

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR EN SCIENCES

EN : Mathématiques

Spécialité : R. O. : Génie Mathématiques

Par : BENMEDJDOUB Brahim

Sujet

Colorations d'incidences

Soutenue publiquement le 30/06/2018, devant le jury composé de :

M. AÏDER Méziane,	Professeur, à l'U.S.T.H.B.	Président
Mme. BOUCHEMAKH Isma,	Professeur, à l'U.S.T.H.B.	Directrice de thèse
M. SOPENA Éric,	Professeur, à l'Université de Bordeaux	Co-directeur de thèse
M. BOUROUBI Sadek,	Professeur, à l'U.S.T.H.B.	Examinateur
M. CHELLALI Mustapha,	Professeur, à l'Université de Blida	Examinateur
M. RASPAUD André,	Professeur, à l'Université de Bordeaux	Examinateur

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu, Dieu de m'avoir donné la volonté, la force et le courage pour aller au bout de cette thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à ma directrice de thèse, Madame Isma BOUCHEMAKH, Professeur à l'U.S.T.H.B., pour la confiance qu'elle m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils, sa disponibilité et sa patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené à bon port.

Mes plus vifs remerciements vont à mon co-directeur de thèse, Monsieur Éric SOPENA, Professeur à l'Université de Bordeaux, pour tout le temps qu'il a consacré à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité tout au long de mes stages de courte durée ou de longue durée à travers le Programme National Exceptionnel (PNE). Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension à mon égard.

Mon profond respect et mes remerciements vont à Monsieur Méziane AÏDER, Professeur à l'U.S.T.H.B., pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie très chaleureusement Monsieur Sadek BOUROUBI, Professeur à l'U.S.T.H.B., Monsieur Mustapha CHELLALI, Professeur à l'Université de Blida et Monsieur André RASPAUD, Professeur à l'Université de Bordeaux pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury et d'examiner cette thèse.

Je remercie l'ensemble des membres du Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI), et plus particulièrement, l'équipe Graphes et Optimisation de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire.

Mes remerciements s'adressent aussi aux secrétaires du LaBRI, en particulier Madame Maïte LABROUSSE et Madame Sylvie LE LAURAIN, qui ont su allier la bonne humeur aux problèmes administratifs.

Je tiens à remercier plus personnellement mon épouse, qui a cru en moi. Son écoute, ses conseils, son soutien et ses encouragements m'ont été d'une grande aide.

Je voudrais exprimer plus particulièrement mes remerciements à mes parents pour leur éducation, leur générosité, leurs sacrifices et leurs précieux conseils. Ces quelques mots ne suffiront jamais pour décrire ce que j'éprouve pour vous mes chers parents...

Un remerciement infini à mon fils Waël qui a supporté mes longues et fréquentes absences.

Mes remerciements s'adressent également à mes sœurs, mes frères, mes amis et à toute personne qui m'a aidée et soutenue pour faire aboutir ce projet de thèse de doctorat.

Table des matières

Introduction	9
1 Définitions et notions de base	13
1.1 Définitions générales	13
1.2 Autres classes de graphes	19
1.3 Opérations sur les graphes	23
1.4 Quelques invariants de graphes	25
2 Coloration d'incidence et relations avec d'autres paramètres	28
2.1 Introduction	28
2.2 Coloration d'incidence de quelques classes de graphes	30
2.3 Coloration d'incidence et autres paramètres	34
2.3.1 Coloration d'incidence et coloration forte des arêtes	34
2.3.2 Coloration d'incidence et étoile-arboricité orientée	35
2.3.3 Coloration d'incidence et coloration à distance deux	36
2.4 Quelques variantes autour de la coloration d'incidence	37
2.4.1 Jeu de coloration d'incidence	37
2.4.2 Coloration fractionnaire d'incidence	39
2.4.3 Coloration intervalle d'incidence	40
2.5 Conclusion	41
3 Coloration des graphes distances et des graphes circulants	42
3.1 Graphes distances	42
3.1.1 Introduction	42

3.1.2	Coloration à distance 2	45
3.1.2.1	Coloration à distance 2 de $G(\{1, a\})$, $a \geq 3$	46
3.1.2.2	Coloration à distance 2 de $G(\{1, a, a + 1\})$, $a \geq 3$	48
3.1.2.3	Coloration à distance 2 de $G(\{1, \dots, m, a\})$, $2 \leq m < a$	56
3.1.2.4	Coloration à distance 2 de $G(D)$ pour d'autres ensembles	59
3.1.3	Coloration d'incidences	62
3.2	Graphes circulants	62
3.2.1	Introduction	62
3.2.2	Coloration à distance 2	66
3.2.3	Coloration d'incidences	78
3.3	Conclusion et perspectives	93
4	Coloration par liste d'incidences	95
4.1	Introduction	95
4.2	Préliminaires	96
4.3	Les grilles carrées	98
4.4	Les graphes de Halin	103
4.5	Cactus	113
4.6	Les graphes cubiques Hamiltoniens	123
4.7	Conclusion	126
5	Coloration totale d'incidences	128
5.1	Introduction	128
5.2	Préliminaires	129
5.3	Les graphes complets	132
5.4	Les grilles carrées	134
5.5	Les graphes de Halin	135
5.6	Les graphes bipartis complets	138
5.7	Conclusion	140

Conclusion	141
Bibliographie	143

Table des figures

1.1	Un multigraphe et un graphe simple	14
1.2	Le graphe biparti complet $K_{4,2}$	16
1.3	Le graphe $K_{3,2}$ est planaire	17
1.4	Le graphe K_5 n'est pas planaire	17
1.5	Le graphe complet K_4	17
1.6	La roue W_9	18
1.7	Un arbre T	20
1.8	Une étoile et une étoile double	21
1.9	Un cycle Hamiltonien dans un graphe Hamiltonien	21
1.10	Un graphe G avec sa couronne généralisée $G \odot pK_1$	22
1.11	L'hypercube Q_3	23
1.12	Un graphe et son complémentaire	23
1.13	La grille $P_5 \square P_4$	24
1.14	Le cycle C_5 et le graphe $K_5 = C_5^2$	25
1.15	Illustration de quelques invariants de graphes	27
2.1	Incidences adjacentes.	29
2.2	Coloration d'incidence et coloration forte d'arêtes du graphe G'	35
2.3	Coloration d'incidence et étoile-arboricité orientée	36
2.4	Coloration d'incidence d'un graphe G et coloration à distance deux du graphe G	37
3.1	Sous-graphe d'un graphe distance $G(\{1, a\})$, $a \geq 3$	47
3.2	Sous-graphe du graphe distance $G(\{1, a, a + 1\})$, $a \geq 3$	49

3.3	Coloration des incidences des sommets 1, 2 et 3	79
4.1	La L_0 -liste coloration d'incidence partielle du graphe H_0 du Lemme 4.9.	98
4.2	Coloration des incidences de $G_{5,4}$ en cinq étapes (Theorem 4.10).	101
4.3	Les configurations de la preuve de la Proposition 4.11.	103
4.4	Une partie du cycle extérieur C_G d'un graphe de Halin G (les t_i ne sont pas nécessairement distincts).	105
4.5	Configuration de la preuve du Lemme 4.13.	106
4.6	Coloration du sous-arbre de T_G dans la preuve du Lemme 4.13.	110
4.7	L'ordre des incidences de K_4 pour la preuve du Lemme 4.15.	112
4.8	La configuration de la preuve du Lemme 4.18, cas pré-coloré.	116
4.9	La coloration des incidences externes de v_1 ($v_{n-1} = v_2$ si $n = 3$), cas pré-cploré.	117
4.10	La coloration des incidences externes de v_{n-1} ($v_{n-2} = v_2$ si $n = 4$), cas pré-coloré. Au moins une des incidences (v_0, v_0v_1) ou (v_2, v_2v_1) est colorée avec α_1	119
4.11	La configuration de la preuve du Fait 4.22.	125
5.1	Le cycle C_4 et son graphe total d'incidence.	131
5.2	Coloration totale d'incidence du graphe complet K_4	133
5.3	Coloration totale s'incidence de la gille carrée $G_{6,5}$	134
5.4	Configuration du Théorème 5.10.	137
5.5	Coloration totale d'incidence du graphe biparti complet $K_{2,4}$	138
5.6	Coloration totale d'incidence du graphe biparti complet $K_{3,4}$	139

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Les graphes permettent de modéliser et résoudre une grande variété de problèmes concrets, notamment ceux qui ont comme objectif la recherche de la meilleure solution parmi un ensemble fini d'alternatives, afin de mieux les comprendre, éventuellement les résoudre. La modélisation se base sur les notions de sommets et d'arêtes. Un sommet est un point représentant un objet et une arête est un segment reliant deux sommets ayant une relation spécifique. En théorie des graphes, beaucoup de problèmes se modélisent comme des problèmes de coloration. C'est pourquoi la coloration de graphes attire continuellement l'attention des chercheurs.

Une k -coloration propre d'un graphe G est une application de l'ensemble de sommets de G vers l'ensemble de couleurs $\{1, \dots, k\}$ telle que les sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. Le plus petit entier k pour lequel le graphe G admet une k -coloration propre est appelé nombre chromatique, et est noté $\chi(G)$.

Le problème des quatre couleurs est l'un des premiers problèmes de la coloration des graphes. Il a été introduit suite à une question posée par F. Guthrie. Ce dernier a remarqué que quatre couleurs suffisent pour colorer la carte des régions d'Angleterre de façon telle que deux régions ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. Ce problème a été posé sous forme d'une conjecture en 1852, et depuis, de nombreux chercheurs ont essayé de répondre à la question suivante : "Peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en n'utilisant que quatre couleurs de sorte que deux sommets reliés par une arête aient des couleurs différentes?". En 1977 Appel et Haken [5, 6] ont prouvé cette conjecture en proposant un algorithme qui nécessite plus de 1200 heures de calcul sur trois ordinateurs. En 1997, l'algorithme d'Appel et Haken a été simplifié par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas [71].

Aujourd'hui encore, plusieurs chercheurs tentent de montrer cette conjecture sans utiliser l'ordinateur. Actuellement, plusieurs types de coloration ont été introduits et étudiés. Nous citons, par exemple, la coloration d'arêtes, la coloration d'incidence, la coloration par liste... L'ouvrage de Jensen et Toft [51] "Graph Coloring Problems" est une excellente référence pour les problèmes de coloration de graphes.

Parmi les différents types de coloration, nous nous intéressons aux colorations d'incidences. Une incidence d'un graphe G est un couple (u, e) où u est un sommet, et e une arête incidente au sommet u . On dit que deux incidences (u, e) et (v, f) sont adjacentes si l'une des conditions suivantes est vérifiée : (1) $u = v$, (2) $e = f$ ou (3) $e = uv$ ou $f = uv$.

Une k -coloration d'incidence d'un graphe G est une application de l'ensemble des incidences de G vers l'ensemble de couleurs $\{1, \dots, k\}$ telle que les incidences adjacentes reçoivent des couleurs différentes. Le plus petit entier k pour lequel le graphe G admet une k -coloration d'incidence est appelé nombre chromatique d'incidence, et est noté $\chi_i(G)$.

La coloration d'incidence a été introduite en 1993 par Brualdi et Massey [23] qui ont conjecturé que le nombre chromatique d'incidence de tout graphe G , de degré maximum $\Delta(G)$, est inférieur ou égal à $\Delta(G)+2$. En 1997, Guiduli [41] a montré qu'il existe des familles de graphes ayant un nombre chromatique d'incidence d'au moins $\Delta(G) + \Omega(\log \Delta(G))$, ce qui implique que la conjecture est fautive en général. Depuis, il a été démontré que de nombreuses familles de graphes satisfaisaient cependant cette conjecture.

Un graphe G est k -choisissable si pour toute affectation de liste L avec $|L(v)| = k$ pour tout sommet v de G , le graphe G admet une coloration propre des sommets de façon telle que chaque sommet v de G est coloré par une couleur prise dans la liste $L(v)$. Le plus petit entier k pour lequel G est k -choisissable est appelé nombre de choisissabilité, et est noté $\text{ch}(G)$. La coloration par liste a été introduite indépendamment par Vizing [81] et Erdős, Rubin et Taylor [35]. Le problème le plus célèbre de cette coloration est la conjecture de la coloration d'arêtes par listes [51] qui stipule que pour tout graphe G , $\text{ch}'(G) = \chi'(G)$. Bien que cette conjecture est vérifiée pour plusieurs classes de graphes, elle reste ouverte dans le cas général.

Une k -coloration totale d'un graphe G est une application de l'ensemble des sommets et des arêtes de G vers l'ensemble de couleurs $\{1, \dots, k\}$ telle que des couleurs distinctes sont affectées à (1) toute paire de sommets adjacents, (2) toute paire d'arêtes adjacentes, (3) toute paire de sommet et d'arête incidents. Le plus petit entier k pour lequel G admet une k -coloration totale est appelé nombre chromatique total, et est noté $\chi''(G)$. La conjecture de la coloration totale, posée indépendamment par Vizing [80] et Behzad [9], stipule que pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Dans cette thèse, nous étudions trois versions de la coloration d'incidence, la coloration d'incidence standard, la coloration par liste d'incidences et la coloration totale d'incidence.

Après une introduction, nous fournissons dans le premier chapitre quelques définitions de base de la théorie des graphes qui nous seront utiles par la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la coloration d'incidence. Après avoir défini cette coloration, nous donnons un état de l'art contenant les principaux résultats sur le paramètre χ_i , et les relations le liant à d'autres paramètres de coloration.

Le troisième chapitre s'intéresse à la coloration d'incidence et la coloration à distance 2 des graphes distances et des graphes circulants. Dans la première partie de ce chapitre, nous étudions le nombre chromatique à distance 2 de quelques classes des graphes distances. Ces résultats vont nous permettre de déterminer des valeurs exactes ou des bornes supérieures du nombre chromatique d'incidence. Dans la deuxième partie, nous déterminons soit des valeurs exactes soit des bornes supérieures du nombre chromatique à distance 2 et du nombre chromatique d'incidence, en se basant sur les résultats obtenus dans la première partie de ce chapitre.

Dans le quatrième chapitre, nous introduisons la version liste de la coloration d'incidence. Nous déterminons soit des valeurs exactes soit des bornes supérieures du nombre de choisissabilité d'incidence de plusieurs classes de graphes tels que les graphes de Halin, les grilles carrées, les cactus et les graphes cubiques Hamiltoniens.

Dans le dernier chapitre, nous introduisons la version totale de la coloration d'incidence. Nous commençons par étudier quelques classes simples de graphes comme les cycles, les graphes d -dégénéré et les roues, ensuite, nous donnons soit des valeurs

exactes soit des bornes supérieures du nombre chromatique total d'incidence de plusieurs classes de graphes tels que les graphes de Halin, les grilles carrées, les graphes complets et les graphes bipartis complets.

Nous clôturons la thèse par une conclusion générale, des perspectives de recherche et quelques questions ouvertes.

Chapitre 1

Définitions et notions de base

Dans ce chapitre, nous donnons les définitions de base de la théorie des graphes qui nous seront utiles tout au long de cette thèse. Ces notions sont standards et le lecteur peut se référer aux ouvrages [15, 21, 32].

1.1 Définitions générales

Graphe

Un *graphe* G , est un couple composé d'un ensemble de *sommets* $V(G)$, et d'un ensemble d'*arêtes* $E(G)$, qui sont des paires de sommets (non nécessairement distincts). Si $e = \{u, v\}$ (ou simplement $e = uv$) est une arête alors les sommets u et v sont appelés les *extrémités* de e . Une arête $e = uv$ est une *boucle* si $u = v$. Dans le cas général, un graphe peut avoir des arêtes multiples, c'est-à-dire des arêtes différentes qui ont les mêmes extrémités. Les nombres de sommets et d'arêtes de G sont notés par $|V(G)|$ et $|E(G)|$, ces deux paramètres fondamentaux sont appelés l'*ordre* et la *taille* de G , respectivement.

Par exemple sur la Figure 1.1(a), les sommets u_2 et u_3 sont les extrémités de l'arête $e = u_2u_3$, le graphe H possède une boucle en u_1 et une arête multiple u_5u_6 (c'est une arête triple).

Un graphe *simple* est un graphe sans boucles, et sans arêtes multiples. Le graphe G représenté dans la Figure 1.1(b) ne possède ni boucle ni arête multiple, donc G est

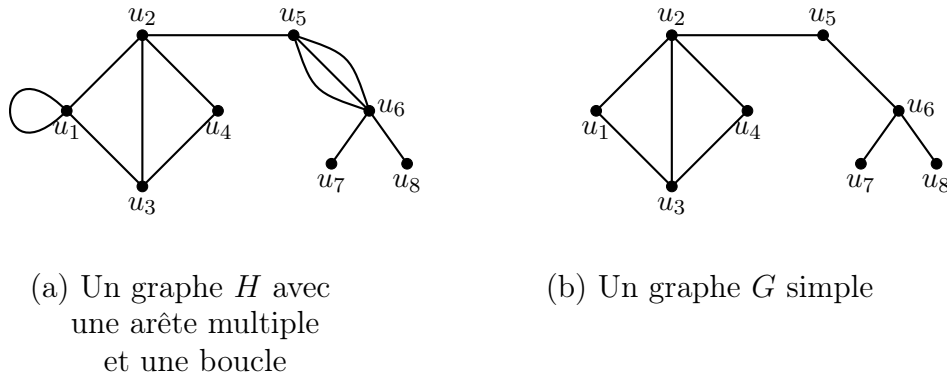


FIGURE 1.1 – Un multigraphe et un graphe simple

un graphe *simple*, il a pour ensemble de sommets $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_8\}$ et pour ensemble d'arêtes $E(G) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4, u_2u_5, u_5u_6, u_6u_7, u_6u_8\}$. Ce graphe est donc d'ordre 8 et de taille 9.

Digraphe

Un *digraphe* D est un couple composé d'un ensemble de sommets $V(D)$, et d'un ensemble d'*arcs* $\overrightarrow{E(D)} \subset V \times V$. Un *arc* $a \in \overrightarrow{E(D)}$, noté (u, v) , est une arête dirigée de u vers v .

Dans tout ce qui suit, nous considérerons uniquement des graphes *simples*.

Adjacence

Soit G un graphe. Pour une arête $e = uv$, on dit que :

- u et v sont adjacents (ou sont reliés) ;
- u et v sont voisins ;
- u et v sont les extrémités de e ;
- e est incidente aux sommets u et v .

Voisinage

Pour un graphe G , le *voisinage ouvert* d'un sommet u , noté $N_G(u)$, est l'ensemble des sommets adjacents à u et le *voisinage fermé* de u , noté $N_G[u]$, est l'ensemble

$N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$. Le voisinage ouvert (resp. fermé) d'un ensemble de sommets S est $N_G(S) = \bigcup_{u \in S} N_G(u)$ (resp. $N_G[S] = \bigcup_{u \in S} N_G[u]$).

Degré d'un sommet

Le *degré* d'un sommet u dans un graphe G , noté $d_G(u)$, est le nombre d'arêtes incidentes à u , et donc $d_G(u) = |N_G(u)|$. Le degré maximum (resp. minimum) d'un graphe G , noté $\Delta(G)$ (resp. $\delta(G)$), est le maximum (resp. minimum) des degrés des sommets de G .

Un sommet de degré égal à 1 est appelé sommet *pendant* (ou une *feuille*).

Graphes infinis localement finis

Un graphe G est dit *infini* s'il possède un nombre infini de sommets. Un graphe infini est dit *localement fini* si le degré de chacun de ses sommets est fini.

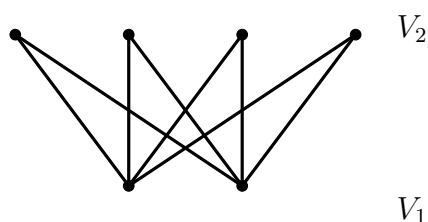
Graphes subcubiques, cubiques et r -réguliers

Un graphe G est dit *subcubique* si et seulement si tout sommet de G est de degré au plus 3, c'est-à-dire $\Delta(G) \leq 3$. De plus si tout sommet de G est de degré exactement 3, c'est-à-dire $\forall u \in V(G), d_G(u) = 3$, alors ce graphe est appelé *graphe cubique* ou encore *3-régulier*.

Plus généralement, pour un entier positif k , un graphe G est *r -régulier* si et seulement si tout sommet de G est de degré k , c'est-à-dire $\forall u \in V(G), d_G(u) = k$.

Sous-graphe et sous-graphe induit

Un graphe H est un *sous-graphe* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un sous-ensemble de sommets $W \subseteq V(G)$, le *sous-graphe induit* par W est le graphe $G[W]$ défini par l'ensemble de sommets $V(G[W]) = W$ et l'ensemble d'arêtes $E(G[W]) = \{uv : uv \in E(G) \text{ et } \{u, v\} \subset W\}$.

FIGURE 1.2 – Le graphe biparti complet $K_{4,2}$

Graphe complet

Un graphe *complet* est un graphe où toute paire de sommets est reliée par une arête.

Le graphe complet d'ordre n est généralement noté par K_n .

Graphe biparti

Un graphe G est *biparti* si $V(G)$ peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 de telle sorte que toute arête du graphe possède une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 .

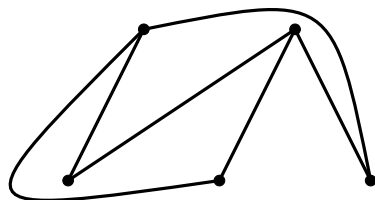
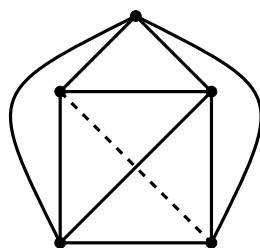
Un graphe biparti est dit *biparti complet* si chaque sommet de V_1 est adjacent à chaque sommet de V_2 . Si $|V_1| = m$ et $|V_2| = n$ alors le graphe est noté $K_{m,n}$. Un exemple d'un graphe biparti complet est le graphe $K_{4,2}$ illustré dans la Figure 1.2.

Graphe multiparti complet

Un graphe *multiparti complet* ou *t-parti complet* est un graphe G où l'ensemble des sommets $V(G)$ peut être partitionné en t stables N_i (c'est-à-dire $G[N_i]$ est sans arête), $i = 1, \dots, t$, et pour toute paire de sommets $u \in N_i$ et $v \in N_j$, $1 \leq i < j \leq t$, $uv \in E(G)$. Si $|N_i| = n_i$ pour tout $i = 1, \dots, t$, $t \geq 2$, alors le graphe est noté K_{n_1, n_2, \dots, n_t} .

Graphe planaire

Un graphe G est dit *planaire* s'il existe une façon de le représenter dans un plan sans que deux arêtes ne se croisent.

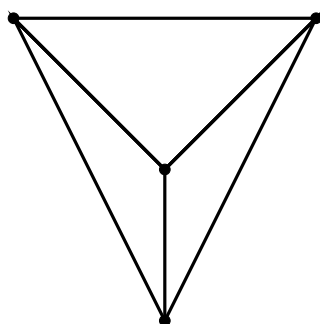
FIGURE 1.3 – Le graphe $K_{3,2}$ est planaireFIGURE 1.4 – Le graphe K_5 n'est pas planaire

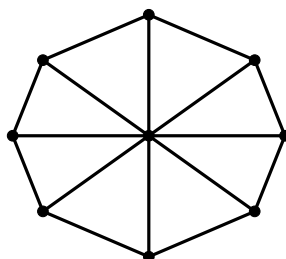
Exemple : le graphe de la Figure 1.3 est le graphe biparti complet $K_{3,2}$, qui est planaire, par contre le graphe complet K_5 illustré dans la Figure 1.4 ne l'est pas.

Graphe planaire extérieur

Un graphe G est dit *planaire extérieur* s'il est planaire et s'il est possible de le représenter dans un plan de façon telle que tous les sommets soient sur la frontière de la face extérieure.

Le graphe complet K_4 illustré dans la Figure 1.5 est un graphe planaire, mais il n'est pas planaire extérieur.

FIGURE 1.5 – Le graphe complet K_4 .

FIGURE 1.6 – La roue W_9

Chaîne, cycle et roue

Soit n un entier positif. La chaîne d'ordre n , notée P_n , est le graphe défini par $V(P_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $E(P_n) = \{u_i u_{i+1} / 1 \leq i \leq n - 1\}$.

Soit G un graphe et soit $\{u, v\} \subset V(G)$ une paire de sommets. Une chaîne d'ordre n entre u et v est une suite de sommets distincts u_1, \dots, u_n telle que pour tout i , avec $1 \leq i \leq n - 1$, on a $u_i u_{i+1} \in E(G)$, avec $u_1 = u$ et $u_n = v$. Cette chaîne est de longueur $n - 1$.

Soit n un entier positif. Le cycle d'ordre n , noté C_n , est le graphe défini par $V(C_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $E(C_n) = \{u_1 u_n, u_i u_{i+1} / 1 \leq i \leq n - 1\}$.

Soit G un graphe et soit $\{u, v\} \subset V(G)$ une paire de sommets. Un cycle d'ordre n , noté C_n , entre u et v est une suite de sommets distincts u_1, \dots, u_n telle que pour tout i , avec $1 \leq i \leq n - 1$, on a $u_i u_{i+1} \in E(C_n)$ et $u_1 u_n \in E(C_n)$, avec $u_1 = u$ et $u_n = v$. Ce cycle est de longueur n .

La *roue*, notée W_n , est un graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets de ce cycle (voir par exemple, la roue W_9 illustrée dans la Figure 1.6).

Distance

La *distance* entre deux sommets u et v d'un graphe G , notée $d_G(u, v)$, est la longueur d'une plus courte chaîne qui relie u à v . Si aucune chaîne ne relie u à v , on pose par convention $d_G(u, v) = \infty$.

Graphe connexe

Un graphe G est dit *connexe* si toute paire de sommets de G est reliée par une chaîne.

Excentricité

L'*excentricité* d'un sommet u d'un graphe G , notée $e_G(u)$, est la plus grande des distances $d_G(u, v)$ où $v \in V(G)$, c'est-à-dire $e(u) = \max_{v \in V(G)} d_G(u, v)$.

Composante connexe

Une *composante connexe* d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximal de G .

Point d'articulation

Un sommet v d'un graphe G est un *point d'articulation* si la suppression de v augmente le nombre de composantes connexes de G .

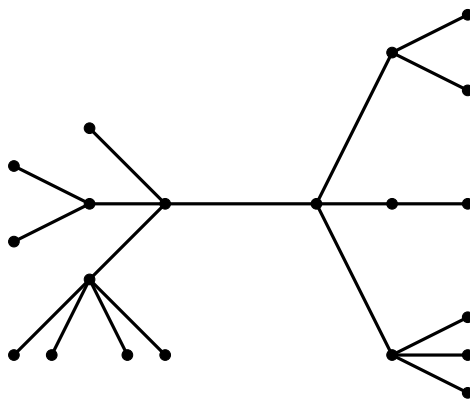
Connectivité

On dit qu'un graphe G est *k-connexe* ($k \geq 2$) si $|V(G)| > k$ et pour tout ensemble de sommets $U \subseteq V(G)$ avec $|U| \leq k-1$, $G-U$ est connexe. On définit la *connectivité* d'un graphe comme étant le plus grand k tel que G est k -connexe. La connectivité d'un graphe G est notée par $\kappa(G)$.

1.2 Autres classes de graphes

Arbre

Un *arbre* T est un graphe connexe sans cycle. Les sommets de T de degré 1 sont appelés *sommets pendants* (ou *feuilles*), et les sommets adjacents à des feuilles sont des sommets *supports*. La Figure 1.7 représente un arbre T .

FIGURE 1.7 – Un arbre T

Notons que tout arbre T vérifie :

$$2 \operatorname{rad}(T) - 1 \leq \operatorname{diam}(T) \leq 2 \operatorname{rad}(T).$$

Forêt

Une *forêt* T est un graphe acyclique qui n'est pas forcément connexe, donc toutes ses composantes connexes sont des arbres.

Étoile

L'*étoile* S_n est l'arbre d'ordre $n + 1$ où seul un sommet, appelé sommet central¹, est de degré supérieur à 1.

Étoile double

L'*étoile double*, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet central de l'étoile S_p au sommet central de l'étoile S_q .

Le graphe illustré dans la Figure 1.8(a) est l'étoile S_8 et le graphe illustré dans la Figure 1.8(b) est l'étoile double $S_{3,4}$.

1. Le *sommet central* d'une étoile S_k est le sommet u de degré maximum.

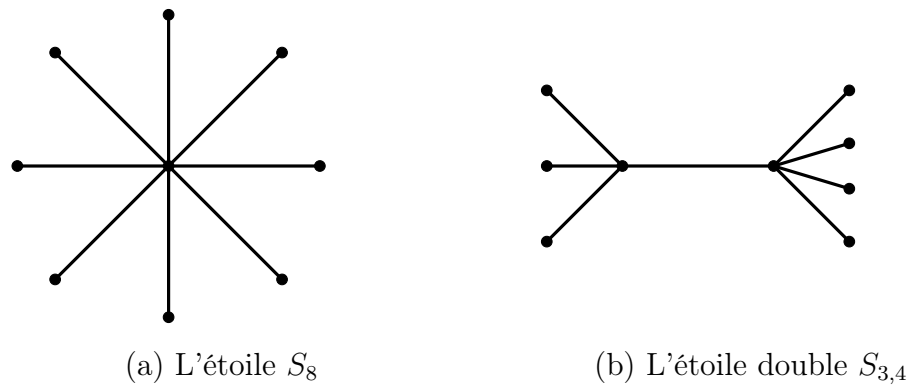


FIGURE 1.8 – Une étoile et une étoile double

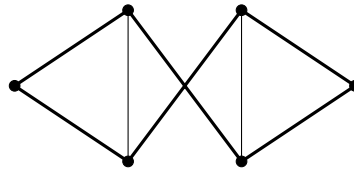


FIGURE 1.9 – Un cycle Hamiltonien dans un graphe Hamiltonien

Graphe Hamiltonien

Un graphe G est dit *Hamiltonien*, s'il possède au moins un cycle qui passe par tous les sommets du graphe G une et une seule fois. Un tel cycle est appelé *cycle Hamiltonien*.

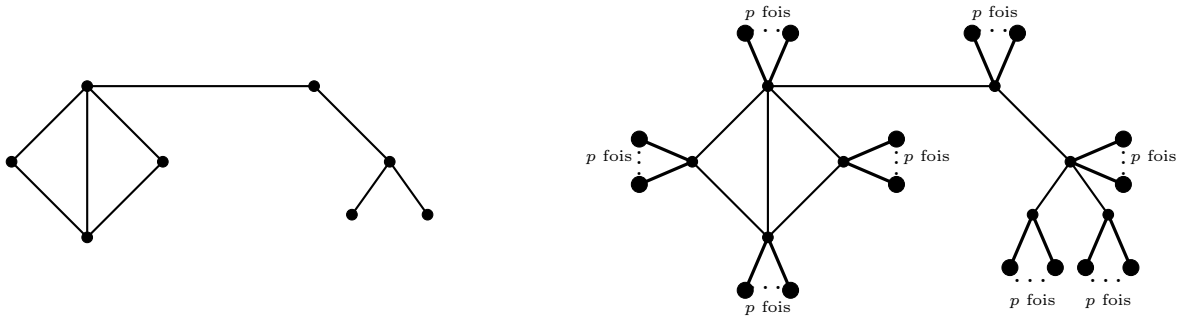
Le graphe illustré dans la Figure 1.9 est Hamiltonien. Le cycle en gras est un cycle Hamiltonien.

Graphe de Halin

Un graphe de Halin est un graphe obtenu à partir d'un arbre sans sommet de degré 2, en reliant tous les sommets pendants de cet arbre par un cycle, appelé *cycle extérieur*, de telle façon que le graphe obtenu reste planaire. Par exemple, pour tout entier $n \geq 3$, la roue W_n est un graphe de Halin.

Couronne généralisée d'un graphe

La *couronne* $G \odot K_1$ d'un graphe G est le graphe obtenu à partir d'une copie de G en attachant un sommet pendent à chaque sommet de G .

FIGURE 1.10 – Un graphe G avec sa couronne généralisée $G \odot pK_1$

Plus généralement, pour un entier donné $p \geq 1$, la *couronne généralisée* $G \odot pK_1$ d'un graphe G est le graphe obtenu à partir d'une copie de G en attachant p voisins pendants à chaque sommet de G (Voir Figure 1.10).

Cactus

Un *cactus* est un graphe connexe dont chaque sommet appartient à au plus un cycle.

Graphe d -dégénéré

Un graphe G est *d -dégénéré* si et seulement si tout sous-graphe de G contient un sommet de degré au plus d .

Hypercube

L'*hypercube* de dimension n , noté Q_n , est le graphe dont les sommets sont les n -uplets de $\{0, 1\}^n$ et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent exactement d'une composante.

Le graphe illustré dans la Figure 1.11 est l'hypercube de dimension 3.

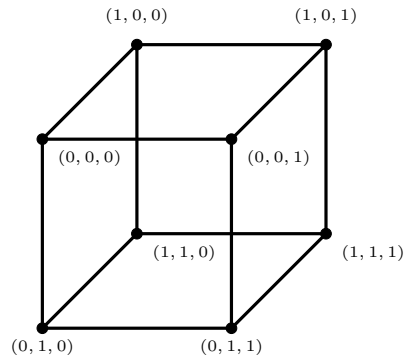
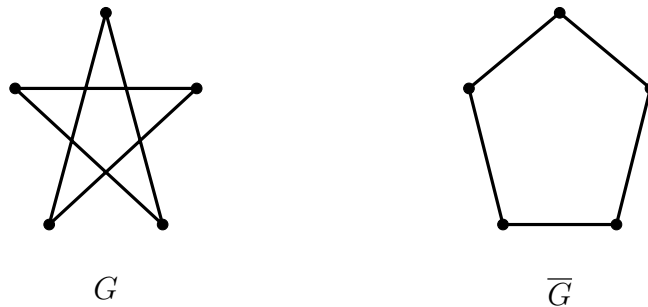
FIGURE 1.11 – L'hypercube Q_3 

FIGURE 1.12 – Un graphe et son complémentaire

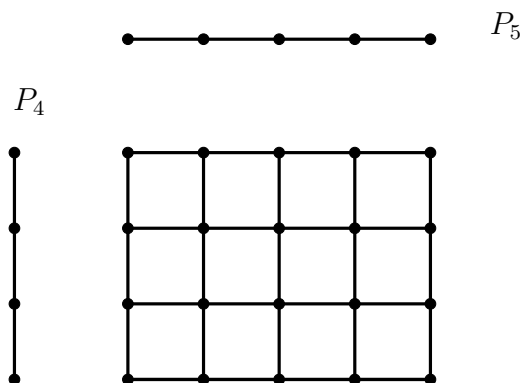
1.3 Opérations sur les graphes

Union de deux graphes

L'union $G = G_1 \cup G_2$ de deux graphes G_1 et G_2 est le graphe G ayant pour ensemble de sommets $V = V_1 \cup V_2$ et pour ensemble d'arêtes $E = E_1 \cup E_2$, où V_1 (resp. V_2) est l'ensemble des sommets de G_1 (resp. G_2) et E_1 (resp. E_2) est l'ensemble des arêtes de G_1 (resp. G_2).

Complémentaire d'un graphe

Soit G un graphe, le complémentaire du graphe G , noté \bar{G} , est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(\bar{G}) = V(G)$ et pour ensemble d'arêtes $E(\bar{G}) = \{uv : u, v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$, autrement dit, deux sommets dans \bar{G} sont reliés si et seulement s'ils ne sont pas reliés dans le graphe G . La Figure 1.12 représente un graphe G et son complémentaire \bar{G} .

FIGURE 1.13 – La grille $P_5 \square P_4$

Produit cartésien de deux graphes

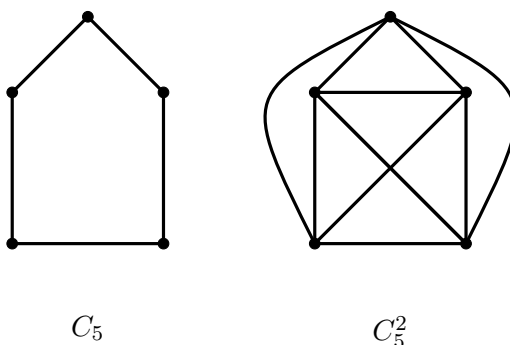
Soient G et H deux graphes. Le *produit cartésien* $G \square H$ de G et H est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) de $V(G) \times V(H)$ étant reliés par une arête si et seulement si $u_1 u_2 \in E(G)$ et $v_1 = v_2$, ou $v_1 v_2 \in E(H)$ et $u_1 = u_2$.

Exemple 1.1.

1. La *grille carrée* $P_m \square P_n$ est le produit cartésien des deux chaînes P_m et P_n (par exemple, la Figure 5.3 représente la grille $P_5 \square P_4$).
2. La *grille circulaire* (ou simplement cylindre) $P_m \square C_n$ est le produit cartésien de la chaîne P_m par le cycle C_n .
3. La *grille torique* (ou simplement tore) $C_m \square C_n$ est le produit cartésien des deux cycles C_m et C_n .

Produit lexicographique de deux graphes

Soient G et H deux graphes. Le *produit lexicographique*, $G[H]$ de G par H est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$, deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) de $V(G) \times V(H)$ étant reliés par une arête si et seulement si $(u_1 u_2 \in E(G))$ ou $(u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E(H))$.

FIGURE 1.14 – Le cycle C_5 et le graphe $K_5 = C_5^2$

Puissance d'un graphe

La p -ième puissance G^p d'un graphe G est le graphe ayant le même ensemble de sommets que G , et tel que deux sommets u et v dans G^p sont adjacents si et seulement si la distance entre eux dans G est au plus p ($d_G(u, v) \leq p$).

Par exemple, le carré du cycle C_5 (c'est-à-dire la deuxième puissance de C_5) est le graphe complet K_5 (voir Figure 1.14).

1.4 Quelques invariants de graphes

Nombre de stabilité

Un *stable* S dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que $G[S]$ est un graphe sans arêtes.

Le *nombre de stabilité* $\alpha(G)$ de G est le cardinal maximal d'un stable dans G :

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}.$$

Nombre de transversalité

Un *transversal* T dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute arête e de G , il existe $v \in T$, tel que v est une extrémité de e .

Le *nombre de transversalité* $\tau(G)$ de G est le cardinal minimal d'un transversal dans G : $\tau(G) = \min\{|T| : T \text{ est un transversal de } G\}$.

Nombre de clique

Une *clique* K dans un graphe G est un sous-ensemble des sommets de G dont le sous-graphe induit est un graphe complet.

Le *nombre de clique* $\omega(G)$ de G est le cardinal maximal d'une clique dans G :
 $\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ est une clique de } G\}$.

Nombre de domination

Un ensemble *dominant* D dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que pour tout sommet u de $V(G)$, $u \in D$ ou u a un voisin dans D .

Le *nombre de domination* $\gamma(G)$ de G est le cardinal minimal d'un ensemble dominant dans G : $\gamma(G) = \min\{|D| : D \text{ est un ensemble dominant de } G\}$.

Coloration propre de sommets et nombre chromatique

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une *k-coloration propre* des sommets d'un graphe G est une application λ qui va de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que pour toute paire de sommets adjacents $\{u, v\}$, on a $\lambda(u) \neq \lambda(v)$. Un graphe G est dit *k-colorable* s'il admet une k-coloration propre.

Le *nombre chromatique* d'un graphe G , noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G est *k-colorable*.

