N^0 d'ordre : 197/2024-C/MT

République Algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Mathématiques

THESE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR

En : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Discrètes, Optimisation et Cryptologie (MaDOC)

Par : LAOUAR Abdelamin

Sujet

Sur le nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants

---

Soutenue publiquement le 04 juillet 2024, devant le jury composé de :

M. AIDER Méziane	Professeur à l'USTHB	Président
Mme BOUCHEMAKH Isma	Professeur à l'USTHB	Directrice de thèse
M. SOPENA Eric	Professeur à l'Université de Bordeaux	Co-directeur de Thèse
M. BOUROUBI Sadek	Professeur à l'USTHB	Examinateur
M. CHELLALI Mustapha	Professeur à l'Université de Blida1	Examinateur

مُلَخَّص

نظرية المخططات هي فرع أساسي من الرياضيات التوافقية، ولها تطبيقات متنوعة في العديد من مجالات الحياة اليومية، مثل تحسين شبكات النقل، شبكات الاتصالات، وتصميم الشبكات الكهربائية.

أحد الأهداف الرئيسية لهذه النظرية هو إيجاد وتحليل المتغيرات التي تساعد في حل مختلف المشكلات. من بين هذه المتغيرات، يلعب عدد البث المستقل دوراً حاسماً.

ليكن $G = (V, E)$ مخططاً غير موجه، بسيطاً ومرتبطاً. البث f على المخطط G هو دالة $f : V \to \{0, \ldots, diam(G)\}$ ، بحيث كل رأس v يحقق $f(v) \leq e_G(v)$ ، حيث $diam(G)$ هو قطر G و $e_G(v)$ هو اللامركزية للرأس v . البث f يكون مستقلاً إذا كان $d(f(u), f(v)) > \max\{f(u), f(v)\}$ لكل زوج من الرؤوس u و v بحيث $f(u), f(v) > 0$. تكلفة البث f هي $\sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v)$ ، والتكلفة القصوى للبث المستقل، التي نرمز لها بـ $\beta_b(G)$ ، هي عدد البث المستقل للمخطط G .

في هذه الأطروحة، ركزنا على المتغير β_b لفئة المخططات الدائرية غير الموجهة $C(n; 1, a)$ ، حيث $1 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. ثم قمنا بتحديد اتجاه على هذه المخططات لدراسة الاستقلال البثي في حالة المخططات الدائرية الموجهة.

لقد حددنا، في كلتا الحالتين (الموجهة وغير الموجهة)، إما قيمًا دقيقة أو حدودًا للمتغير β_b .

كلمات مفتاحية . نظرية المخططات ، بث مستقل ، قطر ، لامركزية ، المخططات الدائرية.

Résumé

La théorie des graphes est une discipline essentielle des mathématiques combinatoires, avec des applications variées dans de nombreux domaines de la vie quotidienne, tels que l'optimisation des réseaux de transport, des réseaux de communication, et la conception de réseaux électriques.

L'un des objectifs principaux de cette théorie est de trouver et d'analyser des invariants qui aident à résoudre divers problèmes. Parmi ces invariants, le nombre d'indépendance broadcast joue un rôle crucial.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, simple et connexe. Un broadcast f sur le graphe G est une fonction $f : V \leftarrow \{0, \ldots, \mathrm{diam}(G)\}$, telle que chaque sommet v satisfait $f(v) \leq e_G(v)$, où $\mathrm{diam}(G)$ est le diamètre de G et $e_G(v)$ est l'excentricité du sommet v. Un broadcast f est indépendant si $d(f(u), f(v)) > \max\{f(u), f(v)\}$ pour toute paire de sommets u et v tels que $f(u), f(v) > 0$. Le coût d'un broadcast f est $\sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v)$, et le coût maximal d'un broadcast indépendant, noté $\beta_b(G)$, est le nombre d'indépendance broadcast de G.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'invariant β_b pour la classe des graphes circulants $C(n; 1, a)$, $1 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, non orientés. Ensuite, nous avons défini une orientation sur ces graphes pour étudier la broadcast indépendance dans le cas des graphes circulants orientés.

Nous avons déterminé, dans les deux cas (orienté et non orienté), soit des valeurs exactes, soit des bornes de l'invariant β_b.

Mots clés : Théorie des graphes ; Broadcast indépendant ; Diamètre ; Excentricité ; Graphes circulants.

Abstract

Graph theory is an essential discipline in combinatorial mathematics, with various applications in many areas of daily life, such as optimizing transportation networks, communication networks, and designing electrical networks.

One of the main objectives of this theory is to find and analyze invariants that help solve various problems. Among these invariants, the broadcast independence number plays a crucial role.

Let $G = (V, E)$ be an undirected, simple, and connected graph. A broadcast f on the graph G is a function $f : V \to \{0, \ldots, \text{diam}(G)\}$, such that each vertex v satisfies $f(v) \leq e_G(v)$, where $\text{diam}(G)$ is the diameter of G and $e_G(v)$ is the eccentricity of the vertex v. A broadcast f is independent if $d(f(u), f(v)) > \max\{f(u), f(v)\}$ for every pair of vertices u and v such that $f(u), f(v) > 0$. The cost of a broadcast f is $\sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v)$, and the maximum cost of an independent broadcast, denoted $\beta_b(G)$, is the broadcast independence number of G.

