 1.

lemme, (voir Figure 4.12).

2. x_i est un support d'une sous-chenille CT' de CT , de type CT_5^4 .

Dans ce cas, $l_{i_0} + l_{i_0+1} + l_{i_0+2} + l_{i_0+3} \leq 6$, car sinon nous pourrions remplacer les g -valeurs de chaque sommet pendant de X par la valeur 1, et ce nouveau broadcast h serait dominant minimal sur CT , de coût $\sigma(h) > \sigma(g) = \Gamma_b(CT)$, une contradiction avec l'optimalité de g . D'autre part, si l'égalité $l_{i_0} + l_{i_0+1} + l_{i_0+2} + l_{i_0+3} = 6$ est vraie, alors nous considérons l'application f obtenue à partir de g en remplaçant toutes les g -valeurs des feuilles de $CT[i_0, i_0 + 3]$ par la valeur 1. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT de coût $\sigma(f) = \sigma(g)$ et satisfait $f(y_i^1) = f(y_i^2) = 1$. Par conséquent, nous supposons dans la suite $l_{i_0} + l_{i_0+1} + l_{i_0+2} + l_{i_0+3} = 5$, et nous distinguons deux cas selon les valeurs de $g(y_i^1)$ et $g(y_i^2)$.

(a) $g(y_i^1) = g(y_i^2) = 0$.

Dans ce cas, $X = CT[i - 3, i]$ avec $u = y_{i-1}^1$ et $u' = y_{i-2}^1$, ou $X = CT[i, i + 3]$ avec $u = y_{i+1}^1$ et $u' = y_{i+2}^1$. Dans le premier cas, et comme $l_{i-3} + l_{i-2} + l_{i-1} + l_i = 5$ est satisfaite, nous déduisons que $CT[i - 3, i]$ est un CT_5^4 , $g(y_i^1) = \theta_i^4(y_i^1)$ et $g(y_i^2) = \theta_i^4(y_i^2)$, auquel cas $CT' = X = F_i^4$ et la restriction de g sur CT' est θ_i^4 . Dans le deuxième cas, puisque $l_i + l_{i+1} + l_{i+2} + l_{i+3} = 5$ est satisfaite, nous pouvons aussi

déduire que $CT[i, i + 3]$ est un CT_5^4 , $g(y_i^1) = \theta_i^1(y_i^1)$ et $g(y_i^2) = \theta_i^1(y_i^2)$, auquel cas $CT' = X = F_i^1$ et la restriction de g sur CT' est θ_i^1 .

(b) $g(y_i^1) = 3$ et $g(y_i^2) = 0$.

Dans ce cas, $u = y_i^1$ et $u' \in \{y_{i-1}^1, y_{i+1}^1\}$. Le cas où $u' = y_{i-1}^1$, implique que $PB(y_i^1) = L(x_{i+1})$ et $PB(y_{i-1}^1) = L(x_{i-2})$, et donc $X = CT[i - 2, i + 1]$. Puisque $\ell_{i-2} + \ell_{i-1} + \ell_i + \ell_{i+1} = 5$ est satisfaite, $CT[i - 2, i + 1]$ est un type de CT_5^4 , $g(y_i^1) = \theta_i^3(y_i^1)$ et $g(y_i^2) = \theta_i^3(y_i^2)$, auquel cas $CT' = X = F_i^3$ et la restriction de g sur CT' est θ_i^3 . Le cas où $u' = y_{i+1}^1$, implique que $PB(y_i^1) = L(x_{i-1})$ et $PB(y_{i+1}^1) = L(x_{i+2})$, c'est-à-dire $X = CT[i - 1, i + 2]$. Comme $\ell_{i-1} + \ell_i + \ell_{i+1} + \ell_{i+2} = 5$ est vraie, alors $CT[i - 1, i + 2]$ est un type de CT_5^4 , $g(y_i^1) = \theta_i^2(y_i^1)$ et $g(y_i^2) = \theta_i^2(y_i^2)$, auquel cas $CT' = X = F_i^2$ et la restriction de g sur CT' est θ_i^2 .

□

Soient CT_1 et CT_2 deux chenilles de longueurs n_1 et n_2 respectivement. La *concaténation* de CT_1 et CT_2 est une chenille $CT_1 + CT_2$, de longueur $n_1 + n_2 + 1$, où

$$\begin{aligned} (CT_1 + CT_2)[0, n_1] &= CT_1, \\ (CT_1 + CT_2)[n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1] &= CT_2, \\ CT_1 + \emptyset &= CT_1, \text{ et } \emptyset + CT_2 = CT_2. \end{aligned}$$

À l'aide de l'opération concaténation, nous pouvons définir quelques transformations sur toute chenille CT de longueur n . Pour un entier i , $i = 0, \dots, n - n_1$, soit :

— $CT[CT_1/\emptyset, i]$ est la chenille obtenue de CT après suppression de $CT_1 = CT[i, i + n_1]$:

$$CT[CT_1/\emptyset, i] = \begin{cases} CT[n_1 + 1, n] & \text{si } i = 0, \\ CT[0, n - n_1 - 1] & \text{si } i = n - n_1, \\ CT[0, i - 1] + CT[i + n_1 + 1, n] & \text{si } i = 1, \dots, n - n_1 - 1 \end{cases}$$

— $CT[\emptyset/CT_2, i]$ est la chenille obtenue de CT en insérant la chenille CT_2 entre les deux supports x_{i-1} et x_i de CT si $i \neq 0$, et la concaténation de CT_2 et CT sinon,

$$CT[\emptyset/CT_2, i] = \begin{cases} CT_2 + CT & \text{si } i = 0, \\ CT[0, i - 1] + CT_2 + CT[i, n] & \text{si } i = 1, \dots, n - n_1 \end{cases}$$

- $CT[CT_1/CT_2, i]$ est la chenille obtenue de CT en supprimant $CT_1 = CT[i, i + n_1]$ et en insérant CT_2 entre les deux supports x_{i-1} et x_i de CT ,

$$CT[CT_1/CT_2, i] = \begin{cases} CT_2 + CT[n_1 + 1, n] & \text{si } i = 0, \\ CT[0, n - n_1 - 1] + CT_2 & \text{si } i = n - n_1, \\ CT[0, i - 1] + CT_2 + CT[i + n_1 + 1, n] & \text{si } i = 1, \dots, n - n_1 - 1 \end{cases}$$

Lemme 4.16. *Soit CT une chenille sans troncs, de longueur $n \geq 4$, et contenant les motifs 1 et 2^+ . Si $M = CT(1, 1, 1, 1)$ est une sous-chenille de CT , alors*

$$\Gamma_b(CT) = \Gamma_b(CT[M/\emptyset, i]) + 6.$$

Preuve. Soit CT une chenille sans troncs de longueur $n \geq 4$, et contenant les motifs 1 et 2^+ , et soient $v_0v_1v_2v_3$ l'épine dorsale de la sous-chenille M , où w_i est un sommet pendant adjacent à v_i pour $i = 0, \dots, 3$. Pour montrer l'égalité $\Gamma_b(CT) = \Gamma_b(CT[M/\emptyset, i]) + 6$, nous prouvons les deux inégalités suivantes : (1) $\Gamma_b(CT) + 6 \leq \Gamma_b(CT[\emptyset/M, i])$ et (2) $\Gamma_b(CT) - 6 \leq \Gamma_b(CT[M/\emptyset, i])$.

1. Soit f un bon Γ_b -broadcast sur la chenille CT qui satisfait les Lemmes 4.14 et 4.15.

Pour prouver l'inégalité (1), il suffit de trouver pour chaque chenille CT , un broadcast dominant minimal g sur $CT[\emptyset/M, i]$ de coût $\Gamma_b(CT) + 6$.

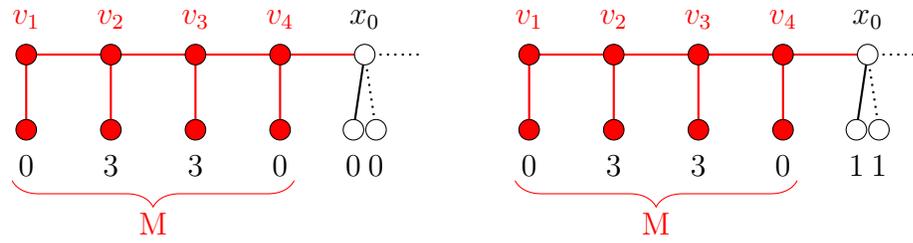
Si $i = 0$, alors soit $f(y_0^j) \in \{0, 1\}$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_0$ (donc $f(y_0^j) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_0$ ou $f(y_0^j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_0$), soit $f(y_0^1) = 3$ (donc $f(y_0^j) = 0$ pour tout $j = 2, \dots, \ell_0$). Nous distinguons deux cas selon la pondération de $f(y_0^j)$, $j = 1, \dots, \ell_0$.

- (a) $f(y_0^j) = 0$ (resp. $f(y_0^j) = 1$) pour tout $j = 1, \dots, \ell_0$.

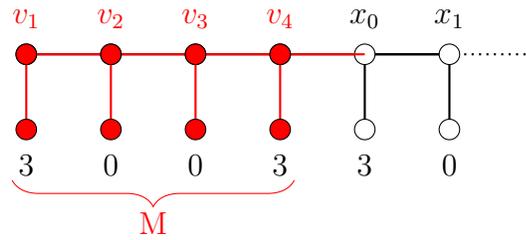
Dans ce cas, $PB_f(y_0^1) = L(x_0)$ (resp. $PB_f(y_0^j) = \{y_0^j\}$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_0$ quand $\ell_0 > 1$, ou $PB_f(y_0^1) = \{x_0\}$ quand $\ell_0 = 1$). Nous considérons l'application g définie par $g(w_1) = g(w_2) = 3$, $g(w_0) = g(w_3) = g(v_i) = 0$ pour $i = 0, 1, 2, 3$, et $g(u) = f(u)$ sinon (voir Figure 4.13.(a)). Nous avons $PB_g(w_1) = \{w_0\}$ et $PB_g(w_2) = \{w_3\}$, ce qui implique que g est un broadcast dominant minimal sur $CT[\emptyset/M, i]$ de coût $\Gamma_b(CT) + 6$.

- (b) $f(y_0^1) = 3$.

Dans ce cas, $PB_f(y_0^1) = L(x_1)$ dans CT . Considérons l'application g définie par

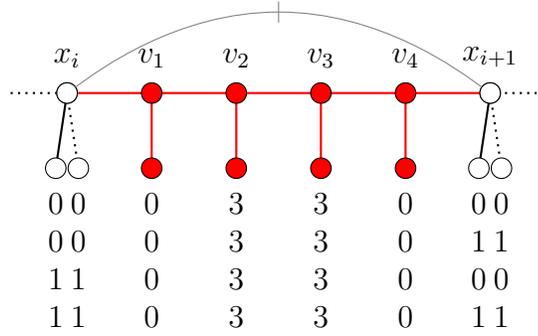


(a)

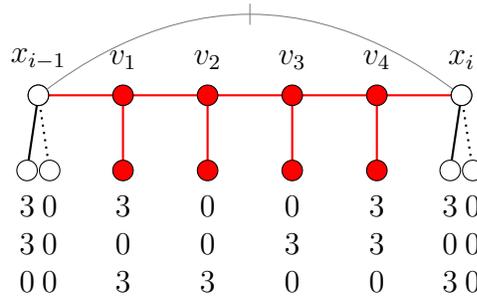


(b)

FIGURE 4.13 – Illustration de la preuve du Lemme 4.16, Cas 1 $i = 0$, Cas (a) et (b).



(a) Cas (a)



(b) Cas (b)-(d)

FIGURE 4.14 – Illustration de la preuve du Lemme 4.16, Cas 1 $i \neq 0$, Cas (a)-(d).

$g(w_0) = g(w_3) = 3$, $g(w_1) = g(w_2) = g(v_i) = 0$ pour $i = 0, 1, 2, 3$, et $g(u) = f(u)$ sinon (voir Figure 4.13.(b)). Nous avons $PB_g(w_0) = \{w_1\}$ et $PB_g(w_3) = \{w_2\}$, ce qui implique que g est un broadcast dominant minimal sur $CT[\emptyset/M, i]$ de coût $\Gamma_b(CT) + 6$.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous distinguons quatre cas :

(a) $f(y_{i-1}^j)$ et $f(y_i^k) \in \{0, 1\}$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_{i-1}$ et $k = 1, \dots, \ell_i$.

Dans ce cas, chaque sommet pendant y_{i-1}^j (resp. y_i^k) est soit son propre voisin privé soit il est voisin privé de y_{i-2}^1 (resp. y_{i+1}^1). Nous considérons la même application g définie précédemment dans le Cas 1a (voir Figure 4.14.(a)).

(b) $f(y_{i-1}^1) = f(y_i^1) = 3$.

Dans ce cas, $PB_f(y_{i-1}^1) = L(x_{i-2})$ et $PB_f(y_i^1) = L(x_{i+1})$ dans CT . Nous considérons la même application g définie précédemment dans le Cas 1b (voir Figure 4.14.(b)).

(c) $f(y_{i-1}^1) = 3$ et $f(y_i^k) \in \{0, 1\}$ pour tout $k = 1, \dots, \ell_i$.

Dans ce cas, $PB_f(y_{i-1}^1) = L(x_i)$ dans CT . Nous considérons l'application g définie par $g(w_2) = g(w_3) = 3$, $g(w_0) = g(w_1) = g(v_i) = 0$, pour $i = 0, 1, 2, 3$, et $g(u) = f(u)$ sinon (voir Figure 4.14.(b)). Nous avons $PB_g(y_{i-1}^1) = \{w_0\}$, $PB_g(w_2) = \{w_1\}$ et $PB_g(w_3) = L(x_i)$. Ainsi, g est un broadcast dominant minimal sur $CT[\emptyset/M, i]$ de coût $\Gamma_b(CT) + 6$.

(d) $f(y_{i-1}^j) \in \{0, 1\}$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_i$ et $f(y_i^1) = 3$.

Dans ce cas, $PB_f(y_i^1) = L(x_{i-1})$ dans CT . Nous considérons l'application g définie par $g(w_0) = g(w_1) = 3$, $g(w_2) = g(w_3) = g(v_i) = 0$ pour $i = 0, 1, 2, 3$, et $g(u) = f(u)$ sinon (voir Figure 4.14.(b)). Nous avons $PB_g(w_0) = L(x_{i-1})$, $PB_g(w_1) = \{w_2\}$ et $PB_g(y_i^1) = \{w_3\}$. Ainsi, g est un broadcast dominant minimal sur $CT[\emptyset/M, i]$ de coût $\Gamma_b(CT) + 6$.

2. Soit f un bon Γ_b -broadcast sur la chenille CT satisfaisant les Lemmes 4.14 et 4.15. Nous prouvons l'existence d'un broadcast dominant minimal g sur $CT[M/\emptyset, 0]$ de coût $\sigma(g) \geq \Gamma_b(CT) - 6$.