Coloration propre d'arêtes et indice chromatique

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une *k-coloration propre d'arêtes* d'un graphe G est une application λ qui va de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que pour toute paire d'arêtes adjacentes (e, e') , on a $\lambda(e) \neq \lambda(e')$.

L'*indice chromatique* d'un graphe G , noté $\chi'(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une *k-coloration propre d'arêtes*.

Exemple 1.2. Pour le graphe G_1 illustré dans la Figure 1.15(a), l'ensemble des sommets blancs représente un stable S de cardinalité maximum, l'ensemble des sommets noirs représente un transversal T de cardinalité minimum et l'ensemble

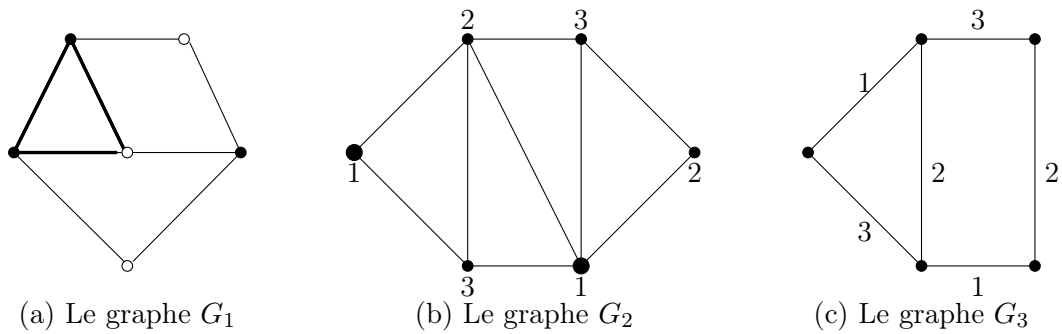


FIGURE 1.15 – Illustration de quelques invariants de graphes

des extrémités des arêtes tracées en gras représente une clique K de cardinalité maximale. Dans la Figure 1.15 (b) l'ensemble de gros sommets en gras représente un ensemble dominant, la numérotation des sommets de ce graphe représente une coloration optimale des sommets de G et la numérotation des arêtes du graphe illustré dans la Figure 1.15(c) représente une coloration optimale des arêtes de G . D'où $\alpha(G_1) = \tau(G_1) = \omega(G_1) = 3$, $\gamma(G_2) = 2$ $\chi(G_2) = \chi'(G_3) = 3$.

Chapitre 2

Coloration d'incidence et relations avec d'autres paramètres

Dans ce chapitre, nous présentons la coloration d'incidence. Nous commençons par définir cette coloration, puis présentons les principaux résultats sur ce paramètre. Nous donnons par la suite les liens avec d'autres paramètres de coloration. Le résumé mis en ligne par Eric Sopena [74] a été très utile pour rédiger une grande partie de ce chapitre.

2.1 Introduction

Soit G un graphe. Une incidence de G est un couple (u, e) où u est un sommet, et e une arête incidente au sommet u (une incidence peut ainsi être assimilée à une « demi-arête »). On note par $I(G)$ l'ensemble de toutes les incidences du graphe G :

$$I(G) = \{(u, e) : u \in V, e \in E \text{ et } e \text{ incidente à } u\}.$$

Pour chaque sommet u de G , l'ensemble des incidences de la forme (u, uv) est appelé l'ensemble des incidences internes de u et est noté par $A^-(u)$, et l'ensemble des incidences de la forme (v, uv) est appelé l'ensemble des incidences externes de u et est noté par $A^+(u)$. Deux incidences (u, e) et (v, f) sont adjacentes si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (1) $u = v$ ou

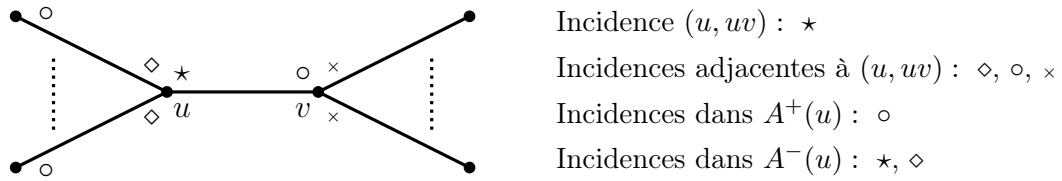


FIGURE 2.1 – Incidences adjacentes.

(2) $e = f$ ou

(3) $e = uv$.

Donc pour chaque incidence (u, uv) , l'ensemble des incidences adjacentes à (u, uv) est $A^-(u) \cup A^+(u) \cup A^-(v)$ (voir Figure 2.1).

Une k -coloration d'incidence d'un graphe G est une application associant une couleur prise dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$ à chaque incidence de G , de façon telle que deux incidences adjacentes aient des couleurs distinctes. Le nombre chromatique d'incidence de G , noté $\chi_i(G)$, est alors le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration d'incidence.

La coloration d'incidence a été introduite par Brualdi et Massey [23] en 1993. Ils ont déterminé les bornes suivantes :

Théorème 2.1 (Brualdi et Massey [23]). *Pour tout graphe G ,*

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi_i(G) \leq 2\Delta(G).$$

Après avoir étudié plusieurs classes de graphes, Brualdi et Massey [23] ont proposé la conjecture suivante :

Conjecture 2.2 (Brualdi et Massey [23]). *Pour tout graphe G ,*

$$\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

En 1997, Guiduli [41] a montré que cette conjecture était fautive en donnant des classes de graphes ayant un nombre chromatique d'incidence d'au moins $\Delta(G) + \Omega(\log \Delta(G))$. Guiduli [41] a montré aussi une nouvelle borne supérieure pour le nombre chromatique d'incidence.

Théorème 2.3 (Guiduli [41]). *Pour tout graphe G ,*

$$\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 20 \log \Delta(G) + 84.$$

Une (k, ℓ) -coloration d'incidence d'un graphe G est une k -coloration d'incidence λ telle que pour tout sommet u de G , $|\lambda(A^+(u))| \leq \ell$. Cette coloration qui est utile pour l'étude de plusieurs classes de graphes a été introduite par Hosseini Dolama, Sopena et Zhu [47].

À chaque graphe G , nous associons le *graphe d'incidence* de G , noté par I_G , dont les sommets sont les incidences de G , deux sommets étant reliés par une arête lorsqu'ils sont adjacents dans G . Il est clair que chaque coloration d'incidence de G n'est qu'une coloration propre des sommets de I_G , donc, $\chi_i(G) = \chi(I_G)$. Une autre propriété utile pour la détermination du nombre chromatique d'incidence de quelques classes de graphes est observée par Hosseini Dolama [45] :

Observation 2.4 (Hosseini Dolama [45]). *Si $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$, alors*

$$\chi_i(G) \leq \chi_i(G_1) + \chi_i(G_2) + \dots + \chi_i(G_n).$$

En 2008, Li et Tu [58] ont montré que le problème de coloration d'incidence est NP-difficile.

2.2 Coloration d'incidence de quelques classes de graphes

Il est facile d'observer que pour chaque chaîne P_n , avec $n \geq 3$, $\chi_i(P_n) = 3$. Concernant les cycles, on a le résultat suivant :

Proposition 2.5 (Hosseini Dolama [45]). *Pour tout entier $n \geq 3$,*

$$\chi_i(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est un multiple de } 3; \\ 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Beaucoup d'auteurs ont étudié la coloration d'incidence pour des classes particulières de graphes.

En 1993, Brualdi et Massey [23] ont étudié quelques familles simples de graphes.

Théorème 2.6 (Brualdi et Massey [23]).

- Pour tout entier $n \geq 2$, $\chi_i(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$.
- Pour tous entiers $m \geq n \geq 2$, $\chi_i(K_{m,n}) = m + 2 = \Delta(K_{m,n}) + 2$.
- Pour tout arbre d'ordre $n \geq 2$, $\chi_i(T) = \Delta(T) + 1$.

Les graphes cubiques ont été étudiés dans un premier temps par Shiu, Lam et Chen [72]. Ils ont montré que le nombre chromatique d'incidence des graphes Hamiltoniens cubiques est au plus $\Delta(G) + 2$. De plus, ils ont conjecturé que cette valeur était une borne supérieure pour tous les graphes cubiques. En 2005, Maydanskyyi [62] a prouvé que cette conjecture est vraie. En 2012, Sun [76] a caractérisé les graphes cubiques ayant un nombre chromatique d'incidence égal à $\Delta(G) + 1$. On a donc le résultat suivant :

Théorème 2.7 (Maydanskyyi [62], Sun [76]). *Soient G un graphe cubique et (P) la propriété définie comme suit :*

1. *il existe un ensemble dominant S avec $|S| = \frac{|V|}{4}$;*
2. *le graphe $G - S$ est l'union de k cycles disjoints de longueurs multiples de 3 ;*
et
3. *chaque cycle peut avoir une affectation de couleur 123123...123 de façon telle que deux sommets ayant la même affectation n'ont pas un voisin commun dans $G - S$.*

On a alors :

$$\chi_i(G) = \begin{cases} 4 & \text{si la propriété (P) est vérifiée;} \\ 5 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En se basant sur les travaux de Maydanskyyi [62], Lužar et Soták [39] ont prouvé que le nombre chromatique d'incidence des graphes quartiques est au plus $\Delta(G) + 3$.

Concernant les graphes k -dégénérés, Hosseini Dolama, Sopena et Zhu [47] ont montré le résultat suivant :

Théorème 2.8 (Hosseini Dolama, Sopena et Zhu [47]). *Tout graphe k -dégénéré admet une $(\Delta(G) + 2k - 1, k)$ -coloration d'incidence. Ainsi, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2k - 1$.*

Ce résultat implique que tout graphe planaire extérieur admet une $(\Delta(G) + 3)$ -coloration d'incidence. Dans le même article, Hosseini Dolama, Sopena et Zhu [47] ont amélioré cette borne en montrant que tout graphe planaire extérieur admet une $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence.

Wang, Chen, et Pang [87] ont montré que si G est un graphe planaire extérieur avec $\Delta(G) \geq 4$ alors $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$. Ils ont montré aussi que si G est un graphe de Halin avec $\Delta(G) \geq 5$ alors $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$. Par la suite, le premier résultat s'est avéré faux et une nouvelle borne a été prouvée.

Théorème 2.9 (Shiu et Sun [73]). *Pour tout graphe planaire extérieur avec $\Delta(G) \geq 7$, $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$.*

Dans le même papier, Shiu et Sun [73] ont montré que le nombre chromatique d'incidence des graphes de Halin cubiques, sauf le graphe complet K_4 , est égal à 5.

En 2014, Pai, Chang, Yang et Wu [67] ont étudié les hypercubes de dimension n , ils ont prouvé les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.10 (Pai, Chang, Yang et Wu [67]). *Soient p, q deux entiers positifs et Q_n l'hypercube de dimension n .*

- Si $p \geq 1$ et $n = 2^p - 1$, alors $\chi_i(Q_n) = n + 1$.
- Si $p \geq 2$ et $n = 2^p - 2$, alors $\chi_i(Q_n) = n + 1$.
- Si $p, q \geq 1$ et $n = 2^p + 2^q - 2$, alors $\chi_i(Q_n) = n + 2$.
- Si $p, q \geq 2$ et $n = 2^p + 2^q - 3$, alors $\chi_i(Q_n) = n + 2$.

Théorème 2.11 (Pai, Chang, Yang et Wu [67]). *Soient p, q et r trois entiers positifs et Q_n l'hypercube de dimension n .*

- Si $p, q, r \geq 1$ et $n = 2^p + 2^q + 2^r - 3$, alors $n + 2 \leq \chi_i(Q_n) \leq n + 3$.
- Si $p, q, r \geq 2$, $q, r \geq 1$ et $n = 2^p + 2^q + 2^r - 4$, alors $n + 2 \leq \chi_i(Q_n) \leq n + 3$.
- Si $p, q, r \geq 2$ et $n = 2^p + 2^q + 2^r - 5$, alors $n + 2 \leq \chi_i(Q_n) \leq n + 3$.

Pai, Chang, Yang et Wu [67] ont proposé aussi la conjecture suivante :

Conjecture 2.12 (Pai, Chang, Yang et Wu [67]). *Pour tout entier $p \geq 1$,*

$$\chi_i(Q_n) = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n = 2^p - 1 ; \\ n + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette conjecture a été prouvée en 2015 par Shiau, Shiau et Wang [71], et aussi, en 2016, d'une manière différente par Gregor, Lužar et Soták [40].

Huang, Wang et Chung [48] ont montré que le nombre chromatique des grilles carrées est égal à 5. En 2011, Li et Liu [57] ont étudié le nombre chromatique d'incidence des grilles circulaires et des grilles toriques. Ils ont montré que la valeur du nombre chromatique d'incidence d'une grille circulaire est égale au plus $\Delta(G) + 2$ et pour la grille torique, elle est égale au plus à $\Delta(G) + 3$. En 2013, Sopena et Wu [75] ont fait une étude complète des grilles toriques en prouvant le théorème suivant :

Théorème 2.13 (Sopena et Wu [75]). *Pour tous entiers $m, n \geq 3$,*

$$\chi_i(T_{m,n}) = \begin{cases} 5 & \text{si } m, n \equiv 0 \pmod{5} ; \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'une façon générale, Gregor, Lužar et Soták [40] ont proposé des conditions suffisantes pour que le nombre chromatique du produit cartésien de deux graphes soit au plus $\Delta(G) + 2$.

Les graphes planaires ont été étudiés dans un premier temps par Hosseini Dolama, Sopena et Zhu [47] qui ont montré que tout graphe planaire admet une $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence, ce qui implique que la valeur de $\chi_i(G)$ est au plus $\Delta(G) + 7$. Cette borne a été améliorée par Yang [92] qui a prouvé la borne suivante :

Théorème 2.14 (Yang [92]). *Pour tout graphe planaire G ,*

$$\chi_i(G) \begin{cases} = 12 & \text{si } \Delta(G) = 6 ; \\ \leq \Delta(G) + 5 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plusieurs bornes ou valeurs exactes ont été trouvées pour cette classe de graphes en fonction de la maille $g(G)$ ¹ de G et du degré maximum $\Delta(G)$. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux articles [18, 19, 44, 46, 47].

1. La *maille* de G , notée $g(G)$, est la taille du plus petit cycle de G .

Sun [76] a prouvé que si G est un graphe r -régulier alors la valeur de $\chi_i(G)$ est égale à $r + 1$ si et seulement si l'ensemble des sommets de G est l'union de $r + 1$ ensembles dominants disjoints. Dans le même papier, Sun a montré le résultat suivant :

Théorème 2.15 (Sun [76]). *Si G est un graphe d'ordre n , $G \neq K_n$ et $G \neq \overline{K_n}$, alors*

$$n + 2 \leq \chi_i(G) + \chi_i(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

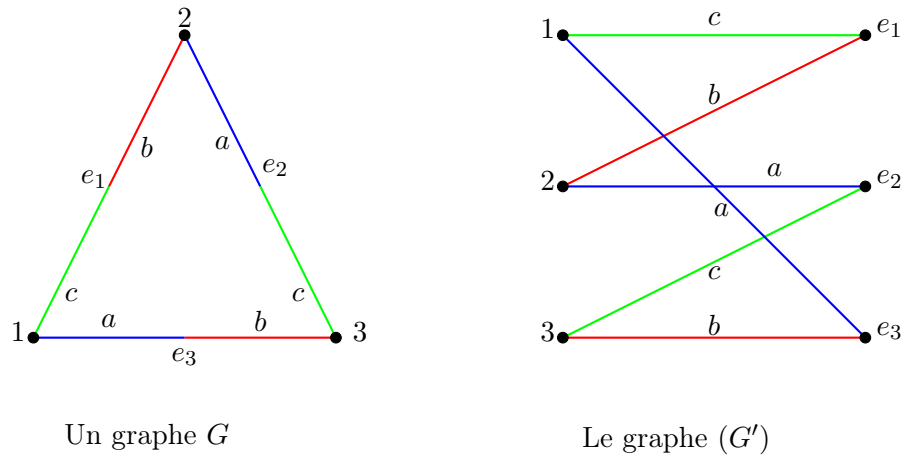
2.3 Coloration d'incidence et autres paramètres

Dans cette section nous présentons les relations entre le nombre chromatique d'incidence et d'autres paramètres de graphes tels que l'indice chromatique fort, l'étoile-arboricité orientée et le nombre chromatique à distance deux.

2.3.1 Coloration d'incidence et coloration forte des arêtes

Une k -coloration forte d'arêtes d'un graphe G est une application associant une couleur prise dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$ à chaque arête de G de façon telle que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête aient des couleurs distinctes. L'indice chromatique fort de G , noté $\chi'_s(G)$, est alors le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration forte d'arêtes.

Soit G un graphe. La coloration d'incidence de G correspond à une coloration forte d'arêtes du graphe biparti G' (voir Figure 2.2), tel que $V(G') = V(G) \cup E(G)$ et $E(G') = \{(v, e) : v \in V(G), e \in E(G), v \text{ incident à } e\}$. Donc, toute arête de G' correspond à une incidence de G . Puisque deux incidences adjacentes sont à distance au plus 2 dans G , toute coloration d'incidence de G correspond à une coloration forte d'arêtes de G' . De même, toute coloration forte d'arêtes de G' correspond à une coloration d'incidence de G . On a alors $\chi'_s(G') = \chi_i(G)$.

FIGURE 2.2 – Coloration d'incidence et coloration forte d'arêtes du graphe G'

2.3.2 Coloration d'incidence et étoile-arboricité orientée

Une *forêt d'étoiles orientées* est un digraphe tel que toutes ses composantes connexes sont des étoiles sources². L'*étoile-arboricité orientée* d'un digraphe D , notée $dst(D)$, est le plus petit nombre de forêts d'étoiles disjointes nécessaires pour couvrir tous les arcs de D . La notion d'étoile-arboricité orientée a été introduite en 1989 par Algor et Alon [2]. En 1997, Guiduli [41] a montré que le nombre chromatique d'incidence d'un graphe G est égal à l'étoile-arboricité orientée du digraphe $S(G)$ obtenu à partir du graphe G , en remplaçant chacune de ses arêtes par deux arcs opposés (voir Figure 2.3).

2. Une étoile source est une étoile dont tous les arcs sont orientés hors du centre.

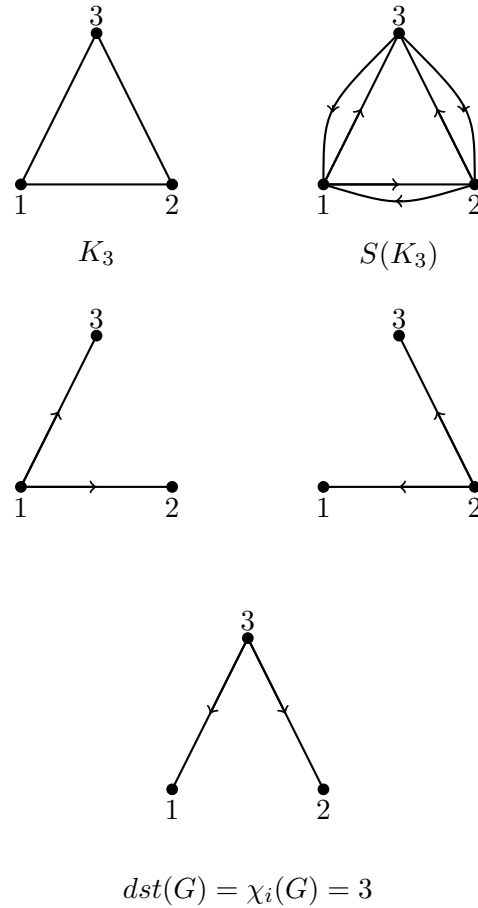


FIGURE 2.3 – Coloration d'incidence et étoile-arboricité orientée

2.3.3 Coloration d'incidence et coloration à distance deux

Une k -coloration à distance deux d'un graphe G est une coloration propre des sommets, telle que deux sommets à distance au plus deux reçoivent deux couleurs différentes. Le nombre chromatique à distance deux, noté $\chi_2(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration à distance deux.

Il est clair que la coloration à distance deux d'un graphe G n'est autre que la coloration propre de G^2 . Donc, $\chi_2(G) = \chi(G^2)$. Hosseini Dolama [45] a observé que si λ est une k -coloration à distance deux d'un graphe G alors l'application c définie par $c(u, uv) = \lambda(v)$ pour toute incidence $(u, uv) \in I(G)$ est une $(k, 1)$ -coloration d'incidence de G . De plus, si c est une $(k, 1)$ -coloration d'incidence alors l'application λ définie par $\lambda(v) = c(u, uv)$ pour tout $v \in V(G)$, où $u \in N(v)$ est un voisin quelconque de v , est une k -coloration à distance deux de G , d'où :

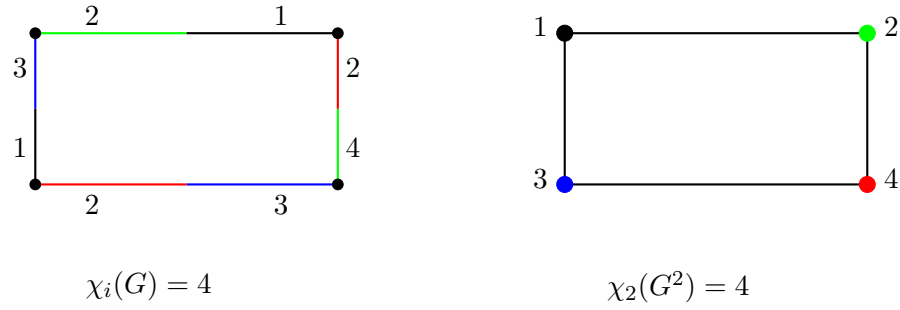


FIGURE 2.4 – Coloration d'incidence d'un graphe G et coloration à distance deux du graphe G

Proposition 2.16 (Hosseini Dolama [45]). *Pour tout graphe G , $\chi_2(G) \geq \chi_i(G)$. De plus, $\chi_2(G) = k$ si et seulement si G admet une $(k, 1)$ -coloration d'incidence.*

Soit G un graphe r -régulier. Il est facile de vérifier que $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ si et seulement si G admet une $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence. Donc, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.17. *Pour tout graphe r -régulier G , $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ si et seulement si $\chi_2(G) = \Delta(G) + 1$. De plus, si $\chi_2(G) = \Delta(G) + 2$ alors $\chi_i(G) = \Delta(G) + 2$.*

2.4 Quelques variantes autour de la coloration d'incidence

Dans cette section, nous parlons des différents types de colorations d'incidence introduits jusqu'à présent, et nous donnons les résultats obtenus dans ce contexte.

2.4.1 Jeu de coloration d'incidence

Considérons le jeu de coloration de graphe défini comme suit : soient Alice et Bob deux joueurs qui essaient de colorer alternativement les sommets d'un graphe G . Chaque joueur doit affecter une couleur prise dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$, de façon

telle que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. Alice gagne si tous les sommets de G sont colorés, et Bob gagne s'il est impossible de finir la coloration. Le plus petit nombre k pour lequel Alice a une stratégie gagnante est appelé le *nombre chromatique ludique*. Cette notation a été introduite par Brams [38] et redécouverte dix années plus tard par Bodlaender [16]. En 2009, Andres [4] a introduit le jeu de coloration d'incidences. Le plus petit entier k pour lequel Alice a une stratégie gagnante dans un jeu de coloration d'incidences de G est appelé le *nombre chromatique ludique d'incidence* et on le note par $i_g(G)$. Après avoir déterminé une borne inférieure de $i_g(G)$, Andres [4] a étudié la classe des graphes k -dégénérés en montrant le théorème suivant :

Théorème 2.18 (Andres [4]). *Pour tout graphe k -dégénéré G ,*

- $i_g(G) \leq 2\Delta(G) + 4k - 2$.
- $i_g(G) \leq 2\Delta(G) + 3k - 1$, si $\Delta(G) \geq 5k - 1$.
- $i_g(G) \leq \Delta(G) + 8k - 2$, si $\Delta(G) \leq 5k - 1$.

Dans le même article, Andres [4] a étudié quelques classes simples de graphes telles que les cycles, les étoiles et les roues et a montré les résultats suivants :

Théorème 2.19 (Andres [4]).

- *Pour tout entier $k \geq 7$, $i_g(C_k) = 5$.*
- *Pour tout entier $k \geq 1$, $i_g(S_{2k}) = 3k$.*
- *Pour tout entier $k \geq 0$, $i_g(S_{2k+1}) = 3k + 2$.*
- *Pour tout entier $k \geq 7$, $i_g(W_{2k}) = 3k$.*
- *Pour tout entier $k \geq 6$, $i_g(W_{2k+1}) = 3k + 2$.*

En 2011, Kim [53] a considéré le cas des cycles non étudiés par Andres [4], ce qui donne le théorème suivant :

Théorème 2.20 (Andres [4] et Kim [53]). *Pour tout entier $k \geq 3$, $i_g(C_k) = 5$.*

En donnant des contre-exemples, Kim [53] a montré aussi que la stratégie proposée par Andres [4] pour les roues n'est pas toujours gagnante. Il a proposé alors

une nouvelle stratégie gagnante pour le même nombre de couleurs. Cette stratégie est valable aussi pour tout sous-graphe d'une roue W_k ayant l'étoile S_k comme sous-graphe. Dans le même papier, Kim [53] a montré que, pour tout entier $n \geq 13$, le nombre chromatique ludique d'incidence de la chaîne P_n est égal à 13. En 2013, Charpentier et Sopena [27] ont proposé de nouvelles stratégies pour Alice basées sur l'arboricité³ du graphe $a(G)$. Une majoration du nombre chromatique ludique d'incidence a été proposée.

Théorème 2.21 (Charpentier et Sopena [27]). *Pour tout graphe G , on a,*

$$i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G) - a(G)}{2} \right\rfloor + 8\Delta(G) - 1.$$

Comme chaque graphe k -dégénéré est d'arboricité au plus k , ce résultat améliore les bornes du Théorème 2.18.

2.4.2 Coloration fractionnaire d'incidence

Une $(k : t)$ -coloration d'un graphe G est une application associant à chaque sommet de G t couleurs prises dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$, de façon telle que deux sommets adjacents soient associés à des ensembles disjoints. Lorsque $t = 1$, on retrouve la k -coloration propre de G . Le plus petit ratio $\frac{k}{t}$ tel que G possède une $(k : t)$ -coloration est appelé *le nombre chromatique fractionnaire* et on le note par $\chi_f(G)$. Yang [92] a introduit la version incidence de cette coloration. Le plus petit ratio $\frac{k}{t}$ tel que G possède une $(k : t)$ -coloration d'incidence est appelé *le nombre chromatique fractionnaire d'incidence* et on le note par $\chi_f(G)$. Dans le théorème suivant, Yang [92] a généralisé la borne de Guiduli [41] présentée dans le Théorème 2.3 en obtenant le résultat suivant :

Théorème 2.22 (Yang [92]). *Pour tout graphe G ,*

$$\chi_f(G) \leq \Delta(G) + 20 \log \Delta(G) + 84.$$

3. L'arboricité d'un graphe G , notée $a(G)$, est le plus petit nombre de forêts disjointes nécessaires pour couvrir toutes les arêtes de G .

Dans le même papier, Yang [92] a montré des bornes supérieures des produits cartésiens et lexicographiques de graphes.

2.4.3 Coloration intervalle d'incidence

Un sous-ensemble A de \mathbb{N} est un intervalle si et seulement s'il contient tous les entiers entre $\min(A)$ et $\max(A)$. La notion de coloration intervalle est apparue pour la première fois en 1994, lorsque Asratian et Kamalian [7] ont introduit la coloration intervalle des arêtes. La version incidence est définie comme suit : une *k-coloration intervalle d'incidence* d'un graphe G est une *k-coloration d'incidence* $\lambda(G)$, telle que pour tout sommet u de G , $\lambda(A^-(u))$ est un intervalle. Le *nombre chromatique intervalle d'incidence*, noté $\chi_{ii}(G)$, est alors le plus petit k tel que G admet une *k-coloration intervalle d'incidence*.

La coloration intervalle d'incidence a été introduite par Janczewski, Małafiejska et Małafiejski [49]. Dans leur papier, ils ont montré que la borne supérieure du nombre chromatique d'incidence présentée par Brualdi et Massey [23] dans le Théorème 2.1 est aussi une borne supérieure du nombre chromatique intervalle d'incidence des graphes bipartis. De plus, si le graphe biparti est régulier alors cette borne est atteinte. Par ailleurs, Janczewski, Małafiejska et Małafiejski [49] ont caractérisé les graphes subcubiques admettant une coloration intervalle d'incidence en utilisant 4, 5 et 6 couleurs. Dans le cas où le graphe biparti est de degré $\Delta(G) = 4$, ils ont montré que le problème de décision associé à la recherche d'une 5-coloration intervalle d'incidence est facile, et celui qui est associé à la recherche d'une 6-coloration est *NP*-difficile.

Les mêmes auteurs ont publié un autre papier [50] sur la coloration intervalle d'incidence. Pour cela, ils ont commencé par donner des propriétés générales des bornes du nombre chromatique intervalle d'incidence, ensuite ils ont étudié quelques classes de graphes telles que les chaînes, les cycles, les étoiles, les roues, les graphes complets et les graphes *k*-partis complets. Nous résumons leurs résultats comme suit :

Théorème 2.23 (Janczewski, Małafiejska et Małafiejski [50]).

- Pour tout graphe G , $\chi_{ii}(G) \leq 2(\omega - 1)$, où ω est le nombre de clique de G .
- Si G est une chaîne ou un cycle alors $\chi_{ii}(G) \leq \Delta(G) + 2$. En particulier, $\chi_{ii}(G) = \Delta + 1$ si et seulement si G est une chaîne de longueur au plus 4.
- Pour tout entier positif n , $\chi_{ii}(S_n) = \Delta(G) + 2$.
- Pour tout entier $n \geq 2$, $\chi_{ii}(W_{2n}) = \Delta(G) + 2$.
- Pour tout entier $n \geq 1$, $\chi_{ii}(W_{2n+1}) = \Delta(G) + 3$.
- Pour tout entier positif n , $\chi_{ii}(K_n) = 2\Delta(G)$.
- Pour tous entiers positifs n_1, \dots, n_k ,

$$\chi_{ii}(K_{n_1, \dots, n_k}) = \max\{n_i + n_j : 1 \leq i, j \leq k \text{ et } i \neq j\}.$$

Finalement Janczewski, Małafiejska et Małafiejski [50] ont étudié la complexité du problème de la coloration intervalle d'incidence des graphes subcubiques. Pour cela, ils ont montré que le problème de décision associé à la recherche d'une 4-coloration intervalle d'incidence est facile, et celui qui est associé à la recherche d'une 5-coloration est *NP*-difficile.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les travaux réalisés pour l'étude du nombre chromatique d'incidence. Nous avons donné aussi les relations entre le nombre chromatique d'incidence et d'autres paramètres qui vont nous servir par la suite. Finalement, nous avons discuté de quelques variantes de la coloration d'incidence. De nouvelles variantes autour de cette coloration vont être introduites par la suite.

Chapitre 3

Coloration des graphes distances et des graphes circulants

Dans ce chapitre, nous étudions principalement les colorations à distance 2 de quelques classes de graphes distance, ensuite, nous déterminons des valeurs exactes et des bornes supérieures du nombre chromatique d'incidence pour ces classes de graphes. Nous déduisons par la suite des valeurs exactes du nombre chromatique à distance 2 des graphes circulants $G(n, D)$ pour certaines valeurs de n . Pour les graphes circulants $G(n, \{1, a\})$ avec $a \leq 8$, l'étude complète est faite.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une communication à la conférence internationale *DIMACOS'2015* [12] et d'une publication internationale parue dans "*Discussiones Mathematicae Graph Theory*" [14].

3.1 Graphes distances

3.1.1 Introduction

Soit $D = \{d_1, \dots, d_\ell\}$ un ensemble fini d'entiers positifs. On définit le *graphe distance* (entier) $G = G(D)$ par l'ensemble de sommets $V(G) = \mathbb{Z}$ et l'ensemble d'arêtes $E(G) = \{uv : |v - u| \in D\}$.

Si $\text{pgcd}(\{d_1, \dots, d_\ell\}) = p > 1$, alors le graphe distance $G(D)$ possède p composantes connexes, chacune étant isomorphe au graphe distance $G(D')$ avec $D' = \{d_1/p, \dots, d_\ell/p\}$. Ainsi $\chi_2(G(D)) = \chi_2(G(D'))$, ceci nous permet de supposer sans perte de généralité que $\text{pgcd}(D) = 1$.

Les graphes distances ont été introduits par Eggleton, Erdős et Skilton [34] pour résoudre le problème de coloration du plan Euclidien qui s'énonce comme suit : "Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer tous les points d'un plan Euclidien de sorte que deux points à distance un reçoivent deux couleurs différentes ?" Ce problème est équivalent au problème de détermination du nombre chromatique d'un graphe distance $G(\mathbb{R}, D)$ avec $\{D\} = 1$.

Les problèmes de coloration des graphes distances ont été largement étudiés par de nombreux chercheurs dans plusieurs articles, citons par exemple [26, 29, 31, 82, 84, 85, 95]. Lorsque $|D| \leq 2$, la détermination du nombre chromatique des graphes distances est facile grâce aux résultats suivants :

Proposition 3.1. *Pour tout ensemble fini d'entiers positifs $D = \{d_1, \dots, d_\ell\}$ et pour tout entier positif p tel que $d_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ pour tout i , $1 \leq i \leq \ell$,*

$$\chi(G(D)) \leq p.$$

Preuve. Soit $\lambda : V(G(D)) \rightarrow \{1, \dots, p\}$ la fonction définie par

$$\lambda(x) = 1 + (x \pmod{p}),$$

pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$. Puisque $d_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ pour tout i , $1 \leq i \leq \ell$, la fonction λ est clairement une coloration propre du graphe $G(D)$. \square

Théorème 3.2 (Walther [85]). *Pour tout ensemble fini d'entiers positifs D ,*

$$\chi(G(D)) \leq |D| + 1.$$

Preuve. Une $(|D|+1)$ -coloration de $G(D)$ peut être facilement obtenue en utilisant l'algorithme glouton First-Fit, en commençant par le sommet 0 et en allant de la gauche vers la droite ensuite de la droite vers la gauche, puisque chaque sommet possède exactement $|D|$ voisins à gauche et $|D|$ voisins à droite. \square

Par conséquent, lorsque $|D| \leq 2$, $\chi(G(D)) = 2$ si $|D| = 1$ ou tous les éléments de D sont impairs (puisque $G(D)$ est un graphe biparti), et $\chi(G(D)) = 3$ dans le cas contraire (puisque $G(D)$ contient un cycle de longueur impaire). L'étude complète du cas $|D| = 3$ est donnée par Zhu [95].

Si $|D| \geq 4$, des résultats partiels sont donnés pour des ensembles D ayant des propriétés particulières, citons par exemple le résultat suivant :

Théorème 3.3 (Eggleton, Erdős et Skilton [34]). *Soit P l'ensemble des nombres premiers, et soit $D \subseteq P$ avec $|D| \geq 2$. On a*

1. *si $2 \notin D$, alors $\chi(G(D)) = 2$; sinon, $\chi(G(D)) = 3$ ou 4,*
2. *si $2 \in D$ et $3 \notin D$, alors $\chi(G(D)) = 3$,*
3. *si $\{2, 3\} \subseteq D \subseteq \{p \in P \mid p \equiv \pm 2 \pmod{5}\}$, alors $\chi(G(D)) = 3$,*
4. *si $\{2, 3\} \subseteq D \subseteq \{p \in P \mid p \equiv \pm 2, \pm 3, 7 \pmod{14}\}$, alors $\chi(G(D)) = 3$,*
5. *si $\{2, 3, 5\} \subseteq D$ ou $\{2, 3, 11, 13\} \subseteq D$, alors $\chi(G(D)) = 4$.*

Les deux résultats suivants seront utiles par la suite.

Théorème 3.4 (Voigt [82], cité dans [52]). *Pour tout ensemble fini d'entiers positifs $D = \{d_1, \dots, d_\ell\}$,*

$$\chi(G(D)) \leq \min_{n \in \mathbb{N}} n(|D_n| + 1),$$

où $D_n = \{d_i : n|d_i, 1 \leq i \leq \ell\}$.

Ce théorème généralise la Proposition 3.1 en posant $n = 1$.

Une coloration λ d'un graphe distance $G(D)$ est *p -périodique*, pour un entier $p \geq 1$, si $\lambda(x+p) = \lambda(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Dans [85], Walther a prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.5 (Walther [85]). *Pour tout ensemble fini d'entiers positifs D , si $\chi(G(D)) \leq k$, alors $G(D)$ admet une k -coloration p -périodique pour un certain entier positif p .*

Le motif d'une coloration p -périodique est défini comme une séquence

$$\lambda(x) \dots \lambda(x + p - 1)$$

pour un x donné. En particulier, la coloration définie dans la preuve de la Proposition 3.1 est p -périodique de motif $12 \dots p$. Dans la suite, nous décrirons chaque motif en utilisant les notations usuelles de la théorie des langages formels. Par exemple, le motif 121212345 sera noté $(12)^3 345$. Un motif M qui peut se répéter zéro ou plusieurs fois sera noté $(M)^*$. Par exemple $(12)^* 345$ représente les motifs 345, 12345, 1212345, 121212345, etc.

3.1.2 Coloration à distance 2

On peut facilement observer que le carré d'un graphe distance $G(D)$ est aussi un graphe distance, noté $G(D^2)$, où :

$$D^2 = D \cup \{d + d' : d, d' \in D\} \cup \{d - d' : d, d' \in D, d > d'\}.$$

Par exemple, pour $D = \{1, 2, 5\}$, on obtient $D^2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Il est à noter que si D est de cardinalité ℓ , alors D^2 est de cardinalité au plus $\ell(\ell + 1)$.

Rappelons que pour tout graphe G , $\chi_2(G) = \chi(G^2)$ pour tout graphe G . Comme $(G(D))^2 = G(D^2)$, déterminer le nombre chromatique à distance 2 du graphe $G(D)$ revient à déterminer le nombre chromatique du graphe $(G(D^2))$.

Dans toute coloration à distance 2 d'un graphe G , tous les sommets voisins d'un même sommet doivent recevoir des couleurs différentes, d'où l'observation suivante :

Observation 3.6. *Pour tout graphe G , $\chi_2(G) \geq \Delta(G) + 1$.*

Cette borne est atteinte pour les graphes distances $G(D)$ avec $D = \{1, \dots, k\}$, $k \geq 2$:

Proposition 3.7. *Pour tout $k \geq 2$,*

$$\chi_2(G(\{1, \dots, k\})) = 2k + 1 = \Delta(G(\{1, \dots, k\})) + 1.$$

Preuve. La preuve est obtenue directement grâce au Théorème 3.2 puisque $|\{1, \dots, k\}^2| = 2k$. □

Si $k = 2$, on a $\chi_2(G(D)) = 5$, d'après la Proposition 3.7.