In this thesis, we focused on the invariant β_b for the class of undirected circulant graphs $C(n; 1, a)$, where $1 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. We then defined an orientation on these graphs to study broadcast independence in the case of directed circulant graphs.

We determined, in both cases (directed and undirected), either exact values or bounds for the invariant β_b.

Keywords : Graph theory ; Independant broadcast ; Diameter ; Eccentricity ; Circulant graphs.

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Nous voici enfin à l'heure des remerciements : Une étape qui m'offre l'opportunité de rendre un hommage sincère à toutes les personnes qui ont participé à la réussite de ces travaux, de près ou de loin.

Tout d'abord, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce projet.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers ma directrice de thèse, Mademoiselle Isma BOUCHEMAKH, Professeure à l'USTHB. Ce travail ne serait pas ce qu'il est sans son encadrement exceptionnel. Je la remercie pour son soutien pratique et moral, ainsi que pour ses encouragements constants.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers mon co-directeur de thèse, Monsieur Éric SOPENA, Professeur à l'Université de Bordeaux, pour son soutien et son accueil chaleureux lors de mes séjours à Bordeaux. Sa rigueur et sa disponibilité tout au long de notre collaboration ont été très précieuses pour la réalisation de ce projet.

Un grand merci à Monsieur Méziane AIDER, Professeur à l'USTHB, d'avoir accepté d'être Président du jury de cette thèse. Je remercie également les deux Professeurs, Monsieur Sadek Bourobi, Professeur à l'USTHB et Monsieur Mustapha CHELLALI, Professeur à l'Université de Blida1, d'avoir accepté d'évaluer mon travail en tant qu'examinateurs.

Je souhaite également remercier du fond du cœur ma mère, ma femme et mon petit prince Tamimo. Leur amour et leur soutien ont été essentiels pour moi.

Enfin, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à mon ami Sofiane TALEB, ainsi qu'à tous mes chers amis de la Faculté de Mathématiques : Hamza, Brahim, Nassim, Yacine, Nedjmeddine. Bien que je ne puisse pas les citer tous, leur présence et leur amitié m'ont été précieuses.

À la mémoire de mon père Rabeh et de mon frère Riad.

Je dédie ce travail,
À ma mère,
À ma femme,
À mon fils Tamimo,
À mes frères Nadjib & Ramzi,
À mes sœurs,
À tous mes neveux,
À mon oncle Ahmed et toute ma famille.

Table des matières

1 Concepts Fondamentaux en Théorie des Graphes **1**

1.1 Graphes : Définitions et notations 1

1.1.1 Graphe 1

1.1.2 Voisinage et degré d'un sommet 2

1.1.3 Chaîne, cycle 3

1.1.4 Distance, excentricité 4

1.1.5 Clique et stable 5

1.1.6 Sous-graphe et sous-graphe induit 5

1.1.7 Isomorphisme de graphes 6

1.2 Quelques classes de graphes 6

1.2.1 Graphe connexe 6

1.2.2 Chaîne 6

1.2.3 Cycle 7

1.2.4 Graphe complet 7

1.2.5 Graphe biparti 7

1.2.6 Arbre 7

1.2.7 Grille 10

1.2.8 Graphe circulant 10

1.3 Graphes Orientés 11

1.3.1 Voisinage sortant et voisinage entrant 12

1.3.2 Degré entrant et degré sortant 12

1.3.3 Chemin et Circuit 12

2 Domination et domination broadcast sur les graphes **13**

2.1 Domination dans les graphes 13

2.1.1 Définitions et notations 14

2.1.2 Quelques types de domination 15

2.2 Domination broadcast dans les graphes 18
2.2.1 Définitions et notations 18
2.2.2 Quelques types de fonctions broadcast 20
2.3 Le nombre d'indépendance broadcast 31
2.3.1 Caractérisation des broadcasts indépendants maximaux et bornes sur le nombre d'indépendance broadcast 31
2.3.2 Quelques valeurs exactes sur le nombre d'indépendance broadcast . . . 33

3 Nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants $C(n;1,a)$ 36
3.1 Résultats préliminaires 37
3.2 Broadcasts indépendants optimaux 2-limités 43
3.3 Bornes générales sur le nombre d'indépendance broadcast de $C(n;1,a)$ 51
3.4 Quelques valeurs exactes 54

4 Nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants orientés $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ 71
4.1 Résultats préliminaires 71
4.2 Broadcast indépendant optimal ℓ-limité 78
4.3 Bornes générales sur le nombre d'indépendance broadcast sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ . . . 88
4.3.1 Bornes pour les broadcast indépendants $(a-1)$-limité s 89
4.3.2 Bornes pour les broadcast indépendants q-limités 93
4.4 Quelques valeurs exactes 100