Nous distinguons deux cas, selon que $i = 0, n - 4$ ou non.

Supposons d'abord que $i = 0$ (le cas $i = n - 4$ est similaire par symétrie). Nous

considérons deux sous-cas.

- (a) $f(y_0^1) = f(y_3^1) = 0$ et $f(y_1^1) = f(y_2^1) = 3$.

Dans ce cas, $PB_f(y_1^1) = \{y_0^1\}$ et $PB_f(y_2^1) = \{y_3^1\}$. L'application g , définie comme la restriction de f sur $CT[M/\emptyset, 0]$ reste un broadcast dominant minimal sur $CT[M/\emptyset, 0]$ de coût $\Gamma_b(CT) - 6$.

De manière similaire, si $f(y_0^1) = f(y_3^1) = 3$ et $f(y_1^1) = f(y_2^1) = 0$, alors $PB_f(y_0^1) = \{y_1^1\}$ et $PB_f(y_3^1) = \{y_2^1\}$. Le broadcast g précédent reste valide, et g est un broadcast dominant minimal de coût $\Gamma_b(CT) - 6$.

- (b) $f(y_0^1) = 3$, $f(y_2^1) = 1$ et $f(y_1^1) = f(y_3^1) = 0$.

Dans ce cas, $PB_f(y_0^1) = \{y_1^1\}$, $PB_f(y_4^1) = \{y_3^1\}$ et $PB_f(y_2^1) = \{y_2^1\}$, où $f(y_4^1) = 3$. Si $n = 4$, alors $CT[M/\emptyset, 0] = CT[4, 4]$ et par le Théorème 2.28, $\Gamma_b(CT[M/\emptyset, 0]) = \ell_4$. La relation $\ell_4 = 1$ doit être vérifiée, car sinon nous pourrions poser $h(y_1^1) = h(y_2^1) = 3$, $h(y_4^j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_4$ et $h(u) = 0$ sinon et h serait un broadcast dominant minimal de coût $6 + \ell_4$, ce qui contredirait l'optimalité de f quand $\ell_4 > 1$. Ainsi, $\Gamma_b(CT) - 6 = 1 = \Gamma_b(CT[M/\emptyset, 0])$.

Puisque y_4^1 possède un seul côté privé par le Lemme 4.13(2), nous avons $n \neq 5$. Soit $n \geq 6$. La sous-chenille $CT[3, 6]$ est telle que $CT[3, 6] = CT(1, 1, 1, 1)$ ou $CT[3, 6]$ est de type CT_5^4 , différente de F_i^1 , par les Lemmes 4.14 et 4.15 et par le fait que $\ell_3 = 1$. Il s'ensuit $f(y_5^1) = 3$ et $f(u) = 0$ pour tout autre sommet de $CT[3, 6]$. Sur $CT[M/\emptyset, 0]$, Nous considérons l'application g , obtenue à partir de f en remplaçant les f -valeurs de y_5^1 et y_6^1 par $g(y_5^1) = 0$ et $g(y_6^j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_6$. Donc, $PB_g(y_4^1) = L(x_5)$ et $PB_g(y_6^j) = \{y_6^j\}$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_6$, ce qui nous permet d'affirmer que g est un broadcast dominant minimal sur $CT[M/\emptyset, 0]$ de coût $\sigma(g) = \Gamma_b(CT) + \ell_6 - 7 \geq \Gamma_b(CT) - 6$.

Considérons maintenant le cas $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Nous distinguons cinq sous-cas :

- (a) $f(y_i^1) = f(y_{i+3}^1) = 0$ et $f(y_{i+1}^1) = f(y_{i+2}^1) = 3$.

Dans ce cas, $PB_f(y_{i+1}^1) = \{y_i^1\}$ et $PB_f(y_{i+2}^1) = \{y_{i+3}^1\}$. L'application g définie par la restriction de f sur $CT[M/\emptyset, i]$ reste un broadcast dominant minimal sur $CT[M/\emptyset, i]$ de coût $\Gamma_b(CT) - 6$ (voir Figure 4.15.(a)).

De manière similaire, si $f(y_i^1) = f(y_{i+3}^1) = 3$ et $f(y_{i+1}^1) = f(y_{i+2}^1) = 0$, alors

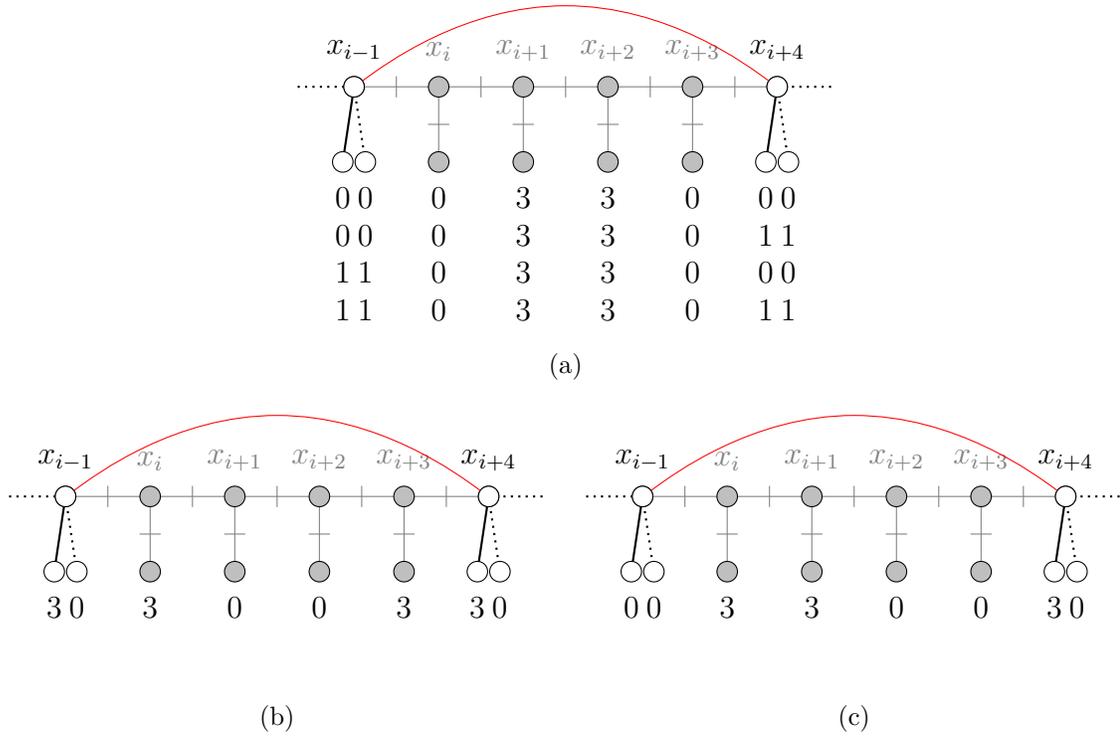


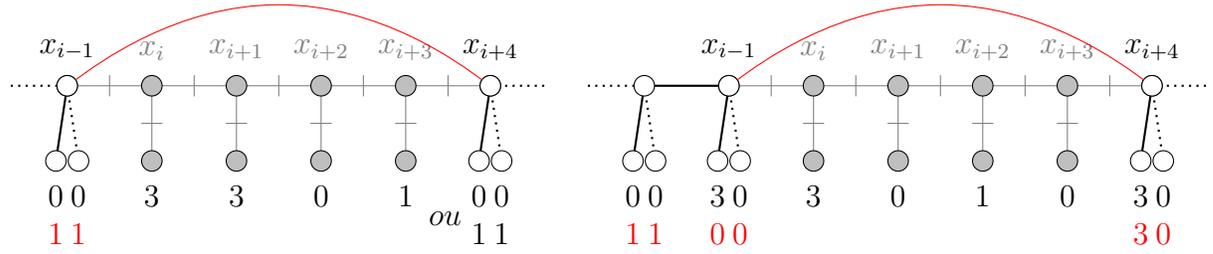
FIGURE 4.15 – Illustration pour la preuve du Lemme 4.16, Cas 2 $i \neq 0$, Cas (a)

$PB_f(y_i^1) = \{y_{i+1}^1\}$ et $PB_f(y_{i+3}^1) = \{y_{i+2}^1\}$. Le broadcast précédent g reste valable pour ce cas (voir Figure 4.15.(b)).

Si $f(y_i^1) = f(y_{i+1}^1) = 3$ et $f(y_{i+2}^1) = f(y_{i+3}^1) = 0$, alors $PB_f(y_{i+1}^1) = \{y_{i+2}^1\}$, $PB_f(y_i^1) = L(x_{i-1})$ et $PB_f(y_{i+4}^1) = \{y_{i+3}^1\}$, avec $f(y_{i+4}^1) = 3$. En considérant encore l'application g définie précédemment, nous obtenons $PB_g(y_{i+4}^1) = L(x_{i-1})$. Ainsi, g est un broadcast dominant minimal sur $CT[M/\emptyset, 0]$ de coût $\sigma(g) = \Gamma_b(CT) - 6$ (voir Figure 4.15.(c)).

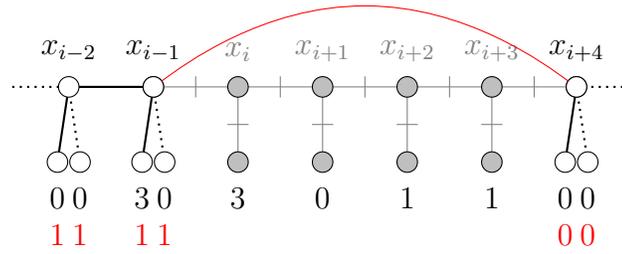
(b) $f(y_i^1) = f(y_{i+1}^1) = 3$, $f(y_{i+2}^1) = 0$ et $f(y_{i+3}^1) = 1$.

Dans ce cas, $PB_f(y_i^1) = L(x_{i-1})$, $PB_f(y_{i+1}^1) = \{y_{i+2}^1\}$ et $PB_f(y_{i+3}^1) = \{y_{i+3}^1\}$. Nous considérons l'application g sur $CT[M/\emptyset, 0]$, obtenue à partir de f en remplaçant pour tout $j = 1, \dots, \ell_{i-1}$, les f -valeurs de y_{i-1}^j par 1 (voir Figure 4.16.(a)). Nous avons soit $PB_g(y_{i-1}^j) = \{x_{i-1}\}$ soit $PB_g(y_{i-1}^j) = \{y_{i-1}^j\}$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_{i-1}$. L'application g est un broadcast dominant minimal de coût $\sigma(g) = \Gamma_b(CT) - 7 + \ell_{i-1} \geq \Gamma_b(CT) - 6$.

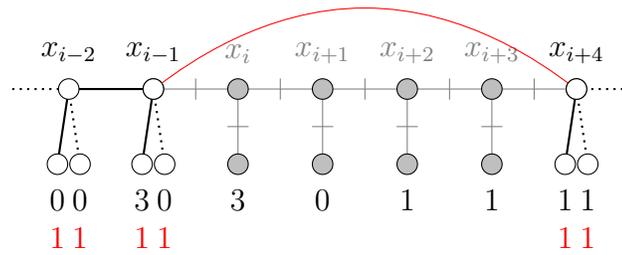


(a)

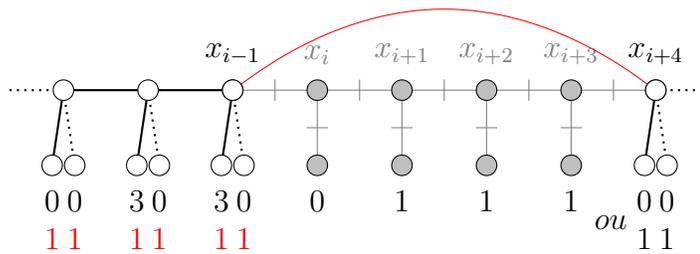
(b)



(c)



(d)



(e)

FIGURE 4.16 – Illustration pour la preuve du Lemme 4.16, Cas 2 $i \neq 0$, Cas (b)-(e).

(c) $f(y_i^1) = 3$, $f(y_{i+1}^1) = f(y_{i+3}^1) = 0$ et $f(y_{i+2}^1) = 1$.

Dans ce cas, par le Lemme 4.13(3), $f(y_{i-1}^1) = 3$, ce qui implique $f(y_{i-2}^j) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_{i-2}$. Ainsi, $PB_f(y_{i-1}^1) = \{y_{i-2}^1\}$, $PB_f(y_i^1) = \{y_{i+1}^1\}$, $PB_f(y_{i+2}^1) = \{y_{i+2}^1\}$ et $PB_f(y_{i+4}^1) = \{y_{i+3}^1\}$, avec $f(y_{i+4}^1) = 3$. Nous considérons l'application g sur $CT[M/\emptyset, 0]$, définie à partir de f en remplaçant pour tout $j = 1, \dots, \ell_{i-2}$, les f -valeurs de y_{i-2}^j par 1 et les f -valeurs de y_{i-1}^1 par 0 (voir Figure 4.16.(b)). Nous avons $PB_g(y_{i+4}^j) = L(x_{i-1})$ et $PB_g(y_{i-2}^j) = \{y_{i-2}^j\}$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_{i-2}$. L'application g est un broadcast dominant minimal de coût $\sigma(g) = \Gamma_b(CT) - 7 + \ell_{i-2} \geq \Gamma_b(CT) - 6$.

(d) $f(y_i^1) = 3$, $f(y_{i+1}^1) = 0$ et $f(y_{i+2}^1) = f(y_{i+3}^1) = 1$.

Dans ce cas, par le Lemme 4.13(3), $f(y_{i-1}^1) = 3$ et donc $f(y_{i-2}^j) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_{i-2}$. Ainsi, $PB_f(y_{i-1}^1) = L(x_{i-2})$, $PB_f(y_i^1) = \{y_{i+1}^1\}$, $PB_f(y_{i+2}^1) = \{y_{i+2}^1\}$, $PB_f(y_{i+3}^1) = \{y_{i+3}^1\}$ et $f(y_{i+4}^1) \neq 3$. Nous considérons l'application g sur $CT[M/\emptyset, 0]$, obtenue à partir de f en remplaçant, pour tout $j = 1, \dots, \ell_{i-2}$, les f -valeurs de y_{i-2}^j par 1 et pour tout $k = 1, \dots, \ell_{i-1}$, les f -valeurs de y_{i-1}^k par 1 (voir Figure 4.16.[(c) et (d)]). Nous déduisons $PB_g(y_{i-2}^j) = \{y_{i-2}^j\}$, $j = 1, \dots, \ell_{i-2}$ et $PB_g(y_{i-1}^k) = \{y_{i-1}^k\}$ pour tout $k = 1, \dots, \ell_{i-1}$. L'application g est donc un broadcast dominant minimal de coût $\sigma(g) = \Gamma_b(CT) - 8 + \ell_{i-1} + \ell_{i-2} \geq \Gamma_b(CT) - 6$.