3.1.2.1 Coloration à distance 2 de $G(\{1, a\})$, $a \geq 3$

Soit $D = \{1, a\}$, $a \geq 3$. On a $\Delta(G(D)) = 4$ et

$$D^2 = \{1, 2, a - 1, a, a + 1, 2a\}.$$

Le théorème suivant donne le nombre chromatique à distance 2 pour cette classe de graphes :

Théorème 3.8. *Pour tout entier $a \geq 3$,*

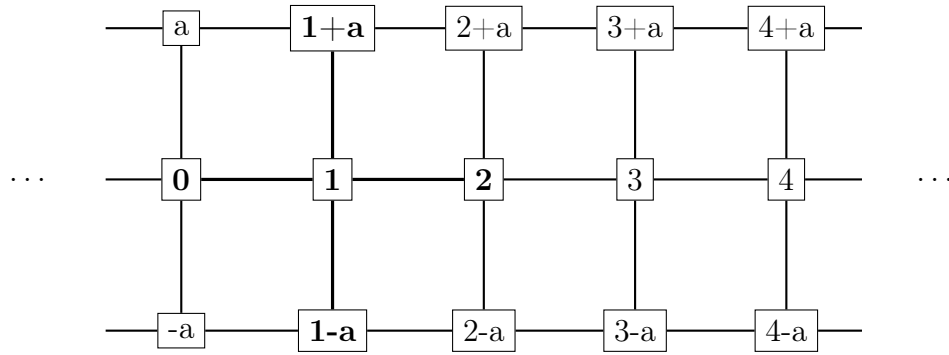
$$\chi_2(G(\{1, a\})) = \begin{cases} 5 & \text{si } a \equiv 2, 3 \pmod{5}, \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Puisque $\{1, a\}^2 = \{1, 2, a - 1, a, a + 1, 2a\}$, nous obtenons $d \not\equiv 0 \pmod{5}$ pour tout $d \in \{1, a\}^2$ si et seulement si $a \equiv 2 \pmod{5}$ ou $a \equiv 3 \pmod{5}$ et donc, par la Proposition 3.1 et l'observation 3.6, $\chi_2(G(\{1, a\})) = 5$ dans ce cas.

Notons que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, l'ensemble de sommets

$$C(x) = \{x - a, x - 1, x, x + 1, x + a\}$$

induit une 5-clique dans $G(\{1, a\}^2)$ (voir Figure 3.1). Toute 5-coloration à distance 2 λ de $G(\{1, a\})$ est nécessairement 5-périodique, c'est-à-dire $\lambda(x + 5) = \lambda(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. En effet, pour le montrer, il suffit de prouver que pour tout x , les cinq sommets consécutifs $x, \dots, x + 4$ doivent recevoir des couleurs différentes. Supposons

FIGURE 3.1 – Sous-graphe d'un graphe distance $G(\{1, a\})$, $a \geq 3$

au contraire que ce n'est pas le cas, et sans perte de généralité, soit $x = 0$. Puisque les couleurs affectées aux sommets 0, 1 et 2, sont nécessairement différentes, nous avons seulement deux cas à considérer :

1. $\lambda(0) = \lambda(3) = 1$, $\lambda(1) = 2$, $\lambda(2) = 3$.

Puisque $C(1)$ induit une 5-clique dans $G(\{1, a\}^2)$ (présentée en gras dans la Figure 3.1), nous avons

$$\{\lambda(1-a), \lambda(1+a)\} = \{4, 5\},$$

ce qui implique

$$\{\lambda(2-a), \lambda(2+a)\} = \{4, 5\}.$$

(Plus précisément, $\lambda(2-a) = 9 - \lambda(1-a)$ et $\lambda(2+a) = 9 - \lambda(1+a)$). Cela implique $\lambda(3-a) = \lambda(3+a) = 2$, ce qui conduit à une contradiction puisque $d(3-a, 3+a) = 2$.

2. $\lambda(0) = \lambda(4) = 1$, $\lambda(1) = 2$, $\lambda(2) = 3$, $\lambda(3) = 4$.

Comme pour le cas précédent, nous avons

$$\{\lambda(1-a), \lambda(1+a)\} = \{4, 5\},$$

ce qui implique

$$\{\lambda(2-a), \lambda(2+a)\} = \{1, 5\}.$$

Nous obtenons alors $\lambda(3-a) = \lambda(3+a) = 2$, ce qui conduit encore à une contradiction.

Donc, $\chi_2(G(\{1, a\})) = 5$ si et seulement si 5 ne divise aucun élément de $\{1, a\}^2 = \{1, 2, a - 1, a, a + 1, 2a\}$ et ceci n'est possible que dans le cas où $a \equiv 2 \pmod{5}$ ou $a \equiv 3 \pmod{5}$.

Finalement, nous montrons qu'il existe une 6-coloration à distance 2 de $G(\{1, a\})$ pour toute valeur de a . Nous distinguons trois cas.

1. $a = 3k, k \geq 1$.

Soit λ la fonction $(2a - 1)$ -périodique définie par le motif

$$(123)^k(456)^{k-1}45.$$

Si $\lambda(x) = \lambda(y) = c, 1 \leq c \leq 5$, alors

$$|x - y| \in \{3q, 0 \leq q \leq k - 1\} \cup \{(2a - 1)p + 3q, p \geq 1, 1 - k \leq q \leq k - 1\}.$$

Si $\lambda(x) = \lambda(y) = 6$, alors

$$|x - y| \in \{3q, 0 \leq q \leq k - 2\} \cup \{(2a - 1)p + 3q, p \geq 1, 2 - k \leq q \leq k - 2\}.$$

Donc, dans les deux cas, $|x - y| \notin \{1, 2, a - 1, a, a + 1, 2a\}$, et par conséquent λ est une 6-coloration à distance 2 de $G(\{1, a\})$.

2. $a = 3k + 1, k \geq 1$.

Dans ce cas, le résultat est obtenu grâce au Théorème 3.4 (en posant $n = 3$), puisque le seul élément divisible par 3 dans $\{1, 2, a - 1, a, a + 1, 2a\}$ est $a - 1$.

3. $a = 3k + 2, k \geq 1$.

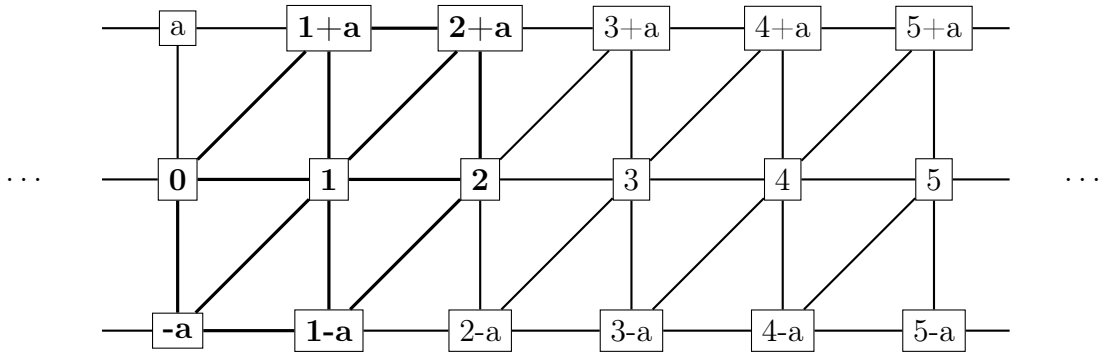
Là encore, le résultat est obtenu grâce au Théorème 3.4 (en posant $n = 3$), puisque le seul élément divisible par 3 dans $\{1, 2, a - 1, a, a + 1, 2a\}$ est $a + 1$.

□

3.1.2.2 Coloration à distance 2 de $G(\{1, a, a + 1\})$, $a \geq 3$

Nous étudions maintenant le nombre chromatique à distance 2 des graphes distances $G(D)$ avec $D = \{1, a, a + 1\}$, $a \geq 3$ (notons que le cas où $a = 2$ est déjà résolu par la Proposition 3.7). Lorsque $D = \{1, a, a + 1\}$, $a \geq 3$, nous avons $\Delta(G(D)) = 6$ et

$$D^2 = \{1, 2, a - 1, a, a + 1, a + 2, 2a, 2a + 1, 2a + 2\}.$$

FIGURE 3.2 – Sous-graphe du graphe distance $G(\{1, a, a + 1\})$, $a \geq 3$

Nous montrons tout d'abord le théorème suivant :

Théorème 3.9. *Pour tout entier a , $a \geq 3$,*

$$\chi_2(G(\{1, a, a + 1\})) = 7 = \Delta(G(\{1, a, a + 1\})) + 1$$

si et seulement si $a \equiv 2, 4 \pmod{7}$.

Preuve. Puisque $\{1, a, a + 1\}^2 = \{1, 2, a - 1, a, a + 1, a + 2, 2a, 2a + 1, 2a + 2\}$, nous obtenons $d \not\equiv 0 \pmod{7}$ pour tout $d \in \{1, a, a + 1\}^2$ si et seulement si $a \equiv 2 \pmod{7}$ ou $a \equiv 4 \pmod{7}$ et donc, par la Proposition 3.1 et l'Observation 3.6, $\chi_2(G(\{1, a, a + 1\})) = 7$.

Notons que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des sommets

$$C(x) = \{x - a - 1, x - a, x - 1, x, x + 1, x + a, x + a + 1\}$$

induit une 7-clique dans $G(\{1, a, a + 1\}^2)$, c'est-à-dire $\lambda(x + 7) = \lambda(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Pour le montrer, il suffit de prouver que pour tout x , les sept sommets consécutifs $x, \dots, x + 6$ doivent recevoir des couleurs différentes. Supposons au contraire que ce n'est pas le cas, et sans perte de généralité, soit $x = 0$. Puisque les couleurs affectées aux sommets 0, 1 et 2 sont nécessairement différentes, nous avons seulement quatre cas à considérer (voir Figure 3.2) :

1. les sommets 0, 1, 2, 3 sont colorés par les couleurs 1, 2, 3 et 1, respectivement.

Nous considérons deux sous-cas :

(a) $\lambda(4) = 2$.

Puisque $C(1)$ induit une 7-clique dans $G(\{1, a, a+1\}^2)$ (présentée en gras dans la Figure 3.2), nous avons

$$\{\lambda(-a), \lambda(1-a), \lambda(1+a), \lambda(2+a)\} = \{4, 5, 6, 7\}.$$

Puisque $C(3)$ est aussi une 7-clique, nous avons aussi

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3-a), \lambda(3+a), \lambda(4+a)\} = \{4, 5, 6, 7\}.$$

ce qui implique que $\lambda(-a) = \lambda(4-a)$ ou $\lambda(1+a) = \lambda(5+a)$. Chacun des ces cas correspond au cas 2 ci-dessous.

(b) $\lambda(4) \notin \{1, 2, 3\}$.

Supposons que $\lambda(4) = 4$, sans perte de généralité. Puisque $d(5, 4) = 1$ et $d(5, 3) = 2$, nous avons $\lambda(5) \notin \{1, 4\}$. De plus, si $\lambda(5) = 2$, nous obtenons $\lambda(2) = \lambda(5)$, qui correspond au cas 2 ci-dessous. Ainsi, il nous reste deux cas à considérer : $\lambda(5) = 3$ ou $\lambda(5) > 4$. Dans ce dernier cas, nous pouvons supposer $\lambda(5) = 5$ sans perte de généralité.

i. $\lambda(5) = 3$.

Dans ce cas, nous avons nécessairement

$$\{\lambda(-a), \lambda(1+a)\} \subseteq \{4, 5, 6, 7\}, \quad \{\lambda(1-a), \lambda(2+a)\} \subseteq \{4, 5, 6, 7\},$$

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} \subseteq \{5, 6, 7\}, \quad \{\lambda(3-a), \lambda(4+a)\} \subseteq \{2, 5, 6, 7\},$$

$$\{\lambda(4-a), \lambda(5+a)\} \subseteq \{5, 6, 7\}.$$

En posant $\{x, y, z\} = \{5, 6, 7\}$, nous obtenons

$$\{\lambda(-a), \lambda(1+a)\} = \{x, y\}, \quad \{\lambda(1-a), \lambda(2+a)\} = \{4, z\},$$

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} = \{x, y\}, \quad \{\lambda(3-a), \lambda(4+a)\} = \{2, z\},$$

$$\{\lambda(4-a), \lambda(5+a)\} = \{x, y\}.$$

Par conséquent, nous avons nécessairement soit $\lambda(1+a) = \lambda(5+a)$ soit $\lambda(-a) = \lambda(4-a)$. Dans les deux cas, nous sommes dans la situation du cas 2 ci-dessous.

ii. $\lambda(5) = 5$.

Dans ce cas, nous avons nécessairement

$$\{\lambda(-a), \lambda(1+a)\} \subseteq \{4, 5, 6, 7\}, \quad \{\lambda(1-a), \lambda(2+a)\} \subseteq \{4, 5, 6, 7\},$$

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} \subseteq \{5, 6, 7\}, \quad \{\lambda(3-a), \lambda(4+a)\} \subseteq \{2, 6, 7\},$$

$$\{\lambda(4-a), \lambda(5+a)\} \subseteq \{3, 6, 7\}.$$

En posant $\{x, y\} = \{6, 7\}$, nous obtenons

$$\{\lambda(-a), \lambda(1+a)\} = \{5, x\}, \quad \{\lambda(1-a), \lambda(2+a)\} = \{4, y\},$$

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} = \{5, x\}, \quad \{\lambda(3-a), \lambda(4+a)\} = \{2, y\},$$

$$\{\lambda(4-a), \lambda(5+a)\} = \{3, x\}.$$

Là encore, nous avons nécessairement soit $\lambda(1+a) = \lambda(5+a)$ soit $\lambda(-a) = \lambda(4-a)$ et dans les deux cas, nous sommes dans la situation du cas 2 ci-dessous.

2. Les sommets $0, 1, 2, 3, 4$ sont colorés avec les couleurs $1, 2, 3, 4$ et 1 , respectivement.

Considérons les 7-cliques $C(1)$, $C(2)$ et $C(3)$ dans $G(\{1, a, a+1\}^2)$. Nous obtenons

$$\{\lambda(1-a), \lambda(2+a)\} \subseteq \{5, 6, 7\},$$

et par conséquent

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} \subseteq \{5, 6, 7\},$$

une contradiction puisque les sommets $1-a, 2-a, a+2$ et $a+3$ induisent une 4-clique dans $G(\{1, a, a+1\}^2)$.

3. Les sommets $0, 1, 2, 3, 4, 5$ sont colorés avec les couleurs $1, 2, 3, 4, 5$ et 1 , respectivement.

Considérons les 7-cliques $C(1)$, $C(2)$ et $C(3)$ dans $G(\{1, a, a+1\}^2)$. Nous obtenons

$$\{\lambda(-a), \lambda(1-a), \lambda(1+a), \lambda(2+a)\} = \{4, 5, 6, 7\},$$

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} \subseteq \{1, \lambda(-a), \lambda(1+a)\} \setminus \{4, 5\},$$

$$\{\lambda(3-a), \lambda(4+a)\} \subseteq \{2, \lambda(1-a), \lambda(2+a)\} \setminus \{4, 5\},$$

et par conséquent

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} \subseteq \{1, 6, 7\} \quad \text{et} \quad \{\lambda(3-a), \lambda(4+a)\} \subseteq \{2, 6, 7\}.$$

En supposant qu'aucun des cas 1 ou 2 ne se produit, nous avons deux sous-cas à considérer :

(a) $\lambda(6) = 2$.

Considérons la 7-clique $C(4)$ dans $G(\{1, a, a+1\}^2)$. Nous obtenons

$$\{\lambda(4-a), \lambda(5+a)\} \subseteq \{3, \lambda(2-a), \lambda(3+a)\} \setminus \{1, 2\} = \{3, 6, 7\}.$$

Si $\{\lambda(4-a), \lambda(5+a)\} = \{3, 6\}$, alors

$$\{\lambda(3-a), \lambda(4+a)\} = \{2, 7\},$$

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} = \{1, 6\},$$

$$\{\lambda(1-a), \lambda(2+a)\} = \{5, 7\}$$

et

$$\{\lambda(-a), \lambda(1+a)\} = \{4, 6\}.$$

Si $\lambda(-a) = 6$, alors $\lambda(2-a) = 1$, $\lambda(3+a) = 6$ et $\lambda(5+a) = 3$, et par conséquent $\lambda(4-a) = \lambda(-a) = 6$ qui correspond au cas 2. Si $\lambda(1+a) = 6$, alors $\lambda(3+a) = 1$, $\lambda(2-a) = 6$ et $\lambda(4-a) = 3$, et par conséquent $\lambda(5+a) = \lambda(1+a) = 6$ qui correspond encore au cas 2.

Supposons maintenant que $\{\lambda(4-a), \lambda(5+a)\} = \{3, 7\}$, alors

$$\{\lambda(3-a), \lambda(4+a)\} = \{2, 6\},$$

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} = \{1, 7\},$$

$$\{\lambda(1-a), \lambda(2+a)\} = \{5, 6\}$$

et

$$\{\lambda(-a), \lambda(1+a)\} = \{4, 7\}.$$

Si $\lambda(-a) = 7$, alors $\lambda(2-a) = 1$, $\lambda(3+a) = 7$ et $\lambda(5+a) = 3$, et par conséquent $\lambda(4-a) = \lambda(-a) = 7$ qui correspond au cas 2. Si $\lambda(1+a) = 7$, alors $\lambda(3+a) = 1$, $\lambda(2-a) = 7$ et $\lambda(4-a) = 3$, et par conséquent $\lambda(5+a) = \lambda(1+a) = 7$ qui correspond encore au cas 2.

Finalement, si $\{\lambda(4-a), \lambda(5+a)\} = \{6, 7\}$, alors $\lambda(3-a) = \lambda(4+a) = 2$, une contradiction puisque $d(3-a, 4+a) = 2$.

(b) $\lambda(6) = 6$.

Considérons la 7-clique $C(4)$ dans $G(\{1, a, a+1\}^2)$. Nous obtenons

$$\{\lambda(4-a), \lambda(5+a)\} \subseteq \{3, \lambda(2-a), \lambda(3+a)\} \setminus \{1, 6\} = \{3, 7\}.$$

Ce qui implique

$$\{\lambda(3-a), \lambda(4+a)\} = \{2, 6\},$$

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} = \{1, 7\},$$

$$\{\lambda(1-a), \lambda(2+a)\} = \{5, 6\}$$

et

$$\{\lambda(-a), \lambda(1+a)\} = \{4, 7\}.$$

Si $\lambda(-a) = 7$, alors $\lambda(2-a) = 1$ et par conséquent $\lambda(4-a) = \lambda(-a) = 7$ qui correspond au cas 2. Si $\lambda(1+a) = 7$, alors $\lambda(3+a) = 1$ et par conséquent $\lambda(5+a) = \lambda(1+a) = 7$ qui correspond encore au cas 2.

4. Les sommets $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont colorés avec les couleurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 1 , respectivement.

Considérons encore les 7-cliques $C(1)$, $C(2)$ et $C(3)$ dans $G(\{1, a, a+1\}^2)$.

Nous obtenons

$$\{\lambda(-a), \lambda(1-a), \lambda(1+a), \lambda(2+a)\} = \{4, 5, 6, 7\},$$

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} \subseteq \{1, \lambda(-a), \lambda(1+a)\} \setminus \{4, 5\},$$

et par conséquent

$$\{\lambda(3-a), \lambda(4+a)\} \subseteq \{2, \lambda(1-a), \lambda(2+a)\} \setminus \{4, 5, 6\} = \{2, 7\}.$$

Ce qui implique

$$\{\lambda(2-a), \lambda(3+a)\} = \{1, 6\},$$

$$\{\lambda(1-a), \lambda(2+a)\} = \{5, 7\}$$

et

$$\{\lambda(-a), \lambda(1+a)\} = \{4, 6\}.$$

Donc,

$$\{\lambda(4-a), \lambda(5+a)\} \subseteq \{3, \lambda(2-a), \lambda(3+a)\} \setminus \{1, 6\} = \{3\},$$

une contradiction puisque $d(4-a, 5+a) = 2$.

Donc, toute 7-coloration à distance 2 λ de $G(\{1, a, a+1\})$ est nécessairement 7-périodique, et par conséquent $\chi_2(G(\{1, a, a+1\})) = 7$ si et seulement si 7 ne divise aucun élément de $\{1, 2, a-1, a, a+1, a+2, 2a, 2a+1, 2a+2\}$. Cette situation ne se produit que si $a \equiv 2 \pmod{7}$ ou $a \equiv 4 \pmod{7}$. \square

Dans le résultat suivant nous donnons une borne supérieure de $\chi_2(G(\{1, a, a+1\}))$ pour toute valeur de a .

Théorème 3.10. *Pour tout entier a , $a \geq 3$,*

$$\chi_2(G(\{1, a, a+1\})) \leq 9 = \Delta(G(\{1, a, a+1\})) + 3.$$

Preuve. Rappelons tout d'abord que

$$\{1, a, a+1\}^2 = \{1, 2, a-1, a, a+1, a+2, 2a, 2a+1, 2a+2\}.$$

Nous considérons trois cas, selon la valeur de $(a \pmod{3})$:

1. $a = 3k$, $k \geq 1$.

Puisque les seuls éléments divisibles par 3 dans $\{1, a, a+1\}^2$ sont a et $2a$, le résultat est obtenu grâce au Théorème 3.4 appliqué à $n = 3$.

2. $a = 3k + 1$, $k \geq 1$.

Soit λ la fonction $(3a+2)$ -périodique définie par le motif

$$(123)^k(456)^k7123(789)^{k-1}4568.$$

Si $\lambda(x) = \lambda(y) = c$, $1 \leq c \leq 6$, alors

$$\begin{aligned}
|x - y| \in & \{3q, 0 \leq q \leq k - 1\} \\
& \cup \{3q + 2a - 1, 1 - k \leq q \leq 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 2a - 1, p > 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p - 2a + 1, p > 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q, p > 0, 1 - k \leq q < 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q + 2a - 1, p > 0, 1 - k \leq q < 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q, p > 0, 0 < q \leq k - 1\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q - 2a + 1, p > 0, 0 < q \leq k - 1\}.
\end{aligned}$$

Si $\lambda(x) = \lambda(y) = 7$, alors

$$\begin{aligned}
|x - y| \in & \{3q, 0 \leq q \leq k - 2\} \\
& \cup \{3q + 4, 0 \leq q \leq k - 2\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q - 4, p > 0, 2 - k \leq q \leq 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q + 4, p > 0, 0 \leq q \leq k - 2\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q, p > 0, 2 - k \leq q \leq k - 2\}.
\end{aligned}$$

Si $\lambda(x) = \lambda(y) = 8$, alors

$$\begin{aligned}
|x - y| \in & \{3q, 0 \leq q \leq k - 2\} \\
& \cup \{3q + a - 2, 2 - k \leq q \leq 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + a - 2, p > 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p - a + 2, p > 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q, p > 0, 2 - k \leq q < 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q + a - 2, p > 0, 2 - k \leq q < 0\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q, p > 0, 0 < q \leq k - 2\} \\
& \cup \{(3a + 2)p + 3q - a + 2, p > 0, 0 < q \leq k - 2\}.
\end{aligned}$$

Si $\lambda(x) = \lambda(y) = 9$, alors

$$|x - y| \in \{3q, 0 \leq q \leq k - 2\} \cup \{(3a + 2)p + 3q, p \geq 1, 2 - k \leq q \leq k - 2\}.$$

Par conséquent, dans tous ces cas,

$$|x - y| \notin \{1, 2, a - 1, a, a + 1, a + 2, 2a, 2a + 1, 2a + 2\},$$

et donc λ est une 9-coloration à distance 2 de $G(\{1, a, a + 1\})$.

3. $a = 3k + 2$, $k \geq 1$.

Puisque les seuls éléments divisibles par 3 dans $\{1, a, a + 1\}^2$ sont $a + 1$ et $2a + 2$, le résultat est obtenu grâce au Théorème 3.4 appliqué à $n = 3$.

□

À partir des Théorèmes 3.9 et 3.10, nous déduisons le résultat suivant :

Corollaire 3.11. *Pour tout entier a , $a \geq 3$, $a \not\equiv 2, 4 \pmod{7}$,*

$$8 \leq \chi_2(G(\{1, a, a + 1\})) \leq 9.$$

3.1.2.3 Coloration à distance 2 de $G(\{1, \dots, m, a\})$, $2 \leq m < a$

Nous étudions dans cette sous-section le nombre chromatique à distance 2 des graphes distance $G(D)$ avec $D = \{1, \dots, m, a\}$, $2 \leq m < a$ (notons que le cas $a = m + 1$ est déjà résolu par la Proposition 3.7).

Lorsque $D = \{1, \dots, m, a\}$, nous avons $\Delta(G(D)) = 2m + 2$ et

$$D^2 = \{1, 2, \dots, 2m\} \cup \{a - m, a - m + 1, \dots, a + m\} \cup \{2a\}.$$

Nous prouvons tout d'abord le théorème suivant :

Théorème 3.12. *Pour tous entiers m et a , $2 \leq m < a$,*

$$\chi_2(G(\{1, \dots, m, a\})) = 2m + 3 = \Delta(G(\{1, \dots, m, a\})) + 1$$

si et seulement si $a \equiv m + 1, m + 2 \pmod{2m + 3}$.

Preuve. Puisque $\{1, \dots, m, a\}^2 = \{1, \dots, 2m\} \cup \{a - m, a - m + 1, \dots, a + m\} \cup \{2a\}$, $d \not\equiv 0 \pmod{2m + 3}$ pour tout $d \in \{1, \dots, m, a\}^2$ si et seulement si $a \equiv m + 1 \pmod{2m + 3}$ ou $a \equiv m + 2 \pmod{2m + 3}$, et donc, par la Proposition 3.1 et l'Observation 3.6, $\chi_2(G(\{1, \dots, m, a\})) = 2m + 3$.

Nous prétendons maintenant que toute $(2m + 3)$ -coloration à distance 2 λ de $G(\{1, \dots, m, a\})$ est nécessairement $(2m + 3)$ -périodique, c'est-à-dire $\lambda(x + 2m + 3) = \lambda(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Pour le montrer, il suffit de prouver que pour tout x , les $2m + 3$

sommets consécutifs $x, \dots, x + 2m + 2$ doivent recevoir des couleurs différentes. Supposons au contraire que ce n'est pas le cas, et sans perte de généralité, soit $x = 0$. Puisque les couleurs affectées aux sommets $0, 1, \dots, 2m$, sont nécessairement différentes, alors nous avons seulement deux cas à considérer :

1. Les sommets $0, 1, \dots, 2m + 1$ sont colorés avec les couleurs $1, 2, \dots, 2m + 1$ et 1 , respectivement.

Notons que les deux sommets $m - a$ et $m + a$ sont adjacents à tous les sommets $0, 1, \dots, 2m$. Par conséquent,

$$\{\lambda(m - a), \lambda(m + a)\} = \{2m + 2, 2m + 3\},$$

ce qui implique

$$\{\lambda(m + 1 - a), \lambda(m + 1 + a)\} = \{2m + 2, 2m + 3\}$$

(plus précisément, $\lambda(m + 1 - a) = 4m + 5 - \lambda(m - a)$ et $\lambda(m + 1 + a) = 4m + 5 - \lambda(m + a)$). Cela implique $\lambda(m + 2 - a) = \lambda(m + 2 + a) = 2$, une contradiction puisque $d(m + 2 - a, m + 2 + a) = 2$.

2. Les sommets $0, 1, \dots, 2m + 1, 2m + 2$ sont colorés avec les couleurs $1, 2, \dots, 2m + 1, 2m + 2$ et 1 , respectivement.

Comme dans le cas précédent, nous avons

$$\{\lambda(m - a), \lambda(m + a)\} = \{2m + 2, 2m + 3\},$$

ce qui implique

$$\{\lambda(m + 1 - a), \lambda(m + 1 + a)\} = \{1, 2m + 3\}.$$

Nous obtenons donc $\lambda(m + 2 - a) = \lambda(m + 2 + a) = 2$, encore une contradiction.

Donc, toute $(2m + 3)$ -coloration à distance 2 λ de $G(\{1, \dots, m, a\})$ est nécessairement $(2m + 3)$ -périodique, et par conséquent $\chi_2(G(\{1, a, a + 1\})) = 2m + 3$ si et seulement si $2m + 3$ ne divise aucun élément de $\{1, 2, \dots, 2m\} \cup \{a - m, a - m + 1, \dots, a + m\} \cup \{2a\}$. Cette situation ne se produit que si $a \equiv m + 1 \pmod{2m + 3}$ ou $a \equiv m + 2 \pmod{2m + 3}$.

□

Pour d'autres valeurs de a , nous proposons la borne supérieure générale suivante :

Théorème 3.13. *Pour tous entiers m et a , $2 \leq m < a$,*

$$\chi_2(G(\{1, \dots, m, a\})) \leq 4m + 2 = 2\Delta(G(\{1, \dots, m, a\})) - 2.$$

Preuve. Rappelons tout d'abord que $\{1, \dots, m, a\}^2 = \{1, \dots, 2m\} \cup \{a-m, \dots, a+m\} \cup \{2a\}$. Donc, si $2m+1$ ne divise pas a , alors l'ensemble $\{1, \dots, m, a\}^2$ contient seulement un élément e divisible par $2m+1$ (avec $e \in \{a-m, \dots, a+m\}$). Dans ce cas, le résultat est obtenu grâce au Théorème 3.4 appliqué à $n = 2m+1$.

Supposons maintenant que $a = k(2m+1)$, avec $k \geq 1$. Soit λ la fonction $(2a-m)$ -périodique définie par le motif

$$[12 \dots (2m+1)]^k [(2m+2)(2m+3) \dots (4m+2)]^{k-1} (2m+2)(2m+3) \dots (3m+2).$$

Si $\lambda(x) = \lambda(y) = c$, $1 \leq c \leq 3m+2$, alors

$$\begin{aligned} |x - y| \in & \{q(2m+1), 0 \leq q \leq k-1\} \\ & \cup \{p(2a-m) + q(2m+1), p \geq 1, 1-k \leq q \leq k-1\}. \end{aligned}$$

Si $\lambda(x) = \lambda(y) = c$, $3m+3 \leq c \leq 4m+2$, alors

$$\begin{aligned} |x - y| \in & \{q(2m+1), 0 \leq q \leq k-2\} \\ & \cup \{p(2a-m) + q(2m+1), p \geq 1, 2-k \leq q \leq k-2\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans les deux cas, $|x - y| \notin \{1, \dots, m, a\}^2$, et donc λ est une $(4m+2)$ -coloration à distance 2 de $G(\{1, \dots, m, a\})$. \square

À partir des Théorèmes 3.12 et 3.13, nous déduisons le résultat suivant :

Corollaire 3.14. *Pour tous entiers m et a , $2 \leq m < a$, $a \not\equiv m+1, m+2 \pmod{2m+3}$,*

$$2m+4 \leq \chi_2(G(\{1, \dots, m, a\})) \leq 4m+2.$$

3.1.2.4 Coloration à distance 2 de $G(D)$ pour d'autres ensembles

Dans cette section, nous déterminons le nombre chromatique à distance 2 pour d'autres ensembles particuliers.

Nous prouvons tout d'abord le théorème suivant :

Théorème 3.15. *Pour tout ensemble fini d'entiers positifs D_i , $1 \leq i \leq 10$.*

1. Si $D_1 = \{1, 2, 3, \dots, a, a + (2a + 1), a + 2(2a + 1), \dots, a + k(2a + 1)\}$, alors $\chi_2(G(D_1)) = S_1 = (k + 1)(2a + 1)$.
2. Si $D_2 = \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + m\}$ et $m \geq a - 1$, alors $\chi_2(G(D_2)) = S_2 = 2(a + m) + 1$.
3. Si $D_3 = \{1, 2, 3, \dots, q, a, a + 1, a + 2, \dots, a + m\}$ et $m \geq a - q - 1$, alors $\chi_2(G(D_3)) = S_3 = 2(a + m) + 1$.
4. Si $D_4 = \{2, 4, 6, \dots, 2k, 2k + 1\}$, alors $\chi_2(G(D_4)) = S_4 = 4k + 3 = 2\Delta - 1$.
5. Si $D_5 = \{4, 6, 8, \dots, 2k, 2k + 1\}$, alors $\chi_2(G(D_5)) = S_5 = 2k + 3 = 2k + 3 = \Delta + 3$.
6. Si $D_6 = \{3, 5, 7, \dots, 2k + 1, 2k + 2\}$, alors $\chi_2(G(D_6)) = S_6 = 2k + 3 = 2k + 3 = \Delta + 1$.
7. Si $D_7 = \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + m, 2(a + m) + 1, 3(a + m) + 2, \dots, k(a + m) + (k - 1)\}$, alors $\chi_2(G(D_7)) = S_7 = (k + 1)(a + m)$.
8. Si $D_8 = \{1, 2, 3, \dots, a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$, alors $\chi_2(G(D_8)) = S_8 = \Delta + 1$ si et seulement si $a_i + a_j \neq a_0 + a_m + 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ et $a_0 + a_m = 2|D|$.
9. Si $D_9 = \{1, 2, 3, \dots, a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$, alors $\chi_2(G(D_9)) = S_9 = \Delta + 2$ si et seulement si $a_i + a_j \neq a_0 + a_m + 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ et $a_0 = a_m - 2m - 1$.
10. Si $D_{10} = \{1, 2, 3, \dots, a_0, a_1, a_1 + 1, \dots, a_1 + m_1, a_2, a_2 + 1, \dots, a_2 + m_2, \dots, a_p, a_p + 1, \dots, a_p + m_p\}$, $\max_{1 \leq i \leq p} \{m_i\} \geq a_1 - a_0 - 1$ et $a_{i+1} - a_i - m_i \leq 2a_0 + 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, p - 1\}$, alors $\chi_2(G(D_{10})) = S_{10} = 2(a_p + m_p) + 1$.

De plus, pour tout graphe distance $G(D_i)$, $1 \leq i \leq 10$, la coloration est S_i -périodique.

Preuve. Soient $S_1 = S_2 = 2(a + m) + 1$, $S_3 = 2(a + m) + 1$, $S_4 = 4k + 3 = 2\Delta - 1$, $S_5 = 2k + 3 = \Delta + 3$, $S_6 = 2k + 3 = \Delta + 1$, $S_7 = (k + 1)(a + m)$, $S_8 = \Delta + 1$, $S_9 = \Delta + 2$ et $S_{10} = 2(a_p + m_p) + 1$.

Pour tout ensemble D_i , $1 \leq i \leq 10$, nous avons

$$\{1, 2, \dots, S_i - 1\} \subseteq D_i^2,$$

ce qui implique $\chi_2(G(D_i)) \geq S_i$. Comme S_i ne divise aucun élément de D_i^2 , alors d'après la Proposition 3.1, $\chi_2(G(D_i)) \leq S_i$, donc $\chi_2(G(D_i)) = S_i$ pour tout ensemble D_i , $1 \leq i \leq 10$. \square

Soit $G(D)$ un graphe distance avec $D = \{1, 2, \dots, k\}$, grâce à la Proposition 3.1 et l'Observation 3.6, nous pouvons déterminer l'ensemble des éléments $C \subseteq D$ tel que $\chi_2(G(D - C)) = \Delta + 1$. Soient $A = \{(d_i, d_j) : d_i + d_j = \Delta + 1\}$ et $B = \{(d_i, d_j) : d_j - d_i = \Delta + 1\}$ pour tous $d_j, d_i \in D$ et $d_j > d_i$.

Le tableau suivant détermine l'ensemble C . Dans la première colonne, m représente la cardinalité de l'ensemble C , la deuxième colonne représente $\Delta(G(D - C)) + 1$, les troisième et quatrième colonnes contiennent respectivement l'ensemble de toutes les paires de distances dont la somme est égale à $\Delta(G(D - C)) + 1$ et la cardinalité de cet ensemble, les cinquième et sixième colonnes contiennent respectivement l'ensemble de toutes les paires de distances dont la différence est égale à $\Delta(G(D - C)) + 1$ et la cardinalité de cet ensemble, la septième colonne contient les distances qui sont égales à $\Delta(G(D - C)) + 1$ et finalement la huitième colonne représente l'ensemble C qui contient tous les éléments de la septième colonne et un élément de chaque paire dans les ensembles des troisième et cinquième colonnes.

m	$\Delta + 1$	A	$ A $	B	$ B $	$d_i = \Delta + 1$	C
1	$2k - 1$	$(k, k - 1)$	1	/	0	/	$k - 1$
2	$2k - 3$	$(k, k - 3), (k - 1, k - 2)$	2	/	0	/	$k - 3$ et $(k - 1, k - 2)$
3	$2k - 5$	$(k, k - 5), (k - 1, k - 4), (k - 2, k - 3)$	3	/	0	/	$k - 5$ et un élément de chaque paire
$m < \lceil \frac{k}{2} \rceil$	$2k - 2m + 1$	$(k, k - 2m + 1), (k - 1, k - 2m + 2), \dots, (k - m + 1, k - m)$	m	/	0	/	$k - 2m + 1$ et un élément de chaque paire
$m = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ k pair	$k + 1$	$(k, 1), (k - 1, 2), \dots, (\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{k}{2} \rceil)$	$\lceil \frac{k}{2} \rceil$	/	0	/	1, et un élément de chaque paire
$m = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ k impair	k	$(k - 1, 1), (k - 2, 2), \dots, (\lceil \frac{k}{2} \rceil, \lceil \frac{k}{2} \rceil)$	$\lceil \frac{k}{2} \rceil$	/	0	k	impossible
$m = \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ k pair	$k - 1$	$(k - 2, 1), (k - 3, 2), \dots, (k - \lceil \frac{k}{2} \rceil, \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1)$	$\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$	$(k, 1)$	1	$k - 1$	$1, k - 1$ et un élément de chaque paire
$m = \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ k impair	$k - 2$	$(k - 3, 1), (k - 4, 2), \dots, (k - \lceil \frac{k}{2} \rceil, \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2)$	$\lceil \frac{k}{2} \rceil - 2$	$(k, 2), (k - 1, 1)$	2	$k - 2$	$2, k - 2$ et un élément de chaque paire
$m = \lceil \frac{k}{2} \rceil + 2$ k pair	$k - 3$	$(k - 4, 1), (k - 5, 2), \dots, (k - \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2)$	$\lceil \frac{k}{2} \rceil - 2$	$(k, 3), (k - 1, 2), (k - 2, 1)$	3	$k - 3$	$3, k - 3$ et un élément de chaque paire
$m = \lceil \frac{k}{2} \rceil + 2$ k impair	$k - 4$	$(k - 5, 1), (k - 6, 2), \dots, (k - \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{k}{2} \rceil - 3)$	$\lceil \frac{k}{2} \rceil - 3$	$(k, 4), (k - 1, 3), (k - 2, 2), (k - 3, 1)$	4	$k - 4$	$4, k - 4$ et un élément de chaque paire
$m = \lceil \frac{k}{2} \rceil + i$ k pair, $i < \lceil \frac{k}{2} \rceil$	$k - 2i + 1$	$(k - 2i, 1), (k - 2i - 1, 2), \dots, (k - (\lceil \frac{k}{2} \rceil + i - 1), \lceil \frac{k}{2} \rceil - i)$	$\lceil \frac{k}{2} \rceil - i$	$(k, 2i - 1), (k - 1, 2i - 2), \dots, (k - 2i + 2, 1)$	$2i - 1$	$k - 2i$ $+1$	$2i - 1, k - 2i + 1$ et un élément de chaque paire
$m = \lceil \frac{k}{2} \rceil + i$ k impair, $i < \lceil \frac{k}{2} \rceil$	$k - 2i$	$(k - 2i - 1, 1), (k - 2i - 2, 2), \dots, (k - (\lceil \frac{k}{2} \rceil + i - 1), \lceil \frac{k}{2} \rceil - (i + 1))$	$\lceil \frac{k}{2} \rceil - (i + 1)$	$(k, 2i), (k - 1, 2i - 1), (k - 2i + 1, 1)$	$2i$	$k - 2i$	$2i, k - 2i$ et un élément de chaque paire

3.1.3 Coloration d'incidences

Puisque les graphes distances sont des graphes réguliers, d'après la Proposition 2.17, $\chi_2(G(D)) = \Delta(G(D)) + 1$ si et seulement si $\chi_i(G(D)) = \Delta(G(D)) + 1$. De plus, si $\chi_2(G(D)) = \Delta(G(D)) + 2$, alors $\chi_i(G(D)) = \Delta(G(D)) + 2$, ce qui implique que les valeurs exactes et les bornes présentées dans les Théorèmes 3.8, 3.9, 3.10, 3.12 et 3.13 et les Cas 6, 8 et 9 du Théorème 3.15 sont aussi des valeurs exactes et des bornes du nombre chromatique d'incidence.