Conclusion et perspectives 103

Table des figures

1.1 Deux exemples de graphes 1
1.2 Un graphe non orienté d'ordre $n = 5$ et de taille $m = 4$ 2
1.3 Un graphe avec un sommet pendant 3
1.4 Un graphe avec plusieurs $(v_1 - v_5)$-chaînes simples et élémentaires 3
1.5 Un graphe de diamètre 4 et de rayon 2 4
1.6 Un graphe avec un stable d'ordre 3 et une clique d'ordre 4 5
1.7 Un sous-graphe H et un sous-graphe induit H' du graphe G 5
1.8 Deux graphes isomorphes 6
1.9 La chaîne P_7 6
1.10 Un graphe complet K_4 7
1.11 Un graphe biparti 7
1.12 Un arbre 7
1.13 L'étoile $K_{1,6}$ 8
1.14 L'étoile 2-subdivisée $S_2(K_{1,5})$ 8
1.15 Araignée généralisée $S(2, 1, 3, 3)$ 8
1.16 La double araignée $S_{\times 2}(3^4)$ 9
1.17 Une chenille à 18 sommets 9
1.18 Un homard 10
1.19 La grille $P_3 \square P_5$ 10
1.20 Trois graphes circulants 11
1.21 Un graphe orienté 11

2.1 Distribution optimale des reines sur des échiquiers 5×5 et 8×8 14
2.2 Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 5$ 15
2.3 Exemple de *broadcast* 20
2.4 Exemples de *broadcasts* dominants 21

2.5 Exemples de *broadcast* 3-dominants 23
2.6 Exemples de broadcast non-redondants 24
2.7 Exemples de *broadcast* indépendants 25
2.8 Le graphe de Petersen 26
2.9 Exemples de *broadcast de dominantes et indépendantes* 27
2.10 Exemples de *broadcast de packing* 29
2.11 Exemples de *broadcast non-redondants* 30
2.12 Un *broadcast indépendnt* sur P_6 33

3.1 Deux graphes circulants 36
3.2 Deux ensembles de stables S dans $C(10;1,5)$ et S' dans $C(8;1,4)$ 38
3.3 Le graphe circulant $C(20;1,10)$ 38
3.4 Le graphe circulant $C(20;1,10)$, avec $f(v_3) = 3$ 39
3.5 Le graphe circulant $C(2a;1,a)$ 40
3.6 Les sommets de V_g^+ (les sommets noirs) avec $a = 10$, $\ell = 2$ et $k = 1$. 41
3.7 Deux broadcast inépendants, f_1 sur $C(9;1,3)$ et f_2 sur $C(12;1,4)$. 42
3.8 L'ensemble $D_f(v_i)$ (les sommets noirs et gris), avec $a = 6$. 43
3.9 Construction de la fonction g dans la preuve de Lemme 3.6. 44
3.10 Construction de la fonction g dans la preuve de Lemme 3.7. 49
3.11 Les ensembles A_f^i et B_f^j. 52
3.12 Construction de la fonction f dans le preuve de la Proposition 3.12 ($a = 12$) . . 55
3.13 Le graphe circulant $C(qa;1,a)$ (seuls les indices des sommets sont indiqués) . 64
3.14 Construction des ensembles S_i dans la preuve de Théorème 3.22 ($a = 6$, $q = 5$) 65
3.15 Construction des ensembles S_i dans la preuve de Théorème 3.22 ($a = 10$, $q = 5$, $\ell = 2$) 66

4.1 L'ensemble B_f^j (les sommets noirs) avec $n = 16$ et $a = 8$ 72
4.2 L'ensemble $L(v_i)$ (les sommets noirs et gris), avec $a = 7$ et $f(v_i) = 4$ 74
4.3 Construction de l'application g dans le preuve de Théorème 4.4 avec $n = 17$ et $a = 6$ 75
4.4 Deux graphes isomorphes $\overrightarrow{C}(9;1,2)$ et $\overrightarrow{C}(9;1,5)$ 76
4.5 Construction de la fonction f dans le preuve de Théorème 4.7 avec $n = 17$ . . 78
4.6 Construction de la fonction g dans la preuve du Lemme 4.11 81
4.7 Le graphe circulant $\overrightarrow{C}(qa;1,a)$ avec $q = 3$ et $a = 7$ 83

4.8 Construction de la fonction g dans la preuve de Lemme 4.12 84
4.9 Les ensembles A_f^i et B_f^j 89
4.10 Les ensembles A_f^i et B_f^j 94
4.11 Construction de la fonction f pour le cas $a = 7$ et $q = 3$ 97
4.12 Construction de la fonction f pour le cas $a = 11$ et $q = 3$ 98
4.13 Construction de la fonction f pour le cas $a = 16$ et $q = 4$ 99

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la théorie des graphes, une branche des mathématiques discrètes, qui s'intéresse aux relations entre des entités, modélisant un système sous la forme de nœuds (les entités) et d'arêtes (représentant la relation entre ces entités). Les graphes sont utilisés pour modéliser divers phénomènes du monde réel, tels que les réseaux routiers, la planification de projets, les télécommunications, etc . De par leur polyvalence, ils deviennent un outil indispensable pour relever une variété de défis dans divers domaines tels que l'informatique, la biologie, la sociologie, etc.

Parmi les axes de recherche en pleine expansion de la théorie des graphes, on trouve la domination. Cette dernière a retenu l'attention de nombreux chercheurs, et de ce fait, des dizaines de paramètres liés à la domination ont été définis et pas moins de 6000 articles de recherche sur la domination et plus de cinq excellents ouvrages [24, 25, 26, 27, 28] ont été publiés.