(e) $f(y_i^1) = 0$, $f(y_{i+1}^1) = f(y_{i+2}^1) = f(y_{i+3}^1) = 1$.

Dans ce cas, $f(y_{i-1}^1) = f(y_{i-2}^1) = 3$, $f(y_{i-3}^j) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, \ell_{i-3}$, et $f(y_{i+4}^1) \neq 3$. De plus, nous avons $PB_f(y_{i-2}^1) = L(x_{i-3})$ et $PB_f(y_{i-1}^1) = \{y_i^1\}$. Nous considérons l'application g sur $CT[M/\emptyset, 0]$, obtenue à partir de f en remplaçant les f -valeurs de y_{i-3}^j , y_{i-2}^k et y_{i-1}^l par 1 pour tout $j = 1, \dots, \ell_{i-3}$, $k = 1, \dots, \ell_{i-2}$, $l = 1, \dots, \ell_{i-1}$ (voir Figure 4.16.(e)). L'application g est un broadcast dominant minimal de coût $\sigma(g) = \Gamma_b(CT) - 9 + \ell_{i-3} + \ell_{i-2} + \ell_{i-1} \geq \Gamma_b(CT) - 6$.

Dans chaque cas, nous avons pu prouver l'existence d'un broadcast dominant minimal g sur $CT[M/\emptyset, 0]$ de coût $\sigma(g) \geq \Gamma_b(CT) - 6$. Ainsi, $\Gamma_b(CT) - 6 \leq \Gamma_b(CT[M/\emptyset, 0])$, comme demandé. \square

Pour toute chenille CT sans troncs et contenant les motifs 1 et 2^+ , si le motif $\Pi = 1 \dots 1$, de longueur $p + 1$, $p \geq 3$, apparaît dans CT , nous pouvons de manière itérative supprimer

toutes les sous-chenilles isomorphes à M . La chenille résultante après suppression de M , notée CT^r , est appelée la *chenille réduite* de CT . Nous notons par $z_0 \dots z_k$ les sommets épines de CT^r et $L(z_i) = \{t_i^1, \dots, t_i^{m_i}\}$ l'ensemble des sommets pendants adjacent à z_i .

Grâce au Lemme 4.16, le résultat suivant est immédiat.

Proposition 4.17. *Si CT est une chenille sans troncs, de longueur $n \geq 4$, contenant les motifs 1 et 2^+ , et CT^r la chenille réduite de CT de longueur k , alors*

$$\Gamma_b(CT) = \Gamma_b(CT^r) + 6n_M,$$

où $n_M = \frac{n+1-k}{4}$ est le nombre d'étapes nécessaires pour transformer CT en CT^r .

À l'aide de la Proposition 4.8, si la longueur de CT^r est k et pour tout $i = 0, \dots, k$, $m_i \geq 2$, alors :

$$\Gamma_b(CT) = \Gamma_b(CT^r) + 6n_M = \sum_{i:m_i \geq 2} m_i + 6n_M,$$

Désormais, nous supposons que CT^r est une chenille contenant les motifs 1 et 2^+ , et les motifs $1 \dots 1$, de longueur $p + 1$, existe dans CT^r seulement si $0 \leq p \leq 2$.

Soit H l'une des trois sous-chenilles $CT(1)$, $CT(1, 1)$ ou $CT(1, 1, 1)$ de CT . Afin de prouver la prochaine proposition, nous introduisons une nouvelle définition.

Un broadcast dominant h sur H est *H -pendant limité* si les sommets pendants de CT , différents de ceux de H , ne sont pas h -dominés par un certain h -sommets broadcast de V_h^+ .

Notons

$$\tilde{F}_H = \{h : h \text{ est un broadcast dominant } H\text{-pendant limité minimal sur } H\},$$

et soit \tilde{h}_H un broadcast dominant H -pendant limité minimal sur H de coût maximum

$$\sigma(\tilde{h}_H) = \max\{\sigma(h) : h \in \tilde{F}_H\}.$$

Comme \tilde{h}_H est un broadcast dominant sur H , nous avons immédiatement

$$\sigma(\tilde{h}_H) \leq \Gamma_b(H).$$

Proposition 4.18. *Soit CT une chenille sans troncs, de longueur $n \geq 4$, et soit $H = CT[i_0, i_1]$ l'une de ces trois sous-chenilles $CT(1)$, $CT(1, 1)$ ou $CT(1, 1, 1)$ de CT . Si f est un Γ_b -broadcast sur CT , alors*

$$\sigma(\tilde{h}_H) = \begin{cases} \Gamma_b(H) & \text{si } x_0 \in H \text{ ou } x_n \in H, \text{ ou } p = 0 \text{ et } x_0, x_n \notin H, \\ p + 1 & \text{si } p = 1, 2 \text{ et } x_0, x_n \notin H. \end{cases}$$

Preuve. Soit $H = CT[i_0, i_1]$, avec $1 \leq i_1 - i_0 + 1 \leq 3$, et soit h un broadcast dominant H -pendant limité minimal sur H .

1. $x_0 \in H$ ou $x_n \in H$, ou $p = 0$ et $x_0, x_n \notin H$.

Par symétrie, il suffit de considérer le cas $x_n \in H$ ou, $p = 0$ et $x_0, x_n \notin H$.

L'application définie dans le Lemme 4.6 est un broadcast dominant H -pendant limité minimal sur H de coût $\lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor$. Donc,

$$\left\lfloor \frac{3(n+1)}{2} \right\rfloor \leq \sigma(\tilde{h}_H) \leq \Gamma_b(H)$$

Comme $\Gamma_b(H) = \lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor$, nous obtenons $\sigma(\tilde{h}_H) = \Gamma_b(H) = \lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor$.

2. $p = 1, 2$ et $x_1, x_n \notin H$.

Si $p = 1$, alors $i_1 = i_0 + 1$ et les configurations suivantes sont les seules possibilités qui peuvent se présenter.

$$\begin{aligned} h(x_{i_0}) = h(x_{i_1}) = 0 \text{ et } h(y_{i_0}^1) = h(y_{i_1}^1) = 1, \text{ ou} \\ h(x_{i_0}) = h(x_{i_1}) = 1 \text{ et } h(y_{i_0}^1) = h(y_{i_1}^1) = 0, \text{ ou} \\ h(x_{i_0}) = h(y_{i_1}^1) = 0 \text{ et } h(y_{i_0}^1) = h(x_{i_1}) = 1, \text{ ou} \\ h(x_{i_0}) = h(y_{i_1}^1) = 1 \text{ et } h(x_{i_1}) = h(y_{i_0}^1) = 0. \end{aligned}$$

Puisque $\sigma(h) = 2$ dans chaque cas, nous obtenons $\sigma(\tilde{h}_H) = 2 = p + 1$.

Si $p = 2$, alors $i_1 = i_0 + 2$ et les seules possibilités qui peuvent se présenter sont :

$$\begin{aligned} h(y_{i_0}^1) = h(y_{i_0+1}^1) = h(y_{i_0+2}^1) = 1 \text{ et } h(x_{i_0}) = h(x_{i_0+1}) = h(x_{i_0+2}) = 0, \text{ ou} \\ h(x_{i_0+1}) = h(y_{i_0}^1) = h(y_{i_0+2}^1) = 1 \text{ et } h(x_{i_0}) = h(x_{i_0+2}) = h(y_{i_0+1}^1) = 0, \text{ ou} \\ h(x_{i_0}) = h(x_{i_0+1}) = h(x_{i_0+2}) = 1 \text{ et } h(y_{i_0}^1) = h(y_{i_0+1}^1) = h(y_{i_0+2}^1) = 0, \text{ ou} \\ h(x_{i_0}) = h(x_{i_0+2}) = h(y_{i_0+1}^1) = 1 \text{ et } h(y_{i_0}^1) = h(y_{i_0+2}^1) = h(x_{i_0+1}) = 0, \text{ ou} \\ h(x_{i_0}) = h(x_{i_0+2}) = h(y_{i_0}^1) = h(y_{i_0+1}^1) = h(y_{i_0+2}^1) = 0 \text{ et } h(x_{i_0+1}) = 2, \text{ ou} \\ h(x_{i_0}) = h(x_{i_0+1}) = h(x_{i_0+2}) = h(y_{i_0}^1) = h(y_{i_0+2}^1) = 0 \text{ et } h(y_{i_0+1}^1) = 3. \end{aligned}$$

Puisque dans chaque cas, $\sigma(h)$ est égal à 2 ou 3, nous obtenons $\sigma(\tilde{h}_H) = 3 = p + 1$.

□

Soit H_1, \dots, H_s une séquence de sous-chenilles maximales $CT(1)$, $CT(1, 1)$ et $CT(1, 1, 1)$ dans CT^r . En vue des Lemmes 1, 8-12,15 et 16, nous pouvons à cette étape donner la valeur

exacte de $\Gamma_b(CT^r)$ quand la chenille réduite CT^r de CT contient les motifs 1 et 2^+ , et CT est CT_5^4 -libre.

Lemme 4.19. *Soit CT une chenille sans troncs de longueur $n \geq 3$ et soit CT^r une chenille réduite de CT contenant les motifs 1 et 2^+ . Si CT^r est CT_5^4 -libre, alors*

$$\Gamma_b(CT^r) = \sum_{i=1}^s \sigma(\tilde{h}_{H_i}) + \sum_{i:m_i \geq 2} m_i.$$

D'après la Proposition 4.17, et le Lemme 4.19, nous déduisons la formule suivante.

Théorème 4.20. *Si CT est une chenille sans troncs, de longueur $n \geq 3$, contenant les motifs 1 et 2^+ , et CT est CT_5^4 -libre, alors*

$$\Gamma_b(CT) = 6 \times n_M + \sum_{i=1}^s \sigma(\tilde{h}_{H_i}) + \sum_{i:m_i \geq 2} m_i.$$

Concernant les chenilles réduites CT^r de longueur k , la formule de $\Gamma_b(CT^r)$ n'est pas si simple à déterminer quand CT_5^4 est un sous-graphe induit de CT^r , c'est pourquoi il est nécessaire de démontrer préalablement d'autres résultats et propriétés. Nous introduisons ainsi une nouvelle application qui détermine pour chaque broadcast dominant f la pondération des sommets pendants d'un support z_i , avec $m_i = 2$, $i = 0, \dots, k$, où toutes les possibilités de ces f -valeurs sont connues grâce au Lemme 4.15.

Soit $D = \{d_1, d_2, \dots, d_{s'}\}$ l'ensemble des sommets supports de CT^r qui sont adjacents à exactement deux sommets pendants. Nous supposons que la séquence D est ordonnée suivant la position des sommets supports dans CT^r , c'est-à-dire d_i apparaît avant d_j dans D si $i < j$.

Pour $d_i \in D$ et $j = 1, \dots, 4$, soit P_f la fonction de D dans $\{\theta_i^j, j = 1, \dots, 5\}$, définie comme suit

$$P_f(d_i) = \begin{cases} \theta_i^j, & \text{si } CT[i-j+1, i-j+4] \text{ est une chenille de type } CT_5^4 \\ & \text{et } (f(t_i^1), f(t_i^2)) = (\theta_i^j(t_i^1), \theta_i^j(t_i^2)), \\ \theta_i^5, & \text{si } f(t_i^1) = f(t_i^2) = 1. \end{cases}$$

Nous utilisons la notation CT_f^i pour désigner soit la sous-chenille $F_i^j = CT[i-j+1, i-j+4]$ soit $CT[i, i]$,

$$CT_f^i = \begin{cases} F_i^j, & \text{si } P_f(d_i) = \theta_i^j, j = 1, \dots, 4, \\ CT[i, i], & \text{si } P_f(d_i) = \theta_i^5. \end{cases}$$

En utilisant les résultats précédents sur la chenille réduite CT^r admettant CT_4^5 comme sous-graphe induit, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 4.21. *Soit CT une chenille sans troncs et soit CT^r la chenille réduite de CT de longueur $k \geq 3$. Si CT^r contient CT_5^4 , alors CT^r admet un Γ_b -broadcast f de sorte que*

1. V_f^+ ne contient pas de supports.
2. Pour tout f -sommets broadcast u , $f(u) \in \{1, 3\}$.
3. Pour tout sommet pendant t_i^j , avec $m_i \geq 3$ et $j = 1, \dots, m_i$, $f(t_i^j) = 1$.
4. Pour tout f -sommets broadcast t_i^1 avec $f(t_i^1) = 3$,
 - (a) Si $i = 0$ (resp. $i = k$), alors $m_0 + m_1 = 2$ (resp. $m_{k-1} + m_k = 2$).
 - (b) Si $i \notin \{0, k\}$, alors $z_i \in CT_5^4$ et $P_f(z_i) \in \{\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3, \theta_i^4\}$.

Preuve. D'après les Lemmes 1, 8-11, CT^r admet un Γ_b -broadcast f qui satisfait les Points 1, 2, 3 et 4(a). Nous démontrons le Point 4(b).

Soit z_i un support de CT^r , $i \notin \{0, k\}$. La chenille CT^r contient CT_5^4 et donc CT^r contient les motifs 1 et 2^+ . Du Lemme 4.13(2), nous avons soit $PB_f(t_i^1) = L(z_{i-1})$ soit $PB_f(t_i^1) = L(z_{i+1})$, et s'il existe un sommet pendant f -dominé par deux f -sommets broadcast u et u' , alors $d(u, u') = 3$. Par conséquent, les f -valeurs des sommets pendants de la sous-chenille $CT[i-1, i+2]$ (ou, similairement $CT[i-2, i+1]$) de CT^r , sont nulles à l'exception de t_i^1 et t_{i+1}^1 , où $f(t_i^1) = f(t_{i+1}^1) = 3$. Comme f satisfait le Point 3 et CT^r ne contient pas le motif 1111, nous obtenons $m_j \leq 2$ pour tout $j = i-1, \dots, i+2$ dans $CT[i-1, i+2]$, et plus précisément $m_{i-1} + m_i + m_{i+1} + m_{i+2} \leq 6$, car sinon nous pourrions définir une application sur CT^r en modifiant les f -valeurs de chaque sommet pendant appartenant à $CT[i-1, i+2]$ par 1, qui serait un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût supérieur à $\Gamma_b(CT)$, une contradiction. D'autre part, si $m_{i-1} + m_i + m_{i+1} + m_{i+2} = 6$, nous utilisons l'application précédente, afin de garantir que chaque sommet pendant ait une f -valeur différente de 3, sans modifier le coût du broadcast f . Ainsi, $m_{i-1} + m_i + m_{i+1} + m_{i+2} = 5$. \square

Lemme 4.22. *Soit CT une chenille sans troncs et soit CT^r la chenille réduite de CT , de longueur $k \geq 3$. Si CT^r contient CT_5^4 comme sous-graphe induit, alors CT^r admet un Γ_b -broadcast f qui satisfait pour chaque sommet support $d_i \in D$, les propriétés suivantes.*

1. Si $P_f(d_i) = \theta_i^j$ pour un certain $j \in \{1, \dots, 4\}$, alors $\Gamma_b(CT^r) = \Gamma_b(CT^r[CT_f^i/K_{1,6}, i - j + 1])$.
2. Si $P_f(d_i) = \theta_i^5$, alors $\Gamma_b(CT^r) = \Gamma_b(CT^r[CT_f^i/K_{1,6}, i]) - 4$.