Si $D = \{1, \dots, m, a\}$, alors $G(D) = G(\{1, \dots, m\}) + G(\{a\})$. En utilisant l'Observation 2.4, il est possible d'améliorer la borne présentée dans le Théorème 3.13, et nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.16. *Pour tous entiers m et a , $2 \leq m < a$,*

$$\chi_i(G(\{1, \dots, m, a\})) = \begin{cases} 2m + 3 & \text{si } a \equiv m + 1, m + 2 \pmod{2m + 3}, \\ 2m + 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2 Graphes circulants

3.2.1 Introduction

Soit $D = \{d_1, \dots, d_\ell\}$ un ensemble fini d'entiers positifs. Le *graphe circulant*, noté $G(n, D)$, est défini par l'ensemble de sommets $V = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ et l'ensemble d'arêtes $E = \{i, i + d_j \pmod{n}\}$, $0 \leq i \leq n - 1$ et $1 \leq j \leq \ell$.

Si $\text{pgcd}(\{n, d_1, \dots, d_\ell\}) = p > 1$, alors le graphe circulant $G(n, D)$ possède p composantes connexes, chacune est isomorphe au graphe circulant $G(n', D')$ avec $D' = \{d_1/p, \dots, d_\ell/p\}$ et $n' = n/p$. Par conséquent, on a $\chi_2(G(n, D)) = \chi_2(G(n', D'))$ et $\chi_i(G(n, D)) = \chi_i(G(n', D'))$. Ainsi, sans perte de généralité, on pourra supposer que $\text{pgcd}(\{n, d_1, \dots, d_\ell\}) = 1$.

Les graphes circulants possèdent d'autres propriétés :

Propriété 3.17 (Heuberger [42], Morris [65]).

1. Si $d_i \not\equiv \pm d_j \pmod{n}$ pour tous $1 \leq i, j \leq \ell$, alors $G(n, D)$ est r -régulier où,

$$r = \begin{cases} 2m & \text{si } d_k \not\equiv \pm \frac{n}{2} \pmod{n}, \forall 1 \leq k \leq \ell; \\ 2m-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soit $D = \{a\}$. Si $\text{pgcd}(a, n) = 1$, le graphe $G(n, D)$ est un cycle de longueur n , sinon le graphe admet $\text{pgcd}(a, n)$ cycles de longueur $\frac{n}{\text{pgcd}(a, n)}$.

3. Soit $D = \{a, b\}$. Si $\text{pgcd}(a, n) = 1$, alors le graphe $G(n, D)$ est isomorphe au graphe $G(n, D')$ où $D' = \{1, -ab \pmod{n}\}$.

4. $G(n, D)$ est biparti si et seulement si d_1, \dots, d_ℓ sont impairs et n est pair.

5. Un graphe circulant est un graphe de Cayley¹ pour $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Le problème de détermination du nombre chromatique des graphes circulants $G(n, D)$ est lié à la coloration périodique des graphes distances $G(D)$ [68]. En effet toute coloration propre de $G(n, D)$ produit une coloration périodique de $G(D)$.

Observation 3.18. *Il est facile de vérifier que si le nombre chromatique d'un graphe circulant $G(n, D)$ est égal à p , et $G(n, D)$ admet une coloration p -périodique, alors n est nécessairement un multiple de p .*

Les problèmes de coloration des graphes circulants ont intéressé plusieurs chercheurs [26, 29, 31, 82, 84, 85, 95]. Nous citons quelques résultats de base :

Dans les deux théorèmes suivants, Heuberger [42] a donné une caractérisation complète du nombre chromatique des graphes circulants $G(n, D)$ avec $|D| \leq 2$. Lorsque $|D| = 1$, le résultat est immédiat, puisque $G(n, D)$ est composé soit d'un cycle hamiltonien soit de plusieurs cycles disjoints.

Théorème 3.19.

Soit $D = \{a\}$. Si $G(n, D)$ est connexe, alors

1. Voir la définition des graphes de Cayley dans [91].

$$\chi(G(n, D)) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair;} \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 3.20 (Heuberger [42]).

Soit $D = \{a, b\}$, avec $\text{pgcd}(n, a, b) = 1$. On a alors :

$$\chi(G(n, D)) = \begin{cases} 2 & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont impairs et } n \text{ est pair;} \\ 4 & \text{si } 3 \text{ ne divise pas } n, n \neq 5, \text{ et } ((b \equiv \pm 2a \pmod{n}) \\ & \text{ou } (a \equiv \pm 2b \pmod{n})); \\ 4 & \text{si } n = 13 \text{ et } ((b \equiv \pm 5a \pmod{13}) \text{ ou } (a \equiv \pm 2b \pmod{13})); \\ 5 & \text{si } n \text{ est pair;} \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque $|D| \geq 3$, seulement des résultats partiels ont été trouvés pour des ensembles D particuliers.

Soient n un entier positif, $|x|_n$ la classe résiduelle² de x ou $(-x)$ modulo n dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, et $D = \{a, b, c\}$. Meszka, Nedela et Rosa [63] ont fait une étude complète du nombre chromatique de $G(n, D)$ dans le cas où $|c|_n = |a+b|_n$.

Théorème 3.21 (Meszka, Nedela et Rosa [63]).

Pour tout $n \geq 7$, si $|c|_n = |a+b|_n$, alors $\chi(G(n, D)) = 4$ sauf dans les cas suivants :

1. a, b et c ne sont divisibles par 3 et $n \equiv 0 \pmod{3}$, dans ce cas $\chi(G(n, D)) = 3$.
2. $D = \{1, 2, 3\}$ et $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, $n \neq 7, 11$, dans ce cas $\chi(G(n, D)) = 5$.
3. ($D = \{1, 3, 4\}$ et $n \in \{13, 17, 18, 25\}$), ($D = \{1, 7, 8\}$ et $n \in \{19, 26\}$), ($D = \{1, 6, 7\}$ et $n = 33$), ou ($D = \{1, 10, 11\}$ et $n = 37$), dans tous ces cas $\chi(G(n, D)) = 5$.
4. $D = \{1, 2, 3\}$ et $n = 7$ dans ce cas $\chi(G(n, D)) = 7$.
5. $D = \{1, 2, 3\}$ et $n = 11$ dans ce cas $\chi(G(n, D)) = 6$.

Avant de donner le résultat de Barajas et Serra [8], lorsque $c \geq 4bc$, il est nécessaire de définir la valuation p -adique $\nu_p(x)$, qui désigne la plus grande puissance de p qui divise x .

2. La classe résiduelle de x est l'ensemble constitué de x et de tous les entiers de même reste lorsqu'ils sont divisés par n .

Théorème 3.22 (Barajas et Serra [8]).

Soit $D = \{a, b, c\}$, avec $a < b < c$ et $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$. Si $c \geq 4bc$, alors $\chi(G(n, D)) = 3$ sauf dans les cas suivants :

1. Tous les éléments de D sont impairs et n est pair, dans ce cas $\chi(G(n, D)) = 2$.
2. $D = \{1, 2, 3\}$, dans ce cas $\chi(G(n, D)) = 4$ si $n \equiv 0 \pmod{4}$ et $\chi(G(n, D)) = 5$ sinon.
3. $D = \{x, 2x, y\}$, $(x, y) \neq (1, 3)$ et soit $(\nu_3(n) \leq \nu_3(x))$, soit $(\nu_3(y) > 0$ et $\text{pgcd}(x, n) = 1)$, et dans ces cas $\chi(G(n, D)) = 4$.
4. $D = \{x, y, x + y\}$, $(x, y) \neq (1, 2)$ et soit l'un des $x, y, x + y$ est multiple de 3 soit n n'est pas multiple de 3, dans ce cas $\chi(G(n, D)) = 4$.
5. $D \in \{\{1, 5, 8\}, \{2, 3, 10\}\} \pmod{n}$ et $n \not\equiv 3$ ou $n \not\equiv 6$ respectivement, dans ce cas $\chi(G(n, D)) = 4$.

En 1998, Collins, Fisher et Hutchinson [30] ont proposé la conjecture suivante :

Conjecture 3.23 (Collins, Fisher et Hutchinson [30] cité dans [37]).

Soient $D = \{1, r, r + 1\}$ et $6 \leq 2r + 2 \leq n$. On a $\chi(G(n, D)) = 4$ sauf dans les cas suivants :

1. $n = 2r + 2, 2r + 3, 3r + 1$ ou $3r + 2$ et n n'est pas divisible par 4.
2. $r = 2$ et n n'est pas divisible par 4.
3. $(r, n) \in \{(3, 13), (3, 17), (3, 18), (3, 25), (4, 17), (6, 25), (6, 33), (7, 19), (7, 25), (7, 26), (9, 25), (10, 25), (10, 26), (10, 37), (14, 33)\}$.

En 2003, Yeh et Zhu [93] ont prouvé cette conjecture.

La $p^{\text{ième}}$ puissance du cycle C_n , notée C_n^p , est le graphe circulant $G(n, D)$ avec $D = \{1, \dots, p\}$. Nakprasit et Nakprasit [66] ont étudié la coloration d'incidence des puissances des cycles. Ils ont montré principalement le théorème suivant :

Théorème 3.24 (Nakprasit et Nakprasit [66]). Pour tout entier $n \geq 5$,

$$\chi_i(C_n^2) = \begin{cases} 5 & \text{si } n \text{ est multiple de } 5; \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2.2 Coloration à distance 2

Dans la preuve du Théorème 3.8, nous avons montré que toute 5-coloration de $G(D)$ est nécessairement 5-périodique. Donc, d'après l'Observation 3.18 et le Théorème 3.8, nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 3.25. *Pour tout entier $a \geq 3$,*

$\chi_2(G(\{1, a\})) = 5$ *si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{5}$ et $a \equiv 2, 3 \pmod{5}$.*

Avant de donner nos résultats, il est nécessaire d'énoncer quelques définitions et un résultat de combinatoire qui sera utile dans les preuves de ces théorèmes. Rappelons qu'un motif de longueur ℓ est une séquence $M = c_1 \dots c_\ell$ de k couleurs décrivant une coloration valide d'une séquence de ℓ sommets.

- Un motif d'une coloration d'incidence d'un graphe circulant $G(\{1, a\})$ de longueur ℓ est une séquence $M = c_1 \dots c_{4\ell}$ de k couleurs décrivant une coloration valide des incidences externes d'une séquence de ℓ sommets .
- Un motif M_1 est *compatible à droite* (respectivement *à gauche*) avec un motif M_2 si M_2M_1 (respectivement M_1M_2) est un motif.
- Un motif M_1 est *compatible* avec un motif M_2 (ou M_1 et M_2 sont *compatibles*) si M_1M_2 et M_2M_1 sont des motifs.
- Un motif *périodique* est un motif compatible avec lui-même.

Théorème 3.26 (Sylvester [77]).

Soient x et y deux entiers positifs tels que $\text{pgcd}(x, y) = 1$. Pour tout $n \geq (x - 1)(y - 1)$, il existe deux entiers $p, q \geq 0$ tels que $n = px + qy$.

Ainsi, lorsqu'on a deux motifs périodiques M_1 et M_2 compatibles, de longueur x et y respectivement, on peut utiliser le théorème de Sylvester pour colorer le graphe circulant $G(n, \{1, a\})$, avec $n \geq (x - 1)(y - 1)$, en répétant p fois le motif M_1 et q fois le motif M_2 .

Théorème 3.27. *Pour tout entier $n \geq 5$,*

$$\chi_2(G(n, \{1, 2\})) \begin{cases} = 5 & \text{si } n \text{ est multiple de } 5; \\ = 6 & \text{si } n \notin \{7, 8, 9, 13, 14, 19\}; \\ \geq 7 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve.

- Si $n \equiv 0 \pmod{5}$, alors le résultat est obtenu directement à partir du Corollaire 3.25.
- Supposons maintenant que $n \not\equiv 0 \pmod{5}$. D'après le Corollaire 3.25, 6 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 2\})$.
- Lorsque $n \in \{7, 8, 9, 13, 14, 19\}$, nous avons vérifié à l'aide de l'ordinateur qu'il est impossible d'obtenir une 6-coloration à distance 2. Le principe de l'algorithme que nous avons programmé se base sur l'exploration en profondeur, pour avoir toutes les k -colorations à distance 2 en fixant le nombre de couleurs k . Si l'algorithme s'arrête sans trouver une k -coloration, alors $k + 1$ est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2, dans notre cas, 7 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 2\})$.
- Lorsque $n \notin \{7, 8, 9, 13, 14, 19\}$, nous montrons que 6 est aussi une borne supérieure. Pour cela, il suffit de considérer les motifs suivants :

Soient $M_1 = 01234$ et $M_2 = 012345$. On vérifie aisément que ces deux motifs sont périodiques et compatibles, de longueur 5 et 6. D'après le Théorème 3.26, à partir de $n \geq 20$, il existe toujours deux entiers $p, q \geq 0$ tels que $n = 5p + 6q$. Donc, à partir de $n = 20$, une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 2\})$ peut être obtenue en répétant p fois le motif M_1 et q fois le motif M_2 .

Lorsque $n \in \{6, 11, 12, 16, 17, 18\}$, n peut s'exprimer aussi sous la forme $5p + 6q$, et dans ce cas $(M_1)^p(M_2)^q$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 2\})$.

Cela conclut la preuve. □

Théorème 3.28. *Pour tout entier $n \geq 7$,*

$$\chi_2(G(n, \{1, 3\})) \begin{cases} = 5 & \text{si } n \text{ est multiple de } 5; \\ = 6 & \text{si } n \notin \{7, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 19, 21, 26, 31\}; \\ \geq 7 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve.

- Si $n \equiv 0 \pmod{5}$, alors le résultat est obtenu directement à partir du Corollaire 3.25.
- Supposons maintenant que $n \not\equiv 0 \pmod{5}$. D’après le Corollaire 3.25, 6 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2.
- Lorsque $n \in \{7, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 19, 21, 26, 31\}$, à l’aide de l’ordinateur, en exécutant l’algorithme utilisé dans la preuve du Théorème 3.27, nous avons vérifié qu’il est impossible d’obtenir une 6-coloration. Ainsi 7 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 3\})$.
- Lorsque $n \notin \{7, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 19, 21, 26, 31\}$, pour montrer que 6 est aussi une borne supérieure, il suffit de considérer les colorations suivantes, qui sont fonction du reste de la division euclidienne de n par le nombre 5 :
 - Si $n \equiv 1 \pmod{5}$:

À partir de $n = 36$, une 6-coloration à distance 2 est donnée par le motif suivant :

$$(01234)^*0123451032510425104352043521435.$$

Lorsque $n = 6$ nous considérons la coloration suivante :

$$012345.$$

- Si $n \equiv 2 \pmod{5}$:
- À partir de $n = 12$, une 6-coloration à distance 2 est donnée par le motif suivant :

$$(01234)^*0521435.$$

- Si $n \equiv 3 \pmod{5}$:
- À partir de $n = 18$, une 6-coloration à distance 2 est donnée par le motif suivant :

$$(01234)^*0153421504235.$$

- Si $n \equiv 4 \pmod{5}$:
- À partir de $n = 24$, une 6-coloration à distance 2 est donnée par le motif suivant :

$$(01234)^*0125401352043521435.$$

Cela conclut la preuve. □

Théorème 3.29. *Pour tout entier $n \geq 9$,*

$$\chi_2(G(n, \{1, 4\})) \begin{cases} = 6 & \text{si } n \text{ est multiple de } 6; \\ \geq 7 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. D'après le Corollaire 3.25, 6 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 4\})$. Pour montrer que 6 est aussi une borne supérieure lorsque n est multiple de 6, il suffit de considérer la coloration donnée par le motif $(012345)^*$.

Lorsque n n'est pas multiple de 6, à l'aide de l'ordinateur, en exécutant l'algorithme utilisé dans la preuve du Théorème 3.27, nous avons vérifié qu'il est impossible d'obtenir une 6-coloration de $G(n, \{1, 4\})$. Ainsi, 7 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 4\})$. □

Théorème 3.30. *Pour tout entier $n \geq 11$,*

$$\chi_2(G(n, \{1, 5\})) \begin{cases} = 6 & \text{si } n \notin \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29, \\ & 30, 31, 32, 37, 38, 39, 40, 43, 49, 50, 51, 61, 62, 73\}; \\ \geq 7 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. D'après le Corollaire 3.25, 6 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2.

- Lorsque $n \in \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 37, 38, 39, 40, 43, 49, 50, 51, 61, 62, 73\}$, à l'aide de l'ordinateur, en exécutant l'algorithme utilisé dans la preuve du Théorème 3.27, nous avons vérifié qu'il est impossible d'obtenir une 6-coloration. Ainsi 7 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2.
- Lorsque $n \notin \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 37, 38, 39, 40, 43, 49, 50, 51, 61, 62, 73\}$, pour montrer que 6 est une borne supérieure, il suffit de considérer les motifs suivants :

1. Le motif périodique M_1 de longueur 11 :

$$M_1 = 01201234534.$$

2. Le motif périodique M_2 de longueur 12 et compatible avec M_1 :

$$M_2 = 012012345345.$$

3. Le motif M_3 de longueur 30 et compatible avec M_1 :

$$M_3 = 012015345320120453451201234534.$$

4. Le motif M_4 de longueur 31, compatible avec M_1 et compatible à droite avec M_2 :

$$M_4 = 0120153453201204534512012345345.$$

D'après le Théorème 3.26, à partir de $n \geq 110$, il existe toujours deux entiers $p, q \geq 0$ tels que $n = 11p + 12q$. Donc, à partir de $n = 110$, une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 5\})$ peut être obtenue en répétant p fois le motif M_1 et q fois le motif M_2 .

Lorsque $n \leq 109$, des 6-colorations à distance 2 de $G(n, \{1, 5\})$ sont obtenues en utilisant des combinaisons entre les motifs M_1, M_2, M_3 et M_4 , selon les cas suivants :

1. Lorsque $n \in \{11, 12, 22, 23, 24, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 47, 48, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 6, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108\}$, n peut s'exprimer sous la forme $12p + 11q$, et dans ce cas $(M_2)^p(M_1)^q$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 5\})$.
2. Lorsque $n \in \{42, 53, 54, 64, 65, 75, 76, 86, 87, 97, 98, 109\}$, n peut s'exprimer sous la forme $31 + 12p + 11q$, et dans ce cas $M_4(M_2)^p(M_1)^q$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 5\})$.

3. Lorsque $n \in \{41, 52, 63, 74, 85\}$, n peut s'exprimer sous la forme $30 + 11p$, et dans ce cas $M_3(M_1)^p$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 5\})$.

Cela conclut la preuve. □

Théorème 3.31. *Pour tout entier $n \geq 13$,*

$$\chi_2(G(n, \{1, 6\})) \begin{cases} = 6 & \text{si } n \notin \{13, 14, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, \\ & 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 45, 46, 48, 49, 50, 53, 54, 56, 57, \\ & 59, 61, 62, 65, 67, 73, 78, 79, 86, 97\}; \\ \geq 7 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. D'après le Corollaire 3.25, 6 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.

- Lorsque $n \in \{13, 14, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 45, 46, 48, 49, 50, 53, 54, 56, 57, 59, 61, 62, 65, 67, 73, 78, 79, 86, 97\}$, à l'aide de l'ordinateur, en exécutant l'algorithme utilisé dans la preuve du Théorème 3.27, nous avons vérifié qu'il est impossible d'obtenir une 6-coloration. Ainsi 7 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.
- Lorsque $n \notin \{13, 14, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 45, 46, 48, 49, 50, 53, 54, 56, 57, 59, 61, 62, 65, 67, 73, 78, 79, 86, 97\}$, pour montrer que 6 est une borne supérieure, il suffit de considérer les motifs suivants :

1. Le motif périodique M_1 de longueur 11 :

$$M_1 = 01201234534.$$

2. Le motif périodique M_2 de longueur 30 et compatible avec M_1 :

$$M_2 = 012015345320120453451201234534.$$

3. Le motif M_3 de longueur 25 et compatible avec le motif M_1 :

$$M_3 = 5120120453453201201534534.$$

4. Le motif périodique M_4 de longueur 17 :

$$M_4 = 01230123415340524.$$

5. Le motif périodique M_5 de longueur 18 :

$$M_5 = 012301234523450145.$$

6. Le motif M_6 de longueur 19 et compatible avec M_4 :

$$M_6 = 5120120453453201201534534.$$

7. Le motif périodique M_7 de longueur 81 :

$$M_7 = 0120312435243014051253124302430145012531243024501453125302 \\ 43014501253124302435145.$$

8. Le motif M_8 de longueur 73 et compatible avec M_1 :

$$M_8 = 0520123413405205234134152052301341524523013015245240130153 \\ 452401201534534.$$

9. Le motif M_9 de longueur 87 et compatible avec M_1 :

$$M_9 = 0120153453201204534532012041345320520154134203205341542152 \\ 01340342052153413401205234534.$$

10. Le motif périodique M_{10} de longueur 81 et compatible avec M_1 :

$$M_{10} = 052015341342105203524154013021342540250135413402305214524 \\ 350130123452401201534534.$$

11. le motif périodique M_{11} de longueur 64 :

$$M_{11} = 012031243524501403125312430245014531253024301450125312430 \\ 2435145.$$

12. Le motif périodique M_{12} de longueur 76 :

$$M_{12} = 012013243540150125324301405243213015042532150140324325415 \\ 0132032401541354325.$$

13. Le motif M_{13} de longueur 111 et compatible avec M_1 :

$$M_{13} = 012015345320120453451201234534512012305340124125430531052 \\ 402341354125023503410241235130542052103413451205234534.$$

14. Le motif périodique M_{14} de longueur 100 :

$$M_{14} = 012013243540150125324301401542532013014325420540153213201 \\ 4054325321501403243254150132032401541354325.$$

15. Le motif périodique M_{15} de longueur 111 :

$$M_{15} = 012031234520450315321402145234503150314021425345031203140 \\ 514253420312035405142134203520354015421342105203543154.$$

D'après le Théorème 3.26, à partir de $n \geq 290$, il existe toujours deux entiers $p, q \geq 0$ tels que $n = 11p + 30q$. Donc, à partir de $n = 290$, une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$ peut être obtenue en répétant p fois le motif M_1 et q fois le motif M_2 .

Lorsque $n \leq 289$, des 6-colorations à distance 2 sont obtenues en utilisant des combinaisons entre les motifs M_1, \dots, M_{15} , selon les cas suivants :

1. Lorsque $n \in \{22, 30, 33, 41, 44, 52, 55, 60, 63, 66, 71, 74, 77, 82, 85, 88, 90, 93, 96, 99, 101, 104, 107, 110, 112, 115, 118, 120, 121, 123, 126, 129, 131, 132, 134, 137, 140, 142, 143, 145, 148, 150, 151, 153, 154, 156, 159, 161, 162, 164, 165, 167, 170, 172, 173, 175, 176, 178, 181, 183, 184, 186, 187, 189, 192, 194, 195, 197, 198, 200, 203, 205, 206, 208, 209, 211, 214, 217, 219, 220, 222, 225, 228, 230, 231, 233, 236, 239, 241, 242, 244, 247, 250, 253, 255, 258, 261, 264, 266, 269, 272, 275, 277, 280, 283, 286\}$, n peut s'exprimer sous la forme $11p + 30q$, et dans ce cas $(M_1)^p(M_2)^q$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.
2. Lorsque $n \in \{36, 47, 58, 69, 72, 80, 83, 91, 94, 102, 105, 108, 113, 116, 119, 124, 127, 130, 135, 138, 141, 144, 146, 149, 152, 155, 157, 160, 163, 166, 168, 171, 174, 177, 179, 180, 182, 185, 188, 190, 191, 193, 196, 199, 201, 202, 204, 207, 210, 212, 213, 215, 216, 218, 221, 223, 224, 226, 227, 229, 232, 234, 235, 237, 238, 240, 243, 245, 246, 248, 249, 251, 252, 254, 256, 257, 259, 260, 262, 263, 265, 267, 268, 270, 271, 273, 274, 276, 278, 279, 281, 282, 284, 285, 287, 288, 289\}$, n peut s'exprimer sous la forme $11p + 25q$, et dans ce cas $(M_1M_3)^q(M_1)^{p-q}$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.
3. Lorsque $n \in \{17, 34, 51, 53, 68, 70, 87, 89, 106, 125, 136\}$, n peut s'exprimer sous la forme $17p + 19q$, et dans ce cas $(M_4M_6)^q(M_4)^{p-q}$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.
4. Lorsque $n \in \{98, 109\}$, n peut s'exprimer sous la forme $11p + 87q$, et dans ce cas $(M_1M_9)^q(M_1)^{p-q}$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.
5. Lorsque $n \in \{81, 92, 103, 114, 147, 158, 169\}$, n peut s'exprimer sous la forme $11p + 81q$, et dans ce cas $(M_1M_{10})^q(M_1)^{p-q}$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.
6. Lorsque $n \in \{122, 133\}$, n peut s'exprimer sous la forme $11p + 111q$, et dans ce cas $(M_1M_{13})^q(M_1)^{p-q}$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.

7. Lorsque $n \in \{84, 95, 117, 139\}$, n peut s'exprimer sous la forme $11p+73q$, et dans ce cas $(M_1M_8)^q(M_1)^{p-q}$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.
8. Lorsque $n \in \{64, 128\}$, n peut s'exprimer sous la forme $64p$, et dans ce cas $(M_{11})^p$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.
9. Lorsque $n \in \{18, 54\}$, n peut s'exprimer sous la forme $18p$, $(M_5)^p$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 6\})$.
10. M_{12} représente une 6-coloration à distance 2 de $G(76, \{1, 6\})$.
11. M_{14} représente une 6-coloration à distance 2 de $G(100, \{1, 6\})$.
12. M_{15} représente une 6-coloration à distance 2 de $G(111, \{1, 6\})$.

Cela conclut la preuve. □

Théorème 3.32. *Pour tout entier $n \geq 15$,*

$$\chi_2(G(n, \{1, 7\})) \begin{cases} = 5 & \text{si } n \text{ est multiple de } 5; \\ = 6 & \text{si } n \notin \{16, 17, 18, 19, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, \\ & 33, 37, 38, 39, 43, 49, 54, 59, 64, 69\}; \\ \geq 7 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve.

- Si $n \equiv 0 \pmod{5}$, le résultat est obtenu directement à partir du Corollaire 3.25.
- Supposons maintenant que $n \not\equiv 0 \pmod{5}$. D'après le Corollaire 3.25, 6 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 7\})$.
- Lorsque $n \in \{16, 17, 18, 19, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 37, 38, 39, 43, 49, 54, 59, 64, 69\}$, à l'aide de l'ordinateur, en exécutant l'algorithme utilisé dans la preuve du Théorème 3.27, nous avons vérifié qu'il est impossible d'obtenir une 6-coloration. Ainsi 7 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 7\})$.
- Lorsque $n \notin \{16, 17, 18, 19, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 37, 38, 39, 43, 49, 54, 59, 64, 69\}$, pour montrer que 6 est aussi une borne supérieure, il suffit de considérer les colorations suivantes, qui sont fonction du reste de

la division euclidienne de n par le nombre 5 :

– Si $n \equiv 1 \pmod{5}$:

À partir de $n = 36$, une 6-coloration à distance 2 est donnée par le motif suivant :

$$(01234)^*0123451234502345013450124501235.$$

– Si $n \equiv 2 \pmod{5}$:

À partir de $n = 42$, une 6-coloration à distance 2 est donnée par le motif suivant :

$$(01234)^*0123451234510345103251032540325401254.$$

Lorsque $n = 22$, nous considérons la coloration suivante :

$$0120312435140312435245.$$

– Si $n \equiv 3 \pmod{5}$:

À partir de $n = 48$, une 6-coloration à distance 2 est donnée par le motif suivant :

$$(01234)^*0123405234052310523105431054312543125401254.$$

– Si $n \equiv 4 \pmod{5}$:

À partir de $n = 84$, une 6-coloration à distance 2 est donnée par le motif suivant :

$$(01234)^*012340123401254012530125301453014530145302453024530245302453124531245312450124501235.$$

Lorsque $n = 24$, nous considérons la coloration suivante :

$$012012345345012012345345.$$

Lorsque $n = 34$, nous considérons la coloration suivante :

$$01203124351403124352450120312435140312435245.$$

Lorsque $n = 44$, nous considérons la coloration suivante :

$$0120132453450132012450145012453245.$$

Cela conclut la preuve. □

Théorème 3.33. *Pour tout entier $n \geq 17$,*

$$\chi_2(G(n, \{1, 8\})) \begin{cases} = 5 & \text{si } n \text{ est multiple de } 5; \\ = 6 & \text{si } n \notin \{19, 21, 26, 27, 31, 32, 37, 38, 43, 49\}; \\ \geq 7 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve.

- Si $n \equiv 0 \pmod{5}$, alors le résultat est obtenu directement à partir du Corollaire 3.25.
- Supposons maintenant que $n \not\equiv 0 \pmod{5}$. D’après le Corollaire 3.25, 6 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 8\})$.
- Lorsque $n \in \{19, 21, 26, 27, 31, 32, 37, 38, 43, 49\}$, à l’aide de l’ordinateur, en exécutant l’algorithme utilisé dans la preuve du Théorème 3.27, nous avons vérifié qu’il est impossible d’obtenir une 6-coloration. Ainsi 7 est une borne inférieure du nombre chromatique à distance 2 de $G(n, \{1, 8\})$.
- Lorsque $n \notin \{19, 21, 26, 27, 31, 32, 37, 38, 43, 49\}$, pour montrer que 6 est aussi une borne supérieure, il suffit de considérer les motifs suivants :

Soient $M_1 = 012345$ et $M_2 = 01234012345$. On vérifie aisément que ces deux motifs sont périodiques compatibles, de longueur 6 et 11. D’après le Théorème 3.26, à partir de $n \geq 50$, il existe toujours deux entiers $p, q \geq 0$ tels que $n = 6p + 11q$. Donc, à partir de $n = 50$, une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 8\})$ peut être obtenue en répétant p fois le motif M_1 et q fois le motif M_2 .

Lorsque $n \in \{17, 18, 22, 23, 24, 28, 29, 33, 34, 36, 39, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48\}$, n peut s’exprimer aussi sous la forme $6p + 11q$, et dans ce cas $(M_1)^p(M_2)^q$ représente une 6-coloration à distance 2 de $G(n, \{1, 8\})$.

Cela conclut la preuve. □

3.2.3 Coloration d'incidences

Gregor, Lužar et Soták [39] ont montré que le nombre chromatique d'incidence des graphes de degré maximum 4 est inférieur à 7. Puisque les graphes circulants sont des graphes réguliers, d'après la Proposition 2.17, $\chi_2(G(D)) = \Delta(G(D)) + 1$ si et seulement si $\chi_i(G(D)) = \Delta(G(D)) + 1$. De plus, si $\chi_2(G(D)) = \Delta(G(D)) + 2$, alors $\chi_i(G(D)) = \Delta(G(D)) + 2$, ce qui implique que les valeurs exactes du nombre chromatique à distance 2 présentées dans les Théorèmes 3.27, 3.28, 3.29, 3.30, 3.31, 3.32 et 3.33 sont aussi des valeurs exactes du nombre chromatique d'incidence. De plus, il est possible de montrer que dans tous ces cas, le nombre chromatique d'incidence des graphes $G(n, 1, a)$, $2 \leq a \leq 8$, vaut au plus 6.

Rappelons tout d'abord que $G(n, \{1, a\}) = G(n, \{1\}) + G(n, \{a\})$. Si $\frac{n}{\text{pgcd}(n, a)}$ est multiple de 3, alors $G(n, \{1\})$ est un cycle de longueur multiple de 3 et $G(n, \{a\})$ est un ensemble de cycles disjoints de longueur multiple de 3. Grâce à la Proposition 2.5 et l'Observation 2.4, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 3.34. *Si $\frac{n}{\text{pgcd}(n, a)}$ est un multiple de 3, alors :*

$$\chi_i(G(n, \{1, a\})) \leq 6.$$

Dans les preuves des théorèmes suivants, nous allons utiliser des motifs contenant $4n$ couleurs pour tout graphe circulant $G(n, \{1, a\})$, $3 \leq a \leq 8$, où tout sommet i , $0 \leq i \leq n - 1$ est représenté par quatre couleurs, la première couleur est consacrée à l'incidence $((i - 1), (i - 1)i)$, la deuxième à l'incidence $((i + 1), (i + 1)i)$, la troisième à l'incidence $((i - a), (i - a)i)$ et la quatrième à l'incidence $((i + a), (i + a)i)$. La longueur de chaque motif est égale alors à n .

Par exemple, la coloration des incidences des sommets 1, 2 et 3 (voir Figure 3.3) est représentée par le motif 243152321543.

Théorème 3.35. *Pour tout entier $n \geq 7$,*

$$\chi_i(G(n, \{1, 3\})) = \begin{cases} 5 & \text{si } n \text{ est multiple de } 5; \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

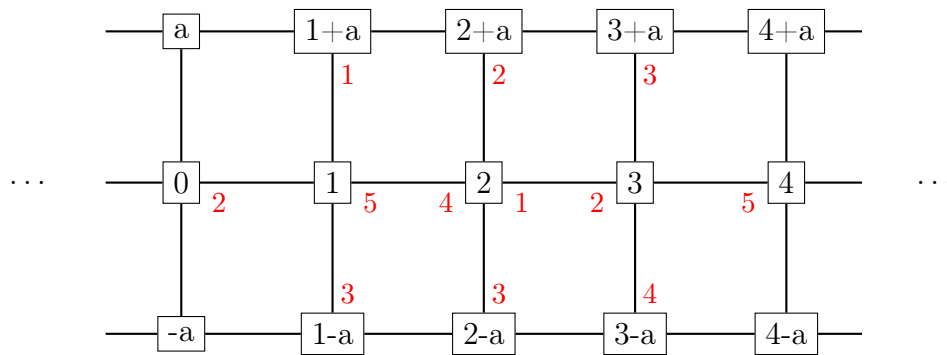


FIGURE 3.3 – Coloration des incidences des sommets 1, 2 et 3

Preuve.

- Si $n \notin \{7, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 19, 21, 26, 31\}$, alors le résultat est obtenu directement à partir du Théorème 3.28.
- Supposons maintenant que $n \in \{7, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 19, 21, 26, 31\}$. Nous proposons une 6-coloration d'incidence de $G(n, \{1, 3\})$ pour chaque valeur de n .

$n = 7$ 0000111122203333424255554414.

$n = 8$ 44551155005034331333244211220002.

$n = 9$ 000011112220353542443444121233035555.

$n = 11$ 00001111222033335555224410104141223254543535.

$n = 13$ 00001111222033335555022421110444533301151222233534445.

$n = 14$ 000011112220333355550414124425222333300001111424253534455.

$n = 16$ 0000111122203333555504141244252223333000044145550111135352
3234445.

$n = 19$ 0000111122203333555504141244252223330500011114242334350554
4541111222233335555.

$n = 21$ 0000111122203333555504141244252223330500011114242334350554
45411110020333322244435555.

$n = 26$ 0000111122203333555504141244252223330500011114242334350504
45411102222333055551444311122203303525244435515.

$n = 31$ 000011112220333355504141244252223330500011114242334350504
 454111022223330555514413111222030005555414422443030113122
 5233435555.

Cela conclut la preuve. \square

Théorème 3.36. *Pour tout entier $n \geq 9$,*

$$\chi_i(G(n, \{1, 4\})) = 6.$$

Preuve.

- Si n est multiple de 6, alors le résultat est obtenu directement à partir du Théorème 3.29.
- Supposons maintenant que n n'est pas multiple de 6. Nous proposons une 6-coloration d'incidence de $G(n, \{1, 4\})$.

Soient $M_1 = 656622621333424455451131$ et $M_2 = 6262566632334343544415152111$. On vérifie aisément que ces deux motifs sont périodiques compatibles, de longueurs respectivement 6, et 7. D'après le Théorème 3.26, à partir de $n \geq 30$, il existe toujours deux entiers $p, q \geq 0$ tels que $n = 6p + 7$. Donc, à partir de $n = 30$, une 6-coloration d'incidence de $G(n, \{1, 4\})$ peut être obtenue en répétant p fois le motif M_1 et q fois motif M_2 .

Supposons maintenant que $n \leq 30$. Une 6-coloration d'incidence de $G(n, \{1, 4\})$ est obtenue comme suit :

- Lorsque $n \in \{12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28\}$, n peut s'exprimer sous la forme $6p + 7q$, et dans ce cas $(M_1)^p(M_2)^q$ représente une 6-coloration d'incidence de $G(n, \{1, 4\})$.
- Lorsque $n \in \{3, 9, 15\}$, le résultat est obtenu directement à partir de la Proposition 3.34.
- Lorsque $n \in \{10, 11, 16, 17, 22, 23, 29\}$, nous pouvons donner une 6-coloration d'incidence de $G(n, \{1, 4\})$ pour chaque valeur de n .

$n = 10$ 6565226616113131434324425553222344645115.

$n = 11$ 65552266116636364244114434442223133352551155.

$n = 16$ 655522261166333622421144335344551166555626221222343313335
5441144.

$n = 17$ 656522661166333622421141335544541666545426221122323255331
33345541144.

$n = 22$ 655522261166333622441144335522551166335522421144335344661
1665666252212223433133355441144.

$n = 23$ 656522661166333622441144335522551166335522421144335344661
16656652122552232321133434355441144.

$n = 29$ 656522661166333622441144335522551166335522441144335522661
166336622421141335544541666545426221122323255331333455411
44.

Cela conclut la preuve. □

Théorème 3.37. *Pour tout entier $n \geq 11$,*

$$\chi_i(G(n, \{1, 5\})) = 6.$$

Preuve.

- Si $n \notin \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 37, 38, 39, 40, 43, 49, 50, 51, 61, 62, 73\}$, alors le résultat est obtenu directement à partir du Théorème 3.30.
- Supposons maintenant que $n \in \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 37, 38, 39, 40, 43, 49, 50, 51, 61, 62, 73\}$. Nous distinguons deux cas :
 - Lorsque $n \in \{15, 18, 21, 27, 30, 39, 51\}$, le résultat est obtenu directement à partir de la Proposition 3.34.
 - Lorsque $n \in \{13, 14, 16, 17, 19, 20, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 37, 38, 40, 43, 49, 50, 61, 62, 73\}$, nous proposons une 6-coloration d'incidence de $G(n, \{1, 5\})$ pour chaque valeur de n .

$n = 13$ 6556226611663666255511413344225244431333222453551114.

$n = 14$ 65562226116633662552434422421151445436631113555433342121.