L'histoire de la domination remonte au 19^{e} siècle lorsque De Jaenisch [33] posa le problème de placement d'un nombre minimum de reines sur un échiquier de sorte qu'une case est soit occupée par une reine soit peut être occupée par un seul mouvement d'une reine. La domination dans les graphes n'a été introduite qu'en 1958 par Claude Berge avec la terminologie de *coefficient de stabilité externe*. Quelques années plus tard, en 1962 précisément, ce coefficient a été rebaptisé *nombre de domination* par Ore [39]. De nombreux problèmes ont été étudiés après l'introduction de la domination dans les graphes, et de nouvelles règles ont été proposées. Cela a conduit à la création de nombreux paramètres de domination, dont la plupart sont cités dans les travaux de Haynes, Hedetniemi et Slater [28]. En 1968, une application de la domination dans les graphes a été proposée par Liu [36] : il a discuté du concept de domination dans les réseaux de communication, où un ensemble dominant représente un ensemble de villes qui, ayant des stations de diffusion, peuvent diffuser à toutes les villes du réseau, avec la supposition, qu'une station de radiodiffusion donnée ne peut transmettre qu'aux villes voisines. Dans le modèle de Liu, la notion de proximité entre les villes est relative et peut varier en fonction de la puissance de diffusion des stations et des distances entre les centres des villes. Pour mieux représenter cette situation, Erwin [23] a introduit en 2001 une variante de la domination, appelée *domination broadcast*. Cette dernière prend

en compte à la fois les distances entre les villes et les puissances des stations. En modélisant cette situation par un graphe où chaque sommet représente une ville et deux sommets sont reliés si les villes qu'ils représentent sont suffisamment proches pour qu'une diffusion puisse être entendue entre elles. La diffusion atteindra toutes les villes si chaque sommet contient une station ou peut entendre la diffusion d'une autre ville, pas forcément voisine. Certaines stations peuvent couvrir des zones plus éloignées en fonction de leur puissance, mais cela implique généralement un coût plus élevé. L'objectif principal de la domination broadcast est de trouver un emplacement de ces stations de radiodiffusion, sans contrainte sur leurs puissances, et qui garantit la couverture du réseau au moindre coût. Le modèle mathématique du problème de domination broadcast dans un graphe $G = (V, E)$, peut être décrit comme suit :

Déterminer une fonction f affectant à chaque sommet v une valeur positive ou nulle $f(v)$, de sorte que la somme $\sum_{v \in V} f(v)$ soit minimum, et la contrainte suivante satisfaite : Pour tout sommet u tel que $f(u) = 0$, il existe au moins un sommet v vérifiant $f(v) > 0$ et dont la distance au sommet u est d'au plus $f(v)$. Ce minimum est appelé *nombre de domination broadcast*.

Tout comme pour la domination classique dans les graphes, la domination broadcast a entraîné l'introduction de divers paramètres associés, définis et étudiés dans les références [22] et [23]. Parmi ces paramètres, nous nous sommes intéressés au nombre d'*indépendance broadcast*, qui est la valeur maximum de la somme $\sum_{v \in V} f(v)$ sur toutes les fonctions f, à valeurs positives ou nulles satisfaisant $d(u, v) > \max\{f(u), f(v)\}$, pour toute paire de sommets distincts u et v, telles que $f(u)$, $f(v) > 0$. Comme exemple de ce concept, on peut revenir aux stations de radiodiffusion : Le nombre indépendance broadcast s'interprète comme la puissance maximum fournie pour couvrir tout le réseau, tout en évitant qu'une ville hébergeant une station ne reçoive des messages provenant d'une autre station (pour éviter les interférences).

Notre sujet de recherche concerne l'étude du nombre d'indépendance broadcast dans les graphes circulants dans les cas orientés et non orientés. Ces graphes sont utilisés principalement en informatique, avec la terminologie «double-loop network » [7] [12] [13] [18] [19] [21] [32] [37] [40] [41] .

La thèse est structurée en quatre chapitres. Le premier chapitre pose les bases en présentant les concepts fondamentaux de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Le second chapitre se concentre plus précisément sur les notions de domination et de domination broadcast, avec les différents types de fonctions broadcast ainsi que les paramètres associés à chacune d'elles. Ce chapitre se termine par un état de l'art complet, exposant l'ensemble de tous les résultats déjà obtenus sur le nombre d'indépendance broadcast.
Les deux derniers chapitres de la thèse sont dédiés à l'exposé de nos travaux de recherche. Le troisième chapitre se focalise sur l'étude du nombre d'indépendance broadcast dans les graphes circulants non orientés. Nous y présentons les différentes propriétés des fonctions broadcast puis établissons des bornes et des valeurs exactes de cet invariant pour certaines classes de graphes circulants non orientés. Les résultats de cette recherche ont été publiés dans [34].
Le dernier chapitre concerne le nombre d'indépendance broadcast, mais cette fois dans les graphes circulants orientés. Dans ce chapitre, nous suivons la même démarche que celle du cas non orienté, en introduisant les différentes propriétés et en concluant par des bornes et des valeurs exactes. Ces résultats ont été soumis pour publication [35].