Preuve. Soit CT^r une chenille réduite de CT et soit d_i un sommet support de CT^r tel que $m_i = 2$. Considérons un Γ_b -broadcast f sur CT^r satisfaisant les propriétés du Théorème 4.21.

1. $P_f(d_i) = \theta_i^j$ pour un certain $j \in \{1, \dots, 4\}$.

Dans ce cas, $CT_f^i = F_i^j$ et par le Théorème 4.21(4.b), les seuls f -sommets broadcast appartenant à la sous-chenille $F_i^j = CT^r[i - j + 1, i - j + 4]$ de type CT_5^4 sont t_{i-j+2}^1 et t_{i-j+3}^1 , avec $f(t_{i-j+2}^1) = f(t_{i-j+3}^1) = 3$. Par conséquent,

$$\sigma(f) = \sum_{v \in V(CT^r[0, i-j])} f(v) + 6 + \sum_{v \in V(CT^r[i-j+5, n])} f(v).$$

Considérons maintenant un Γ_b -broadcast g sur $CT^r[CT_f^i/K_{1,6}, i - j + 1]$. Grâce au Théorème 4.21(3), $g(t_{i-j+1}^s) = 1$ pour tout $s = 1, \dots, 6$. Alors,

$$\sigma(g) = \sum_{v \in V(CT^r[0, i-j])} g(v) + 6 + \sum_{v \in V(CT^r[i-j+2, n-3])} g(v).$$

Nous avons $\sum_{v \in V(CT^r[0, i-j])} f(v) = \sum_{v \in V(CT^r[0, i-j])} g(v)$. En effet, nous supposons d'abord que

$$\sum_{v \in V(CT^r[0, i-j])} f(v) > \sum_{v \in V(CT^r[0, i-j])} g(v).$$

Dans CT^r , les f -voisins privés frontières des f -sommets broadcast t_{i-j+2}^1 et t_{i-j+3}^1 appartiennent à F_i^j , et aucun autre f -sommet privé frontière n'appartient à F_i^j . Donc l'application h définie par $h(v) = f(v)$ si $v \in V(CT^r[0, i - j])$ et $h(v) = g(v)$ sinon, serait un broadcast dominant minimal sur $CT^r[CT_f^i/K_{1,6}, i - j + 1]$ de coût $\sigma(h) > \sigma(g)$, encore une contradiction avec l'optimalité de g . À présent si

$$\sum_{v \in V(CT^r[0, i-j])} f(v) < \sum_{v \in V(CT^r[0, i-j])} g(v)$$

alors l'application k définie par $k(v) = g(v)$ si $v \in V(CT^r[0, i - j])$, et $k(v) = f(v)$ sinon, serait un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(k) > \sigma(f)$, une contradiction

avec l'optimalité de f .

En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, nous prouvons que

$$\sum_{v \in V(CT^r_{[i-j+5, n]})} f(v) = \sum_{v \in V(CT^r_{[i-j+2, n-3]})} g(v).$$

Il s'ensuit, $\sigma(f) = \sigma(g)$.

2. $P_f(d_i) = \theta_i^5$.

Dans ce cas, $CT_f^i = CT[i, i]$ et $f(t_i^1) = f(t_i^2) = 1$. En plus, chacun de ces f -sommets broadcast est son propre f -voisin privé frontière et à part ces deux f -voisins privés frontières, $CT[i, i]$ ne contient aucun autre f -voisin privé frontière. Soit g un Γ_b -broadcast sur $CT^r[CT_f^i/K_{1,6}, i]$ défini dans le Point 1, c'est-à-dire, $g(t_i^s) = 1$ pour tout $s = 1, \dots, 6$. Une fois de plus, chacun de ces six g -sommets broadcast est son propre g -voisin privé frontière et $CT[i, i]$ ne contient pas d'autres g -voisins privés frontières. Nous avons,

$$\sigma(f) = \sum_{v \in V(CT^r_{[0, i-1]})} f(v) + 2 + \sum_{v \in V(CT^r_{[i+1, n]})} f(v),$$

et

$$\sigma(g) = \sum_{v \in V(CT^r_{[0, i-1]})} g(v) + 6 + \sum_{v \in V(CT^r_{[i+1, n]})} g(v).$$

Par les mêmes arguments cités dans la preuve du Point 1, nous obtenons

$$\sum_{v \in V(CT^r_{[0, i-1]})} f(v) = \sum_{v \in V(CT^r_{[0, i-1]})} g(v)$$

et

$$\sum_{v \in V(CT^r_{[i+1, n]})} f(v) = \sum_{v \in V(CT^r_{[i+1, n]})} g(v).$$

Par conséquent, $\sigma(f) = \sigma(g) - 4$.

□

En utilisant le Lemme 4.22 $|D|$ fois, nous pouvons déduire la valeur de $\Gamma_b(CT^r)$ en fonction de $\Gamma_b(CT^r_{D_2})$, où $CT^r_{D_2}$ est la chenille réduite de la chenille CT sans le motif 2.

Théorème 4.23. *Soit CT est une chenille sans troncs et soit CT^r la chenille réduite de CT , de longueur $k \geq 3$. Alors*

$$\Gamma_b(CT^r) = \Gamma_b(CT^r_{D_2}) - 4n_{P_2},$$

où n_{P_2} est le nombre de supports dans D , pour lesquels $P_f(d_i) = \theta_i^5$.

Nous tenons à noter que la valeur exacte de $\Gamma_b(CT_{D_2}^r)$ peut être facilement donnée par la Proposition 4.8 ou Lemma 4.19 en fonction de si $CT_{D_2}^r$ contient le motif 1 ou non.

Pour utiliser le Lemme 4.22 sur un Γ_b -broadcast f , nous avons besoin de connaître $P_f(d_i)$ pour tout sommet adjacent à deux pendants d_i de CT^r . Les Lemmes 4.24 et 4.25 fournissent une réponse à ce besoin. Avant ceci, rappelons certaines notations introduites précédemment. Soit $CT^r = CT(m_0, \dots, m_k)$ la chenille réduite de CT , z_0, \dots, z_k les sommets épines de CT^r , $L(z_i) = \{t_i^1, \dots, t_i^{m_i}\}$ l'ensemble des sommets pendants adjacents à z_i pour tout $i = 0, \dots, k$, et $D = \{d_1, d_2, \dots, d_{s'}\}$ l'ensemble des sommets supports adjacents à deux pendants dans CT^r . Notons par z_{i_0} et z_{i_1} , le premier et le dernier sommet de CT^r respectivement, avec $m_{i_0}, m_{i_1} \geq 2$.

Nous étudions d'abord, dans le Lemme 4.24, le cas où $m_{i_0}, m_{i_1} \geq 3$ en prouvant que CT^r admet un Γ_b -broadcast f tel que si $d_1 = z_i$ pour un certain indice i , n'appartient à aucun F_i^j (de type CT_5^4), $j = 1, \dots, 4$, alors $P_f(d_1) = \theta_i^5$. Sinon, $P_f(d_1) = \theta_i^j$, où j est le plus petit entier pour lequel $F_i^j = CT[i - j + 1, i - j + 4]$.

Lemme 4.24. *Soit CT une chenille sans troncs et soit CT^r la chenille réduite de CT , de longueur $k \geq 3$, telle que $m_{i_0}, m_{i_1} \geq 3$. Si CT^r contient CT_5^4 et $d_1 = z_i$ pour un certain indice i , alors CT^r admet un Γ_b -broadcast f de sorte que*

1. Si $m_{i-3} = m_{i-2} = m_{i-1} = 1$, alors $P_f(d_1) = \theta_i^4$.
2. Si $m_{i-2} = m_{i-1} = 1$, $m_{i+1} = 1$ et $m_{i-3} \neq 1$, alors $P_f(d_1) = \theta_i^3$.
3. Si $m_{i-1} = 1$, $m_{i+1} = m_{i+2} = 1$ et $m_{i-2} \neq 1$, alors $P_f(d_1) = \theta_i^2$.
4. Si $m_{i+1} = m_{i+2} = m_{i+3} = 1$ et $m_{i-1} \neq 1$, alors $P_f(d_1) = \theta_i^1$.
5. Si d_1 n'appartient à aucune sous-chenille F_i^j , $j = 1, \dots, 4$, alors $P_f(d_1) = \theta_i^5$.

Preuve. Soit g un Γ_b -broadcast sur CT^r satisfaisant les propriétés du Théorème 4.21 et soit $d_1 = z_i$ pour un certain indice $i \in \{0, \dots, k\}$.

1. Supposons que $m_{i-3} = m_{i-2} = m_{i-1} = 1$. Puisque le motif 1111 n'apparaît pas dans CT^r , nous avons $m_{i-4} \geq 3$ et alors $g(t_{i-4}^j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, m_{i-4}$. De plus, $P_f(d_1) = \theta_i^5$ ne peut pas avoir lieu, car sinon $g(t_{i-3}^1) = g(t_{i-2}^1) = g(t_{i-1}^1) = g(t_i^1) = g(t_i^2) = 1$ et l'application h obtenue à partir de g en posant $h(t_{i-3}^1) = h(t_i^1) = h(t_i^2) = 0$, $h(t_{i-2}^1) = h(t_{i-1}^1) = 3$ et

$h(u) = g(u)$, sinon, serait un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(h) = \sigma(g) - 5 + 6 = \Gamma_b(CT^r) + 1$, une contradiction avec l'optimalité de g .

Si $P_g(d_1) = \theta_i^1$, alors $g(t_i^1) = g(t_i^2) = g(t_{i+3}^1) = 0$, $g(t_{i-3}^1) = g(t_{i-2}^1) = g(t_{i-1}^1) = 1$ et $g(t_{i+1}^1) = g(t_{i+2}^1) = 3$. Nous définissons une application f définie à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i-3, i+3]$. Nous posons $f(t_{i-3}^1) = 0$, $f(t_{i-2}^1) = f(t_{i-1}^1) = 3$, $f(t_{i+1}^1) = f(t_{i+2}^1) = f(t_{i+3}^1) = 1$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Si $P_g(d_1) = \theta_i^2$, alors $g(t_{i-1}^1) = g(t_i^2) = g(t_{i+2}^1) = 0$, $g(t_{i-3}^1) = g(t_{i-2}^1) = 1$ et $g(t_i^1) = g(t_{i+1}^1) = 3$. Nous considérons une application f obtenue à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i-3, i+2]$. Nous posons $f(t_{i-3}^1) = f(t_i^1) = 0$, $f(t_{i+1}^1) = f(t_{i+2}^1) = 1$, $f(t_{i-2}^1) = f(t_{i-1}^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Si $P_g(d_1) = \theta_i^3$, alors $g(t_{i-2}^1) = g(t_i^2) = g(t_{i+1}^2) = 0$, $g(t_{i-3}^1) = 1$ et $g(t_{i-1}^1) = g(t_i^1) = 3$. Nous considérons une application f obtenue à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i-3, i+1]$. Nous posons $f(t_{i-3}^1) = f(t_i^1) = 0$, $f(t_{i+1}^1) = 1$, $f(t_{i-2}^1) = f(t_{i-1}^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Ainsi, CT^r admet un Γ_b -broadcast f qui satisfait $P_f(d_1) = \theta_i^4$ lorsque $m_{i-3} = m_{i-2} = m_{i-1} = 1$.

2. Supposons que $m_{i-2} = m_{i-1} = m_{i+1} = 1$ et $m_{i-3} \neq 1$. Comme $m_{i-3} \geq 3$, nous avons $P_g(d_1) \neq \theta_i^4$.

Si $P_g(d_1) \neq \theta_i^5$, alors $g(t_{i-2}^1) = g(t_{i-1}^1) = g(t_i^1) = g(t_i^2) = 1$, et $g(t_{i+1}^1) = 1$ car sinon ($g(t_{i+1}^1) = 0$) l'application h obtenue à partir de g en posant $h(t_{i-2}^1) = h(t_i^2) = h(t_{i+1}^1) = 0$, $h(t_{i-1}^1) = h(t_i^1) = 3$, et $h(u) = g(u)$ sinon, serait un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(h) \geq \sigma(g) - 5 + 6 = \Gamma_b(CT^r) + 1$, une contradiction avec l'optimalité de g . Nous considérons une application f obtenue à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des sommets pendants de la sous sous-chenille $CT[i-2, i+4]$. Nous posons