- $n = 16$ 556522661166336622661141344422521155335522625553113342443
3441144.
- $n = 17$ 556622621166336622261141334454541155225533556566222311334
24433441114.
- $n = 19$ 556522661166336322661141334322521155445426625155444562623
5331133422433341114.
- $n = 20$ 55552226116633632266114133432252115544552266565611413663
2231133434355422441144.
- $n = 25$ 556522661166336622661144334422551155335322661155334322441
1415454226211615565226231335533424433341144.
- $n = 26$ 556522661166336622661144334422551155335522661155334322441
14433554464226211615665322311135553433422241144.
- $n = 28$ 555522261166336622661144334422551155335522661155334322421
1443353226644661166566624421112525234331133555433341144.
- $n = 29$ 556522661166336622661144334422551155335522661155334422421
141335522661166336656654244114135534443222313335554222411
14.
- $n = 31$ 556522661166336622661144334422551155335522661155334422441
144335522661166336622661141344422521155335522625553113342
4433441144.
- $n = 32$ 556522661116333622261144334422551155335522661155334422441
144335322661166336622621141544522551155335566652233113343
43224466441144.
- $n = 37$ 555522661166336622261144334422551155335522661155334422441
144335522661166336622661144334422521155335322661555334466
4411412252366611132223555433441144.
- $n = 38$ 656522661166336622261144334422551155335522661155334422441
144335522661166336622661144334422551151335522661155334466
44224411513663222355531333224455441114.

- $n = 40$ 556522661166336622661144334422551155335522661155334422441
 144335522661166336622661144334422551155335322661155334322
 4411415454226211615565226231335533424433341144.
- $n = 43$ 555522261166336622661144334422551155335522661155334422441
 144335522661166336622661144334422551155335522661155334322
 4211443353226644661166566624421112525234331133555433341144
 4.
- $n = 49$ 556522661166336622661144334422551155335522661155334422441
 144335522661166336622661144334422551155335522661155334422
 441144335522661166336322661141334322521155445426625155444
 5626235331133422433341114.
- $n = 50$ 555522261166336622661144334422551155335522661155334422441
 144335522661166336622661144334422551155335522661155334422
 441144335522661166336322661141334322521155445522665656114
 13663223311334343555422441144.
- $n = 61$ 556522661166336622661144334422551155335522661155334422441
 144335522661166336622661144334422551155335522661155334422
 441144335522661166336622661144334422551155335522661155334
 422441144335522661166336622661141344422521155335522625553
 1133424433441144.
- $n = 62$ 556522661116333622261144334422551155335522661155334422441
 144335522661166336622661144334422551155335522661155334422
 441144335522661166336622661144334422551155335522661155334
 422441144335322661166336622621141544522551155335566652233
 11334343224466441144.

$n = 73$ 555522261166336622661144334422551155335522661155334422441
 144335522661166336622661144334422551155335522661155334422
 441144335522661166336622661144334422551155335522661155334
 422441144335522661166336622661144334422551155335522661155
 334322421144335322664466116656662442111252523433113355543
 3341144.

Cela conclut la preuve. \square

Théorème 3.38. *Pour tout entier $n \geq 13$,*

$$\chi_i(G(n, \{1, 6\})) = 6.$$

Preuve.

- Si $n \notin \{13, 14, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 45, 46, 48, 49, 50, 53, 54, 56, 57, 59, 61, 62, 65, 67, 73, 78, 79, 86, 97\}$, alors le résultat est obtenu directement à partir du Théorème 3.31.
- Supposons maintenant que $n \in \{13, 14, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 45, 46, 48, 49, 50, 53, 54, 56, 57, 59, 61, 62, 65, 67, 73, 78, 79, 86, 97\}$. Nous distinguons deux cas :
 - Lorsque $n \in \{27, 45\}$, le résultat est obtenu directement à partir de la Proposition 3.34.
 - Lorsque $n \in \{13, 14, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 46, 48, 49, 50, 53, 54, 56, 57, 59, 61, 62, 65, 67, 73, 78, 79, 86, 97\}$, nous proposons une 6-coloration d'incidence de $G(n, \{1, 6\})$ pour chaque valeur de n .

$n = 13$ 5566222211113355212155654144344353536664244433361122.

$n = 14$ 55662226116133662262116133442242555343431444525533551114.

$n = 15$ 655522661116336622624646114133442252444313135454222535551

$n = 15$ 113.

$n = 16$ 656622661166336626621222434311415255445435531133455422243
 3341115.

- $n = 19$ 555522661166336622661161334324445355115522553555666211132
3234144224433441144.
- $n = 21$ 555522261166336322661166334422441151445422553353116155552
232666311134544222433341144.
- $n = 23$ 556522661166336622261166334322441151335522554454166153532
24266461112353322234114555433341144.
- $n = 24$ 555522661166336622221166334322441155335544541155226656553
343112166662232444311132224554433341114.
- $n = 25$ 556522261166336622661166334322421151335522554455116155546
6462242111136332223553311334334554422441144.
- $n = 26$ 556522661166336622661166334322441155335322551151466422551
14466442242333566551133223355531114334422241144.
- $n = 28$ 555522261116336622661166334422441155335522551151336622521
1443343664422445353116155652222111366335544224433341144.
- $n = 29$ 555522261166336622661166334422441155335522521155336622551
144334366441444225533631161262252523633111342445554334411
14.
- $n = 31$ 556522661116336622661166334422441155335522551155336622551
141334422421144335344642262336611615565222211135353455422
4433341144.
- $n = 32$ 555522661166336622661166334422441155335522551155336622551
141334422421144335344662266556533631661252212123433111322
44555433441144.
- $n = 35$ 556522661166336622661166334422441155335522551155336622551
144334422441141335522661166336622665665424233431151455522
12343311135554222433341144.
- $n = 37$ 555522661166336622661166334422441155335522551155336622551
144334422441144335522661166336622661161334324445355115522
5535556662111323234144224433441144.

- $n = 38$ 55652266116633662261166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334322441151445533
 53225216665552343322231114554433441114.
- $n = 39$ 555522261166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336322661166334422441151445422
 553353116155552232666311134544222433341144.
- $n = 40$ 55552226111633662261166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661161334422421155335522
 5245553366115166462442311363634224554433341114.
- $n = 42$ 55552266116633662261166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622621166334322441155335544
 541155226656553343112166662232444311132224554433341114.
- $n = 43$ 556522261166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334322421151335522
 554455116155546646224211113633222355331133433455442244114
 4.
- $n = 46$ 555522261116336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551151336622521144334366442244535311615565222211136633554
 4224433341144.
- $n = 48$ 556522661116336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422446446115522623366166155152232113
 343435554222433341144.
- $n = 49$ 556522661116336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551141334422421144335344642262336611615565222
 2111353534554224433341144.

- $n = 50$ 555522661166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551141334422421144335344662266556533631661252
 21212343311132244555433441144.
- $n = 53$ 556522661166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441141335522661166336622665665424
 23343115145552212343311135554222433341144.
- $n = 56$ 55652266116633662261166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 32244115144553353225216665552343322231114554433441114.
- $n = 57$ 555522261166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336322661166334
 422441151445422553353116155552232666311134544222433341144.
- $n = 59$ 55652266116633662261166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 322441151335522554454166153532242664611123533222341145554.
 33341144.
- $n = 61$ 556522261166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 322421151335522554455116155546646224211113633222355331133
 4334554422441144.

- $n = 62$ 556522661166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 322441155335322551151466422551144664422423335665511332233
 55531114334422241144.
- $n = 65$ 555522261166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 422441155335522521155336622551144334366441444225533631161
 26225252363311134244555433441114.
- $n = 67$ 556522661116336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 422441155335522551155336622551141334422421144335344642262
 3366116155652222111353534554224433341144.
- $n = 73$ 555522661166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 422441155335522551155336622551144334422441144335522661166
 336622661161334324445355115522553555666211132323414422443
 3441144.
- $n = 75$ 555522261166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 422441155335522551155336622551144334422441144335522661166
 336322661166334422441151445422553353116155552232666311134.
 544222433341144.

$n = 78$ 555522661166336622261166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 422441155335522551155336622551144334422441144335522661166
 336622621166334322441155335544541155226656553343112166662
 232444311132224554433341114.

$n = 79$ 556522261166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 422441155335522551155336622551144334422441144335522661166
 336622661166334322421151335522554455116155546646224211113
 6332223553311334334554422441144.

$n = 86$ 555522661166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 422441155335522551155336622551144334422441144335522661166
 336622661166334422441155335522551155336622551141334422421
 144335344662266556533631661252212123433111322445554334411
 44.

$n = 97$ 556522261166336622661166334422441155335522551155336622551
 144334422441144335522661166336622661166334422441155335522
 551155336622551144334422441144335522661166336622661166334
 422441155335522551155336622551144334422441144335522661166
 336622661166334422441155335522551155336622551144334422441
 144335522661166336622661166334322421151335522554455116155
 5466462242111136332223553311334334554422441144.

Cela conclut la preuve. \square

Théorème 3.39. *Pour tout entier $n \geq 13$,*

$$\chi_i(G(n, \{1, 7\})) = \begin{cases} 5 & \text{si } n \text{ est multiple de } 5; \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve.

- Si $n \notin \{16, 17, 18, 19, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 37, 38, 39, 43, 49, 54, 59, 64, 69, 74, 79\}$, alors le résultat est obtenu directement à partir du Théorème 3.32.
- Supposons maintenant que $n \in \{16, 17, 18, 19, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 37, 38, 39, 43, 49, 54, 59, 64, 69, 74, 79\}$. Nous distinguons deux cas :
 - Lorsque $n \in \{18, 21, 27, 33, 39, 54, 69\}$, le résultat est obtenu directement à partir de la Proposition 3.34.
 - Lorsque $n \in \{16, 17, 18, 19, 23, 26, 28, 29, 31, 32, 37, 38, 43, 49, 59, 64, 74, 79\}$, nous proposons une 6-coloration d'incidence de $G(n, \{1, 7\})$ pour chaque valeur de n .

$n = 16$ 656522261161333622621166363343432242555343431144545522251
 4145115.

$n = 17$ 000122221000333310002222101033335550424214445353115542425
 54414143535.

$n = 19$ 656522261166336622661161363622423343115144552252355343431
 1145554222434341115.

$n = 23$ 656522661166336622661166333622441141545422523355445511512
 66232325533131341142224333455541144.

$n = 26$ 656522661166336622661166333322421441335511554455225511556
 66533552122662232321133434322441144334455441144.

$n = 28$ 655522261166333622661166333322441144335322551155445422551
 6615151224264463633113322623633433355541114222455541144.

$n = 29$ 656522661166336622661166333622421144335522554455115533534
 664115522426611333121216622525234331333554422443344554411.
 14.

$n = 31$ 556522661166333622661166336622441144335522521155335322551
 161525233436644114122426446333566651112555323334554111422
 2433441144.

- $n = 32$ 656522261166336622661166333622441144335522551155335522521
166335366441141224466463343155121216622323255331113455422
44334455541144.
- $n = 37$ 555522661166336622661166333622441144335522551155335522551
166335522441144334422441144335322621166556533632262116155
4564463133222341145554333422241114.
- $n = 38$ 556522661166336622661166336622441144335522551155335522551
166335522441144334322426444115522663366116126625515363311
31244252523553434311442224554433341114.
- $n = 43$ 655522261166336622661166333622441144335522551155335522551
166335522441144334422441144335522661166336622661166336322
441144545522553355115125526262363313334114224433445544111
4.
- $n = 49$ 655522261166333622661166333622441144335522551155335522551
166335522441144334422441144335522661166336622661166336322
441144335322551155445422551661515122426446363311332262363
3433355541114222455541144.
- $n = 59$ 556522661166336622661166336622441144335522551155335522551
166335522441144334422441144335522661166336622661166336622
441144335522551155335522551166335522441144334322426444115
522663366116126625515363311312442525235534343114422245544.
33341114.
- $n = 64$ 655522261166336622661166333622441144335522551155335522551
166335522441144334422441144335522661166336622661166336622
441144335522551155335522551166335522441144334422441144335
522661166336622661166336322441144545522553355115125526262
3633133341142244334455441114.

$n = 74$ 656522261166336622661166333622441144335522551155335522551
 166335522441144334422441144335522661166336622661166336622
 441144335522551155335522551166335522441144334422441144335
 522661166336622661166336622441144335522551155335522521166
 335366441141224466463343155121216622323255331113455422443
 34455541144.

$n = 79$ 555522661166336622661166333622441144335522551155335522551
 166335522441144334422441144335522661166336622661166336622
 441144335522551155335522551166335522441144334422441144335
 522661166336622661166336622441144335522551155335522551166
 335522441144334422441144335322621166556533632262116155456
 4463133222341145554333422241114.

Cela conclut la preuve. \square

Théorème 3.40. *Pour tout entier $n \geq 17$,*

$$\chi_i(G(n, \{1, 8\})) = \begin{cases} 5 & \text{si } n \text{ est multiple de } 5; \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve.

- Si $n \notin \{19, 21, 26, 27, 31, 32, 37, 38, 43, 49\}$, alors le résultat est obtenu directement à partir du Théorème 3.33.
- Supposons maintenant que $n \in \{19, 21, 26, 27, 31, 32, 37, 38, 43, 49\}$. Nous distinguons deux cas :

- Lorsque $n \in \{21, 27\}$, le résultat est obtenu directement à partir de la Proposition 3.34.

- Lorsque $n \in \{19, 26, 31, 32, 37, 38, 43, 49\}$, nous proposons une 6-coloration d'incidence de $G(n, \{1, 8\})$ pour chaque valeur de n .

$n = 19$ 000122221000333310002222100032334433033351514424515534345
 2551114555544142525.

$n = 26$ 55662262116633662266116633662261141334454541155225533551
 15522553355656622231133424433441144224433441114.

- $n = 31$ 556522261166333622621166336622621144334322551155335544551
 155355561662252664633431161262232224443133355441114222455
 4433441114.
- $n = 32$ 555522661166336622621166336322261144334422521155335544541
 155225533665655114134436363212262624446311323234554222411
 14555433341114.
- $n = 37$ 556522661116336622661166336622661144334422551155335322551
 155335522661155334422446646114422426446115533632662111252
 5231335533433422241144555433341144.
- $n = 38$ 656522661166336622661166336622261144334422551155335522521
 155335522661151334422441144334466441144225233635565116126
 62355322231333554411442224333455541114.
- $n = 43$ 656522661166336622661166336622261144334422551155335522551
 155335522661151334322421144334422441144335522664466556511
 612262336356651141255231132233433355541114222433345544114.
 4
- $n = 49$ 556522661166336622661166336622661144334422551155335522551
 155335522661155334422441144334422441144335522661166336622
 661166336622661141344422521155335522551155335522625553113
 3424433441144224433441144.

Cela conclut la preuve. □

3.3 Conclusion et perspectives

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons déterminé des valeurs exactes et des bornes supérieures du nombre chromatique à distance 2 et du nombre chromatique d'incidence de quelques classes de graphes distances. Il serait intéressant de compléter la caractérisation du nombre chromatique à distance 2 des graphes distances lorsque $D = \{1, a, a + 1\}$, $a \geq 3$ et $D = \{1, \dots, m, a\}$, $2 \leq m < a$, et du nombre chromatique d'incidence des graphes distances lorsque $D = \{1, a, a + 1\}$, $a \geq 3$. Grâce aux résultats obtenus dans la première partie de ce chapitre, nous

avons caractérisé les graphes $G(n, D)$ pour lesquels $\chi_2(G(n, D)) = \chi_i(G(n, D)) = \Delta(G(n, D)) + 1$. De même, nous avons fait une études complète des graphes circulants $G(n, \{1, a\})$ pour certaines valeurs de a , cela nous a permis de poser la conjecture suivante :

Conjecture 3.41. *Pour tout entier $a \geq 2$,*

$$\chi_i(G(n, \{1, a\})) \leq 6.$$

Il serait intéressant aussi d'étudier le cas général $D = \{a, b\}$, et de considérer d'autres ensembles, par exemple $D = \{1, a, 2a\}$ et $D = \{a, a + 1, a + 2\}$.

Chapitre 4

Coloration par liste d'incidences

Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions la version liste de la coloration d'incidence. Nous déterminons soit des valeurs exactes soit des bornes supérieures du nombre de choisissabilité d'incidence de plusieurs classes de graphes.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de deux communications à des conférences internationales (*BGW'2016* [13], *CID'2017* [11]), et d'un article soumis pour publication dans une revue internationale [10].

4.1 Introduction

Soient G un graphe et L une affectation de liste de G , c'est à dire une application qui affecte à chaque sommet v de G une liste finie $L(v)$ de couleurs. Le graphe G est *L -liste colorable* s'il existe une coloration propre λ de G telle que $\lambda(v) \in L(v)$ pour tout sommet v de G . Le graphe G est dit *k -liste colorable* ou *k -choisissable* si pour toute affectation de liste L avec $|L(v)| = k$ pour tout sommet v , G est L -liste colorable. Le *nombre de choisissabilité* de G , noté $\text{ch}(G)$, est alors le plus petit entier k tel que G est k -choisissable.

La coloration par liste a été introduite indépendamment par Vizing [81] et Erdős, Rubin et Taylor [35] et a été largement étudiée par de nombreux chercheurs dans plusieurs articles, citons par exemple [17, 69, 78, 83, 94]. Pour plus de détails, voir les états de l'art de Alon [3], Tuza [79], Kratochvíl, Tuza et Voigt [56], ou la

monographie de Chartrand et Zhang [28, Section 9.2]).

La version liste de la coloration d'incidence est définie d'une manière similaire au cas ordinaire de la coloration propre des sommets. On dit qu'un graphe G est k -*incidence choisissable*, si pour toute affectation de liste L avec $|L(v, e)| = k$ pour toute incidence (v, e) , G est L -*liste incidence colorable*. Le *nombre de choisissabilité d'incidence* de G , noté $\text{ch}_i(G)$, est alors le plus petit entier k tel que G est k -incidence choisissable.

4.2 Préliminaires

Dans cette section, nous donnons quelques résultats de base du nombre de choisissabilité d'incidence de plusieurs classes de graphes. Notons tout d'abord que l'inégalité $\text{ch}_i(G) \geq \chi_i(G)$ est naturellement vérifiée pour tout graphe G , et que si G n'est pas connexe, $\chi_i(G)$ (resp. $\text{ch}_i(G)$) est égal à la valeur maximum des nombres chromatiques d'incidence (resp. nombres de choisissabilité incidence) de ses composantes connexes. Donc, nous ne considérons, par la suite, que des graphes connexes. En associant le graphe d'incidence I_G , nous obtenons $\text{ch}_i(G) = \text{ch}(I_G)$. Notons aussi que pour chaque sous-graphe H de G , I_H est un sous-graphe de I_G . Par conséquent, nous avons :

Observation 4.1. *Pour chaque sous-graphe H du graphe G , $\chi_i(H) \leq \chi_i(G)$ et $\text{ch}_i(H) \leq \text{ch}_i(G)$.*

L'observation suivante nous sera utile dans la suite.

Observation 4.2. *Pour chaque incidence (v, vu) , l'ensemble des incidences adjacentes à (v, vu) est $A^-(v) \cup A^+(v) \cup A^-(u)$, dont la cardinalité est $2\deg_G(v) + \deg_G(u) - 2$.*

Notons aussi que toute paire d'incidences dans $A^-(v)$ doit recevoir deux couleurs différentes pour chaque coloration d'incidence de G et que la couleur de chaque incidence dans $A^+(v)$ doit être différente des couleurs affectées aux incidences de $A^-(v)$. De plus, puisque chaque incidence a au plus $3\Delta(G) - 2$ incidences adjacentes, par l'Observation 4.2, nous obtenons :

Proposition 4.3. *Pour tout graphe G , $\Delta(G) + 1 \leq \chi_i(G) \leq \text{ch}_i(G) \leq 3\Delta(G) - 1$.*

Erdős, Rubin et Taylor [35] ont montré que si un graphe G n'est ni complet ni un cycle de longueur impaire, alors ce graphe G satisfait un théorème de type Brooks qui assure que $\text{ch}(G) \leq \Delta(G)$. Remarquons que lorsque $\Delta(G) \geq 2$, le graphe d'incidence I_G contient un triangle (induit par trois incidences de la forme (v, vu_1) , (v, vu_2) et (u_1, u_1v) , $u_1 \neq u_2$) et n'est pas complet (deux incidences de la forme (u_1, u_1v) et (u_2, u_2v) , $u_1 \neq u_2$, ne sont jamais adjacentes). Ainsi, nous avons $\Delta(I_G) = 3\Delta(G) - 2$. D'autre part, si $\Delta(G) = 1$, alors G est une union de graphes complets K_2 , et donc, $\chi_i(G) = 2$. Par conséquent, la Proposition 4.3 peut légèrement être améliorée comme suit :

Proposition 4.4. *Pour tout graphe G avec $\Delta(G) \geq 2$, $\Delta(G) + 1 \leq \chi_i(G) \leq \text{ch}_i(G) \leq 3\Delta(G) - 2$.*

Considérons maintenant le cycle C_n d'ordre $n \geq 3$. Puisque C_n possède $2n$ incidences, son graphe d'incidence est le carré C_{2n}^2 du cycle C_{2n} . Par conséquent, nous avons :

Observation 4.5. *Pour tout $n \geq 3$, $\chi_i(C_n) = \chi(C_{2n}^2)$.*

Prowse et Woodall [69] ont montré que $\text{ch}(C_n^p) = \chi(C_n^p)$ pour tout $p \geq 1$ et $n \geq 3$. En particulier, on a $\text{ch}(C_n^2) = \chi(C_n^2)$ pour tout cycle d'ordre $n \geq 3$. À partir de ce résultat et grâce à l'Observation 4.5 et la Proposition 2.5, nous obtenons :

Théorème 4.6. *Pour tout $n \geq 3$, $3 \leq \text{ch}_i(C_n) = \chi_i(C_n) \leq 4$, avec $\text{ch}_i(C_n) = \chi_i(C_n) = 3$ si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{3}$.*

Rappelons qu'un graphe G est d -dégénéré si et seulement si tout sous-graphe de G contient un sommet de degré au plus d . Par un simple argument inductif, il est facile de prouver que le nombre chromatique aussi bien que le nombre de choisissabilité de tout graphe d -dégénéré est au plus $d + 1$ [3, Proposition 2.2]. Soit v un sommet de G de degré au plus d . Toute incidence de la forme (v, vu) a au plus $\Delta(G) + 2d - 2$ incidences adjacentes dans G . Donc, le graphe d'incidence I_G est $(\Delta(G) + 2d - 2)$ -dégénéré, et nous avons :

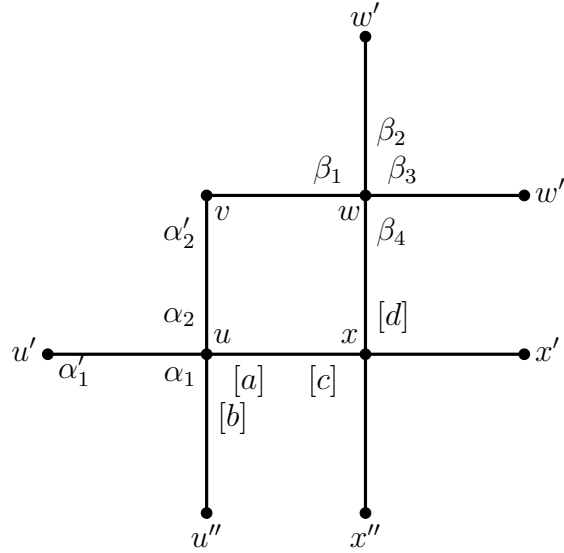


FIGURE 4.1 – La L_0 -liste coloration d'incidence partielle du graphe H_0 du Lemme 4.9.

Théorème 4.7. *Pour tout graphe d -dégénéré G , $\chi_i(G) \leq \text{ch}_i(G) \leq \Delta(G) + 2d - 1$.*

Puisque tout arbre est 1-dégénéré, tout graphe sans mineur K_4 (et ainsi tout graphe planaire extérieur) est 2-dégénéré, et tout graphe planaire est 5-dégénéré, le Théorème 4.7 permet d'obtenir le résultat suivant :

Corollaire 4.8. *Pour tout graphe G ,*

1. *si G est un arbre, alors $\text{ch}_i(G) = \Delta(G) + 1$,*
2. *si G est un graphe sans mineur K_4 (resp. graphe planaire extérieur), alors $\text{ch}_i(G) \leq \Delta(G) + 3$,*
3. *si G est un graphe planaire, alors $\text{ch}_i(G) \leq \Delta(G) + 9$.*

4.3 Les grilles carrées

Soit $G_{m,n}$ une grille carrée. Puisque toute grille carrée est 2-dégénérée, d'après le Théorème 4.7 $\text{ch}_i(G_{m,n}) \leq \Delta(G_{m,n}) + 3 \leq 7$ pour tous m et n , $m \geq n \geq 2$. Dans cette section, nous montrons qu'il est possible de diminuer cette borne à 5 si $n = 2$ et à 6 si $n \geq 3$. Montrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.9. Soient H_0 le graphe représenté dans la Figure 4.1, L_0 une affectation de liste de H_0 telle que $|L_0(i, ij)| \geq 6$ pour toute incidence (i, ij) de H_0 , et σ_0 la L_0 -liste coloration d'incidence partielle de H_0 utilisant des couleurs dans l'ensemble $\{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ représentées dans la Figure 4.1. Alors, il existe $a \in L_0(u, ux) \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2\}$, $b \in L_0(u, uu'') \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2\}$, $c \in L_0(x, xu) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4\}$, et $d \in L_0(x, xw) \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, tels que $|\{a, b, c\}| = |\{a, c, d\}| = 3$, et σ_0 peut être étendue aux quatre incidences (u, ux) , (u, uu'') , (x, xu) et (x, xw) .

Preuve. Notons tout d'abord que $|L_0(u, ux) \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2\}| \geq 2$ et $|L_0(u, uu'') \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2\}| \geq 2$, donc nous pouvons toujours choisir a et b sous les conditions exigées.

Si $|L_0(x, xu) \cap \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4\}| \leq 2$, alors nous pouvons choisir $d \in L_0(x, xw) \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, a\}$ et $c \in L_0(x, xu) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4, a, b, d\}$.

De même, si $|L_0(x, xw) \cap \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}| \leq 3$, alors nous pouvons choisir $c \in L_0(x, xu) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4, a, b\}$ et $d \in L_0(x, xw) \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, a, c\}$.

Supposons maintenant que $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4\} \subseteq L_0(x, xu)$ et $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} \subseteq L_0(x, xw)$. Nous considérons trois cas.

1. Si $\beta_4 \in L_0(u, ux) \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2\}$, alors nous posons $a = \beta_4$. Nous pouvons ensuite choisir $b \in L_0(u, uu'') \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2, \beta_4\}$, $c \in L_0(x, xu) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4, b\}$, et $d \in L_0(x, xw) \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, c\}$.
2. Si $\beta_4 \notin L_0(u, ux) \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2\}$ et $\beta_4 \in L_0(u, uu'') \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2\}$, alors nous posons $b = \beta_4$. Nous pouvons ensuite choisir $a \in L_0(u, ux) \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2, \beta_4\}$, $d \in L_0(x, xw) \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, a\}$ et $c \in L_0(x, xu) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4, a, d\}$.
3. Supposons qu'aucun des cas précédents ne se produit.

Soient $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \subseteq L_0(u, ux) \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2\}$ et $\{\varepsilon_3, \varepsilon_4\} \subseteq L_0(u, uu'') \setminus \{\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2\}$. Nous considérons deux sous-cas.

- (a) Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \cap \{\varepsilon_3, \varepsilon_4\} = \emptyset$, nous choisissons tout d'abord $d \in L_0(x, xw) \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ et $c \in L_0(x, xu) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4\}$ de telle sorte que $c \neq d$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \neq \{c, d\}$ (Cela est faisable puisque nous avons au moins deux choix pour d , et encore deux choix pour c). Nous choisissons ensuite $a \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \setminus \{c, d\}$ et $b \in \{\varepsilon_3, \varepsilon_4\} \setminus \{c\}$.

(b) Dans le cas contraire, soit $\mu \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \cap \{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$. Nous considérons deux sous-cas.

- i. Si $\mu \notin L_0(x, xu)$ ou $\mu \notin L_0(x, xw)$, alors nous posons $a = \mu$ et $b \in \{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ avec $b \neq \mu$. Maintenant, si $\mu \notin L_0(x, xu)$, nous choisissons ensuite $d \in L_0(x, xw) \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \mu\}$ et $c \in L_0(x, xu) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4, b, d\}$. Dans le cas contraire (dans ce cas, nous avons $\mu \notin L_0(x, xw)$), nous choisissons ensuite $c \in L_0(x, xu) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4, a, b\}$, et $d \in L_0(x, xw) \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, c\}$.
- ii. Finalement, supposons que $\mu \in L_0(x, xu) \cap L_0(x, xw)$. Si $\mu \notin \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, alors nous posons $b = d = \mu$ et $a \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ avec $a \neq \mu$. Nous choisissons ensuite $c \in L_0(x, xu) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4, a, \mu\}$. Dans le cas contraire (c-à-d $\mu \in \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$), nous posons $a = \mu$ et $b \in \{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ avec $b \neq \mu$. Nous choisissons alors $c \in L_0(x, xu) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4, \mu, b\}$ et $d \in L_0(x, xw) \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, c\}$.

Dans tous les cas, les couleurs a, b, c et d satisfont clairement les exigences du lemme. □

Maintenant, nous pouvons prouver le résultat principal de cette section.

Théorème 4.10. *Pour tous entiers m et n , $m \geq n \geq 2$, nous avons*

$$\begin{cases} \text{ch}_i(G_{m,n}) \leq 5, & \text{if } n = 2, \\ \text{ch}_i(G_{m,n}) \leq 6, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Soit $V(G_{m,n}) = \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, donc $E(G_{m,n}) = \{(v_{i,j}, v_{i',j'}) \mid |i - i'| + |j - j'| = 1\}$.

Supposons tout d'abord que $n = 2$ et soit L une affectation de liste de $G_{m,2}$ telle que $|L(v, vu)| = 5$ pour toute incidence (v, vu) de $G_{m,2}$. Nous construisons une L -liste coloration d'incidence de $G_{m,2}$ comme suit.

Notons S_i , $1 \leq i \leq m - 1$, le i -ième carré de $G_{m,2}$ qui est le sous-graphe de $G_{m,2}$ induit par l'ensemble des sommets $\{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i+1,1}, v_{i+1,2}\}$. Nous colorons tout

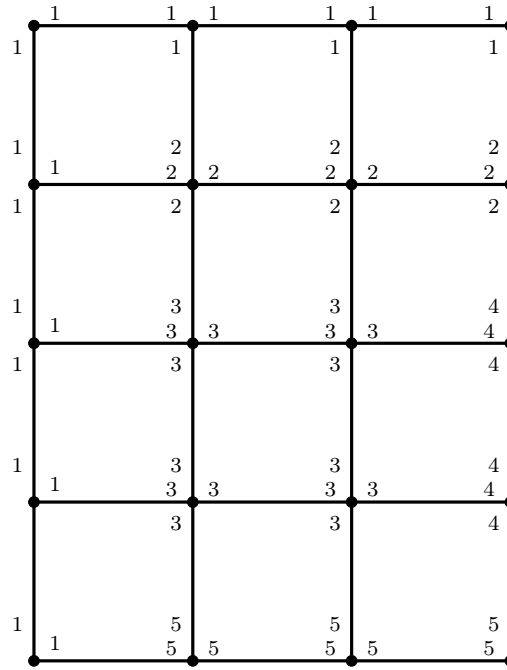


FIGURE 4.2 – Coloration des incidences de $G_{5,4}$ en cinq étapes (Theorem 4.10).

d'abord les incidences de S_1 . Cela est faisable puisque chacune des incidences a quatre incidences adjacentes.

Ensuite, si $m \geq 3$, nous colorons les incidences des carrés restant séquentiellement, de S_2 à S_{m-1} . Pour chacun des carrés S_i , nous colorons les incidences $(v_{i,1}, v_{i,1}v_{i+1,1})$, $(v_{i+1,1}, v_{i+1,1}v_{i,1})$, $(v_{i,2}, v_{i,2}v_{i+1,2})$, $(v_{i+1,2}, v_{i+1,2}v_{i,2})$, $(v_{i+1,1}, v_{i+1,1}v_{i+1,2})$ et $(v_{i+1,2}, v_{i+1,2}v_{i+1,1})$, dans cet ordre. Cela est faisable puisque chacune des incidences a quatre incidences adjacentes déjà colorées.

Supposons maintenant que $m \geq n \geq 3$ et soit L une affectation de liste de $G_{m,n}$ telle que $|L(v, vu)| = 6$ pour toute incidence (v, vu) de $G_{m,n}$. Nous allons construire une L -liste coloration d'incidence de $G_{m,n}$ en cinq étapes. La Figure 4.2 représente la grille $G_{5,4}$ et donne, à chacune de ses incidences, le nombre (de 1 à 5) de l'étape au cours de laquelle elle sera colorée.

1. Nous colorons tout d'abord les incidences internes des sommets $v_{1,j}$, séquentiellement, de $v_{1,1}$ à $v_{1,n}$, et toutes les incidences des sommets $v_{i,1}$, séquentiellement, de $v_{2,1}$ à $v_{m,1}$. Cela est faisable puisque chaque incidence a au plus trois incidences adjacentes déjà colorées.

2. Nous colorons ensuite toutes les incidences internes des sommets $v_{2,j}$, séquentiellement de $v_{2,2}$ à $v_{2,n}$. Pour chacun des sommets $v_{2,j}$, nous colorons ses incidences internes $(v_{2,j}, v_{2,j}v_{2,j-1})$, $(v_{2,j}, v_{2,j}v_{1,j})$, $(v_{2,j}, v_{2,j}v_{3,j})$ et $(v_{2,j}, v_{2,j}v_{2,j+1})$, dans cet ordre (notons que $v_{2,n}$ a seulement les trois premières incidences internes). Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus cinq incidences adjacentes déjà colorées.
3. Maintenant, si $m \geq 4$, alors, pour $i = 2$ à $m - 1$, nous colorons les incidences internes non colorées de $v_{i,j}$, séquentiellement de $v_{i,2}$ à $v_{i,n-1}$ (lorsque $n \geq 4$). La coloration des incidences internes de chaque sommet $v_{i,2}$ à $v_{i,n-1}$, est donnée comme suit.
 - (a) Nous colorons les incidences internes $(v_{i,2}, v_{i,2}v_{i-1,2})$ et $(v_{i,2}, v_{i,2}v_{i,1})$ de $v_{i,2}$, dans cet ordre. Cela est faisable puisque ces deux incidences ont quatre et cinq incidences adjacentes déjà colorées, respectivement.
 - (b) Si $2 \leq j \leq n - 2$, alors l'ensemble des sommets
$$\{v_{i,j-1}, v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,j+2}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}, v_{i-1,j}, v_{i-1,j+1}, v_{i-1,j+2}, v_{i-2,j+1}\}$$
induit un sous-graphe de $G_{m,n}$ isomorphe au graphe H_0 du Lemme 4.9. Par conséquent, grâce au Lemme 4.9, les quatre incidences $(v_{i,j}, v_{i,j}v_{i,j+1})$, $(v_{i,j}, v_{i,j}v_{i+1,j})$, $(v_{i,j+1}, v_{i,j+1}v_{i,j})$ et $(v_{i,j+1}, v_{i,j+1}v_{i-1,j+1})$ peuvent être colorées avec les couleurs a , b , c et d données par le lemme, respectivement.
 - (c) Finalement, nous colorons les deux incidences $(v_{i,n-1}, v_{i,n-1}v_{i,n})$ et $(v_{i,n-1}, v_{i,n-1}v_{i+1,n-1})$, dans cet ordre. Cela est faisable puisque chacune des incidences a cinq et quatre incidences adjacentes déjà colorées, respectivement.
4. Si $m \geq 4$, nous colorons toutes les incidences internes des sommets $v_{i,n}$, séquentiellement de $v_{3,n}$ à $v_{m-1,n}$. Pour chacun des sommets $v_{i,n}$, nous colorons ses incidences internes $(v_{i,n}, v_{i,n}v_{i,n-1})$, $(v_{i,n}, v_{i,n}v_{i-1,n})$ et $(v_{i,n}, v_{i,n}v_{i+1,n})$, dans cet ordre. Cela est faisable, puisque chacune des incidences a au plus cinq incidences adjacentes déjà colorées.
5. Finalement, nous colorons toutes les incidences internes (non colorées) des sommets $v_{m,j}$, séquentiellement de $v_{m,2}$ à $v_{m,n}$. Pour chacun des sommets

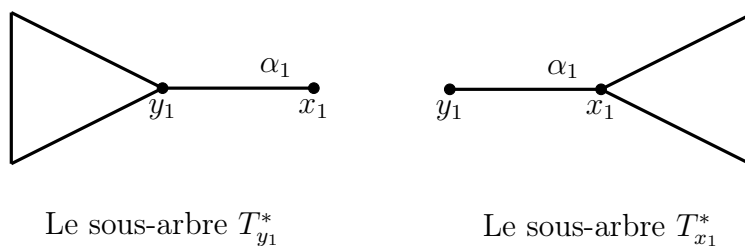


FIGURE 4.3 – Les configurations de la preuve de la Proposition 4.11.

$v_{m,j}$, nous colorons ses incidences internes $(v_{m,j}, v_{m,j}v_{m-1,j})$, $(v_{m,j}, v_{m,j}v_{m,j-1})$ et $(v_{m,j}, v_{m,j}v_{m+1,j})$, dans cet ordre (notons que $v_{m,n}$ a seulement les deux premières incidences internes). Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus cinq incidences adjacentes déjà colorées.

Cela conclut la preuve. □

4.4 Les graphes de Halin

Dans cette section, nous déterminons le nombre de choisissabilité d'incidence de tout graphe de Halin G avec $\Delta(G) \geq 6$ et nous prouvons des bornes pour les graphes de Halin de degré maximum inférieur à 6. Soit G un graphe de Halin. On note C_G le cycle extérieur de G et par T_G le sous-graphe de G obtenu par la suppression des arêtes du cycle extérieur de G . Le sous-graphe T_G est ainsi un arbre, en particulier, T_G est une étoile si G est une roue.

Nous allons prouver quatre lemmes, à partir desquels le résultat principal de cette section découlera. Nous prouvons tout d'abord un résultat préliminaire, qui dit que pour tout arbre T , tout entier $k \geq 1$ et toute affectation de liste L de T avec $|L(v, vu)| \geq \Delta(T) + k$, nous pouvons pré-colorer k incidences de T et étendre cette pré-coloration à une L -liste coloration d'incidence.

Proposition 4.11. *Soit T un arbre, $k \geq 1$ un entier, et L une affectation de liste T telle que $|L(v, vu)| \geq \Delta(T) + k$ pour toute incidence (v, vu) dans T . Pour tout ensemble $\{(x_1, x_1y_1), \dots, (x_k, x_ky_k)\}$ de k incidences dans T et tout ensemble $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ de k couleurs telles que $\alpha_i \in L(x_i, x_iy_i)$ pour tout i , $1 \leq i \leq k$, et*

$\alpha_i \neq \alpha_j$ si $(x_i, x_i y_i)$ et $(x_j, x_j y_j)$ sont adjacentes, $1 \leq i < j \leq k$, il existe une L -liste coloration d'incidence σ de T telle que $\sigma(x_i, x_i y_i) = \alpha_i$ pour tout i , $1 \leq i \leq k$.

Preuve. Nous prouvons ce résultat par induction sur k . Soient L une affectation de liste de T avec $|L(v, vu)| \geq \Delta(T) + 1$ pour toute incidence (v, vu) dans T , $(x_1, x_1 y_1)$ une incidence quelconque dans T , et $\alpha_1 \in L(x_1, x_1 y_1)$. Soient T_{x_1} et T_{y_1} les deux composantes (arbres) obtenues à partir de T par la suppression de l'arête $x_1 y_1$, avec $x_1 \in V(T_{x_1})$ et $y_1 \in V(T_{y_1})$. Notons ensuite $T_{x_1}^*$ et $T_{y_1}^*$ les sous-arbres de T obtenus par l'ajout de l'arête $x_1 y_1$ à T_{x_1} et T_{y_1} , respectivement (voir Figure 4.3), et par L_{x_1} et L_{y_1} les restrictions de L à $T_{x_1}^*$ et $T_{y_1}^*$, respectivement. La L -liste coloration d'incidence désirée σ de T est donnée par la combinaison d'une L_{x_1} -liste coloration d'incidence de $T_{x_1}^*$ avec une L_{y_1} -liste coloration d'incidence de $T_{y_1}^*$.