Une conclusion générale et des perspectives de recherche clôturent la thèse.

Chapitre 1

Concepts Fondamentaux en Théorie des Graphes

Sommaire

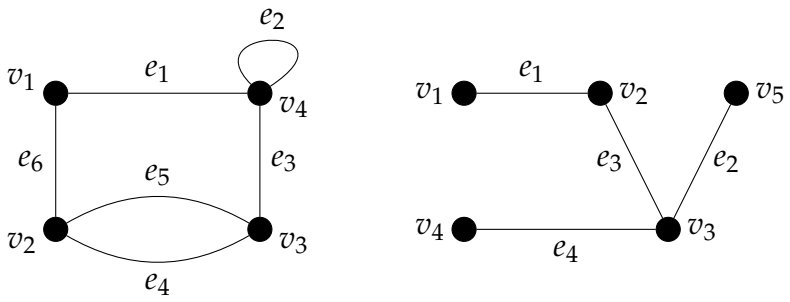
1.1 Graphes : Définitions et notations 1
1.2 Quelques classes de graphes 6
1.3 Graphes Orientés 11

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions de base et les concepts fondamentaux de la théorie des graphes, nécessaires à la bonne compréhension de cette thèse. Pour plus de détails concernant la théorie des graphes, nous recommandons l'ouvrage Berge [6].

1.1 Graphes : Définitions et notations

1.1.1 Graphe

Un *graphe*, est un schéma formé par des points, appelés *sommets*, reliés ou non par des lignes, appelées *arêtes*. La Figure1.1 représente deux graphes G_1 et G_2.



(a) G_1 (b) G_2

Figure 1.1 – Deux exemples de graphes

Formellement, un *graphe* non orienté G est un couple composé d'un ensemble de sommets $V(G)$ et d'un ensemble d'arêtes $E(G)$, où une *arête* est un multi-ensemble de sommets de cardinalité 2. Une arête e est notée simplement par uv, au lieu de $\{u, v\}$. Un graphe est fini si l'ensemble de ses sommets et l'ensemble de ses arêtes sont finis.

Si $e = uv$ est une arête de G, on dit que e *relie* u et v, les sommets u et v sont les *extrémités* de e, les sommets u et v sont *adjacents* ou *voisins*, et l'arête e est *incidente* aux sommets u et v.

Une arête $e = uv$ d'un graphe, telle que $u = v$, est une *boucle*. Deux arêtes, ou plus, avec les mêmes extrémités, sont *parallèles*. Dans la Figure1.1 (a), l'arête e_2 est une boucle et les arêtes e_4 et e_5 sont parallèles.

L'*ordre* d'un graphe G est le nombre de ses sommets et la *taille* de G est le nombre de ses arêtes. L'ordre et la taille d'un graphe fini sont désignés par n et m respectivement. Un graphe *vide* est un graphe de taille $m = 0$ et un graphe *trivial* est un graphe sans arête et d'ordre $n = 1$. Le graphe illustré dans la Figure1.1 (a) est d'ordre 4 et de taille 6.

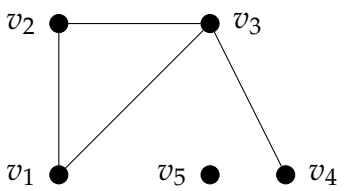
Un graphe *simple* est un graphe sans boucles et sans arêtes parallèles. Le graphe G_2 illustré dans la Figure1.1 (b) ne comporte ni boucle ni arêtes multiples, il est donc simple.

Dans tout ce qui suivra, nous ne considérons que les graphes simples.

1.1.2 Voisinage et degré d'un sommet

Voisinage ouvert et voisinage fermé

Dans un graphe non orienté G, le *voisinage ouvert* d'un sommet v, noté $N_G(v)$ ou simplement $N(v)$, est l'ensemble de tous les sommets qui sont adjacents à v. Le *voisinage fermé* de v, noté $N[v]$, est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ (voir Figure 1.2).



$$N(v_1) = \{v_2, v_3\}$$

$$N[v_3] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$N(v_5) = \emptyset \quad \text{et} \quad N[v_5] = \{v_5\}$$

FIGURE 1.2 – Un graphe non orienté d'ordre $n = 5$ et de taille $m = 4$

Degré d'un sommet

Le *degré* d'un sommet v, noté $d_G(v)$ (ou simplement $d(v)$, est le le cardinal de l'ensemble $N(v)$.

Un sommet *isolé* est un sommet de degré 0, et un sommet *pendant* est un sommet de degré 1.

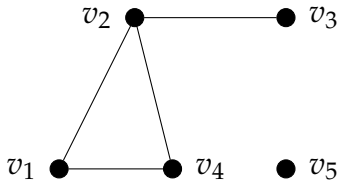


FIGURE 1.3 – Un graphe avec un sommet pendant

Pour un graphe G on définit les paramètres suivants :

— Le *degré minimum* $\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$.

— Le *degré maximum* $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$.

— Le *degré moyen* $d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v)$.