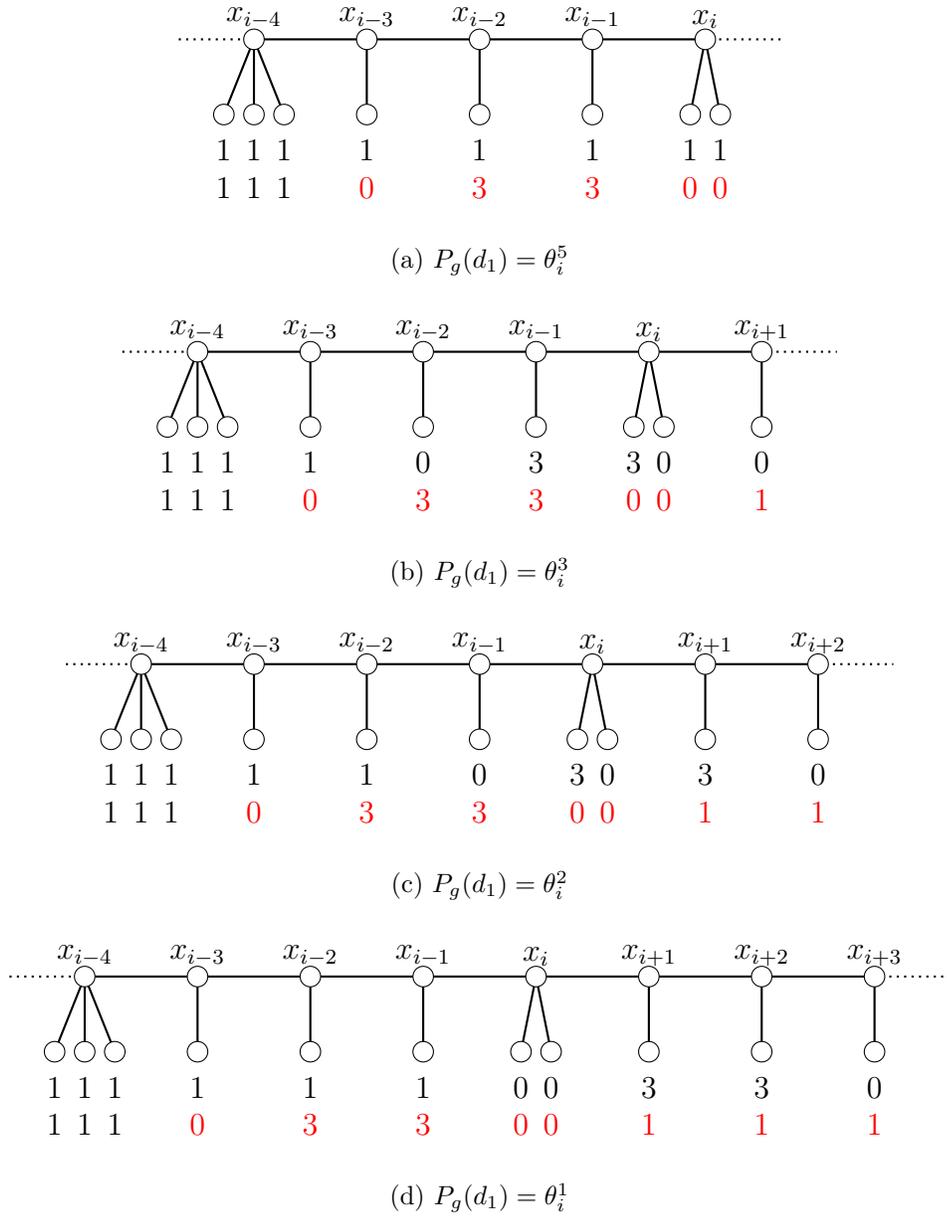


FIGURE 4.17 – Illustration de la preuve du Lemme 4.24, Point 1

$f(t_{i-1}^1) = f(t_i^1) = 3$, $f(t_{i-2}^1) = f(t_{i+1}^1) = 0$, $f(t_{i+2}^j) = f(t_{i+3}^k) = f(t_{i+4}^l) = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, \ell_{i+2}\}$, $k \in \{1, \dots, \ell_{i+3}\}$, $l \in \{1, \dots, \ell_{i+4}\}$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Si $P_g(d_1) = \theta_i^1$, alors $g(t_i^1) = g(t_i^2) = g(t_{i+3}^1) = 0$, $g(t_{i-2}^1) = g(t_{i-1}^1) = 1$ et $g(t_{i+1}^1) = g(t_{i+2}^1) = 3$. Nous définissons une application f , obtenue à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i-2, i+3]$. Nous posons $f(t_{i-2}^1) = f(t_{i+1}^1) = 0$, $f(t_{i+2}^1) = f(t_{i+3}^1) = 1$, $f(t_{i-1}^1) = f(t_i^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Si $P_g(d_1) = \theta_i^2$, alors $g(t_{i-1}^1) = g(t_i^2) = g(t_{i+2}^1) = 0$, $g(t_{i-2}^1) = 1$ et $g(t_i^1) = g(t_{i+1}^1) = 3$. Nous définissons une application f , définie à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i-2, i+2]$. Nous posons $f(t_{i-2}^1) = f(t_{i+1}^1) = 0$, $f(t_{i+2}^1) = 1$, $f(t_{i-1}^1) = f(t_i^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Ainsi, CT^r admet un Γ_b -broadcast f qui satisfait $P_f(d_1) = \theta_i^3$ lorsque $m_{i-2} = m_{i-1} = m_{i+1} = 1$ et $m_{i-3} \neq 1$.

3. Supposons que $m_{i-1} = 1$, $m_{i+1} = m_{i+2} = 1$ et $m_{i-2} \neq 1$. Comme $m_{i-2} \geq 3$, nous avons $P_g(d_1) \notin \{\theta_i^3, \theta_i^4\}$.

Si $P_g(d_1) = \theta_i^1$, et comme le motif 1111 n'existe pas dans CT^r , alors $m_{i+3} = 1$, $m_{i+4} \geq 2$, $g(t_i^1) = g(t_i^2) = g(t_{i+3}^1) = 0$, $g(t_{i-1}^1) = g(t_{i+4}^j) = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, m_{i+4}\}$, et $g(t_{i+1}^1) = g(t_{i+2}^1) = 3$. Nous définissons une application f , obtenue à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i-1, i+3]$. Nous posons $f(t_{i-1}^1) = f(t_{i+2}^1) = 0$, $f(t_{i+3}^1) = 1$, $f(t_i^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Si $P_g(d_1) = \theta_i^5$, alors $g(t_{i-1}^1) = g(t_i^1) = g(t_i^2) = 1$, mais $g(t_{i+1}^1) \neq 1$ et $g(t_{i+2}^1) \neq 1$, car sinon nous pouvons considérer l'application h obtenue à partir de g en posant $h(t_{i-1}^1) = h(t_i^2) = h(t_{i+2}^1) = 0$, $h(t_i^1) = h(t_{i+1}^1) = 3$, et $h(u) = g(u)$ sinon, et cette application h

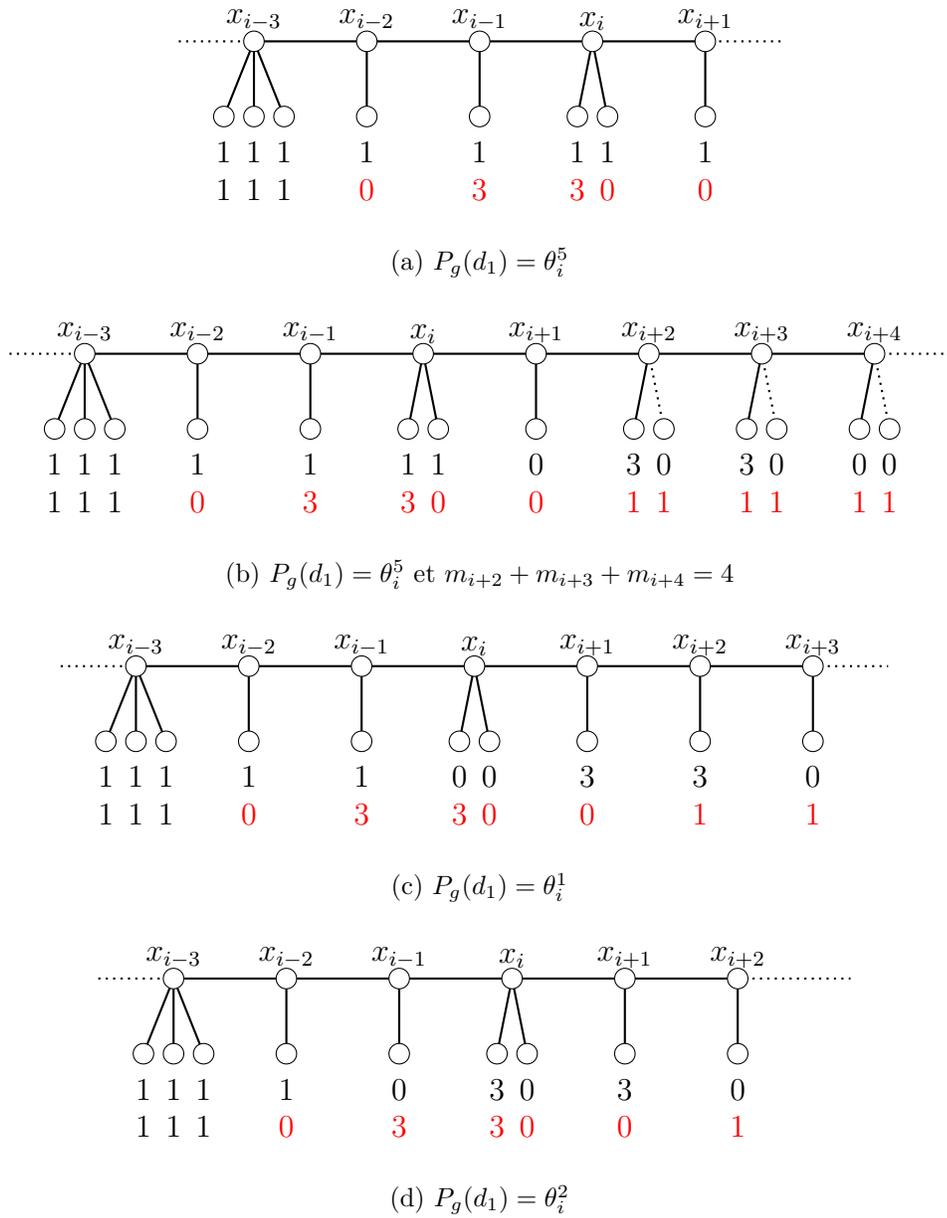


FIGURE 4.18 – Illustration de la preuve du Lemme 4.24, Point 2

serait un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(h) = \sigma(g) - 5 + 6 = \Gamma_b(CT^r) + 1$, une contradiction avec l'optimalité de g . Ainsi, $(g(t_{i+1}^1), g(t_{i+2}^1)) \in \{(0, 3), (1, 0)\}$.

Considérons d'abord le cas $(g(t_{i+1}^1), g(t_{i+2}^1)) = (0, 3)$. Grâce au Théorème 4.21, nous avons forcément $g(t_{i+3}^1) = 3$ et $g(t_{i+4}^1) = 0$, et comme le motif 1111 n'existe pas dans CT^r , nous avons donc $m_{i+3} + m_{i+4} \geq 3$.

Nous définissons une application f , obtenue à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i - 1, i + 4]$. Nous posons $f(t_{i-1}^1) = f(t_i^2) = f(t_{i+2}^1) = 0$, $f(t_{i+3}^j) = f(t_{i+4}^k) = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, m_{i+3}\}$, $k \in \{1, \dots, m_{i+4}\}$, $f(t_i^1) = f(t_{i+1}^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 9 + 6 + m_{i+3} + m_{i+4} = \sigma(g) + m_{i+3} + m_{i+4} - 3$. L'optimalité de g implique $m_{i+3} + m_{i+4} = 3$ et ainsi, $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Pour le deuxième cas où $(g(t_{i+1}^1), g(t_{i+2}^1)) = (1, 0)$, nous avons $g(t_{i+3}^1) = g(t_{i+4}^1) = 3$ et $g(t_{i+5}^j) = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m_{i+5}\}$. Nous définissons une application f , obtenue à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i - 1, i + 5]$. Nous posons $f(t_{i-1}^1) = f(t_i^2) = f(t_{i+2}^1) = 0$, $f(t_{i+3}^j) = f(t_{i+4}^k) = f(t_{i+5}^\ell) = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, m_{i+3}\}$, $k \in \{1, \dots, m_{i+4}\}$, $\ell \in \{1, \dots, m_{i+5}\}$, $f(t_i^1) = f(t_{i+1}^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. Similairement au cas précédent, nous avons $m_{i+3} + m_{i+4} = 3$ et l'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 10 + 6 + m_{i+3} + m_{i+4} + m_{i+5} \geq \sigma(g) - 4 + 3 + m_{i+5}$. L'optimalité de g implique $m_{i+5} = 1$, et donc $\sigma(f) = \sigma(g)$. Ainsi, CT^r admet un Γ_b -broadcast f tel que $P_f(d_1) = \theta_i^2$.

4. Supposons que $m_{i+1} = m_{i+2} = m_{i+3} = 1$ et $m_{i-1} \neq 1$. Puisque le motif 1111 n'existe pas dans CT^r , nous avons alors $m_{i+4} \geq 2$ et comme $m_{i-1} \geq 3$, nous avons aussi $P_g(d_1) \notin \{\theta_i^2, \theta_i^3, \theta_i^4\}$.

Si $P_g(d_1) = \theta_i^5$, alors $g(t_i^1) = g(t_i^2) = 1$ et les égalités $g(t_{i+1}^1) = g(t_{i+2}^1) = g(t_{i+3}^1) = 1$ ne peuvent pas être satisfaites, car sinon l'application h obtenue à partir de g en posant $h(t_i^1) = h(t_i^2) = h(t_{i+3}^1) = 0$, $h(t_{i+1}^1) = h(t_{i+2}^1) = 3$, et $h(u) = g(u)$ sinon, serait un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(h) = \sigma(g) - 5 + 6 = \Gamma_b(CT^r) + 1$, une

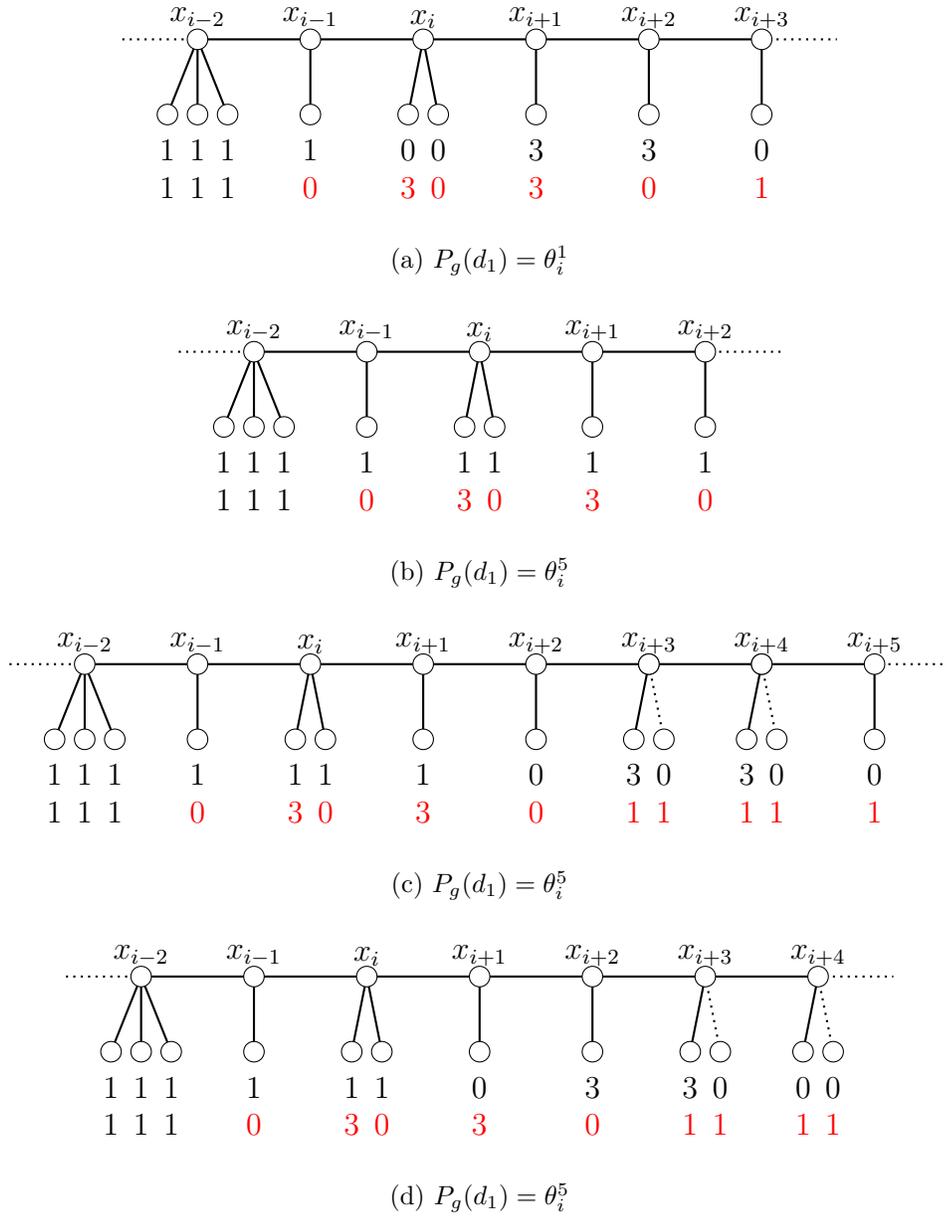


FIGURE 4.19 – Illustration de la preuve du Lemme 4.24, Point 3

contradiction avec l'optimalité de g .