Nous construisons σ_{x_1} comme suit. Posons tout d'abord $\sigma_{x_1}(x_1, x_1 y_1) = \alpha_1$ et $\sigma_{x_1}(y_1, y_1 x_1) = \beta_1$, pour un $\beta_1 \in L_{x_1}(y_1, y_1 x_1) = L(y_1, y_1 x_1)$. En considérant y_1 comme la racine de $T_{x_1}^*$, nous pouvons étendre σ_{x_1} à une L_{x_1} -liste coloration d'incidence de $T_{x_1}^*$ par la coloration des incidences en commençant par les incidences internes non colorées de x_1 , ensuite nous continuons la coloration vers les incidences internes des feuilles de $T_{x_1}^*$. Cela est faisable puisque toute incidence non colorée aura au plus $\Delta(T_{x_1}^*) \leq \Delta(T)$ couleurs interdites.

La coloration σ_{y_1} est construite de la même manière. Nous posons tout d'abord $\sigma_{y_1}(x_1, x_1 y_1) = \alpha_1$ et $\sigma_{y_1}(y_1, y_1 x_1) = \beta_1$, ensuite nous colorons les incidences restantes en commençant par les incidences internes non colorées de y_1 , puis nous continuons la coloration vers les incidences internes des feuilles de $T_{y_1}^*$.

Il est clair que la combinaison de σ_{x_1} et σ_{y_1} produit une L -liste coloration d'incidence σ de T avec $\sigma(x_1, x_1 y_1) = \alpha_1$.

Supposons maintenant que $k > 1$. Soient $\{(x_1, x_1 y_1), \dots, (x_k, x_k y_k)\}$ un ensemble de k incidences dans T et $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ un ensemble de k couleurs satisfaisant les conditions de la proposition.

Soit L' l'affectation de liste de T définie par $L'(v, vu) = L(v, vu) \setminus \{\alpha_k\}$ pour toute incidence (v, vu) dans T . Grâce à l'hypothèse d'induction, il existe une L' -liste coloration d'incidence σ' de T telle que $\sigma'(x_i, x_i y_i) = \alpha_i$ pour toute i , $1 \leq i \leq k - 1$. La L -liste coloration d'incidence de T exigée est obtenue alors en posant

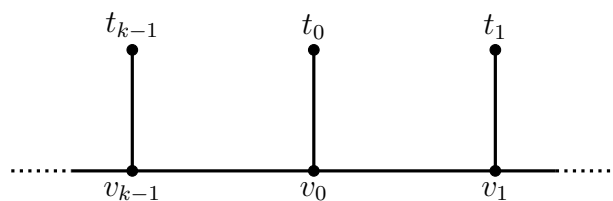


FIGURE 4.4 – Une partie du cycle extérieur C_G d'un graphe de Halin G (les t_i ne sont pas nécessairement distincts).

$\sigma(x_k, x_k y_k) = \alpha_k$ et $\sigma(v, vu) = \sigma'(v, vu)$ pour toute incidence $(v, vu) \neq (x_k, x_k y_k)$ dans T . \square

Le prochain lemme donne une borne supérieure générale du nombre de choisissabilité des graphes de Halin. Notons que par la Proposition 4.3, la borne correspondante est atteinte pour tout graphe de Halin de degré maximum au moins 6.

Lemme 4.12. *Si G est un graphe de Halin, alors $\text{ch}_i(G) \leq \max(\Delta(G) + 1, 7)$.*

Preuve. Soient G un graphe de Halin et L une affectation de liste de G telle que

$$|L(v, vu)| = \max(\Delta(G) + 1, 7) \geq 7$$

pour toute incidence (v, vu) de G . Soit $C_G = v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_0$. Tout sommet v_i , $0 \leq i \leq k-1$, a donc trois voisins dans G , notés v_{i-1} , v_{i+1} (les indices sont pris modulo k), et un sommet $t_i \in V(T_G) \setminus V(C_G)$ (voir Figure 4.4). Notons que les t_i ne sont pas nécessairement distincts. Plus précisément, nous avons toujours $t_i = t_{i-1}$ ou $t_i = t_{i+1}$ (et les deux à la fois) pour tout i , $0 \leq i \leq k-1$ (les indices sont pris modulo k).

Par le Corollaire 4.8, nous savons que T_G est $(\Delta(T_G) + 1)$ -incidence choisissable, et donc $(\Delta(G) + 1)$ -incidence choisissable. Soit σ une telle L -liste coloration d'incidence de T_G . Puisque toute incidence de C_G a exactement trois incidences adjacentes déjà colorées dans T_G , et donc au moins quatre couleurs disponibles dans sa liste, σ peut être étendue en une L -liste coloration d'incidence de G , grâce au Théorème 4.6. \square

En utilisant la Proposition 4.11, nous pouvons obtenir une nouvelle borne supérieure du nombre de choisissabilité des graphes de Halin qui ne sont pas des roues.

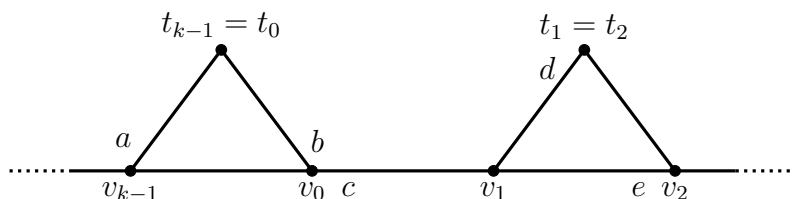


FIGURE 4.5 – Configuration de la preuve du Lemme 4.13.

Cette nouvelle borne améliore la borne donnée dans le Lemme 4.12 pour tout graphe de Halin de degré maximum 3 ou 4 sauf pour les roues $W_3 = K_4$ et W_4 .

Lemme 4.13. *Si G est un graphe de Halin tel que T_G n'est pas une étoile, alors $\text{ch}_i(G) \leq \max(\Delta(G) + 2, 6)$.*

Preuve. Si $\Delta(G) \geq 5$, le résultat est obtenu directement à partir du Lemme 4.12. Nous pouvons donc supposer $\Delta(G) \in \{3, 4\}$ (mais cette supposition n'est pas nécessaire dans la preuve).

Soient G un graphe de Halin et L une affectation de liste de G telle que

$$|L(v, vu)| = \max(\Delta(G) + 2, 6) \geq 6$$

pour toute incidence (v, vu) de G , et soit $p = \max(\Delta(G) + 2, 6)$. Comme dans la preuve du Lemme 4.12, notons $C_G = v_0v_1 \dots v_{k-1}v_0$ et t_i le voisin unique de v_i dans $V(T_G) \setminus V(C_G)$, $0 \leq i \leq k-1$. Notons qu'à partir d'une L -liste coloration d'incidence σ de T_G et en colorant ensuite les incidences de C_G dans un ordre cyclique, à partir de n'importe quelle incidence, toutes les incidences de C_G , hormis les deux dernières, peuvent être colorées, puisque chacune de ces incidences a au plus cinq couleurs interdites. Nous allons prouver qu'il est toujours possible de fixer les couleurs de quelques incidences, de façon telle que nous pouvons produire une L -liste coloration d'incidence de G .

Puisque T_G n'est pas une étoile, il existe un indice i , $0 \leq i \leq k-1$, tel que les sommets t_{i-1} et t_i sont distincts. Nous pouvons alors supposer, sans perte de généralité, que $t_0 \neq t_1$. De plus, puisque T_G n'a aucun sommet de degré 2, nous avons $t_{k-1} = t_0$ et $t_2 = t_1$ (voir Figure 4.5).

Le fait suivant sera essentiel dans la construction d'une L -liste coloration d'incidence de G .

Fait 4.14. *Il existe $a \in L(v_{k-1}, v_{k-1}t_0)$, $b \in L(v_0, v_0t_0)$, $c \in L(v_0, v_0v_1)$, $d \in L(t_1, t_1v_1)$ et $e \in L(v_2, v_2v_1)$, avec $b \neq c$, tels que*

$$|L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0) \cap \{a, b, c\}| \leq 2, \quad |L(v_0, v_0v_{k-1}) \cap \{a, b, c\}| \leq 2,$$

$$\text{et } |L(v_1, v_1v_0) \cap \{c, d, e\}| \leq 1.$$

Preuve. Nous commençons tout d'abord par l'incidence (v_1, v_1v_0) en définissant les valeurs de c , d et e . Soient $C = L(v_0, v_0v_1)$, $D = L(t_1, t_1v_1)$ et $E = L(v_2, v_2v_1)$. Si $C \cap D \cap E \neq \emptyset$, alors nous posons $c = d = e = \gamma$ pour un $\gamma \in C \cap D \cap E$, pour avoir $|L(v_1, v_1v_0) \cap \{c, d, e\}| \leq 1$.

Sinon, nous avons deux cas à considérer.

1. Si C , D et E sont deux à deux disjoints, alors au moins deux d'entre eux sont distincts de $L(v_1, v_1v_0)$, donc nous pouvons choisir c , d et e de façon telle que $|L(v_1, v_1v_0) \cap \{c, d, e\}| \leq 1$.
2. Supposons maintenant que $C \cap D \neq \emptyset$ (les cas $C \cap E \neq \emptyset$ et $D \cap E \neq \emptyset$ sont similaires). Nous posons tout d'abord $c = d = \gamma$ pour un $\gamma \in C \cap D$. Si $\gamma \in L(v_1, v_1v_0)$, alors il existe $\varepsilon \in E \setminus L(v_1, v_1v_0)$ (puisque $(C \cap D) \cap E = \emptyset$) et nous posons $e = \varepsilon$, pour avoir $|L(v_1, v_1v_0) \cap \{c, d, e\}| \leq 1$. Si $\gamma \notin L(v_1, v_1v_0)$, alors nous posons $e = \varepsilon$ pour un $\varepsilon \in E$ et nous obtenons aussi $|L(v_1, v_1v_0) \cap \{c, d, e\}| \leq 1$.

Nous considérons maintenant l'incidence (v_0, v_0v_{k-1}) . Soient $A = L(t_0, t_0v_0)$ et $B = L(v_1, v_1t_1)$. Si $c \notin L(v_0, v_0v_{k-1})$, alors $|L(v_0, v_0v_{k-1}) \cap \{a, b, c\}| \leq 2$ pour toutes les valeurs de a et b .

Supposons maintenant que $c \in L(v_0, v_0v_{k-1})$. Si $|A \cap B| \geq 2$, alors nous posons $a = b = \lambda$ pour un $\lambda \in (A \cap B) \setminus \{c\}$, pour avoir $|L(v_0, v_0v_{k-1}) \cap \{a, b, c\}| \leq 2$. Sinon, nous avons nécessairement $A \neq L(v_0, v_0v_{k-1})$ ou $B \neq L(v_0, v_0v_{k-1})$. Dans le premier cas, nous posons $a = \alpha$ pour un $\alpha \in A \setminus L(v_0, v_0v_{k-1})$, pour avoir $|L(v_0, v_0v_{k-1}) \cap \{a, b, c\}| \leq 2$ pour toute valeur de b . Dans le dernier cas, nous posons $b = \beta$ pour un

$\beta \in B \setminus L(v_0, v_0v_{k-1})$, pour avoir $|L(v_0, v_0v_{k-1}) \cap \{a, b, c\}| \leq 2$ pour toute valeur de a .

Nous considérons finalement l'incidence $(v_{k-1}, v_{k-1}v_0)$. Si $c \notin L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0)$, alors $|L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0) \cap \{a, b, c\}| \leq 2$ pour toutes les valeurs de a et b et nous avons terminé.

Supposons maintenant que $c \in L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0)$. Si aucune des valeurs de a et b n'a été définie dans les étapes précédentes, alors nous procédons de la même manière que pour l'incidence (v_0, v_0v_{k-1}) et le résultat est obtenu. Sinon, nous avons deux cas à considérer.

1. Si les deux valeurs de a et b ont été définies dans les étapes précédentes, alors nous avons $a = b = \lambda$, donc $|L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0) \cap \{a, b, c\}| \leq 2$.
2. Supposons maintenant que la valeur de a a été définie dans les étapes précédentes, c'est-à-dire, $a = \alpha$ pour un $\alpha \in A \setminus L(v_0, v_0v_{k-1})$ (la preuve est similaire si la valeur de b a été définie).

Si $\alpha \in B$, nous pouvons poser $b = \alpha$ et nous avons terminé. Si $\alpha \notin B$ et $\alpha \notin L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0)$, alors nous obtenons $|L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0) \cap \{a, b, c\}| \leq 2$ pour toute valeur de b . Sinon, nous avons $\alpha \notin B$ et $\alpha \in L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0)$, ce qui implique $B \neq L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0)$. Donc, nous pouvons poser $b = \beta$ pour un $\beta \in B \setminus L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0)$, pour avoir $|L(v_{k-1}, v_{k-1}v_0) \cap \{a, b, c\}| \leq 2$.

Cela conclut la preuve du Fait 4.14. □

Nous construisons maintenant une L -liste coloration d'incidence σ de G en trois étapes.

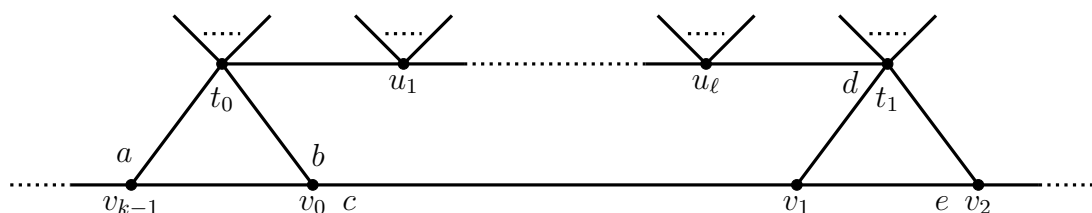
1. Nous posons tout d'abord $\sigma(v_{k-1}, v_{k-1}t_0) = a$, $\sigma(v_0, v_0t_0) = b$, $\sigma(v_0, v_0v_1) = c$, $\sigma(t_1, v_1t_1) = d$, et $\sigma(v_2, v_1v_2) = e$, où a, b, c, d et e sont les valeurs déterminées dans la preuve du Fait 4.14.
2. Soit $P = t_0u_1 \dots u_\ell t_1$, ou $P = t_0t_1$ si $t_0t_1 \in E(G)$, l'unique chaîne de t_0 vers t_1 dans T_G (voir Figure 4.6). Nous colorons les incidences de T_G comme suit.
 - Nous colorons tout d'abord toutes les incidences internes de t_0 , à partir de l'incidence (t_0, t_0v_0) , ensuite l'incidence (t_0, t_0t_1) si $t_0t_1 \in E(G)$. Cela

est faisable puisque chacune des incidences a au plus $\Delta(G) + 1$ incidences adjacentes déjà colorées.

- Si $t_0t_1 \notin E(G)$, alors nous colorons les incidences internes des sommets de P séquentiellement, de u_1 à u_ℓ . Encore, chacune des incidences a au plus $\Delta(G) + 1$ incidences adjacentes déjà colorées.
- Nous colorons l'incidence (t_1, t_1u_ℓ) (ou (t_1, t_1t_0) si $t_0t_1 \in E(G)$), qui a au plus $\Delta(G)+1$ incidences adjacentes déjà colorées, ensuite l'incidence (v_1, v_1t_1) , qui a quatre incidences adjacentes déjà colorées, et ensuite l'incidence (t_1, t_1v_2) , qui a cinq incidences adjacentes déjà colorées (rappelons que $p \geq 6$).
- Nous colorons les incidences internes restantes non colorées de t_1 , s'il y en a. Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus $\Delta(G) + 1$ incidences adjacentes déjà colorées.
- Maintenant, nous colorons les incidences externes non colorées de P , séquentiellement, de t_0 à t_1 . Encore, cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus $\Delta(G) + 1$ incidences adjacentes déjà colorées.
- Pour toute arête $xy \in E(T_G)$, nous noterons T_{xy} l'unique sous-arbre maximal de T_G contenant l'arête xy et tel que $\deg_{T_{xy}}(x) = 1$.

Il est clair que chaque incidence non encore colorée de T_G appartient à un sous-arbre T_{xy} , avec $x \in V(P)$ et $y \notin V(P) \cup \{v_{k-1}, v_0, v_1, v_2\}$. De plus, les seules incidences déjà colorées de chacun des sous-arbres T_{xy} sont (x, xy) et (y, yx) . Par la Proposition 4.11, nous pouvons donc étendre σ à toutes les incidences de T_G .

3. Nous colorons finalement toutes les incidences non colorées de C_G (les seules incidences de C_G déjà colorées sont (v_0, v_0v_1) et (v_2, v_2v_1)) comme suit.
 - Nous colorons tout d'abord l'incidence (v_1, v_1v_2) , qui a cinq incidences adjacentes déjà colorées.
 - Nous colorons ensuite circulairement les incidences de C_G à partir de l'incidence (v_2, v_2v_3) vers $(v_{k-1}, v_{k-1}v_{k-2})$. Cela est faisable puisque chacune des incidences a quatre ou cinq incidences adjacentes déjà colorées.
 - Par le Fait 4.14, l'incidence $(v_{k-1}, v_{k-1}v_0)$ a au plus quatre couleurs interdites et par conséquent, elle peut être colorée. Aussi, grâce au Fait 4.14, nous

FIGURE 4.6 – Coloration du sous-arbre de T_G dans la preuve du Lemme 4.13.

pouvons aussi colorer les incidences (v_0, v_0v_{k-1}) et (v_1, v_1v_0) (dans cet ordre).

Cela conclut la preuve. \square

Le lemme suivant montre que le nombre de choisissabilité d'incidence du graphe complet K_4 est au plus 6.

Lemme 4.15. $\text{ch}_i(K_4) \leq 6$.

Démonstration. Soient $V(K_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ et L une affectation de liste de K_4 telle que $|L(v_i, v_iv_j)| = 6$ pour toute incidence (v_i, v_iv_j) de K_4 .

Le fait suivant sera utile pour la construction d'une L -liste coloration d'incidence du K_4 .

Fait 4.16. *Il existe $a \in L(v_1, v_1v_0)$, $b \in L(v_2, v_2v_0)$, et $c \in L(v_3, v_3v_0)$ tels que*

$$|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b, c\}| \leq 1.$$

Preuve. Soient $A = L(v_1, v_1v_0)$, $B = L(v_2, v_2v_0)$ et $C = L(v_3, v_3v_0)$. Si $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, alors nous posons $a = b = c = \gamma$ pour un $\gamma \in A \cap B \cap C$, pour avoir $|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b, c\}| \leq 1$.

Sinon, nous considérons deux cas.

1. Si A , B et C sont deux à deux disjoints, alors au moins deux parmi eux sont distincts de $L(v_0, v_0v_1)$, donc nous pouvons choisir a , b et c de façon telle que $|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b, c\}| \leq 1$.
2. Supposons maintenant que $A \cap B \neq \emptyset$ (les cas $A \cap C \neq \emptyset$ et $B \cap C \neq \emptyset$ sont similaires). Nous posons tout d'abord $a = b = \gamma$ pour un $\gamma \in A \cap B$. Si $\gamma \in L(v_0, v_0v_1)$, alors il existe $\varepsilon \in C \setminus L(v_0, v_0v_1)$ (puisque $(A \cap B) \cap C = \emptyset$) et

nous posons $c = \varepsilon$, pour avoir $|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b, c\}| \leq 1$. Si $\gamma \notin L(v_0, v_0v_1)$, alors nous posons $e = \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in C$ et nous obtenons aussi $|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b, c\}| \leq 1$.

Cela conclut la preuve du Fait 4.16. \square

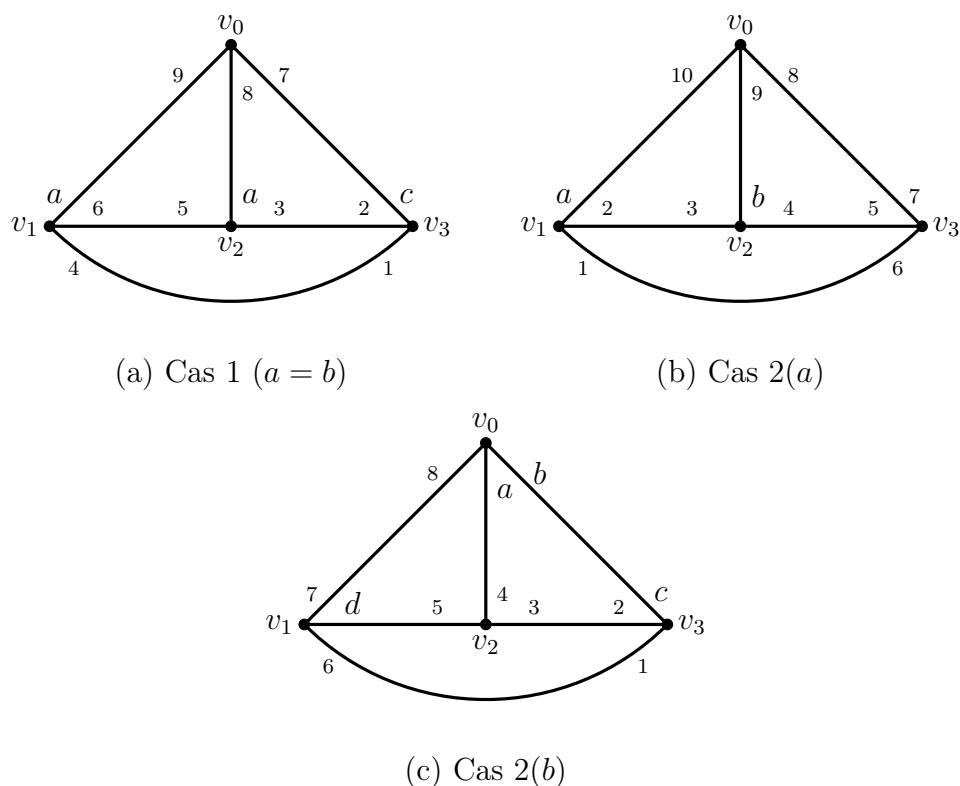
Nous construisons maintenant une L -liste coloration d'incidence σ de K_4 , en posant tout d'abord $\sigma(v_1, v_1v_0) = a$, $\sigma(v_2, v_2v_0) = b$ et $\sigma(v_3, v_3v_0) = c$, où a , b et c sont les valeurs déterminées dans la preuve du Fait 4.16.

Nous considérons ensuite deux cas.

1. Supposons tout d'abord que $|\{a, b, c\}| \leq 2$ et admettons $a = b$ (les cas $a = c$ et $b = c$ sont similaires). Nous colorons alors les incidences non encore colorées comme suit (voir Figure 4.7(a)). Nous colorons tout d'abord les incidences (v_3, v_3v_1) , (v_3, v_3v_2) , (v_2, v_2v_3) , (v_1, v_1v_3) et (v_2, v_2v_1) , dans cet ordre. Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus cinq incidences adjacentes déjà colorées. Nous colorons ensuite les incidences (v_1, v_1v_2) , (v_0, v_0v_3) et (v_0, v_0v_2) , dans cet ordre. Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus cinq couleurs interdites (rappelons que $a = b$). Finalement, nous colorons l'incidence (v_0, v_0v_1) , qui a au moins une couleur disponible dans sa propre liste puisque, par le Fait 4.16, $|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b, c\}| \leq 1$.
2. Supposons maintenant que $|\{a, b, c\}| = 3$. Par symétrie et grâce au Fait 4.16, nous prenons $L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b\} = \emptyset$, sans perte de généralité. Nous considérons deux sous-cas.

- (a) $|L(v_0, v_0v_2) \cap \{a, b\}| \leq 1$ (ou, de façon analogue, $|L(v_0, v_0v_3) \cap \{a, b\}| \leq 1$).

Nous décolorons tout d'abord l'incidence (v_3, v_3v_0) (notons que pour n'importe quel choix de $\sigma(v_3, v_3v_0)$, l'énoncé du Fait 4.16 sera satisfait). Nous colorons ensuite les incidences non encore colorées comme suit (voir Figure 4.7(b)). Nous colorons tout d'abord les incidences (v_1, v_1v_3) , (v_1, v_1v_2) , (v_2, v_2v_1) , (v_2, v_2v_3) , (v_3, v_3v_2) , (v_3, v_3v_1) , (v_3, v_3v_0) et (v_0, v_0v_3) , dans cet ordre. Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus cinq incidences adjacentes déjà colorées. Nous colorons ensuite l'incidence (v_0, v_0v_2) , qui a au plus cinq couleurs interdites puisque $|L(v_0, v_0v_2) \cap \{a, b\}| \leq 1$,

FIGURE 4.7 – L'ordre des incidences de K_4 pour la preuve du Lemme 4.15.

et l'incidence (v_0, v_0v_1) , qui a au plus cinq couleurs interdites puisque $|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b, \sigma(v_3, v_3v_0)\}| \leq 1$.

(b) $\{a, b\} \subseteq (L(v_0, v_0v_2) \cap L(v_0, v_0v_3))$.

Nous décolorons tout d'abord les incidences (v_1, v_1v_0) et (v_2, v_2v_0) , et nous posons $\sigma(v_0, v_0v_2) = a$ et $\sigma(v_0, v_0v_3) = b$ (cela est possible puisque $c \notin \{a, b\}$).

Nous prétendons qu'il existe une couleur $d \in L(v_1, v_1v_2)$ telle que $|L(v_1, v_1v_0) \cap \{b, d\}| \leq 1$. Évidemment, c'est le cas si $b \notin L(v_1, v_1v_0)$. Prenons donc $b \in L(v_1, v_1v_0)$. Si $b \in L(v_1, v_1v_2)$, alors nous pouvons poser $d = b$. Sinon, il suffit de choisir n'importe quel d dans $L(v_1, v_1v_2) \setminus L(v_1, v_1v_0)$. Nous posons ensuite $\sigma(v_1, v_1v_2) = d$.

Nous colorons ensuite les incidences non encore colorées comme suit (voir Figure 4.7(c)). Nous colorons tout d'abord les incidences (v_3, v_3v_1) , (v_3, v_3v_2) , (v_2, v_2v_3) , (v_2, v_2v_0) , (v_2, v_2v_1) et (v_1, v_1v_3) , dans cet ordre. Cela est fai-

sable puisque chacune des incidences a au plus cinq incidences adjacentes déjà colorées. Nous colorons ensuite l'incidence (v_1, v_1v_0) , qui a au plus cinq couleurs interdites puisque $|L(v_1, v_1v_0) \cap \{b, d\}| \leq 1$, et (v_0, v_0v_1) , qui a au plus cinq couleurs interdites puisque $L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b\} = \emptyset$.

Cela conclut la preuve. □

À partir de la Proposition 4.3 et des Lemmes 4.12, 4.13 et 4.15, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.17. *Si G est un graphe de Halin, alors*

$$\begin{cases} \text{ch}_i(G) \leq 6, & \text{si } \Delta(G) \in \{3, 4\} \text{ et } G \neq W_4, \\ \text{ch}_i(G) \leq 7, & \text{si } \Delta(G) = 5 \text{ ou } G = W_4, \\ \text{ch}_i(G) = \Delta(G) + 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.5 Cactus

Nous donnons dans cette section une borne supérieure du nombre de choisissabilité d'incidence des cactus. Pour ce faire, nous considérons d'abord le cas des couronnes généralisées des cycles.

Pour tout entier $n \geq 3$, notons $V(C_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Pour toute couronne généralisée $C_n \odot pK_1$ de C_n et tout sommet v_i de C_n , $0 \leq i \leq n-1$, notons par v_i^1, \dots, v_i^p les p voisins pendants de v_i .

Soient $G = C_n \odot pK_1$, avec $n \geq 3$ et $p \geq 1$ et L une affectation de liste de G telle que $|L(v, vu)| = \Delta(G) + 2$ pour toute incidence (v, vu) de G . En colorant tout d'abord les incidences de C_n , ensuite les incidences internes non encore colorées de v_0, \dots, v_{n-1} , puis les incidences externes de v_0, \dots, v_{n-1} , nous pouvons produire une L -liste coloration d'incidence de G puisque chacune des incidence a au plus $\Delta(G) + 1$ incidences adjacentes déjà colorées. Donc, $\text{ch}_i(C_n \odot pK_1) \leq \Delta(C_n \odot pK_1) + 2$ pour toute couronne généralisée $C_n \odot pK_1$.

Le prochain lemme montre que nous pouvons diminuer cette borne par 1 lorsque $p \geq 4$. Notons que d'après la Proposition 4.3, dans ce cas, la borne correspondante est atteinte.

En plus de son utilité pour l'étude du nombre de choisissabilité d'incidence des cactus, le prochain lemme considère aussi le cas où les deux incidences d'un sommet pendant sont pré-colorées, et prouve que dans ce cas, une couleur supplémentaire est nécessaire seulement lorsque $n = 3$ et $p \geq 3$.

Lemme 4.18. *Pour tous entiers $n \geq 3$ et $p \geq 1$,*

$$\text{ch}_i(C_n \odot pK_1) \leq \begin{cases} \Delta(C_n \odot pK_1) + 2 = p + 4, & \text{si } p \leq 2, \\ \max(\Delta(C_n \odot pK_1) + 1, 7) = \max(p + 3, 7), & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, pour toute affectation de liste L de $C_n \odot pK_1$ avec $|L(v, vu)| = k$ pour toute incidence (v, vu) de $C_n \odot pK_1$, $a \in L(v_0, v_0v_0^1)$ et $b \in L(v_0^1, v_0^1v_0)$, $a \neq b$, il existe une L -coloration d'incidence σ de $C_n \odot pK_1$ avec $\sigma(v_0, v_0v_0^1) = a$ et $\sigma(v_0^1, v_0^1v_0) = b$ dans chacun des cas suivants :

1. $p \leq 2$ et $k \geq p + 4$,
2. $n > 3$, $p \geq 3$ et $k \geq \max(p + 3, 7)$,
3. $n = 3$, $p \geq 3$ et $k \geq \max(p + 3, 8)$.

Preuve. Puisque la preuve du cas où deux incidences sont pré-colorées est similaire à la preuve de la borne générale, nous donnons ces deux preuves simultanément, en se référant au cas précédent comme le cas pré-coloré. Par la suite, les indices sont toujours pris modulo n .

Nous considérons tout d'abord le cas $p \leq 2$. Soit L une affectation liste de $C_n \odot pK_1$ telle que $|L(v, vu)| = p + 4$ si $p \leq 2$ pour toute incidence (v, vu) de $C_n \odot pK_1$, et soient $a \in L(v_0, v_0v_0^1)$ et $b \in L(v_0^1, v_0^1v_0)$, $a \neq b$. Nous construirons une L -liste coloration d'incidence σ de $C_n \odot pK_1$ en trois étapes. Nous posons tout d'abord $\sigma(v_0, v_0v_0^1) = a$ et $\sigma(v_0^1, v_0^1v_0) = b$, même si nous ne sommes pas dans le cas pré-coloré.

1. *Les incidences de C_n .*

Si $p = 1$, il y a seulement une arête incidente à v_0 et qui n'appartient pas

à C_n , et ses deux incidences sont déjà colorées. Si $p = 2$, nous prétendons qu'il existe $c \in L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0)$ tel que $|L(v_0, v_0v_0^2) \cap \{a, b, c\}| \leq 2$ et nous posons $\sigma(v_{n-1}, v_{n-1}v_0) = c$. En effet, si $\{a, b\} \not\subseteq L(v_0, v_0v_0^2)$, alors $|L(v_0, v_0v_0^2) \cap \{a, b, c\}| \leq 2$ pour toute valeur de $c \in L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0)$. Supposons maintenant que $\{a, b\} \subseteq L(v_0, v_0v_0^2)$. Si $b \in L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0)$, alors nous posons $c = b$. Sinon, nous posons $c = \gamma$ pour un $\gamma \in L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0) \setminus L(v_0, v_0v_0^2)$.

Nous colorons ensuite les incidences non encore colorées de C_n circulairement, de (v_0, v_0v_{n-1}) à $(v_{n-1}, v_{n-1}v_{n-2})$. Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus $4 < p + 4$ incidences adjacentes déjà colorées.

2. *Les incidences internes non colorées de v_i , $0 \leq i \leq n - 1$.*

Si $p = 2$, nous colorons l'incidence $(v_0, v_0v_0^2)$. Cela est faisable puisqu'elle a au plus 5 couleurs interdites (rappelons que $|L(v_0, v_0v_0^2) \cap \{\sigma(v_0, v_0v_0^1), \sigma(v_0^1, v_0^1v_0), \sigma(v_{n-1}, v_{n-1}v_0)\}| \leq 2$ grâce à l'étape précédente).

Maintenant, pour tout sommet v_i , $1 \leq i \leq n - 1$, nous colorons l'incidence $(v_i, v_iv_i^1)$, ou les incidences $(v_i, v_iv_i^1)$ et $(v_i, v_iv_i^2)$, dans cet ordre, si $p = 2$. Cela est faisable puisque chacune des incidences $(v_i, v_iv_i^j)$, $1 \leq j \leq p$, a $j + 3 < p + 4$ incidences adjacentes déjà colorées.

3. *Les incidences externes de v_i , $0 \leq i \leq n - 1$.*

Nous colorons finalement toutes les incidences non colorées de la forme $(v_i^j, v_i^jv_i)$, $0 \leq i \leq n - 1$, $1 \leq j \leq p$. Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus $p + 2$ incidences adjacentes déjà colorées.

Il est clair que l'application σ construite ci-dessus est une L -liste coloration d'incidence σ de $C_n \odot pK_1$ avec $\sigma(v_0, v_0v_0^1) = a$ et $\sigma(v_0^1, v_0^1v_0) = b$, sous les conditions exigées.

Nous considérons maintenant le cas $p \geq 3$. Soit L une affectation de liste de $C_n \odot pK_1$ telle que, pour toute incidence (v, vu) de $C_n \odot pK_1$, $|L(v, vu)| = \max(p+3, 7)$ si nous ne sommes pas dans le cas pré-coloré où $n > 3$, et $|L(v, vu)| = \max(p+3, 8)$ dans le cas contraire. De plus, si nous sommes dans le cas pré-coloré, alors nous prenons $a \in L(v_0, v_0v_0^1)$ et $b \in L(v_0^1, v_0^1v_0)$, $a \neq b$. Nous construirons une L -liste coloration d'incidence σ de $C_n \odot pK_1$ en deux étapes. Si nous sommes dans le cas

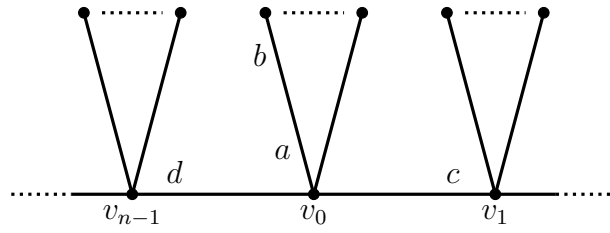


FIGURE 4.8 – La configuration de la preuve du Lemme 4.18, cas pré-coloré.

pré-coloré, nous posons tout d'abord $\sigma(v_0, v_0v_0^1) = a$ et $\sigma(v_0^1, v_0^1v_0) = b$.

1. *Les incidences de C_n .*

Nous construisons tout d'abord une L -liste coloration d'incidence partielle σ_0 de $C_n \odot pK_1$, en fixant toutes les couleurs de C_n , et en satisfaisant les propriétés suivantes :

(P) Pour tout i , $0 \leq i \leq n-1$ (ou $1 \leq i \leq n-1$ si nous sommes dans le cas pré-coloré),

$$|L(v_i, v_iv_i^p) \cap \{\sigma_0(v_{i-1}, v_{i-1}v_i), \sigma_0(v_{i+1}, v_{i+1}v_i)\}| \leq 1.$$

De plus, si nous sommes dans le cas pré-coloré, alors

$$|L(v_0, v_0v_0^p) \cap \{a, b, \sigma_0(v_{n-1}, v_{n-1}v_0), \sigma_0(v_1, v_1v_0)\}| \leq 2.$$

Nous procédons en deux étapes.

(a) Si nous sommes dans le cas pré-coloré, alors nous prétendons tout d'abord qu'il existe $c \in L(v_1, v_1v_0)$ et $d \in L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0)$, $c \neq a$, $d \neq a$, tels que $|L(v_0, v_0v_0^p) \cap \{a, b, c, d\}| \leq 2$, et nous posons $\sigma_0(v_1, v_1v_0) = c$ et $\sigma_0(v_{n-1}, v_{n-1}v_0) = d$ (voir Figure 4.8). Pour montrer ça, nous considérons deux cas

i. $|\{a, b\} \cap L(v_0, v_0v_0^p)| \leq 1$.

Dans ce cas, il suffit de choisir c et d tels que $|\{c, d\} \cap L(v_0, v_0v_0^p)| \leq 1$. Cela est faisable puisque soit $(L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0) \cap L(v_1, v_1v_0)) \setminus \{a\} \neq \emptyset$, nous choisissons dans ce cas $c = d = \gamma$ pour un $\gamma \in (L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0) \cap L(v_1, v_1v_0)) \setminus \{a\}$, soit $(L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0) \cap L(v_1, v_1v_0)) \setminus \{a\} = \emptyset$, ce qui

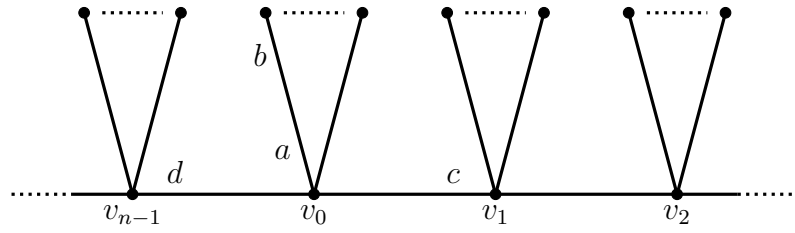


FIGURE 4.9 – La coloration des incidences externes de v_1 ($v_{n-1} = v_2$ si $n = 3$), cas pré-cploré.

implique

$$|L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0) \cup L(v_1, v_1v_0)| \geq \max(2(p+2), 12),$$

et nous choisissons c et d tels que $|\{c, d\} \cap L(v_0, v_0v_0^p)| \leq 1$.

ii. $\{a, b\} \subseteq L(v_0, v_0v_0^p)$.

Si $b \in L(v_1, v_1v_0)$, alors nous posons $c = b$. Sinon, nous posons $c = \gamma$ pour un $\gamma \in L(v_1, v_1v_0) \setminus L(v_0, v_0v_0^p)$. De même, si $b \in L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0)$ alors nous posons $d = b$. Sinon, nous posons $d = \delta$ pour un $\delta \in L(v_{n-1}, v_{n-1}v_0) \setminus L(v_0, v_0v_0^p)$.

Dans tous les cas, nous obtenons $|L(v_0, v_0v_0^p) \cap \{a, b, c, d\}| \leq 2$.