Dans la Figure 1.3, $d(v_1) = d(v_4) = 2$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 1$, $d(v_5) = 0$, $\delta(G) = 0$, $\Delta(G) = 3$ et $d(G) = 8/5$. Le sommet v_5 est un sommet isolé et le sommet v_3 est un sommet pendant.

1.1.3 Chaîne, cycle

Une *chaîne* P dans un graphe G, est une séquence de sommets $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$, telle que pour tout i entre 0 et $k-1$, $v_i v_{i+1} \in E$. Les sommets v_0 et v_k sont les *extrémités* de la chaîne. La *longueur* ou la *taille* d'une chaîne est définie par le nombre d'arêtes qu'elle contient.

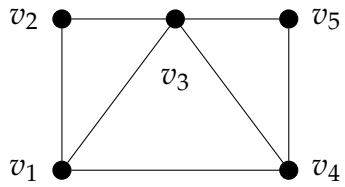


FIGURE 1.4 – Un graphe avec plusieurs $(v_1 - v_5)$-chaînes simples et élémentaires

Une chaîne *simple* est une chaîne dont toutes les arêtes sont distinctes.
Une chaîne *élémentaire* est une chaîne dont tous les sommets sont distincts.
Une chaîne d'extrémités v et v' est dite $(v - v')$*-chaîne*.

Un *cycle* C dans un graphe G est une chaîne dont les extrémités sont identiques.
Un cycle *élémentaire* est une chaîne élémentaire dont les extrémités sont identiques.
La maille d'un graphe G, noté $g(G)$, est la taille de son plus petit court cycle élémentaire.

Dans la Figure 1.4, $P_1 = (v_1, v_4, v_5)$ et $P_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ sont deux $(v_1 - v_5)$-chaînes simples et élémentaires, $C = (v_1, v_3, v_4, v_1)$ est un cycle de longueur 3, et $g(G) = 3$.

1.1.4 Distance, excentricité

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

La *distance* entre deux sommets u et v dans G, notée $d_G(u, v)$ ou simplement $d(u, v)$, est la longueur d'une plus courte chaîne reliant u à v (*c-à-d* la longueur minimale d'une $(u - v)$-chaîne) si $u \neq v$, et $d(u, v) = 0$ sinon. Si aucune chaîne n'existe entre u et v, alors on pose $d(u, v) = \infty$.

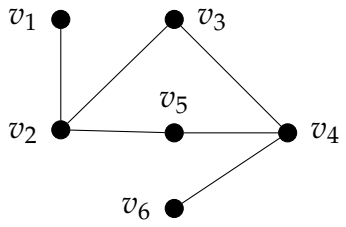


FIGURE 1.5 – Un graphe de diamètre 4 et de rayon 2

L'*excentricité* d'un sommet v dans G, notée $e_G(v)$ ou simplement $e(v)$, est le maximum des distances entre v et tous les autres sommets du graphe, c'est-à-dire

$$e(v) = \max_{v' \in V} d(v, v').$$

Le *rayon* de G, noté $rad(G)$, est défini comme l'excentricité minimale des sommets de G, c'est-à-dire

$$rad(G) = \min_{v \in V} e(v).$$

Le diamètre de G, noté $diam(G)$, est défini comme l'excentricité maximale des sommets de G, c'est-à-dire

$$diam(G) = \max_{v \in V} e(v).$$

Un sommet v est dit *central* dans G s'il a une excentricité minimale (*c-à-d*, $e(v) = rad(G)$).

Un sommet v est dit *périphérique* de G s'il a une excentricité maximale (*c-à-d*, $e(v) = diam(G)$).

Le *périphérique* de G, noté $Pr(G)$, est l'ensemble de tous les sommets périphériques de G.

La *centre* de G, noté $C(G)$, est l'ensemble de tous les sommets centraux de G.

Deux sommets u et v de G sont dits *antipodaux* dans G si $d(u, v) = \text{diam}(G)$.

Une chaîne qui relie deux sommets antipodaux est dite *chaîne diamétrale*.

Dans la Figure 1.5, les distances entre le sommet v_1 et les autres sommets sont : $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = d(v_1, v_5) = 2$, $d(v_1, v_4) = 3$ et $d(v_1, v_6) = 4$. Ceci établit que l'excentricité de v_1 est de 4. De manière similaire, on trouve que $e(v_2) = e(v_4) = 3$, $e(v_3) = e(v_5) = 2$ et $e(v_6) = 4$. Par conséquent $\text{diam}(G) = 4$ et $\text{rad}(G) = 2$. Les sommets v_1 et v_6 sont deux sommets antipodaux dans G, et les sommets v_3 et v_5 sont des sommets centraux.

1.1.5 Clique et stable

Stable

Dans un graphe G, un ensemble de sommets S est appelé un *stable* (ou *ensemble indépendant*) si aucun sommet de S n'est relié par une arête à un autre sommet de S, autrement dit, si tous les sommets de S sont deux à deux non adjacents.

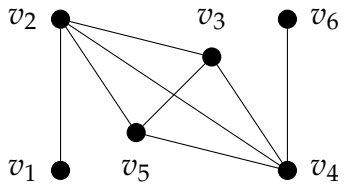


FIGURE 1.6 – Un graphe avec un stable d'ordre 3 et une clique d'ordre 4

Dans la Figure 1.6, l'ensemble $S = \{v_1, v_5, v_6\}$ forme un stable.