Le cas $g(t_{i+1}^1) = 0$ et $g(t_{i+2}^1) = 3$ implique que $g(t_{i+3}^1) = 3$ et $g(t_{i+4}^1) = 0$, et donc nous pouvons définir une application f , définie à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i, i + 4]$. Nous posons $f(t_i^1) = f(t_i^2) = f(t_{i+3}^1) = 0$, $f(t_{i+4}^j) = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, m_{i+4}\}$, $f(t_{i+1}^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 5 + 3 + m_{i+4} = \sigma(g) + m_{i+4} - 2$. L'optimalité de g implique $m_{i+4} = 2$, et donc $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Le cas $g(t_{i+1}^1) = 1$ et $g(t_{i+2}^1) = 0$ implique que $g(t_{i+3}^1) = g(t_{i+4}^1) = 3$ et $g(t_{i+5}^1) = 0$, et donc nous pouvons définir une application f , obtenue à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i, i + 5]$. Nous posons $f(t_i^1) = f(t_i^2) = f(t_{i+3}^1) = 0$, $f(t_{i+4}^j) = f(t_{i+5}^k) = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, m_{i+4}\}$ et $k \in \{1, \dots, m_{i+5}\}$, $f(t_{i+1}^1) = f(t_{i+2}^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 9 + 6 + m_{i+4} + m_{i+5} = \sigma(g) + m_{i+4} + m_{i+5} - 3$. L'optimalité de g implique $m_{i+4} = 2$ et $m_{i+5} = 1$, et donc $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Le cas $g(t_{i+1}^1) = g(t_{i+2}^1) = 1$ et $g(t_{i+3}^1) = 0$ implique que $g(t_{i+4}^1) = g(t_{i+5}^1) = 3$ et $g(t_{i+6}^1) = 0$, et donc nous pouvons définir une application f , définie à partir de g en modifiant quelques g -valeurs des feuilles de la sous-chenille $CT[i, i + 6]$. Nous posons $f(t_i^1) = f(t_i^2) = 0$, $f(t_{i+4}^j) = f(t_{i+5}^k) = f(t_{i+6}^\ell) = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, m_{i+4}\}$, $k \in \{1, \dots, m_{i+5}\}$ et $\ell \in \{1, \dots, m_{i+6}\}$, $f(t_{i+1}^1) = f(t_{i+2}^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 10 + 6 + m_{i+4} + m_{i+5} + m_{i+6} = \sigma(g) + m_{i+4} + m_{i+5} + m_{i+6} - 4$. L'optimalité de g implique $m_{i+4} = 2$ et $m_{i+5} = m_{i+6} = 1$, et donc $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Ainsi, CT^r admet un Γ_b -broadcast f tel que $P_f(d_1) = \theta_i^1$ lorsque $m_{i+1} = m_{i+2} = m_{i+3} = 1$ et $m_{i-1} \neq 1$.

5. Si d_1 n'appartient à aucune sous-chenille F_i^j , $j = 1, \dots, 4$, alors $P_f(d_1) = \theta_i^5$ et ce résultat découle immédiatement du Lemme 4.15.

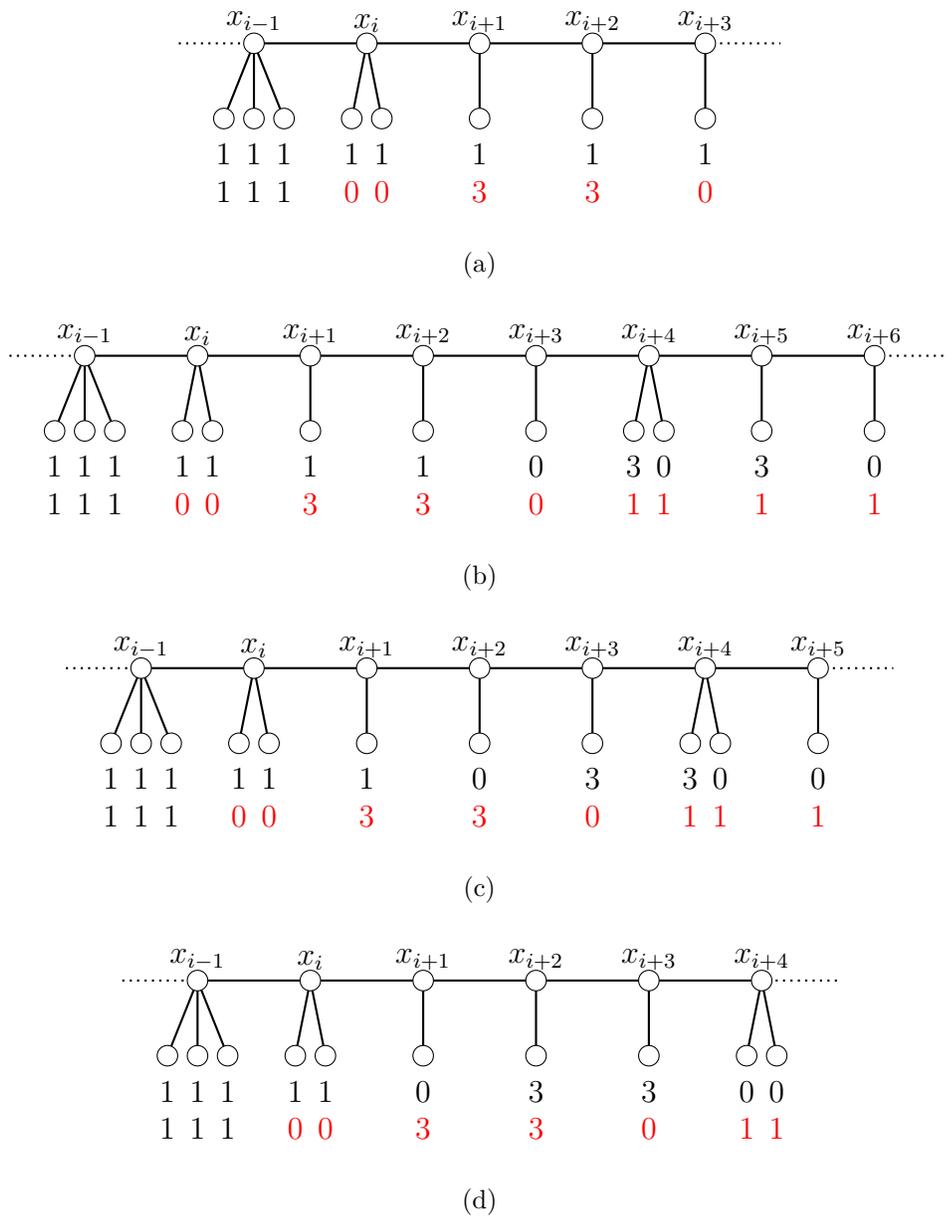


FIGURE 4.20 – Illustration de la preuve du Lemme 4.24, Point 4

□

Grâce au Lemme 4.24, nous sommes capable de déterminer $P_f(d_1)$ si le premier et le dernier 2^+ -sommets de la chenille réduite satisfont $m_{i_0} > 2$ et $m_{i_1} > 2$. Nous considérons ensuite la chenille $CT^r[CT_f^i/K_{1,6}, i-j+1]$ ou $CT^r[CT_f^i/K_{1,6}, i]$, selon la pondération $P_f(d_1) = \theta_i^j$ pour un certain $j \in \{1, \dots, 4\}$ ou $P_f(d_1) = \theta_i^5$. Nous réutilisons le Lemme 4.24 sur la chenille concernée, avec $|D|-1$ supports adjacents à deux feuilles. En répétant cette procédure $|D|$ fois, nous obtenons une chenille sans motif 2 (c'est-à-dire une chenille CT_5^4 -libre) et $P_f(d_i)$ est donnée pour tout $i = 1, \dots, s'$. La valeur de $\Gamma_b(CT^r)$ est déduite du Lemme 4.19 et du Théorème 4.23.

Nous discutons dans le lemme suivant la pondération de $P_f(d_1)$ lorsque le premier (resp. dernier) 2^+ -sommets de la chenille réduite CT^r satisfait $m_{i_0} = 2$ (resp. $m_{i_1} = 2$).

Lemme 4.25. *Soit CT une chenille sans troncs et soit CT^r la chenille réduite CT , de longueur $k \geq 3$. Si CT^r contient CT_5^4 et $d_1 = z_{i_0}$, alors CT^r admet un Γ_b -broadcast f tel que*

1. $P_f(d_1) \notin \{\theta_{i_0}^3, \theta_{i_0}^4\}$.
2. Si $i_0 \in \{1, 3\}$ et $d_1 \in F_{i_0}^2$, alors $P_f(d_1) = \theta_{i_0}^2$.
3. Si $i_0 \in \{0, 2\}$ et $d_1 \in F_{i_0}^1$, alors $P_f(d_1) = \theta_{i_0}^1$.
4. Si d_1 n'apparaît dans aucune sous-chenille de type $F_{i_0}^1$ ou $F_{i_0}^2$, alors $P_f(d_1) = \theta_{i_0}^5$.

Preuve. Soit g un Γ_b -broadcast sur CT^r satisfaisant les propriétés du Théorème 4.21 et soit $d_1 = z_{i_0}$ pour un certain $i \in \{0, \dots, k\}$.

1. Si $P_g(d_1) = \theta_{i_0}^3$, alors $g(t_{i_0-2}^1) = g(t_{i_0+1}^1) = 0$ et $g(t_{i_0-1}^1) = g(t_{i_0}^1) = 3$. Puisque $i_0 \in \{2, 3\}$, nous pouvons définir une application f en posant dans le cas où $i_0 = 2$, $f(t_{i_0-1}^1) = 0$, $f(t_{i_0}^1) = f(t_{i_0}^2) = f(t_{i_0+1}^1) = 1$, $f(t_{i_0-2}^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon, et dans le cas où $i_0 = 3$, $f(t_{i_0-1}^1) = f(t_{i_0}^1) = f(t_{i_0}^2) = f(t_{i_0+1}^1) = 1$, $f(t_{i_0-3}^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. Dans les deux cas, f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g)$ et $P_f(d_1) \neq \theta_{i_0}^3$.

Si $P_g(d_1) = \theta_{i_0}^4$, alors $g(t_{i_0-3}^1) = g(t_{i_0}^1) = 0$ et $g(t_{i_0-2}^1) = g(t_{i_0-1}^1) = 3$. Nous considérons l'application f définie par $f(t_{i_0-2}^1) = 0$, $f(t_{i_0-1}^1) = f(t_{i_0}^1) = f(t_{i_0}^2) = 1$, $f(t_{i_0-3}^1) = 3$, et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g)$ et $P_f(d_1) \neq \theta_{i_0}^4$.

2. Du Point 1, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $P_g(d_1) \in \{\theta_{i_0}^1, \theta_{i_0}^2, \theta_{i_0}^5\}$.

(a) Soit $i_0 = 1$ et $d_1 \in F_1^2 = CT[0, 3]$. Donc, $m_0 = m_2 = m_3 = 1$ et $m_1 = 2$.

Si $P_g(d_1) = \theta_1^1$, alors $m_0 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$, $m_1 = 2$, $g(t_1^1) = g(t_2^1) = g(t_4^1) = 0$, $g(t_0^1) = 1$ et $g(t_2^1) = g(t_3^1) = 3$. Nous définissons une application f en posant $f(t_0^1) = f(t_3^1) = 0$, $f(t_4^1) = 1$, $f(t_1^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 4 + 4 = \sigma(g)$, et $P_f(d_1) = \theta_1^2$.

Si $P_g(d_1) = \theta_1^5$, alors $g(t_1^1) = g(t_1^2) = 1$ et les égalités $g(t_2^1) = g(t_3^1) = 1$ ne sont pas satisfaites, car sinon l'application h obtenue à partir de g en posant $h(t_0^1) = h(t_1^2) = h(t_3^1) = 0$, $h(t_1^1) = h(t_2^1) = 3$ et $h(u) = g(u)$ sinon, serait un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(h) = \sigma(g) - 5 + 6 = \Gamma_b(CT^r) + 1$, une contradiction avec l'optimalité de g . Ainsi, nous obtenons $(g(t_2^1), g(t_3^1)) \in \{(1, 0), (0, 3)\}$.

Le cas $g(t_2^1) = 1$ et $g(t_3^1) = 0$ implique $m_4 + m_5 = 3$ et $m_6 = 1$, $g(t_4^1) = g(t_5^1) = 3$ et $g(t_6^1) = 0$. Nous définissons une application f en posant $f(t_0^1) = f(t_1^2) = 0$, $f(t_4^j) = f(t_5^k) = f(t_6^1) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, m_4$, $k = 1, \dots, m_5$, $f(t_1^1) = f(t_2^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 10 + 7 + m_4 + m_5 = \sigma(g)$.

Le cas $g(t_2^1) = 0$ et $g(t_3^1) = 3$ implique encore que $m_4 + m_5 = 3$, $g(t_4^1) = 3$ et $g(t_5^1) = 0$. Nous définissons une application f en posant $f(t_0^1) = f(t_1^2) = f(t_3^1) = 0$, $f(t_4^j) = f(t_5^k) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, m_4$, $k = 1, \dots, m_5$, $f(t_1^1) = f(t_2^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 9 + 6 + m_4 + m_5 = \sigma(g)$. Ainsi, dans les deux cas, nous avons $P_f(d_1) = \theta_1^2$.

(b) Soit $i_0 = 3$ et $d_1 \in F_3^2 = CT[2, 5]$. Donc, $m_0 = m_1 = m_2 = m_4 = m_5 = 1$ et $m_3 = 2$.

Si $P_g(d_1) = \theta_3^1$, alors $m_6 = 1$, $g(t_1^1) = g(t_3^1) = g(t_6^1) = 0$, $g(t_2^1) = 1$ et $g(t_0^1) = g(t_4^1) = g(t_5^1) = 3$. Nous définissons une application f en posant $f(t_2^1) = f(t_5^1) = 0$, $f(t_6^1) = 1$, $f(t_3^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 4 + 4 = \sigma(g)$, et $P_f(d_1) = \theta_3^2$.