Dans les deux cas (pré-coloré ou non), nous allons colorer certaines incidences de C_n , de façon telle que pour tout i , $0 \leq i \leq n-1$ (ou $1 \leq i \leq n-1$ si nous sommes dans le cas pré-coloré), nous avons la propriété suivante :

(P') Soit $\sigma_0(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) = \sigma_0(v_{i+1}, v_{i+1}v_i)$, soit une des $\sigma_0(v_{i-1}, v_{i-1}v_i)$, $\sigma_0(v_{i+1}, v_{i+1}v_i)$ est seulement posée et, dans ce cas, la couleur affectée ne doit pas appartenir à $L(v_i, v_iv_i^p)$.

Pour tout entier i , nous notons α_i la couleur affectée à une ou aux deux incidences externes de v_i . Si nous sommes dans le cas pré-coloré, nous traitons tout d'abord les incidences externes de v_1 et v_{n-1} .

– *Les incidences externes de v_1 , cas pré-coloré* (voir Figure 4.9).

Soient $L'(v_0, v_0v_1) = L(v_0, v_0v_1) \setminus \{a, b, c, d\}$, et

$$L'(v_2, v_2v_1) = \begin{cases} L(v_2, v_2v_1) \setminus \{c, d\}, & \text{si } n = 3, \\ L(v_2, v_2v_1) \setminus \{c\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $L'(v_0, v_0v_1) \cap L'(v_2, v_2v_1) \neq \emptyset$, alors nous posons $\sigma_0(v_0, v_0v_1) = \sigma_0(v_2, v_2v_1) = \alpha_1$ pour un $\alpha_1 \in L'(v_0, v_0v_1) \cap L'(v_2, v_2v_1)$. Sinon, nous considérons deux cas.

- Si $n = 3$, alors $|L(v, vu)| \geq \max(p + 3, 8)$ pour toute incidence (v, vu) de $C_n \odot pK_1$, ce qui implique $|L'(v_0, v_0v_1)| \geq \max(p - 1, 4)$ et $|L'(v_2, v_2v_1)| \geq \max(p + 1, 6)$, donc $|L'(v_0, v_0v_1) \cup L'(v_2, v_2v_1)| \geq \max(2p, 10)$. De plus, soit il existe une telle couleur $\alpha_1 \in L'(v_0, v_0v_1) \setminus L(v_1, v_1v_1^p)$, et nous posons dans ce cas $\sigma_0(v_0, v_0v_1) = \alpha_1$, soit il existe une telle couleur $\alpha_1 \in L'(v_2, v_2v_1) \setminus L(v_1, v_1v_1^p)$, et nous posons $\sigma_0(v_2, v_2v_1) = \alpha_1$.
- Si $n \geq 4$, alors $|L(v, vu)| \geq \max(p + 3, 7)$ pour toute incidence (v, vu) de $C_n \odot pK_1$, ce qui implique $|L'(v_0, v_0v_1)| \geq \max(p - 1, 3)$ et $|L'(v_2, v_2v_1)| \geq \max(p + 2, 6)$, donc $|L'(v_0, v_0v_1) \cup L'(v_2, v_2v_1)| \geq \max(2p+1, 9)$. De plus, soit il existe une telle couleur $\alpha_1 \in L'(v_0, v_0v_1) \setminus L(v_1, v_1v_1^p)$, et nous posons dans ce cas $\sigma_0(v_0, v_0v_1) = \alpha_1$, soit il existe une telle couleur $\alpha_1 \in L'(v_2, v_2v_1) \setminus L(v_1, v_1v_1^p)$, et nous posons $\sigma_0(v_2, v_2v_1) = \alpha_1$.

- *Les incidences externes de v_{n-1} , cas pré-coloré.*

Soient $L'(v_0, v_0v_{n-1}) = L(v_0, v_0v_{n-1}) \setminus \{a, b, c, d, \alpha_1\}$, et

$$L'(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) = \begin{cases} L(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) \setminus \{c, d, \alpha_1\}, & \text{si } n = 3, \\ L(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) \setminus \{d, \alpha_1\}, & \text{si } n = 4, \\ L(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) \setminus \{d\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $d \notin L(v_{n-1}, v_{n-1}v_{n-1}^p)$, alors nous posons $\sigma_0(v_0, v_0v_{n-1}) = \alpha_{n-1}$ pour un $\alpha_{n-1} \in L'(v_0, v_0v_{n-1})$ et nous avons terminé.

Supposons maintenant que $d \in L(v_{n-1}, v_{n-1}v_{n-1}^p)$. Si $L'(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) \cap L'(v_0, v_0v_{n-1}) \neq \emptyset$, alors nous posons $\sigma_0(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) = \alpha_{n-1}$ et $\sigma_0(v_0, v_0v_{n-1}) = \alpha_{n-1}$ pour un $\alpha_{n-1} \in L'(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) \cap L'(v_0, v_0v_{n-1})$. Sinon, nous considérons deux cas.

- Si $n = 3$ (et par conséquent, $(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) = (v_1, v_1v_2)$), alors $|L(v, vu)| \geq \max(p + 3, 8)$ pour toute incidence (v, vu) de $C_3 \odot pK_1$, qui implique $|L'(v_1, v_1v_2)| \geq \max(p, 5)$ et $|L'(v_0, v_0v_2)| \geq \max(p -$

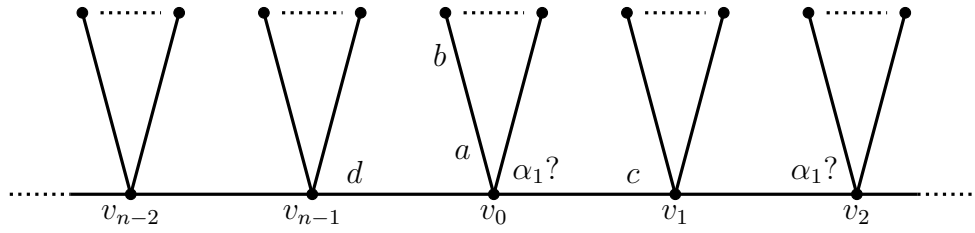


FIGURE 4.10 – La coloration des incidences externes de v_{n-1} ($v_{n-2} = v_2$ si $n = 4$), cas pré-coloré. Au moins une des incidences (v_0, v_0v_1) ou (v_2, v_2v_1) est colorée avec α_1 .

2, 3), donc $|L'(v_1, v_1v_2) \cup L'(v_0, v_0v_2)| \geq \max(2p - 2, 8)$. Notons que $L'(v_1, v_1v_2) \cup L'(v_0, v_0v_2) \neq L(v_2, v_2v_2^p)$ puisque $d \in L(v_2, v_2v_2^p)$ et $d \notin L'(v_1, v_1v_2) \cup L'(v_0, v_0v_2)$. Donc, soit il existe une telle couleur $\alpha_2 \in L'(v_1, v_1v_2) \setminus L(v_2, v_2v_2^p)$, nous posons dans ce cas $\sigma_0(v_1, v_1v_2) = \alpha_2$, soit il existe une telle couleur $\alpha_2 \in L'(v_0, v_0v_2) \setminus L(v_2, v_2v_2^p)$, et nous posons $\sigma_0(v_0, v_0v_2) = \alpha_2$.

– Si $n \geq 4$ (voir Figure 4.10), alors $|L(v, vu)| \geq \max(p + 3, 7)$ pour toute incidence (v, vu) de $C_n \odot pK_1$, qui implique

$$|L'(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1})| \geq \max(p + 1, 5) \text{ et } |L'(v_0, v_0v_{n-1})| \geq \max(p - 2, 2), \text{ donc } |L'(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) \cup L'(v_0, v_0v_{n-1})| \geq \max(2p - 1, 7).$$

Comme dans le cas précédent,

$L'(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) \cup L'(v_0, v_0v_{n-1}) \neq L(v_{n-1}, v_{n-1}v_{n-1}^p)$ puisque $d \in L(v_{n-1}, v_{n-1}v_{n-1}^p)$ et $d \notin L'(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) \cup L'(v_0, v_0v_{n-1})$. Donc, soit il existe une telle couleur $\alpha_{n-1} \in L'(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) \setminus L(v_{n-1}, v_{n-1}v_{n-1}^p)$, nous posons dans ce cas $\sigma_0(v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}) = \alpha_{n-1}$, soit il existe une telle couleur $\alpha_{n-1} \in L'(v_0, v_0v_{n-1}) \setminus L(v_{n-1}, v_{n-1}v_{n-1}^p)$, et nous posons $\sigma_0(v_0, v_0v_{n-1}) = \alpha_{n-1}$.

Pour la construction de la coloration partielle σ_0 , nous procédons séquentiellement, de $i = 2$ à $i = n - 2$ si nous sommes dans le cas pré-coloré et $n \neq 3$ (notons que σ_0 est déjà construite si $n = 3$), ou de $i = 0$ à $i = n - 1$ dans le cas contraire.

Pour tout entier i , soient

$$L'(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) = L(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) \setminus \{\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}\}, \text{ et}$$

$$L'(v_{i+1}, v_{i+1}v_i) = L(v_{i+1}, v_{i+1}v_i) \setminus \{\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}\},$$

si nous ne sommes pas dans le cas pré-coloré, ou

$$L'(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) = \begin{cases} L(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) \setminus \{c, \alpha_1, \alpha_3\}, & \text{si } i = 2, \\ L(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) \setminus \{\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}\}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$L'(v_{i+1}, v_{i+1}v_i) = \begin{cases} L(v_{i+1}, v_{i+1}v_i) \setminus \{\alpha_{n-3}, \alpha_{n-1}, d\}, & \text{si } i = n - 2, \\ L(v_{i+1}, v_{i+1}v_i) \setminus \{\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}\}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

si nous sommes dans le cas pré-coloré.

Notons ici que lorsque nous procédons avec i , la couleur α_{i-2} (resp. α_{i-1} , α_{i+1} , α_{i+2}) est définie seulement si $i \geq 2$ (resp. $i \geq 1$, $i \leq n-1$, $i \leq n-2$).

Si $L'(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) \cap L'(v_{i+1}, v_{i+1}v_i) \neq \emptyset$, nous posons $\sigma_0(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) = \sigma_0(v_{i+1}, v_{i+1}v_i) = \alpha_i$ pour un $\alpha_i \in L'(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) \cap L'(v_{i+1}, v_{i+1}v_i)$.

Sinon, puisque $|L(v, vu)| \geq \max(p+3, 7)$ pour toute incidence (v, vu) de $C_n \odot pK_1$, qui implique $|L'(v_{i-1}, v_{i-1}v_i)| \geq \max(p, 4)$ et

$|L'(v_{i+1}, v_{i+1}v_i)| \geq \max(p, 4)$, donc $|L'(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) \cup L'(v_{i+1}, v_{i+1}v_i)| \geq \max(2p, 8)$, alors soit il existe une telle couleur $\alpha_i \in L'(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) \setminus L(v_i, v_i v_i^p)$, auquel cas nous posons $\alpha_0(v_{i-1}, v_{i-1}v_i) = \alpha_i$, soit il existe une telle couleur $\alpha_i \in L'(v_{i+1}, v_{i+1}v_i) \setminus L(v_i, v_i v_i^p)$, et nous posons $\alpha_0(v_{i+1}, v_{i+1}v_i) = \alpha_i$.

Par construction, la L -liste coloration d'incidence partielle σ_0 satisfait clairement la Propriété (P').

- (b) Nous colorons maintenant les incidences non encore colorées de C_n . Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus quatre incidences adjacentes déjà colorées. Grâce à la Propriété (P'), et puisqu'au moins une des incidences externes de chaque sommet v_i a été colorée dans l'étape précédente, la L -liste coloration d'incidence partielle σ_0 obtenue ainsi satisfait la Propriété (P).

2. Nous étendons maintenant la L -liste coloration d'incidence partielle σ_0 à une L -liste coloration d'incidence σ de $C_n \odot pK_1$. Les seules incidences non encore colorées sont les incidences internes et externes des sommets pendants (sauf $(v_0, v_0v_0^1)$ et $(v_0^1, v_0^1v_0)$ si nous sommes dans le cas pré-coloré, ces incidences sont déjà colorées par a et b , respectivement).

Nous procédons comme suit. Si nous sommes dans le cas pré-coloré, alors nous colorons tout d'abord les incidences $(v_0, v_0v_0^2), \dots, (v_0, v_0v_0^p)$, dans cet ordre, sinon nous colorons tout d'abord les incidences $(v_0, v_0v_0^1), \dots, (v_0, v_0v_0^p)$, dans cet ordre. Ensuite, pour tout sommet v_i , $1 \leq i \leq n-1$, nous colorons les incidences $(v_i, v_iv_i^1), \dots, (v_i, v_iv_i^p)$, dans cet ordre. Cela est faisable puisque

- (a) toute incidence $(v_i, v_iv_i^j)$, $1 \leq j \leq p-1$, a $j+3 \leq p+2$ incidences déjà colorées (rappelons que $|L(v_i, v_iv_i^j)| \geq p+3$), et
- (b) grâce à la Propriété (P) (et le fait que $|L(v_0, v_0v_0^p) \cap \{a, b, c, d\}| \leq 2$ si nous sommes dans le cas pré-coloré), l'incidence $(v_i, v_iv_i^p)$ a au plus $p+2$ couleurs interdites.

Nous colorons finalement toutes les incidences non colorées de la forme $(v_i^j, v_i^jv_i)$, $0 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq p$. Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus $p+2$ incidences adjacentes déjà colorées.

Cela conclut la preuve. □

Nous pouvons maintenant prouver le résultat principal de cette section. Soient G un cactus, et C un cycle dans G . On dit que C est un *cycle maximal* si C contient un sommet v avec $\deg_G(v) = \Delta(G)$.

Théorème 4.19. *Soit G un cactus qui n'est ni un arbre ni un cycle. Nous avons alors*

$$\text{ch}_i(G) \leq \begin{cases} \Delta(G) + 2, & \text{si } \Delta(G) = 3, \\ \Delta(G) + 1, & \text{si } \Delta(G) = 4 \text{ et } G \text{ n'a aucun cycle maximal,} \\ \Delta(G) + 2, & \text{si } \Delta(G) = 4 \text{ et } G \text{ a au moins un cycle maximal,} \\ \max(\Delta(G) + 1, 7), & \text{si } \Delta(G) \geq 5 \text{ et } G \text{ a au plus un 3-cycle maximal,} \\ \max(\Delta(G) + 1, 8), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Soit L une affectation de liste de G telle que $|L(v, vu)| = k$ pour toute incidence (v, vu) de G , où k est la valeur prétendue dans l'énoncé du théorème.

Soit C_1, \dots, C_ℓ , $\ell \geq 1$, les cycles dans G , et M le graphe obtenu à partir de G en contractant chaque cycle C_i en un sommet c_i . Le graphe M est clairement un arbre. Nous appelons chaque sommet c_i dans M un *sommet cycle* et chaque autre sommet dans M , s'il existe, un *sommet normal*. De plus, si G contient un 3-cycle maximal, nous supposons sans perte de généralité que ce cycle est C_1 . Nous ordonnons maintenant les sommets de M , en commençant par c_1 , de façon telle que chaque sommet $v \neq c_1$ a exactement un seul voisin parmi les voisins qui précèdent v dans l'ordre (cela est faisable puisque M est un arbre).

Nous colorons maintenant les incidences de G selon l'ordre des sommets de M comme suit. Soit v le sommet à traiter de M . Nous avons deux cas à considérer.

1. v est un sommet cycle de M .

Soit $v = c_i$, $1 \leq i \leq \ell$. Nous colorons alors toutes les incidences du sous-graphe H_i de G induit par les sommets du cycle C_i et leurs voisins. Le sous-graphe H_i est un sous-graphe d'une telle couronne généralisée et donc, grâce à l'Observation 4.1 et au Lemme 4.18, toutes les incidences de H_i peuvent être colorées.

2. v est un sommet normal de M .

Dans ce cas, v est aussi un sommet de G . Nous colorons d'abord les incidences internes non colorées de v , si elles existent, ensuite les incidences externes non colorées de v , si elles existent, dans cet ordre. Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus $\Delta(G)$ incidences adjacentes déjà colorées.

Cela conclut la preuve. □

Notons que grâce à la Proposition 4.3, la borne obtenue dans le Théorème 4.19 est atteinte pour tout cactus G tel que $\Delta(G) \geq 7$, ou $\Delta(G) = 6$ et G a au plus un 3-cycle maximal, ou $\Delta(G) = 4$ et G n'a aucun cycle maximal.

4.6 Les graphes cubiques Hamiltoniens

Par la Proposition 4.4, nous savons que $\text{ch}_i(G) \leq 7$ pour tout graphe de degré maximum 3. Nous prouvons dans cette section que cette borne peut être diminuée à 6 pour tout graphe cubique Hamiltonien. (Rappelons que par le résultat de Maydanskyyi [62], $\chi_i(G) \leq 5$ pour tout graphe cubique.)

Soient G un graphe cubique Hamiltonien d'ordre n (n est nécessairement pair) et $C_G = v_0v_1 \dots v_{n-1}v_0$ un cycle Hamiltonien dans G . L'ensemble des arêtes $F = E(G) \setminus E(C_G)$ est donc un couplage parfait. Nous notons F_G le sous-graphe de G induit par F . Soit v_i , $0 \leq i \leq n-1$, un sommet de G . Le *sommet couplé* de v_i (par rapport à C_G) est le sommet unique v_j tel que $v_iv_j \in F$. Le *sommet antipodal* de v_i (par rapport à C_G) est le sommet $v_{i+\frac{n}{2}}$ (les indices sont pris modulo n). Deux sommets x et y de G sont *consécutifs* (par rapport à C_G) s'il existe un entier i , $0 \leq i \leq n-1$, tel que $\{x, y\} = \{v_i, v_{i+1}\}$ (les indices sont pris modulo n).

Nous prouvons tout d'abord le lemme simple suivant.

Lemme 4.20. *Si G est un graphe cubique Hamiltonien d'ordre $n \geq 6$ et $C_G = v_0v_1 \dots v_{n-1}v_0$ est un cycle Hamiltonien dans G , alors il existe un sommet v_i dans G , $0 \leq i \leq n-1$, tel que v_{i+2} n'est pas le sommet couplé de v_i .*

Preuve. Si v_2 n'est pas le sommet couplé de v_0 alors v_0 satisfait la propriété exigée. Sinon, puisque $n \geq 6$, v_2 satisfait la propriété exigée. \square

Nous prouvons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 4.21. *Pour tout graphe cubique Hamiltonien G , $\text{ch}_i(G) \leq 6$.*

Preuve. Soient G un graphe cubique Hamiltonien, $C_G = v_0v_1 \dots v_{n-1}v_0$ un cycle Hamiltonien dans G , et L une affectation de liste de G telle que $|L(v, vu)| = 6$ pour toute incidence (v, vu) de G . Par la suite, les indices sont toujours pris modulo n .

Notons tout d'abord que si $n = 4$, alors $G = K_4$ et le résultat découle du Lemme 4.15. Nous prenons donc $n \geq 6$. Chaque sommet v_i , $0 \leq i \leq n-1$, a trois voisins dans G , notés v_{i-1} , v_{i+1} et le sommet couplé $v'_i = v_j$ de v_i , $j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i-1, i, i+1\}$. Soient v_s et v_t les deux sommets couplés de v_0 et v_1 , respectivement. Sans

perte de généralité, nous pouvons supposer que v_0 satisfait l'énoncé du Lemme 4.20, donc $v_s \neq v_2$.

Le fait suivant sera utile pour la construction d'une L -liste coloration d'incidence de G .

Fait 4.22. *Il existe $a \in L(v_1, v_1v_t)$, $b \in L(v_s, v_s v_0)$, $c \in L(v_2, v_2v_1)$, $d \in L(v_0, v_0v_s)$ et $e \in L(v_t, v_tv_1)$, avec $a \neq c$, $a \neq e$ et $b \neq d$, tels que*

$$|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b\}| \leq 1, \quad \text{et} \quad |L(v_1, v_1v_0) \cap \{c, d, e\}| \leq 1.$$

Preuve. Nous commençons tout d'abord par l'incidence (v_1, v_1v_0) en définissant les valeurs de c , d et e (voir Figure 4.11). Soient $C = L(v_2, v_2v_1)$, $D = L(v_0, v_0v_s)$ et $E = L(v_t, v_tv_1)$. Si $C \cap D \cap E \neq \emptyset$, alors nous posons $c = d = e = \gamma$ pour un $\gamma \in C \cap D \cap E$, pour avoir $|L(v_1, v_1v_0) \cap \{c, d, e\}| \leq 1$. Sinon, nous considérons deux cas.

1. Si C , D et E sont deux à deux disjoints, alors au moins deux d'entre eux sont distincts de $L(v_1, v_1v_0)$, et donc nous pouvons choisir c , d et e de façon telle que $|L(v_1, v_1v_0) \cap \{c, d, e\}| \leq 1$.
2. Supposons maintenant que $C \cap D \neq \emptyset$ (les cas $C \cap E \neq \emptyset$ et $D \cap E \neq \emptyset$ sont similaires). Nous posons tout d'abord $c = d = \gamma$ pour un $\gamma \in C \cap D$. Si $\gamma \in L(v_1, v_1v_0)$, alors il existe $\varepsilon \in E \setminus L(v_1, v_1v_0)$ (puisque $(C \cap D) \cap E = \emptyset$) et nous posons $e = \varepsilon$, pour avoir $|L(v_1, v_1v_0) \cap \{c, d, e\}| \leq 1$. Si $\gamma \notin L(v_1, v_1v_0)$, alors nous posons $e = \varepsilon$ pour un $\varepsilon \in E$ et nous obtenons aussi $|L(v_1, v_1v_0) \cap \{c, d, e\}| \leq 1$.

Nous considérons maintenant l'incidence (v_0, v_0v_1) et définissons les valeurs de a et b . Soient $L'(v_1, v_1v_t) = L(v_1, v_1v_t) \setminus \{e, c\}$ et $L'(v_s, v_s v_0) = L(v_s, v_s v_0) \setminus \{d\}$. Si $L'(v_1, v_1v_t) \cap L'(v_s, v_s v_0) \neq \emptyset$, alors nous posons $a = b = \alpha$ pour un $\alpha \in L'(v_1, v_1v_t) \cap L'(v_s, v_s v_0)$, pour avoir $|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b\}| \leq 1$. Sinon, comme $|L(v, vu)| = 6$ pour toute incidence (v, vu) de G , ce qui implique $|L'(v_1, v_1v_t)| \geq 4$ et $|L'(v_s, v_s v_0)| \geq 5$, nous obtenons $|L'(v_1, v_1v_t) \cup L'(v_s, v_s v_0)| \geq 9$. Par conséquent, soit il existe une telle couleur $\alpha \in L'(v_s, v_s v_0) \setminus L(v_0, v_0v_1)$, auquel cas nous posons $b = \alpha$, pour avoir $|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b\}| \leq 1$ pour toute valeur de a , soit il existe une telle couleur

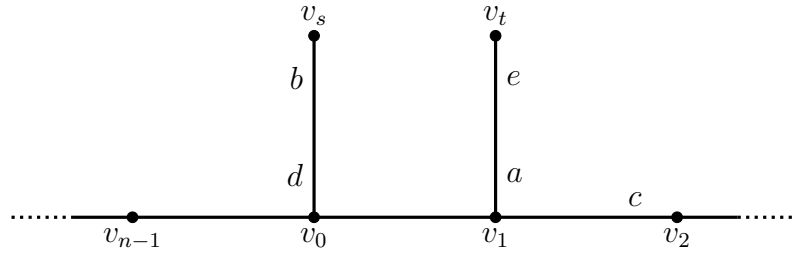


FIGURE 4.11 – La configuration de la preuve du Fait 4.22.

$\alpha \in L'(v_1, v_1v_t) \setminus L(v_0, v_0v_1)$, auquel cas nous posons $a = \alpha$, pour avoir $|L(v_0, v_0v_1) \cap \{a, b\}| \leq 1$ pour toute valeur de b .

Cela conclut la preuve du Fait 4.22. \square

Nous construisons maintenant une L -liste coloration d'incidence σ de G en trois étapes.

1. Nous posons tout d'abord $\sigma(v_1, v_1v_t) = a$, $\sigma(v_s, v_s v_0) = b$, $\sigma(v_2, v_2v_1) = c$, $\sigma(v_0, v_0v_s) = d$ et $\sigma(v_t, v_t v_1) = e$, où a, b, c, d et e sont les valeurs déterminées dans la preuve du Fait 4.22.
2. Nous colorons toutes les incidences non colorées du couplage parfait $F = E(G) \setminus E(C_G)$. Cela est faisable puisque chacune des incidences a au plus deux incidences adjacentes déjà colorées (en effet, seulement la dernière incidence colorée de l'arête $v_2v'_2$, où v'_2 le sommet antipodal v_2 , aura deux incidences adjacentes déjà colorées).
3. Nous colorons finalement les incidences non colorées de C_G (la seule incidence de C_G déjà colorée est (v_2, v_2v_1)) comme suit.
 - Nous colorons tout d'abord l'incidence (v_1, v_1v_2) , qui a quatre incidences adjacentes déjà colorées.
 - Nous colorons ensuite circulairement les incidences de C_G de (v_2, v_2v_3) à (v_0, v_0v_{n-1}) . Cela est faisable puisque chacune des incidences a quatre ou cinq incidences adjacentes déjà colorées.
 - Par le Fait 4.22, l'incidence (v_0, v_0v_1) a au plus cinq couleurs interdites et donc peut être colorée. De même, grâce au Fait 4.22, l'incidence (v_1, v_1v_0) a au plus cinq couleurs interdites et donc peut être colorée.

Cela conclut la preuve du Théorème 4.21. □

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit et étudié la version liste de la coloration d'incidence. Nous avons déterminé des valeurs exactes – ou des bornes supérieures – du nombre de choisissabilité d'incidence de plusieurs classes de graphes, qui sont les grilles carrées, les graphes de Halin, les couronnes généralisées des cycles, les cactus et les graphes cubiques Hamiltoniens. Suite au travail présenté ici, nous proposons les problèmes suivants :

1. Est-il vrai que $\text{ch}_i(G_{m,n}) = 6$ pour toute grille carrée $G_{m,n}$ avec $m \geq n \geq 3$?
2. Quelle est la meilleure borne supérieure du nombre de choisissabilité d'incidence des graphes de Halin de degré maximum 3, 4 ou 5 ? (le Théorème 5.10 donne la valeur exacte seulement pour les graphes de Halin de degré maximum $k \geq 6$.)
3. Quelle est la meilleure borne supérieure possible du nombre de choisissabilité d'incidence des cactus de degré maximum 6 et contenant au moins deux 3-cycles maximaux ? de degré maximum 5 ? de degré maximum 4 et contenant au moins un cycle maximal ? [le Théorème 4.19 donne la valeur exacte pour tous les autres cas.]
4. Quelle est la meilleure borne supérieure du nombre de choisissabilité d'incidence des graphes de degré maximum borné ? En particulier, le cas des graphes de degré maximum 3 ? (Par la Proposition 4.4, nous savons que cette borne est au plus $3k - 2$ pour tous les graphes de degré maximum $k \geq 2$, et donc au plus 8 pour les graphes de degré maximum 3.)
5. Quelle est la valeur de $\text{ch}_i(K_n)$? (Par la Proposition 4.4, nous savons que cette valeur est au plus $3n - 5$.)
6. Quelle sont les classes de graphes qui satisfont la version incidence de la conjecture de coloration par liste, autrement dit, pour quels graphes G avons-nous $\text{ch}_i(G) = \chi_i(G)$? (Par la Proposition 4.3 et le Théorème 4.7, nous savons par

exemple que cette égalité est vérifiée par tous les arbres.)

Chapitre 5

Coloration totale d'incidences

Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions la version totale de la coloration d'incidence. Nous déterminons soit des valeurs exactes soit des bornes supérieures du nombre chromatique total d'incidence de plusieurs classes de graphes.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'un article, en cours de rédaction, pour publication dans une revue internationale.

5.1 Introduction

Soit G un graphe. Une k -coloration totale, $k \in \mathbb{N}^*$, d'un graphe G est une application λ qui va de l'ensemble des sommets et arêtes de G , $E(G) \cup V(G)$, dans l'ensemble des couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que des couleurs distinctes sont affectées à (1) toute paire de sommets adjacents (2) toute paire d'arêtes adjacentes (3) toute paire de sommet et d'arête qui lui est incidente. Le *nombre chromatique total* d'un graphe G , noté $\chi''(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration totale.

La coloration totale a été largement étudiée par de nombreux chercheurs dans plusieurs articles, citons par exemple [25, 43, 59, 89, 86, 96, 97]. La conjecture de la coloration totale posée indépendamment par Vizing [80] et Behzad [9] stipule que pour tout graphe G de degré maximum Δ , $\chi''(G) \leq \Delta + 2$.

La version totale de la coloration d'incidence est définie d'une manière simi-

laire au cas ordinaire de la coloration propre des sommets et des arêtes. Une k -coloration totale d'incidence, $k \in \mathbb{N}^*$, d'un graphe G est une application λ qui va de l'ensemble des sommets et incidences de G , $I(G) \cup V(G)$, dans l'ensemble des couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que des couleurs distinctes sont affectées à (1) toute paire de sommets adjacents (2) toute paire d'incidences adjacentes (3) tout sommet et chacune de ses incidences (internes ou externe). Le nombre chromatique total d'incidence d'un graphe G , noté $\chi''_i(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration totale d'incidence.

5.2 Préliminaires

Dans cette section, nous donnons quelques résultats de base concernant le nombre chromatique total d'incidence de plusieurs classes de graphes. Notons tout d'abord que si G n'est pas connexe, $\chi''_i(G)$ est égal à la valeur maximum des nombres chromatiques total d'incidence de ses composantes connexes. Donc, nous ne considérons, par la suite, que des graphes connexes.

Soient G un graphe, v un sommet de G de degré $\Delta(G)$ et w_1, \dots, w_Δ les voisins du sommet v . Puisque le nombre de couleurs nécessaires pour colorer les incidences du sommet v est au moins $\Delta(G) + 1$ [23], et la couleur du sommet v doit être différente des couleurs de ses incidences, le nombre chromatique total d'incidence est supérieur ou égal à $\Delta(G) + 2$. D'autre part, il est facile de vérifier que le nombre chromatique total d'incidence est inférieur à la somme du nombre chromatique et du nombre chromatique d'incidence, nous avons alors :

Propriété 5.1. *Pour tout graphe G , $\Delta(G) + 2 \leq \chi''_i(G) \leq \chi(G) + \chi_i(G)$.*

Nous introduisons maintenant une nouvelle notion. À chaque graphe G , nous associons le *graphe total d'incidence* de G , noté par I''_G , dont les sommets sont les incidences et les sommets de G , deux sommets étant reliés par une arête lorsqu'ils doivent recevoir des couleurs différentes dans G . Il est clair que chaque coloration totale d'incidence de G n'est qu'une coloration propre des sommets de I''_G , donc, $\chi''_i(G) = \chi(I''_G)$.

Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$. Il est clair que le graphe total d'incidence de C_n est le cube C_{3n}^3 du cycle C_{3n} (voir l'exemple illustré dans la Figure 5.1).

Observation 5.2. *Pour tout $n \geq 3$, $\chi''(C_n) = \chi(C_{3n}^3)$.*

Dans [64] Miao et Fan ont prouvé le théorème suivant.

Théorème 5.3. *Pour tout $n \geq 3$, $p \geq 1$,*

$$\chi(C_n^p) = \begin{cases} p+1, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{p} + 1; \\ \min\{i+1 \geq p+2 \mid n \pmod{i} \leq \frac{n}{i}\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par le Théorème 5.3 et l'Observation 5.2, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 5.4. *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi''(C_n) = \begin{cases} \Delta(C_n) + 2, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}; \\ \Delta(C_n) + 3, & \text{sinon.} \end{cases}$$

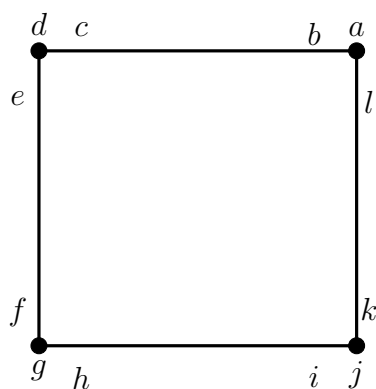
Soit G un graphe d -dégénéré. Il est facile de vérifier qu'il existe un ordre $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ des sommets de G tel que pour tout entier $1 < i \leq n$ le sommet u_i a au plus d voisins dans l'ensemble de ses prédécesseurs $Y_i = \{u_1 \dots u_{i-1}\}$. Nous montrons le théorème suivant.

Théorème 5.5. *Pour tout graphe d -dégénéré G , $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2d$.*

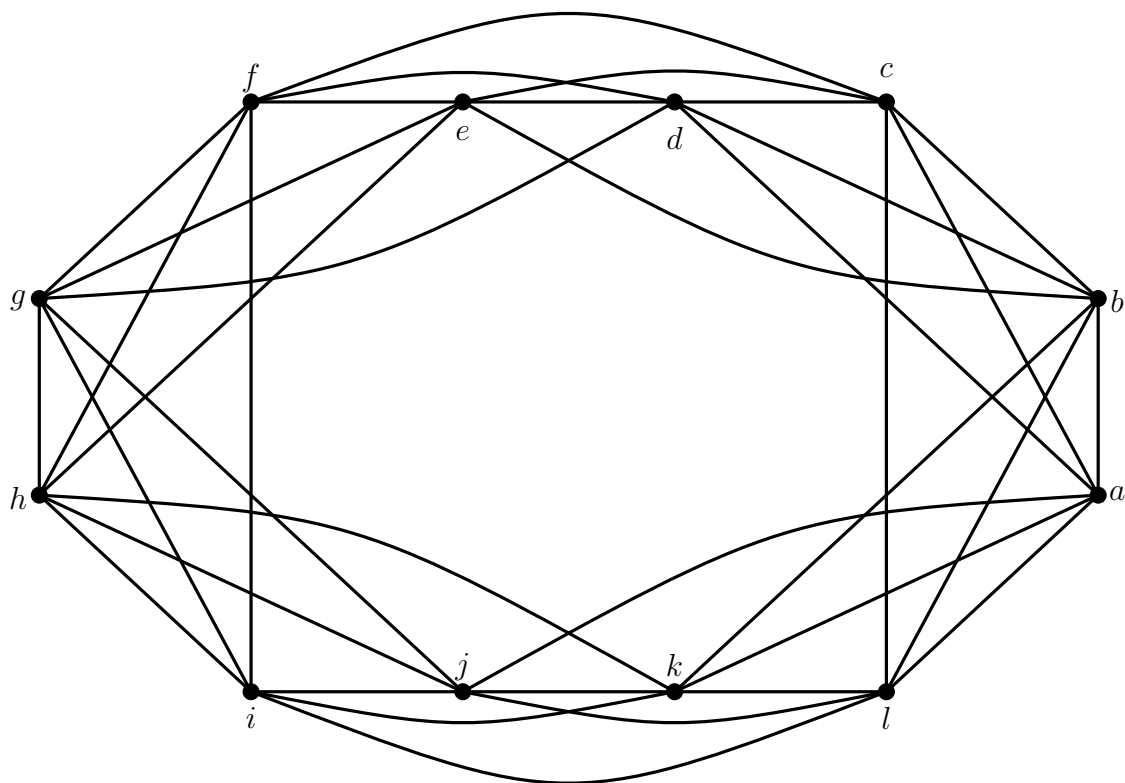
Preuve. Nous colorons les sommets u_j , $1 \leq j \leq n$, et leurs incidences internes suivant un ordre croissant de j . Soit u_i le $i^{\text{ème}}$ sommet à colorer, par définition, u_i a au plus t voisins dans Y_i , $t \leq d$.

Il est facile d'observer que $d_G(u_i) + 2t \leq \Delta(G) + 2d$ couleurs suffisent pour colorer les incidences de la forme $(u_i, u_i v)$ où $v \in Y_i$, le sommet u_i et les incidences de la forme $(u_i, u_i w)$ où $w \notin Y_i$ dans cet ordre.

Cela conclut la preuve. □



Le cycle C_4



Le graphe total d'incidence du cycle C_4

FIGURE 5.1 – Le cycle C_4 et son graphe total d'incidence.

Puisque tout arbre est 1-dégénéré, tout graphe sans mineur K_4 (et ainsi tout graphe planaire extérieur) est 2-dégénéré et tout graphe planaire est 5-dégénéré, le Théorème 5.5 permet de déduire le résultat suivant :

Corollaire 5.6. *Pour tout graphe G ,*

1. *si G est un arbre, alors $\chi_i''(G) = \Delta(G) + 2$,*
2. *si G est un graphe sans mineur K_4 (resp. graphe planaire extérieur), alors $\chi_i''(G) \leq \Delta(G) + 4$,*
3. *si G est un graphe planaire, alors $\chi_i''(G) \leq \Delta(G) + 10$.*

Soit W_n la roue d'ordre n . Nous montrons le théorème suivant.

Théorème 5.7. *Pour tout $n \geq 3$, $\chi_i''(W_n) = \Delta(G) + 2$.*

Preuve. Soient w_1, \dots, w_n les sommets de W_n où w_1 est le sommet central. Par la Proposition 5.1, $\chi_i''(W_n) \geq \Delta(G) + 2$. Pour compléter la preuve, il suffit de considérer la coloration totale d'incidence suivante :

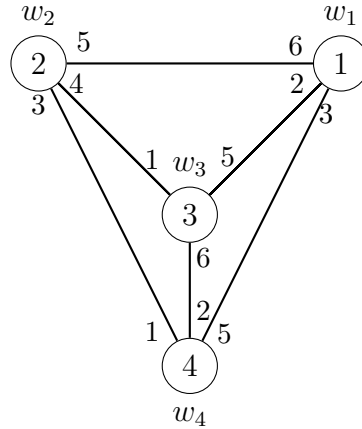
- $\sigma(w_i) = i$, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$.
- $\sigma(u) = n + 1$, pour tout $u \in A^+(w_1)$.
- $\sigma(u) = n - 1$, pour tout $u \in A^+(w_2)$.
- $\sigma(u) = n$, pour tout $u \in A^+(w_3)$.
- $\sigma(u) = i - 2$, , pour tout $u \in A^+(w_i)$ et pour tout entier i , $4 \leq i \leq n$.

Cela conclut la preuve. □

5.3 Les graphes complets

Soit K_n le graphe complet d'ordre n . Puisque $\chi(K_n) = \chi_i(K_n) = \Delta(K_n) + 1$, d'après la Proposition 5.1, $\chi_i''(K_n) \leq 2\Delta(K_n) + 2$. Dans cette section, nous montrons que le nombre chromatique total d'incidence de k_n est égal à $\Delta(K_n) + 3$ pour tout $n \geq 2$.

Théorème 5.8. *Pour tout $n \geq 2$, $\chi_i''(K_n) = \Delta(K_n) + 3$.*

FIGURE 5.2 – Coloration totale d'incidence du graphe complet K_4 .

Preuve. Soient w_1, \dots, w_n les sommets de K_n . Par la Proposition 5.1, $\chi''_i(K_n) \geq \Delta(K_n) + 2$. Supposons que K_n admet une $(\Delta + 2)$ -coloration totale d'incidence, cela implique que les incidences de K_n doivent recevoir exactement $\Delta(K_n) + 1$ couleurs. Puisque chaque sommet est coloré par une couleur différente des $\Delta(K_n) + 1$ couleurs de ses incidences et des couleurs des autres sommets, le nombre total de couleurs utilisées est égal à $\chi_i(K_n) + \chi(K_n) = 2\Delta(K_n) + 2$, ce qui conduit à une contradiction. Par conséquent $\chi''_i(K_n) \geq \Delta(K_n) + 3$. Pour compléter la preuve, il suffit de considérer la coloration totale d'incidence suivante.