Clique

Dans un graphe G, un ensemble de sommets K est une *clique* si tous les sommets de K sont deux à deux adjacents, c'est-à-dire qu'il existe une arête entre chaque paire de sommets dans K.

Dans la Figure 1.6, l'ensemble $S = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ forme une clique.

1.1.6 Sous-graphe et sous-graphe induit

Un *sous-graphe* H d'un graphe G est un graphe défini par un ensemble de sommets $V(H) \subseteq V(G)$ et un ensemble d'arêtes $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V(G)$, le *sous-graphe induit* par S est le graphe $G[S]$ défini par l'ensemble de sommets $V(G[S]) = S$ et l'ensemble d'arêtes $E(G[S]) = \{uv : uv \in E(G) \text{ et } u, v \in S\}$.

La Figure 1.7 représente un sous-graphe, ainsi qu'un sous-graphe induit, de G.

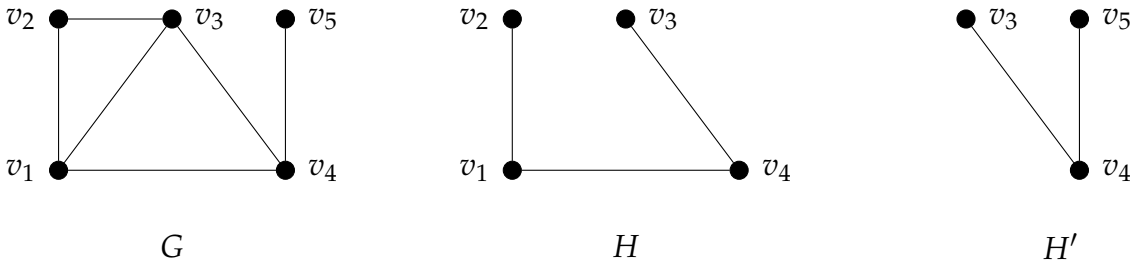


FIGURE 1.7 – Un sous-graphe H et un sous-graphe induit H' du graphe G

1.1.7 Isomorphisme de graphes

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont *isomorphes*, et on note $G \cong G'$, s'il existe une application bijective $\phi : V \to V'$ telle que, pour toute paire de sommets u et v,

$$uv \in E \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E'.$$

La Figure 1.8 représente deux graphes isomorphes et l'isomorphisme associé ϕ.

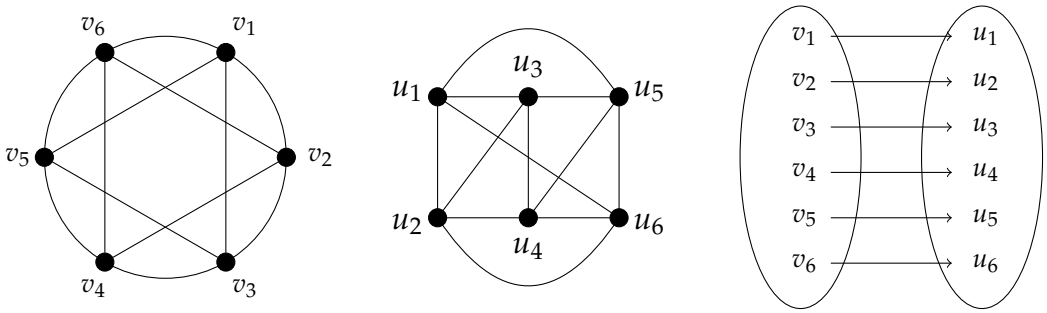


FIGURE 1.8 – Deux graphes isomorphes

1.2 Quelques classes de graphes

1.2.1 Graphe connexe

Un graphe *connexe* est un graphe dans lequel toute paire de sommets distincts est relié par une chaîne.

1.2.2 Chaîne

Une chaîne d'ordre n, notée P_n, est un graphe simple dont l'ensemble des sommets est $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ et l'ensemble des arêtes est $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} : i \in [0, n-2]\}$.

La Figure 1.10 illustre la chaîne P_7.

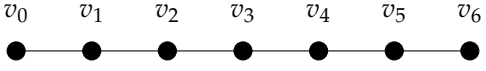


FIGURE 1.9 – La chaîne P_7

1.2.3 Cycle

Un cycle d'ordre n, noté C_n, est un graphe simple dont l'ensemble des sommets est $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ et l'ensemble des arêtes est $E = \{\{\{v_i, v_{i+1}\} : i \in [0, n-2]\} \cup \{\{s_{n-1}, s_0\}\}$.

1.2.4 Graphe complet

Un graphe *complet* est un graphe dont les sommets sont deux à deux adjacents. Un graphe complet d'ordre n est noté K_n.

La Figure 1.10 illustre le graphe complet K_4.

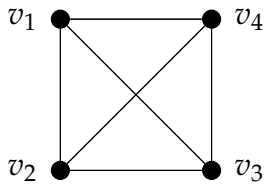


FIGURE 1.10 – Un graphe complet K_4

1.2.5 Graphe biparti

Un graphe *biparti* est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que toute arête a une extrémité dans V_1 et l'autre extrémité dans V_2.