Si $P_g(d_1) = \theta_3^5$, alors $g(t_1^1) = 0$, $g(t_2^1) = g(t_3^1) = g(t_3^2) = 1$ et $g(t_0^1) = 3$. De plus, les

égalités $g(t_4^1) = g(t_5^1) = 1$ ne sont pas satisfaites, car sinon l'application h obtenue à partir de g en posant $h(t_1^1) = h(t_2^1) = h(t_3^2) = h(t_5^1) = 0$, $h(t_0^1) = h(t_3^1) = h(t_4^1) = 3$ et $h(u) = g(u)$ sinon, serait un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(h) = \sigma(g) - 8 + 9 = \Gamma_b(CT^r) + 1$, une contradiction avec l'optimalité de g . Par conséquent, $(g(t_4^1), g(t_5^1)) \in \{(1, 0), (0, 3)\}$.

Le cas $g(t_4^1) = 1$ et $g(t_5^1) = 0$ implique $m_6 + m_7 = 3$, $m_8 = 1$, $g(t_6^1) = g(t_7^1) = 3$ et $g(t_8^1) = 0$. Nous définissons une application f en posant $f(t_2^1) = f(t_3^2) = 0$, $f(t_6^j) = f(t_7^k) = f(t_8^1) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, m_6$, $k = 1, \dots, m_7$, $f(t_0^1) = f(t_3^1) = f(t_4^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 10 + 7 + m_6 + m_7 = \sigma(g)$.

Le cas $g(t_4^1) = 0$ et $g(t_5^1) = 3$ implique $m_6 + m_7 = 3$, $g(t_6^1) = 3$ et $g(t_7^1) = 0$. Nous définissons une application f en posant $f(t_2^1) = f(t_3^2) = f(t_5^1) = 0$, $f(t_6^j) = f(t_7^k) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, m_6$, $k = 1, \dots, m_7$, $f(t_3^2) = f(t_4^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 9 + 6 + m_6 + m_7 = \sigma(g)$. Ainsi, dans les deux cas, nous avons $P_f(d_1) = \theta_3^2$.

3. Similairement au cas précédent, nous supposons $P_g(d_1) \in \{\theta_{i_0}^1, \theta_{i_0}^2, \theta_{i_0}^5\}$.

(a) Soit $i_0 = 0$ et $d_1 \in F_0^1 = CT[0, 3]$. Donc, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $m_0 = 2$ et $P_g(d_1) \neq \theta_0^2$.

Si $P_g(d_1) = \theta_0^5$, alors les deux égalités $g(t_2^1) = g(t_3^1) = 1$ ne peuvent pas être satisfaites car sinon $g(t_0^1) = g(t_0^2) = g(t_1^1) = 1$ et l'application h obtenue à partir de g en posant $h(t_0^1) = h(t_0^2) = h(t_3^1) = 0$, $h(t_1^1) = h(t_2^1) = 3$ et $h(u) = g(u)$ sinon, serait un broadcast dominant minimal sur CT^r de coût $\sigma(h) = \sigma(g) - 5 + 6 = \Gamma_b(CT^r) + 1$, une contradiction avec l'optimalité de g . Par conséquent, $(g(t_2^1), g(t_3^1)) \in \{(1, 0), (0, 3), (3, 3)\}$.

Le cas $g(t_2^1) = 1$ et $g(t_3^1) = 0$ implique $m_4 = 2$, $m_5 = m_6 = 1$, $g(t_6^1) = 0$, $g(t_1^1) = 1$ et $g(t_4^1) = g(t_5^1) = 3$. Nous définissons une application f en posant $f(t_0^1) = f(t_0^2) = 0$, $f(t_4^1) = f(t_4^2) = f(t_5^1) = f(t_6^1) = 1$, $f(t_1^1) = f(t_2^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 10 + 10 = \sigma(g)$.

Le cas $g(t_2^1) = 0$ et $g(t_3^1) = 3$ implique $m_4 = 2$, $m_5 = 1$, $g(t_5^1) = 0$, $g(t_1^1) = 1$ et $g(t_4^1) = 3$. Nous définissons une application f en posant $f(t_0^1) = f(t_0^2) = f(t_3^1) = 0$, $f(t_4^1) = f(t_4^2) = f(t_5^1) = 1$, $f(t_1^1) = f(t_2^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 9 + 9 = \sigma(g)$.

Le cas $g(t_2^1) = g(t_3^1) = 3$ implique $m_4 = 2$ et $g(t_1^1) = g(t_4^1) = 0$. Nous définissons une application f en posant $f(t_0^1) = f(t_0^2) = f(t_3^1) = 0$, $f(t_4^1) = f(t_4^2) = 1$, $f(t_1^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 8 + 8 = \sigma(g)$.

Ainsi, dans les trois cas, nous avons $P_f(d_1) = \theta_0^1$.

- (b) Soit $i_0 = 2$ et $d_1 \in F_2^1 = CT[2, 5]$. Donc, $m_0 = m_1 = m_3 = m_4 = m_5 = 1$, $m_2 = 2$ et $P_g(d_1) \neq \theta_2^2$.

En effet, si $P_g(d_1) = \theta_2^2$, alors $g(t_1^1) = g(t_4^1) = 0$, $g(t_0^1) = 1$, $g(t_5^1) \in \{0, 1\}$ et $g(t_2^1) = g(t_3^1) = 3$ et l'application h obtenue à partir de g en posant $h(t_2^1) = h(t_2^2) = h(t_5^1) = 0$, $h(t_0^1) = h(t_4^1) = 3$ et $h(u) = g(u)$ sinon, est un broadcast dominant minimal minimal sur CT^r de coût $\sigma(h) \geq \sigma(g) - 5 + 6 = \Gamma_b(CT^r) + 1$, une contradiction avec l'optimalité de g .

Supposons maintenant $P_g(d_1) = \theta_5^2$. Donc, $g(t_1^1) = 0$, $g(t_2^1) = g(t_2^2) = 1$, $g(t_0^1) = 3$ et soit $g(t_3^1) = 1$ soit $g(t_3^1) = 0$.

Pour le cas $g(t_3^1) = 1$, nous définissons une application f en posant $f(t_0^1) = f(t_2^2) = f(t_3^1) = 0$, $f(t_1^1) = f(t_2^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon. L'application f est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 6 + 6 = \sigma(g)$.

Pour le cas $g(t_3^1) = 0$, nous obtenons $m_6 = 2$, $g(t_4^1) = g(t_5^1) = 3$, et l'application f définie en posant $f(t_2^1) = f(t_2^2) = f(t_5^1) = 0$, $f(t_6^1) = f(t_6^2) = 1$, $f(t_3^1) = 3$ et $f(u) = g(u)$ sinon, est un broadcast dominant minimal sur CT^r , de coût $\sigma(f) = \sigma(g) - 5 + 5 = \sigma(g)$.

Ainsi, dans les deux cas, nous avons $P_f(d_1) = \theta_2^1$.

4. Le résultat du Point 4 est une conséquence directe du Lemme 4.15.

□

Pour toute chenille réduite avec $m_{i_0} = 2$ (ou $m_{i_1} = 2$ par symétrie), nous déterminons $P_f(d_1)$ (et $P_f(d_{s'})$ quand $m_{i_1} = 2$), par le Lemme 4.25. De manière similaire au cas discuté

précédemment (cas $m_{i_0} > 2$ et $m_{i_1} > 2$), nous considérons la chenille CT_1 qui représente la première modification sur la chenille réduite CT^r , définie par $CT_1 = CT^r[CT_f^{i_0}/K_{1,6}, i_0 - j + 1]$ ou $CT_1 = CT^r[CT_f^{i_0}/K_{1,6}, i_0]$, selon que $P_f(d_1) = \theta_{i_0}^j$ pour un certain $j \in \{1, \dots, 4\}$ ou $P_f(d_1) = \theta_{i_0}^5$ respectivement. Si $m_{i_1} = 2$, alors par symétrie nous répétons la même opération sur CT_1 , en considérant une nouvelle chenille définie par $CT_1[CT_f^{i_1}/K_{1,6}, i_1 - j + 1]$ ou $CT_1[CT_f^{i_1}/K_{1,6}, i_1]$, selon la valeur de $P_f(d_{|D|})$. Ensuite, nous utilisons le Lemme 4.24 sur la chenille résultante, qui contient $|D| - 1$ (ou $|D| - 2$ quand $m_{i_1} = 2$) sommets supports adjacents à deux sommets pendants. En répétant cette procédure $|D|$ fois, nous obtenons une chenille sans le motif 2 (c'est-à-dire, une chenille CT_5^4 -libre) et pour tout $i = 1, \dots, s'$, $P_f(d_i)$ est déterminé. La valeur de $\Gamma_b(CT^r)$ est déduite du Lemme 4.19 et du Théorème 4.23.

4.3 Exemple

Nous illustrons à travers un exemple les différentes étapes par lesquelles nous sommes passés pour obtenir le nombre de domination broadcast supérieur d'une chenille CT qui contient les motifs 1 et 2^+ , et contenant CT_5^4 . Pour cela, considérons la chenille $CT((1)^3, 2, (1)^4, 3, (1)^7, 2, 1, 2, (1)^2, 2, 1)$.

Etape 1 Nous supprimons les deux occurrences de $M = [(1)^4]$ dans CT , c'est-à-dire les sous-chenilles : $CT[4, 7]$ et $CT[9, 12]$.

Soit $CT^r = CT((1)^3, 2, 3, (1)^3, 2, 1, 2, (1)^2, 2, 1)$ (voir Figure 4.21.(a)).

Donc, $n_M = 2$ et $\Gamma_b(CT) = \Gamma_b(CT^r) + 6 \times n_M = \Gamma_b(CT^r) + 12$.

Etape 2 Nous déterminons θ_i^j pour chaque motif 2.

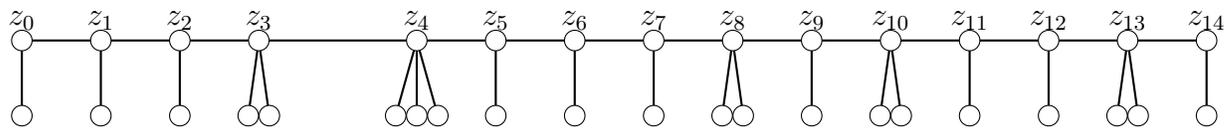
1. Dans CT^r , $i_0 = 3$, $d_1 = z_3$ et $m_3 = 2$. D'après le Lemme 4.25, nous obtenons $P_f(d_1) = \theta_3^5$. Nous considérons $CT_1^r = CT((1)^3, 6, 3, (1)^3, 2, 1, 2, (1)^2, 2, 1)$ (voir Figure 4.21.(b)).
2. Dans CT_1^r , $m_{i_1} = 2$, $d_{|D_2|} = z_{13}$ et $i_0 = n - 1$. D'après le Lemme 4.25, $P_f(d_{|D_2|}) = \theta_{13}^3$. Nous considérons $CT_2^r = CT((1)^3, 6, 3, (1)^3, 2, 1, 2, 6)$ (voir Figure 4.21.(e)).
3. Dans CT_2^r , $m_{i_0} \geq 3$, $d_1 = z_8$, $m_5 = m_6 = m_7 = 1$ et $m_4 = 3 \neq 1$. D'après le Lemme 4.24, $P_f(d_1) = \theta_8^4$. Nous considérons $CT_3^r = CT((1)^3, 6, 3, 6, 1, 2, 6)$ (voir Figure 4.21.(c)).
4. Dans CT_3^r , $m_{i_0} \geq 3$, $d_1 = z_7$ et $d_1 \notin F_7^j, \forall j \in \{1, \dots, 4\}$. D'après le Lemme 4.24, $P_f(d_1) = \theta_7^5$. Nous considérons $CT_4^r = CT((1)^3, 6, 3, 6, 1, 6, 6)$ (voir Figure 4.21.(d)).

La dernière chenille réduite $CT_4^r = CT((1)^3, 6, 3, 6, 6, 6, 1)$ est une chenille sans motif 2 et $n_{P_2} = 2$.

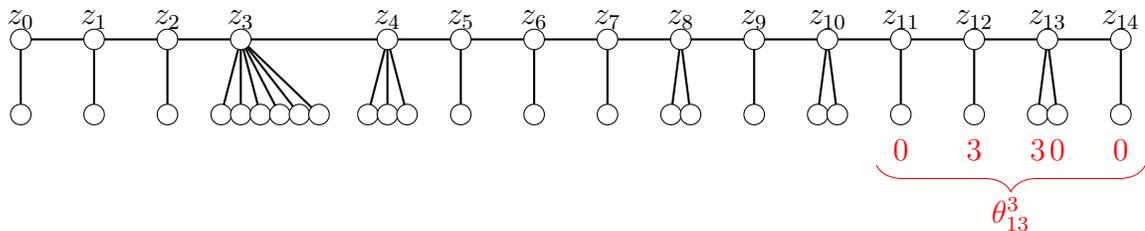
Etape 3 Calcul de $\Gamma_b(CT)$.

Grâce à la Proposition 4.17 et Théorème 4.23, nous avons $\Gamma_b(CT) = \Gamma_b(CT_4^r) + 6 \times n_M - 4 \times n_{P_2} = \Gamma_b(CT_4^r) + 4$. Le coût de Γ_b sur la chenille $CT_4^r = CT((1)^3, 6, 3, 6, 6, 6, 1)$ est calculé à partir de la formule donnée par le Lemme 4.19.

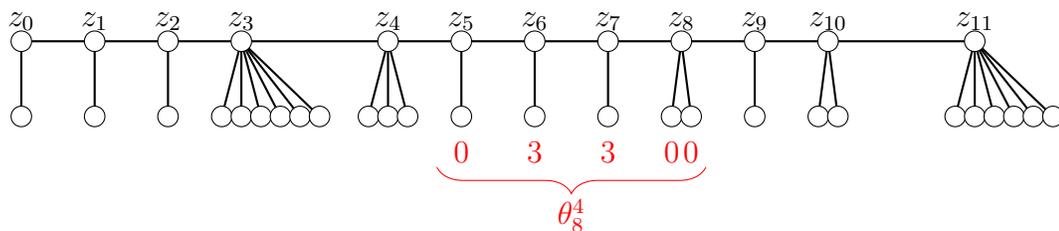
D'où, $\Gamma_b(CT) = 36$ et le Γ_b -broadcast sur CT est représenté dans la Figure 4.22.