1. Nous colorons tout d'abord les incidences de K_n comme suit :

Pour tous entiers i et j , $1 \leq i, j \leq n$,

$$\sigma(w_i, w_i w_j) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } j = 1; \\ j - 1, & \text{si } j \neq 1 \text{ et } i \neq j - 1; \\ n, & \text{si } j \neq 1, i = j - 1 \text{ et } n, i \text{ sont de même parité}; \\ n + 2, & \text{si } j \neq 1, i = j - 1 \text{ et } n, i \text{ ne sont pas de même parité}. \end{cases}$$

2. Nous colorons ensuite les sommets de K_n comme suit :

$\sigma(w_i) = i$, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$.

Cela conclut la preuve. □

La Figure 5.2 représente la coloration totale d'incidence du graphe K_4 .

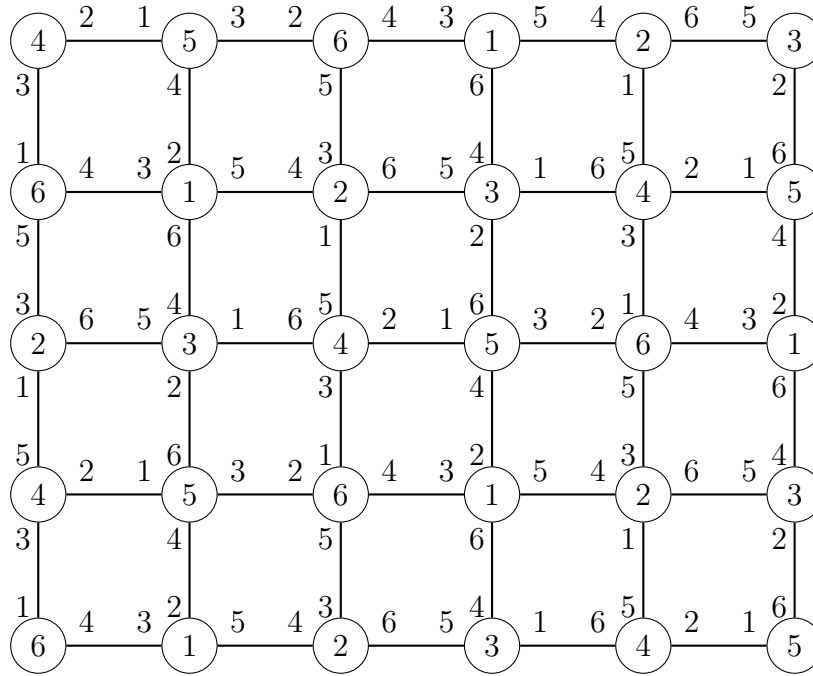


FIGURE 5.3 – Coloration totale s'incidence de la grille carrée $G_{6,5}$.

5.4 Les grilles carrées

Soit $G_{m,n}$ une grille carrée. Puisque toute grille carrée est 2-dégénérée, d'après le Théorème 4.7, $\chi''_i(G_{m,n}) \leq \Delta(G_{m,n}) + 4 \leq 8$ pour tous entiers m et n , $m \geq n \geq 2$. Dans cette section, nous montrons qu'il est possible de diminuer cette borne à 5 si $n = 2$ et à 6 si $n \geq 3$.

Théorème 5.9. *Pour tous entiers m et n , $m \geq n \geq 2$, nous avons*

$$\chi''_i(G_{m,n}) = \begin{cases} 5, & \text{si } n = 2, \\ 6, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Soit $V(G_{m,n}) = \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, donc $E(G_{m,n}) = \{(v_{i,j}, v_{i',j'}) \mid |i - i'| + |j - j'| = 1\}$. Par la Proposition 5.1, $\chi''_i(K_n) \geq \Delta(G) + 2$. Pour compléter la preuve, il suffit de considérer la coloration totale d'incidence suivante.

- Supposons tout d'abord que $n = 2$. Nous colorons les sommets de $G_{m,2}$ et leurs incidences externes comme suit :

1. Fixons $\sigma(u_1), \dots, \sigma(u_m)$ à $1, 2, 3, 4, 5, \dots, 1, 2, 3, 4, 5$, pour tout $u_i \in A^+(v_{i,1})$ et $\sigma(v_{1,1}), \dots, \sigma(v_{m,1})$ à $4, 5, 1, 2, 3, \dots, 4, 5, 1, 2, 3$.
 2. Fixons $\sigma(u_1), \dots, \sigma(u_m)$ à $3, 4, 5, 1, 2, \dots, 3, 4, 5, 1, 2$, pour tout $u_i \in A^+(v_{i,2})$ et $\sigma(v_{1,2}), \dots, \sigma(v_{m,2})$ à $5, 1, 2, 3, 4, \dots, 5, 1, 2, 3, 4$.
- Supposons maintenant que $m \geq n \geq 3$. Nous colorons les sommets de chaque ligne j de $G_{m,n}$ et leurs incidences externes selon les valeurs de $(j \bmod 3)$:
1. $j = 3k + 1, k \geq 0$.
Fixons $\sigma(u_1), \dots, \sigma(u_m)$ à $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, pour tout $u_i \in A^+(v_{i,j})$ et $\sigma(v_{1,j}), \dots, \sigma(v_{m,j})$ à $4, 5, 6, 1, 2, 3, \dots, 4, 5, 6, 1, 2, 3$.
 2. $j = 3k + 2, k \geq 0$.
Fixons $\sigma(u_1), \dots, \sigma(u_m)$ à $3, 4, 5, 6, 1, 2, \dots, 3, 4, 5, 6, 1, 2$, pour tout $u_i \in A^+(v_{i,j})$ et $\sigma(v_{1,j}), \dots, \sigma(v_{m,j})$ à $6, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 6, 1, 2, 3, 4, 5$.
 3. $j = 3k, k \geq 0$.
Fixons $\sigma(u_1), \dots, \sigma(u_m)$ à $5, 6, 1, 2, 3, 4, \dots, 5, 6, 1, 2, 3, 4$, pour tout $u_i \in A^+(v_{i,j})$ et $\sigma(v_{1,j}), \dots, \sigma(v_{m,j})$ à $2, 3, 4, 5, 6, 1, \dots, 2, 3, 4, 5, 6, 1$.

Cela conclut la preuve. □

La Figure 5.3 représente la coloration totale d'incidence de $G_{6,5}$.

5.5 Les graphes de Halin

Dans cette section, nous déterminons le nombre chromatique total d'incidence de tout graphe de Halin G avec $\Delta(G) \geq 6$. Soit G un graphe de Halin. Nous utilisons les mêmes notations que celles définies dans le chapitre 4. On note C_G le cycle extérieur de G et T_G le sous-graphe de G obtenu par la suppression des arêtes du cycle extérieur de G . Le sous-graphe T_G est ainsi un arbre, en particulier, T_G est une étoile si G est une roue.

Théorème 5.10. *Soit G un graphe de Halin de degré maximum $\Delta(G) \geq 6$. Alors $\chi''_i(G) = \Delta(G) + 2$.*

Preuve. Si $G = W_n$, alors par le Théorème 5.7, $\chi''_i(G) = \Delta(G) + 2$. Si $G \neq W_n$, par le Corollaire 5.6, $\chi''_i(T_G) = \Delta(G) + 2$. Sans perte de généralité, nous supposons que $\sigma^* : I(T_G) \cup V(T_G) \mapsto C = \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 2\}$ satisfait les propriétés suivantes :

- Les incidences internes des feuilles qui sont adjacentes à un sommet commun w reçoivent la même couleur dans T_G .
- Pour chaque feuille y_i , $1 \leq i < k$, adjacente à un sommet commun w de degré k , nous avons :

$$\sigma^*(y_i) \neq \begin{cases} \sigma^*(w, wy_{i-1}), & \text{si } i > 1; \\ \sigma^*(w, wy_{i+1}), & \text{si } i < k. \end{cases}$$

- Pour chaque couple de feuilles (y_i, y_j) , $i \neq j$, tel que y_i et y_j ne sont pas adjacentes à un sommet commun, et sont adjacentes dans C_G nous avons $\sigma^*(y_i) \neq \sigma^*(y_j)$

En effet, soient $y_1, \dots, y_k \in N_T(w)$ les feuilles de T_G ($1 \leq k < \Delta(G)$) adjacentes à un sommet commun w et soient y_0 et y_{k+1} les feuilles voisines à y_1 et y_k respectivement dans C_G et qui ne sont pas adjacentes au sommet w .

- S'il existe un entier i , $i \in \{1, \dots, k\}$, tel que $\sigma^*(y_i, y_i w) \neq \sigma^*(y_1, y_1 w)$, nous posons $\sigma^*(y_i, y_i w) = \sigma^*(y_1, y_1 w)$ puisque $\sigma^*(y_1, y_1 w) \notin C_{I_w} \cup \sigma^*(w)$.
- Puisque $\Delta(G) \geq 6$, nous pouvons poser $c_1 \in C \setminus \{\sigma^*(w, wy_2), \sigma^*(w, wy_1), \sigma^*(y_1, wy_1), \sigma^*(y_2), \sigma^*(y_0), \sigma^*(w)\}$, $c_k \in C \setminus \{\sigma^*(w, wy_{k-1}), \sigma^*(w, wy_k), \sigma^*(y_k, wy_k), \sigma^*(y_{k+1}), \sigma^*(y_{k-1}), \sigma^*(w)\}$ et $c_i \in C \setminus \{\sigma^*(w, wy_{i+1}), \sigma^*(w, wy_{i-1}), \sigma^*(w, wy_i), \sigma^*(y_i, wy_i), \sigma^*(y_{i+1}), \sigma^*(y_{i-1}), \sigma^*(w)\}$, $2 \leq i \leq k - 1$.

Nous étendons maintenant σ^* à une coloration totale d'incidence $\sigma : I(T_G) \cup V(T_G) \mapsto C$ en utilisant les mêmes couleurs. Soit $\{y_1, \dots, y_m\}$ l'ensemble de toutes les feuilles de G . Soit v un sommet intérieur dans G et supposons, sans perte de généralité, que $y_1, \dots, y_k \in N_G(v)$ ($1 \leq k < \Delta(G) < m$) (voir Figure 5.4). Nous colorons circulairement les incidences de tous les sommets extérieurs dans C_G à partir de l'incidence $(y_2, y_2 y_1)$ comme suit :

1. Type de coloration 1 : nous posons

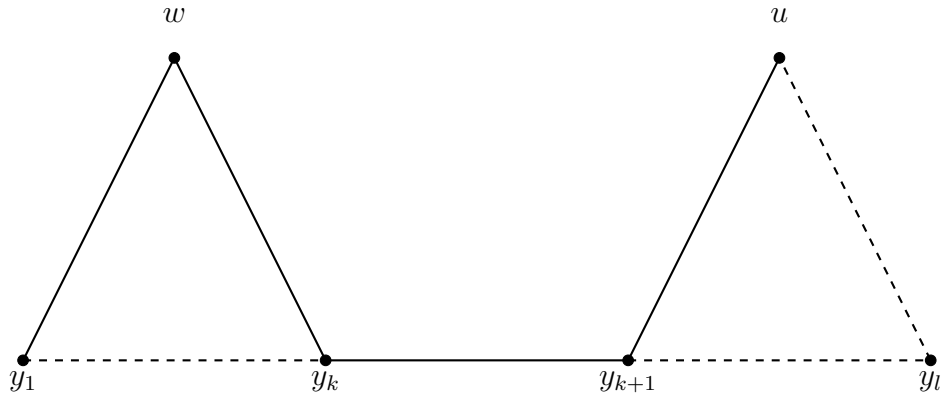
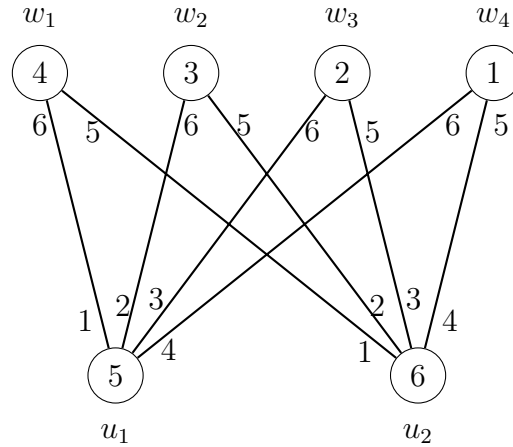


FIGURE 5.4 – Configuration du Théorème 5.10.

- (a) $\sigma(y_i, y_i y_{i-1}) = \sigma^*(v, v y_{i-1})$, $2 \leq i \leq k$,
 (b) $\sigma(y_i, y_i y_{i+1}) = \sigma^*(v, v y_{i+1})$, $2 \leq i \leq k - 1$.

2. Type de coloration 2 : soit $y_{k+1} \in N_G(u)$, où u est un sommet extérieur et $u \neq v$ (voir Figure 5.4). Puisque $\sigma(y_k, y_k y_{k+1})$ est restreinte par au plus 6 couleurs, il existe $\alpha \in C \setminus \{\sigma(y_k, y_k y_{k-1}), \sigma(y_{k-1}, y_{k-1} y_k), \sigma^*(y_k, y_k v), \sigma^*(y_{k+1}, y_{k+1} v), \sigma^*(y_k), \sigma^*(y_{k+1})\}$, telle que $\sigma(y_k, y_k y_{k+1}) = \alpha$. Maintenant $\sigma(y_{k+1}, y_{k+1} y_k)$ est restreinte par au plus 7 couleurs. Puisque $\Delta(G) \geq 6$, nous pouvons choisir $\sigma(y_{k+1}, y_{k+1} y_k) \in C \setminus (C_{I_k} \cup \{\sigma^*(y_{k+1}, y_{k+1} u), \sigma^*(u, u y_{k+1}), \sigma^*(y_k), \sigma^*(y_{k+1})\})$.

Nous continuons à colorer circulairement les arêtes non encore colorées $y_{k+1} y_{k+2}, y_{k+2} y_{k+3}, \dots, y_{m-1} y_m, y_m y_1$, de C_G . Si deux sommets d'une arête non encore colorée sont adjacents au même sommet intérieur, alors nous colorons selon le type 1. Si deux sommets d'une arête non encore colorée sont adjacents à des sommets intérieurs différents, alors nous colorons selon le type 2. De cette manière, nous colorons toute les arêtes non encore colorées de C_G sauf l'incidence $(y_1, y_1 y_2)$. Notons que $\sigma(y_1, y_1 y_2)$ est restreinte par au plus 7 couleurs, nous pouvons poser $\sigma(y_1, y_1 y_2) \in C \setminus \{\sigma(y_m, y_m y_1), \sigma(y_1, y_1 y_m), \sigma^*(y_1, y_1 v), \sigma^*(v, v y_1), \sigma^*(y_2, y_2 y_3), \sigma(y_1)^*, \sigma^*(y_2)\}$. De plus, pour tout $(v, e) \in (I(G) \cap I(T))$, $\sigma(v, e) = \sigma^*(v, e)$. Donc, nous obtenons une $(\Delta + 2)$ -coloration totale d'incidence de G . Cela conclut la preuve. \square

FIGURE 5.5 – Coloration totale d'incidence du graphe biparti complet $K_{2,4}$.

5.6 Les graphes bipartis complets

Soit $K_{m,n}$ le graphe biparti complet. Puisque $\chi(K_{m,n}) = 2$ et $\chi_i(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n}) + 2$, d'après la Proposition 5.1, $\chi''_i(K_{m,n}) \leq \Delta(K_{m,n}) + 4$. Dans cette section, nous déterminons des valeurs exactes du nombre chromatique total d'incidence de $K_{m,n}$ pour certaines valeurs de m et n . Nous allons prouver deux lemmes, dont le résultat principal de cette section découlera.

Lemme 5.11. *Pour tout $n \geq 2$, $\chi''_i(K_{2,n}) = n + 2 = \Delta(K_{2,n}) + 2$.*

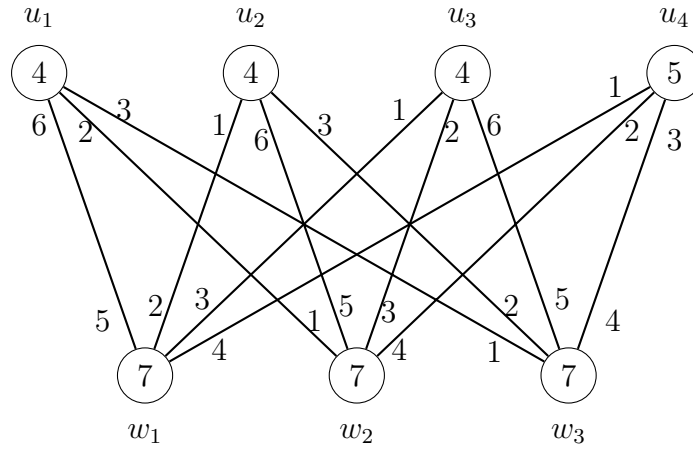
Preuve. Soient w_1, \dots, w_n les sommets de degré 2 et soient les sommets u_1, u_2 de degré n . D'après la Proposition 5.1, $\chi''_i(K_{2,n}) \geq \Delta(K_{2,n}) + 2$. Pour compléter la preuve, il suffit de considérer la coloration totale d'incidence suivante :

- $\sigma(w_i) \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$.
- $\sigma(x) = i$, pour tout $x \in A^+(w_i)$, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$.
- $\sigma(x) = \sigma(u_2) = n + 1$, pour tout $x \in A^+(u_1)$.
- $\sigma(x) = \sigma(u_1) = n + 2$, pour tout $x \in A^+(u_2)$.

Cela conclut la preuve. □

La Figure 5.5 représente la coloration totale d'incidence du graphe $K_{2,4}$.

Lemme 5.12. *Pour tout $n > m > 2$, $\chi''_i(K_{m,n}) = n + 3 = \Delta(K_{m,n}) + 3$.*

FIGURE 5.6 – Coloration totale d'incidence du graphe biparti complet $K_{3,4}$.

Preuve. Soient w_1, \dots, w_m les sommets de degré n et soient u_1, \dots, u_n les sommets de degré m . D'après la Proposition 5.1, $\chi''_i(K_{m,n}) \geq \Delta(K_{m,n}) + 2$. Pour compléter la preuve, il suffit de considérer la coloration totale d'incidence suivante :

- Nous colorons tout d'abord les incidences de $K_{m,n}$ comme suit :

$$\sigma(w_i, w_i u_j) = \begin{cases} j, & \text{si } i \neq j, \\ n + 1, & \text{si } i = j; \end{cases}$$

et

$$\sigma(u_j, w_i u_j) = \begin{cases} i, & \text{si } i \neq j, \\ n + 2, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

- Les sommets de $K_{m,n}$ sont colorés de la manière suivante :

$\sigma(w_j) = n + 3$ et $\sigma(u_j) = n$ pour tout entier j , $1 \leq j \leq m$, et finalement $\sigma(u_i) = n + 1$ pour tout entier i , $m + 1 \leq i \leq n$.

Cela conclut la preuve. □

La figure 5.6 représente la coloration totale d'incidence du $K_{3,4}$.

À partir de la Proposition 5.1 et des Lemmes 5.11 et 5.12, nous obtenons :

Théorème 5.13. *Si $K_{m,n}$ est un graphe biparti complet avec $m \geq n \geq 2$, alors*

$$\begin{cases} \chi''_i(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n}) + 2, & \text{si } n = 2, \\ \chi''_i(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n}) + 3, & \text{si } n > 2 \text{ et } n \neq m, \\ \chi''_i(K_{m,n}) \leq \Delta(K_{m,n}) + 4, & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit et étudié la version totale de la coloration d'incidence. Nous avons déterminé des valeurs exactes du nombre chromatique total d'incidence de plusieurs classes de graphes : les graphes complets, les graphes bipartis complets, les grilles carrées et les graphes de Halin. Suite au travail présenté ici, nous proposons les problèmes suivants :

1. Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique total d'incidence du graphe biparti complet $K_{n,n}$, $n > 2$?
2. Est-il vrai que pour tout graphe G , $\chi''_i(G) \leq \Delta + 3$?
3. Quelle est la meilleure borne supérieure du nombre chromatique total d'incidence des graphes cubiques ?
4. Quelle est la meilleure borne supérieure du nombre chromatique total d'incidence des graphes r -réguliers ? (Puisque les graphes r -réguliers sont r -dégénérés, par le Théorème 5.5, nous savons que cette valeur est au plus $3r$.)

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié trois versions différentes de la coloration d'incidence. Nous rappelons les résultats principaux obtenus pour chaque version et proposons quelques perspectives de recherche ainsi que des problèmes ouverts.

La première version étudiée dans cette thèse est la coloration d'incidence standard. Nous avons étudié dans un premier temps la coloration à distance 2 de certaines classes de graphes distances et de graphes circulants, ce qui nous a permis d'obtenir soit des valeurs exactes soit des bornes supérieures du nombre chromatique d'incidence de ces classes de graphes. Étant donné que la caractérisation du nombre chromatique d'incidence des graphes distances, lorsque $D = \{1, a, a + 1\}$, $a \geq 3$, n'est pas complète, il serait intéressant de la compléter. L'étude que nous avons faite pour certaines valeurs de a des graphes circulants, lorsque $D = \{1, a\}$ est l'ensemble générateur, nous a permis de proposer la conjecture suivante :

Conjecture 5.14. *Pour tout entier $a \geq 2$, et pour tout entier $n \geq 2a + 1$,*

$$\chi_i(G(n, \{1, a\})) \leq 6.$$

La perspective la plus importante de cette partie est la généralisation des résultats obtenus pour les graphes distances et les graphes circulants lorsque $D = \{1, a\}$, $a \geq 3$, c'est-à-dire l'étude du cas cas général $D = \{a, b\}$.

La deuxième version que nous avons introduite, est la coloration par liste d'incidences. Plusieurs classes de graphes ont été étudiées dans cette partie, notamment les grilles carrées, les graphes de Halin, les couronnes généralisées des cycles, les cactus et les graphes cubiques Hamiltoniens.

Puisque ce paramètre est nouveau, plusieurs questions sont ouvertes et beaucoup de perspectives peuvent être proposées, nous citons par exemple :

1. Est-il vrai que $\text{ch}_i(G_{m,n}) = 6$ pour toute grille carrée $G_{m,n}$ avec $m \geq n \geq 3$?
2. Quelle est la meilleure borne supérieure du nombre de choisissabilité d'incidence des graphes de Halin de degré maximum 3, 4 ou 5? (Le Théorème 5.10 donne la valeur exacte seulement pour les graphes de Halin de degré maximum $k \geq 6$.)
3. Quelle est la meilleure borne supérieure possible du nombre de choisissabilité d'incidence des cactus de degré maximum 6 et contenant au moins deux 3-cycles maximaux? de degré maximum 5? de degré maximum 4 et contenant au moins un cycle maximal? (Le Théorème 4.19 donne la valeur exacte pour tous les autres cas.)
4. Quelle est la meilleure borne supérieure du nombre de choisissabilité d'incidence des graphes de degré maximum borné? En particulier, le cas des graphes de degré maximum 3? (Par la Proposition 4.4, nous savons que cette borne est au plus $3k - 2$ pour tous les graphes de degré maximum $k \geq 2$, et donc au plus 8 pour les graphes de degré maximum 3.)
5. Quelle est la valeur de $\text{ch}_i(K_n)$? (Par la Proposition 4.4, nous savons que cette valeur est au plus $3n - 5$.)
6. Quelle sont les classes de graphes qui satisfont la version incidence de la conjecture de coloration par liste, autrement dit, pour quels graphes G avons-nous $\text{ch}_i(G) = \chi_i(G)$? (Par la Proposition 4.3 et le Théorème 4.7, nous savons par exemple que cette égalité est vérifiée par tous les arbres.)

La dernière version de la coloration d'incidence étudiée dans cette thèse est la version totale. Pour cela, nous avons donné des valeurs exactes ou des bornes supérieures du nombre chromatique total d'incidence de quelques classes de graphes comme les graphes complets, les graphes bipartis complets, les grilles carrées et les graphes de Halin.

Comme ce paramètre vient aussi d'être introduit, plusieurs questions aussi sont ouvertes et beaucoup de perspectives de recherche peuvent être proposées, nous citons par exemple :

1. Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique total d'incidence du graphe

biparti complet $K_{n,n}$, $n > 2$?

2. Est-il vrai que pour tout graphe G , $\chi''_i(G) \leq \Delta + 3$?
3. Quelle est la meilleure borne supérieure du nombre chromatique total d'incidence des graphes cubiques?
4. Quelle est la meilleure borne supérieure du nombre chromatique total d'incidence des graphes r -réguliers? (Puisque les graphes r -réguliers sont r -dégénérés, par le Théorème 5.5, nous savons que cette valeur est au plus $3r$.)

Bibliographie

- [1] G. Agnarsson and M.M. Halldórsson. Coloring powers of planar graphs. *SIAM J. Discrete Math.* 16(4):651–662 (2003).
- [2] I. Algor and N. Alon. The star arboricity of graphs. *Discrete Math.* 75:11–22 (1989).
- [3] N. Alon. Restricted colorings of graphs. In “Surveys in combinatorics”, Proc. 14th British Combinatorial Conference, *London Math. Soc. Lecture Notes Ser.* 187 :1–33 (1993).
- [4] S.D. Andres. The incidence game chromatic number. *Discrete Appl. Math.* 157:1980-1987 (2009).
- [5] K. Appel and W. Haken. The solution of the four-color-map problem. *Illinois Journal of Mathematics*, 21:429-490, 1977.
- [6] K. Appel, W. Haken and J. Koch. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21:491-567, 1977.
- [7] A. Asratian and R. Kamalian. Investigation on interval edge-colorings of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 62:34-43 (1994).
- [8] J. Barajas and O. Serra. On the chromatic number of circulant graphs. *Discrete Math.* 309:5689-5696 (2009).
- [9] M. Behzad. Graphs and their chromatic numbers. *Ph.D. Thesis, Michigan State University* (1965).
- [10] B. Benmedjdoub, I. Bouchemakh, E. Sopena. Incidence Choosability of Graphs. *Discrete Appl. Math.* submitted version <https://arxiv.org/abs/1705.01744>. (2017).

-
- [11] B. Benmedjdoub, I. Bouchemakh, E. Sopena. Incidence Choosability of Graphs. *Colourings, Independence and Domination, CID'17*. Poland (2017).
- [12] B. Benmedjdoub, E. Sopena, I. Bouchemakh. Coloration des carrés des graphes circulants et des graphes distances. *International Conference on Discrete Math. and Computer Sci., DIMACOS'15*. Algeria (2015).
- [13] B. Benmedjdoub, E. Sopena, I. Bouchemakh. On the list incidence chromatic number of graphs. *Bordeaux Graphs Workshop , BGW'16*. France (2016).
- [14] B. Benmedjdoub, E. Sopena, I. Bouchemakh. 2-Distance Colorings of Integer Distance Graphs. *Discuss. Math. Graph Theory* (in press), doi :10.7151/dmgt.2040. (2017).
- [15] C. Berge. Graphes. *Gauthier-Villars. 3^e édition* (1983).
- [16] H.L. Bodlaender. On the complexity of some coloring games. *Int. J. Found. Comput. Sci.* 2:133-147 (1991).
- [17] B. Bollobás and A. J. Harris. List-colourings of graphs. *Graphs Combin.* 1:115–157 (1985).
- [18] M. Bonamy, H. Hocquard, S. Kerdjoudj and A. Raspaud. Incidence coloring of graphs with high maximum average degree. *Discrete Appl. Math.* 227:29–43 (2017).
- [19] M. Bonamy, B. Lévêque and A. Pinlou. 2-distance coloring of sparse graphs. *J. Graph Theory* 77(3):190–218 (2014).
- [20] M. Bonamy, B. Lévêque and A. Pinlou. Graphs with maximum degree $\Delta \geq 17$ and maximum average degree less than 3 are list 2-distance $(\Delta + 2)$ -colorable. *Discrete Math.* 317:19–32 (2014).
- [21] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory with Applications. *New York : Macmillan* (1976).
- [22] O.V. Borodin and A.O. Ivanova. 2-distance $(\Delta + 2)$ -coloring of planar graphs with girth six and $\Delta \geq 18$. *Discrete Math.* 309:6496–6502 (2009).
- [23] R.A. Brualdi and J.J.Q. Massey. Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Math.* 122:51–58 (1993).

-
- [24] T. Calamoneri. The $L(h, k)$ -labelling problem: An updated survey and annotated bibliography. *The Computer Journal* 54(8):1344-1371 (2011).
- [25] C.N. Campos and C.P. de Mello. A result on the total colouring of powers of cycles. *Discrete Appl. Math.* 155:585–597 (2007).
- [26] G. Chang, D. Liu and X. Zhu. Distance Graphs and T-Coloring. *J. Comb. Theory* 75:259-269 (1999).
- [27] C. Charpentier and E. Sopena. Incidence coloring game and arboricity of graphs. *Lecture Notes in Comput. Sci* 8288:106-114 (2013).
- [28] G. Chartrand and P. Zhang. *Chromatic Graph Theory*. CRC Press, Chapman & Hall (2009).
- [29] J. Chen, G. Chang and K. Huang. Integral distance graphs. *J. Graph Theory* 25:287–294 (1997).
- [30] K.L. Collins, D.C. Fisher and J.P. Hutchinson. On 3- and 4-coloring some circulant graphs, *Presented at DREI'98 Graph Theory and Combinatorial Optimization, August 2-7* (1998).
- [31] W. Deuber and X. Zhu. The chromatic number of distance graphs. *Discrete Math.* 165/166:195–204 (1997).
- [32] R. Diestel. *Graph Theory. 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg* (2005).
- [33] Z. Dvořák, D. Král, P. Nejedlý and R. Škrekovski. Coloring squares of planar graphs with girth six. *European J. Combin.* 29(4):838–849 (2008).
- [34] E.B. Eggleton, P. Erdős and D.K. Skilton. Colouring the real line. *Discrete Math.* 32:17–32 (1991).
- [35] P. Erdős, A. L. Rubin and H. Taylor. Choosability in graphs. *In Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Humboldt State Univ., Arcata, Congress. Numer.* 26 :125–157 (1979).
- [36] A. Fahimi and B. Omoomi. On incidence coloring for some graphs of maximum degree 4. *Ars Combin.* 125:33-45 (2016).

-
- [37] D. Fisher. 1000s of theorems about circulant graphs. *Proceedings of the 29th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, FL, USA* (1998).
- [38] M. Gardner. Mathematical game. *Sci. Am.* 23 (1981).
- [39] P. Gregor, B. Lužar and R. Soták. Note on incidence chromatic number of subquartic graphs. *J. Comb. Optim.* 34:174-181 (2017).
- [40] P. Gregor, B. Lužar and R. Soták. On incidence coloring conjecture in Cartesian products of graphs. *Discrete Appl. Math.* 213:93-100 (2016).
- [41] B. Guiduli. On incidence coloring and star arboricity of graphs. *Discrete Math.* 163:275–278 (1997).
- [42] C. Heuberger. On planarity and colorability of circulant graphs. *Discrete math.* 268:153-169 (2003).
- [43] A.J.W. Hilton, J.-P. Liu and C. Zhao. The total chromatic numbers of joins of sparse graphs. *Australas. J. Combin.* 28:93–105 (2003).
- [44] H. Hocquard, S. Kerdjoudj and A. Raspaud. Incidence coloring of planar graphs without adjacent small cycles. *J. Combin.* 8(1):167-187 (2017).
- [45] M. Hosseini Dolama. Contribution à l'étude de quelques problèmes de coloration de graphes. *Thèse de doctorat. Université de Bordeaux* (2005).
- [46] M. Hosseini Dolama and É. Sopena. On the maximum average degree and the incidence chromatic number of a graph. *Discrete Math. and Theoret. Comput. Sci.* 7:203–216 (2005).
- [47] M. Hosseini Dolama, É. Sopena and X. Zhu. Incidence coloring of k -degenerated graphs. *Discrete Math.* 283(1-3):121–128 (2004).
- [48] C.I. Huang, Y.L. Wang and S.S. Chung. The incidence coloring number of meshes. *Computers and Math. with Appl.* 48:1643-1649 (2004).
- [49] R. Janczewski, A. Małafiejska and M. Małafiejski. Interval incidence coloring of bipartite graphs. *Discrete Appl. Math.* 166:131-140 (2014).
- [50] R. Janczewski, A. Małafiejska and M. Małafiejski. Interval incidence coloring. *Discrete Appl. Math.* 182:73-83 (2015).

-
- [51] T. R. Jensen and B. Toft. Graph Coloring Problems. *Wiley, New York* (1995).
- [52] A. Kemnitz and H. Kolberg. Coloring of integer distance graphs. *Discrete Math.* 191:113–123 (1998).
- [53] J.Y. Kim. The incidence game chromatic number of paths and subgraphs of wheels. *Discrete Appl. Math.* 159(8):683-694 (2011).
- [54] F. Kramer and H. Kramer. Un problème de coloration des sommets d'un graphe. *C. R. Acad. Sci. Paris A.* 268(7):46–48 (1969).
- [55] F. Kramer and H. Kramer. A survey on the distance-coloring of graphs. *Discrete Math.* 308:422–426 (2008).
- [56] J. Kratochvíl, Zs. Tuza and M. Voigt. New trends in the theory of graph colorings : Choosability and list coloring. In “Contemporary Trends in Discrete Mathematics”, *Dimacs Series in Discrete Math. and Theoret. Comput. Sci.* 49 :183–197 (1999).
- [57] D. Li and M. Liu. Incidence Colorings of Cartesian Products of Graphs over Path and Cycles. *Adv. Math.* 40:697-708 (2011).
- [58] X. Li and J. Tu. NP-completeness of 4-incidence colorability of semi-cubic graphs. *Discrete Math.* 308(7):1334-1340 (2008).
- [59] G.-R. Li and L.-M. Zhang, Total chromatic number of one kind of join graphs. *Discrete Math.* 306:1895–1905 (2006).
- [60] K.W. Lih and W.F. Wang. Coloring the square of an outerplanar graph. *Taiwanese J. Math.* 10(4):1015–1023 (2006).
- [61] D. D.-F. Liu. From rainbow to the lovely runner: A survey on coloring parameters of distance graphs. *Taiwanese J. Math.* 12(4):851-871 (2008).
- [62] M. Maydanskiy. The incidence coloring conjecture for graphs of maximum degree three. *Discrete Math.* 292:131–141 (2005).
- [63] M. Meszka, R. Nedela and A. Rosa. Circulants and the chromatic index of Steiner triple systems. *Math. Slovaca* 56:371-378 (2006).
- [64] L. Miao and Y. Fan. The Distance Coloring of Graphs. *Acta Math Sinica.* 30:1579–1587 (2014).

-
- [65] J. Morris. Automorphism Groups of Circulant Graphs - A Survey. In A. Bondy, J. Fonlupt, J.-L. Fouquet, J. C. Fournier, and J.L. Ramirez Alfonsin (Eds.), *Graph Theory in Paris (Trends in Mathematics)*, Birkhäuser 311-325 (2007).
- [66] K. Nakprasit and K. Nakprasit. Incidence colorings of the powers of cycles. *Int. J. Pure Applied Math.* 76(1):143–148 (2012).
- [67] K.J. Pai, J.M. Chang, J.S. Yang and R.Y. Wu. Incidence coloring on hypercubes. *Theoret. Comput. Sci.* 557:59–65 (2014).
- [68] J. Peters, N. Obradovic and G. Ružić. Minimum chromaticity of circulant graphs. *Discrete Math.* 299:288-296 (2005).
- [69] A. Prowse and D.R. Woodall. Choosability of Powers of Circuits. *Graphs Combin.* 19 :137–144, 2003.
- [70] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas. The four-color theorem. *J. of Combin. Theory Ser. B*, 70(1):2-44 (1997).
- [71] A.C. Shiao, T.-H. Shiao, Y.-L. Wang. Incidence coloring of Cartesian product graphs. *Inform. Process. Lett.* 115(10):765-768 (2015).
- [72] W.C. Shiu, P.C.P. Lam and D.-L. Chen. On incidence coloring for some cubic graphs. *Discrete Math.* 252:259–266 (2002).
- [73] W.C. Shiu and P.K. Sun. Invalid proofs on incidence coloring. *Discrete Math.* 308(24):6575–6580 (2008).
- [74] E. Sopena. www.labri.fr/perso/sopena/TheIncidenceColoringPage.
- [75] É. Sopena and J. Wu. The incidence chromatic number of toroidal grids. *Discuss. Math. Graph Theory* 33:315–327 (2013).
- [76] P.K. Sun. Incidence coloring of regular graphs and complement graphs. *Taiwanese J. Math.* 16(6):2289–2295 (2012).
- [77] J. J. Sylvester. Mathematical Questions with Their Solutions. *Educational Times* 41. 21:171–178 (1884).
- [78] C. Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *J. of Combin. Theory Ser. B* 62(1):180–181 (1994).

-
- [79] Z. Tuza. Graph colorings with local constraints – A survey. *Discuss. Math. Graph Theory* 17 :161–228, 1997.
- [80] V.G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Metody Diskret. Anal.* 3:25-30 (1964).
- [81] V. G. Vizing. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors. *Metody Diskret. Anal. Teorii Kodov Shem, in Russian* 101:3–10 (1976).
- [82] M. Voigt. Die chromatische Zahl einer speziellen Klasse unendlicher Graphen, Dissertationsschrift, *Techn. Univ. Ilmenau.* (1992).
- [83] M. Voigt. List colourings of planar graphs. *Discrete Math.* 120:2015–219 (1993).
- [84] M. Voigt and H. Walther. Chromatic number of prime distance graphs, *Discrete Appl. Math.* 51:197–209 (1994).
- [85] H. Walther. Über eine spezielle Klasse unendlicher Graphen. In K. Wagner and R. Bodendiek, eds, *Graphentheorie*, vol. 2, pp. 268–295 (1990), Bibl. Inst., Mannheim.
- [86] W.-F. Wang. The total chromatic number of planar graphs with maximum degree ten. *J. Graph Theory* 54:91–102 (2007).
- [87] S.-D. Wang, D.-L. Chen, S.-C. Pang. The incidence coloring number of Halin graphs and outerplanar graphs. *Discrete Math.* 256(1-2):397–405 (2002).
- [88] W.F. Wang and K.W. Lih. Labeling planar graphs with conditions on girth and distance two. *SIAM J. Discrete Math.* 17(2):264-275 (2003).
- [89] S.-D Wang, S.-C. Pang. The determination of the total chromatic number of series-parallel graphs with $\Delta(G) \geq 4$. *Graphs Combin.* 21:531–540 (2005).
- [90] G. Wegner. Graphs with given diameter and a colouring problem. Technical Report, University of Dortmund (1977).
- [91] M.-Y. Xu. Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs. *Discrete Math.* 182:309-319 (1998).
- [92] D. Yang. Fractional incidence coloring and star arboricity of graphs. *Ars Combin.* 105:213-224 (2012).

- [93] H. Yeh and X. Zhu. 4-Colorable 6-regular toroidal graphs. *Discrete Math.* 273:261-274 (2003).
- [94] T. Zeitlhofer and B. Wess. List-coloring of interval graphs with application to register assignment for heterogenous register-set architectures. *Signal Process.* 83:1411–1425 (2003).
- [95] X. Zhu. Circular chromatic number of distance graphs with distance sets of cardinality three. *J. Graph Theory* 41(3):195–207 (2002).
- [96] B. Zmazek, J. Žerovnik. Behzad-Vizing conjecture and Cartesian product graphs. *Electron. Notes Discrete Math.* 17:297–300 (2004).
- [97] M. Zwonek. A note on total colourings of digraphs. *Discrete Math.* 306:2282–2291 (2006).