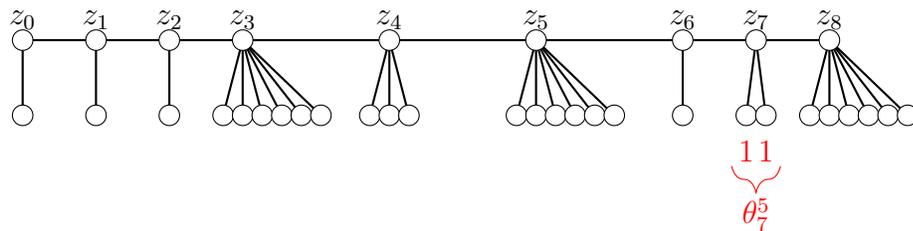
(a) CT^r



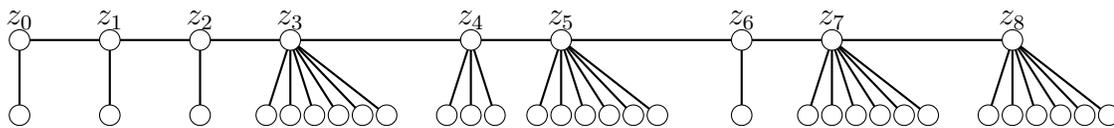
(b) CT_1^r



(c) CT_2^r

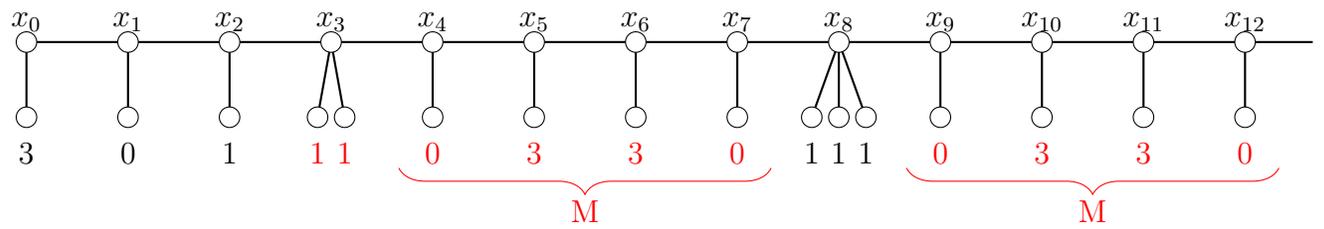


(d) CT_3^r

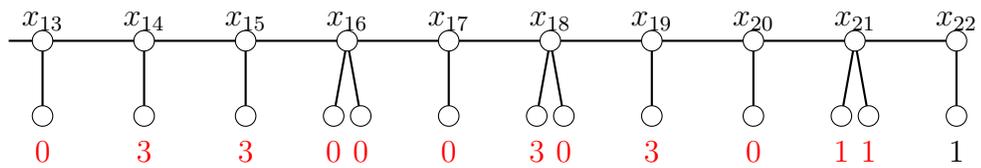


(e) CT_4^r

FIGURE 4.21 – Détermination de CT_4^r



(a)



(b)

FIGURE 4.22 – Γ_b -broadcast sur CT

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressée à deux points de recherche, le premier concerne la détermination de quelques invariants de domination broadcast sur les chaînes et les cycles, et le deuxième concerne la détermination du nombre de domination broadcast supérieur Γ_b sur une classe particulière d'arbres, qui est la classe les chenilles sans troncs.

Notre étude des invariants de domination broadcast sur les chaînes et les cycles était motivée par la conjecture d'Ahmadi et al. [1], qui porte sur les valeurs de huit invariants de broadcast domination pour ces deux classes de graphes. Nous avons affirmé certaines égalités de cette conjecture et infirmé d'autres. Les résultats prouvés sont récapitulés comme suit :

- Le nombre de domination broadcast supérieur sur les cycles est $\Gamma_b(C_n) = 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$,
- le nombre d'irredundance broadcast sur les chaînes et les cycles est $ir_b(P_n) = ir_b(C_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$,
- le nombre d'irredundance broadcast supérieur sur les chaînes est $IR_b(P_n) = n - 1$, pour $n \geq 2$ et sur les cycles est $IR_b(C_n) = 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$, pour $n \geq 4$,
- le nombre d'indépendance broadcast inférieur sur les chaînes et les cycles est $i_b(P_n) = i_b(C_n) = \lfloor \frac{2n}{5} \rfloor$, $n \neq 3$,
- le nombre d'indépendance broadcast $\beta_b(P_n) = 2n - 4$, pour $n \geq 3$ et $\beta_b(C_n) = n - 2$, pour $n \geq 3$,
- le nombre de packing inférieur est

$$p_b(P_n) = p_b(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{4} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{8} \\ 2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 1 & \text{si } n \equiv 1, 2, 3 \pmod{8} \\ 2 \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

— le nombre de packing sur les chaînes est $P_b(P_n) = n-1$ et sur les cycles est $P_b(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Le nombre de domination broadcast supérieur sur les chenilles sans troncs de longueur $n \geq 2$ n'était pas facile à déterminer. Nous avons procédé par étapes en commençant par les chenilles $CT = CT(\ell_1, \dots, \ell_n)$ où, pour tout i , $\ell_i \geq 2$. Nous avons prouvé que $\Gamma_b(CT) = \sum_{i=0}^n \ell_i$. Ensuite, nous sommes passée aux chenilles $CT = CT(\ell_1, \dots, \ell_n)$ où, pour tout i , $\ell_i = 1$. Nous avons prouvé que $\Gamma_b(CT) = \lfloor \frac{3(n+1)}{2} \rfloor$.

Nous nous sommes intéressée, par la suite, aux chenilles qui contiennent les motifs 1 et 2^+ . Nous avons partitionné cette classe en deux sous-classes, selon que les chenilles contiennent CT_5^4 ou non. Pour les chenilles CT_5^4 -libres, c'est-à-dire celles qui ne contiennent pas CT_5^4 comme sous-graphe induit, nous avons prouvé que $\Gamma_b(CT) = 6 \times n_M + \sum_{i=1}^s \sigma(\tilde{h}_{H_i}) + \sum_{i:m_i \geq 2} m_i$. Pour les chenilles qui contiennent CT_5^4 comme sous-graphe induit, nous avons supprimé toutes les sous-chenilles $M = CT(1, 1, 1, 1)$, et dans ce cas, si la chenille résultante contient encore CT_5^4 , alors il ne nous a pas été possible de tirer une formule pour $\Gamma_b(CT)$. Le calcul de cet invariant dépend de la structure de la chenille, et se déduit de manière itérative.

L'étude du nombre de domination broadcast supérieur nous incite à poser d'autres questions et à penser aux perspectives de recherche suivantes :

1. Déterminer la valeur exacte des invariants γ_b , Γ_b , ir_b , IR_b , β_b , i_b , p_b et P_b sur d'autres classes de graphes. Après les chaînes et les cycles, il serait intéressant de traiter les couronnes généralisées et les p -couronnes (p est un entier positif) des chaînes et des cycles, les grilles, les cylindres, les tores et les chenilles, dans le cas où ils ne sont pas connus.
2. Déterminer le nombre de domination broadcast supérieur pour une chenille quelconque, à commencer par exemple, par les chenilles sans sommets troncs adjacents, puis par les chenilles sans k troncs consécutifs, où k est un entier positif donné.
3. Etudier le nombre de domination broadcast supérieur sur d'autres classes d'arbres. En particulier, les araignées et les homards.
4. Déterminer le ratio entre Γ_b et d'autres invariants de broadcast.

Bibliographie

- [1] D. Ahmadi, G. H. Fricke, C. Schroeder, S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar. Broadcast irredundance in graphs. *Congr. Numer.* 224 :17–31, 2015.
- [2] M. Ahmane. Sur le nombre de broadcast d'indépendance de quelques classes d'arbres. PhD thesis (in French), *University of Sciences and Technology Houari Boumediene (USTHB)*, 2020.
- [3] M. Ahmane, I. Bouchemakh and E. Sopena. On the Broadcast Independence Number of Caterpillars. *Discrete Appl. Math.* 244 :20–35, 2018.
- [4] M. Ahmane, I. Bouchemakh and E. Sopena. On the Broadcast Independence Number of Locally Uniform 2–Lobsters. *arXiv :1902.02998[cs.DM]*, 2019.
- [5] D.W. Bange, A.E. Barkauskas, and P.J. Slater. A constructive characterization of trees with disjoint minimum dominating sets. *Congr. Numer.* 21 :101-112 (1978).
- [6] D.W. Bange, A.E. Barkauskas, and P.J. Slater. Disjoint dominating sets in trees. Technical Report 78-1087J, Sandia Laboratories, (1978).
- [7] L. Beaudou and R.C. Brewster. On the multipacking number of grid graphs. *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.* 21(3) (2019).
- [8] L. Beaudou, R.C. Brewster and F. Foucaud. Broadcast domination and multipacking : bounds and the integrality gap. *Australas. J. Combin.* 74(1) :86–97, 2019.
- [9] S. Bouchouika, I. Bouchemakh, E. Sopena, Broadcasts on Paths and Cycles, *Discrete Applied Mathematics* **283** (2020), 375-395.
- [10] S. Bouchouika, I. Bouchemakh, E. Sopena, On the upper domination broadcast on caterpillars, *Article soumis* .

-
- [11] C. Berge The Theory of graphs and its applications. *Collection Universitaire de Mathématiques, vol.2, Dunod, Paris (1958)*.
- [12] S. Bessy and D. Rautenbach. Algorithmic aspects of broadcast independence. *arXiv :1809.07248 [math.CO]*, 2018.
- [13] S. Bessy and D. Rautenbach. Relating broadcast independence and independence. *Discrete Math.* 342(12) (2019).
- [14] S. Bessy and D. Rautenbach. Girth, minimum degree, independence, and broadcast independence. *Commun. Comb. Optim.* 4(2) :131–139 (2019).
- [15] J.R.S. Blair, P. Heggernes, S.B. Horton and F. Manne. Broadcast domination algorithms for interval graphs, series-parallel graphs, and trees. *Congr. Num.* 169 :55–77, 2004.
- [16] I. Bouchemakh, N. Fergani, On the upper broadcast domination number, *Ars Combin.* 130 :151–161, 2017.
- [17] I. Bouchemakh and R. Sahbi. On a conjecture of Erwin. *Stud. Inform. Univ.* 9(2) :144–151, 2011.
- [18] I. Bouchemakh and M. Zemir. On the Broadcast Independence Number of Grid Graph. *Graphs Combin.* 30 :83–100, 2014.
- [19] B. Brešar and S. Špacapan. Broadcast domination of products of graphs. *Ars Combin.* 92 :303–320, 2009.
- [20] R.C. Brewster, G. MacGillivray and F. Yang. Broadcast domination and multipacking in strongly chordal graphs. *Discrete Appl. Math.*, in press.
- [21] R. C. Brewster, C. M. Mynhardt and L. Teshima. New bounds for the broadcast domination number of a graph. *Cent. Eur. J. Math.*, 11(7) :1334–1343, 2013.
- [22] E.J. Cockayne, S. T. Hedetniemi and D. J. Miller. Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs. *Canad. Math. Bull.* 21 :461–468, 1978.
- [23] E.J. Cockayne, S. Herke and C.M. Mynhardt. Broadcasts and domination in trees. *Discrete Math.* 311 :1235–1246, 2011.
- [24] J. Dabney, B.C. Dean and S.T. Hedetniemi. A linear-time algorithm for broadcast domination in a tree. *Networks* 53(2) :160–169, 2009.

-
- [25] J.E. Dunbar, D.J. Erwin, T.W. Haynes, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, Broadcasts in graphs, *Discrete Applied Math.* 154 (2006), 59–75.
- [26] D. Erwin. *Cost domination in graphs*. Ph.D. Dissertation, Western Michigan University, 2001.
- [27] D. Erwin. Dominating broadcasts in graphs. *Bull. Inst. Combin. Appl.* 42 :89–105, 2004.
- [28] L. Gemmrich and C.M. Mynhardt. Broadcasts in Graphs : Diametrical Trees. *Australas. J. Combin.* 69(2) :243–258, 2017.
- [29] B.L. Hartnell and C.M. Mynhardt. On the Difference between Broadcast and Multipacking Numbers of Graphs. *Utilitas Math.* 94, 2014.
- [30] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, M.A. Henning. Structures of domination in graphs. Springer ; 1st ed. 2021 Edition, Kindle Edition.
- [31] S.T. Hedetniemi. Unsolved algorithmic problems on trees. *AKCE Int. J. Graphs Combin.* 3(1) :1–37, 2006.
- [32] P. Heggenes and D. Lokshtanov. Optimal broadcast domination in polynomial time. *Discrete Math.* 36 :3267–3280, 2006.
- [33] P. Heggenes and S.H. Sæther. Broadcast domination on block graphs in linear time. Hirsch, Edward A. (ed.) et al., Computer science-theory and applications. *7th international computer science symposium in Russia, CSR 2012, Nizhny Novgorod, Russia, July 3-7, 2012. Proceedings. Berlin : Springer (ISBN 978-3-642-30641-9/ pbk). Lecture Notes in Computer Science* 7353 :172–183, 2012.
- [34] M. A. Henning, G. MacGillivray and F. Yang, Broadcast domination in graphs. In T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning (Eds.), Structures of dominations in Graphs, Springer (2020),15–46.
- [35] S. Herke Dominating Broadcasts in Graphs. *Master of science, University of Victoria*, 2009.
- [36] S. Herke and C.M. Mynhardt. Radial trees. *Discrete Math.* 309 :5950–5962, 2009.
- [37] S. Lunney and C.M. Mynhardt. More trees with equal broadcast and domination numbers. *Australas. J. Combin.* 61 :251–272, 2015.

-
- [38] C. M. Mynhardt, L. Neilson, Comparing Upper Broadcast Domination and Boundary Independence Numbers of Graphs. Available on arXiv :2104.02257 [math.CO] (2021).
- [39] C.M. Mynhardt and A. Roux. Dominating and Irredundant Broadcasts in Graphs. *Discrete Appl. Math.* 220 :80–90, 2017.
- [40] C.M. Mynhardt and L. Teshima. Broadcasts and multipackings in trees. *Utilitas Math.*, to appear.
- [41] C.M. Mynhardt and J. Wodlinger. A class of trees with equal broadcast and domination numbers. *Australas. J. Combin.* 56 :3–22, 2013.
- [42] C.M. Mynhardt and J. Wodlinger. Uniquely radial trees. *Comb. Math. and Comb. Comp.* 93 :131–152, 2015.
- [43] L. Neilson. Broadcast independence in graphs, *Doctorat dissertation, University of Victoria*, (2019).
- [44] S.M. Seager. Dominating Broadcasts of Caterpillars. *Ars Combin.* 88 :307–319, 2008.
- [45] K.W. Soh and K.M. Koh. Broadcast domination in graph products of paths. *Australas. J. Combin.* 59 :342–351, 2014.
- [46] L. Teshima. Broadcasts and multipackings in graphs, *Master’s thesis, University of Victoria*, 2012. <http://hdl.handle.net/1828/4341>