Un graphe *biparti complet*, noté $K_{p,q}$, est un graphe biparti, où $|V_1| = p$, $|V_2| = q$ et chaque sommet de V_1 est relié à chaque sommet de V_2.

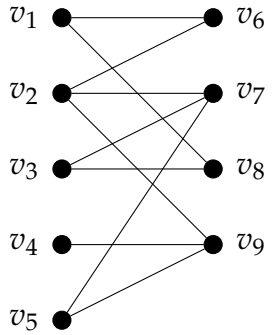


FIGURE 1.11 – Un graphe biparti

Le Figure 1.11 représente un graphe biparti non complet.

1.2.6 Arbre

Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle.

Dans un arbre d'ordre $n \geq 2$, les sommets pendants sont appelés *feuilles*, et les sommets adjacents aux sommets pendants sont appelés *sommets supports*.

La Figure 1.12 représente un arbre d'ordre 10, dont six sommets sont pendants et trois sommets sont supports.

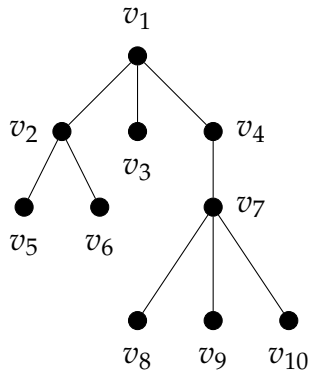


FIGURE 1.12 – Un arbre

Dans ce qui suit, nous définissons quelques classes d'arbres :

Étoile

Une *étoile* d'ordre $n \geq 2$, noté $K_{1,n-1}$, est un arbre avec $n-1$ sommets pendants et un seul sommet central de degré $n-1$.

La Figure 1.13 représente l'étoile $K_{1,6}$.

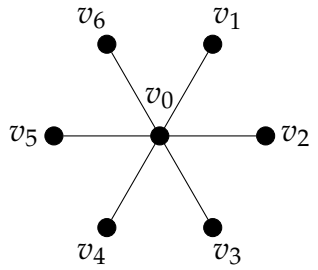


FIGURE 1.13 – L'étoile $K_{1,6}$

Étoile t-subdivisée

Soient $k \geq 3$ et $t \geq 2$ deux entiers. L'*étoile t-subdivisée*, noté $S_t(K_{1,k})$, est un arbre obtenu, en attachant à chaque sommet pendant de l'étoile $K_{1,k}$ l'une des extrémités d'une chaîne P_{t-1}.

La Figure 1.14 représente l'étoile subdivisée $S_2(K_{1,5})$.

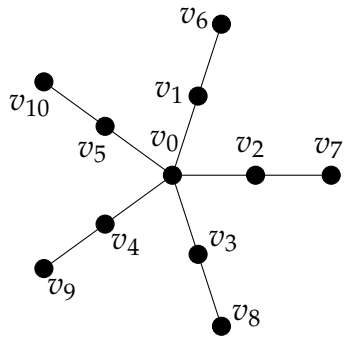


FIGURE 1.14 – L'étoile 2-subdivisée $S_2(K_{1,5})$

Araignée

Soient $k \geq 3$ et $n_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, des entiers. L' *araignée généralisée* $S = S(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ est un arbre obtenu, en attachant l'une des extrémités de la chaîne P_{n_i-1} au sommet pendent v_i.

La Figure 1.15 représente l'araignée $S = S(2,1,3,3)$.

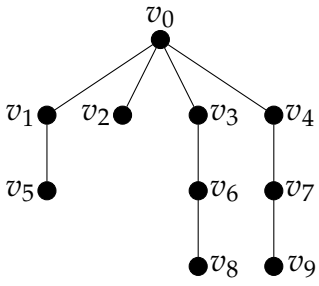


FIGURE 1.15 – Araignée généralisée $S(2,1,3,3)$

Double araignée

Pour deux entiers $t \geq 1$ et $k \geq 2$, la *double-araignée* notée $S_{\times 2}(t^k)$ est un arbre obtenu à partir de deux copies d'araignées $S(t^k)$, en joignant par une arête leur centres respectives.

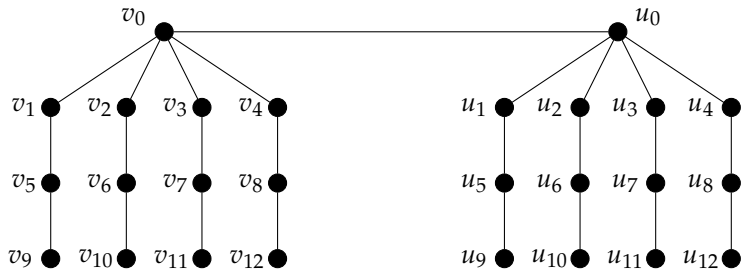


FIGURE 1.16 – La double araignée $S_{\times 2}(3^4)$

La Figure 1.16 représente la double araignée $S_{\times 2}(2^4)$.

Chenille

Une *chenille* de longueur $k \geq 1$ est un arbre tel que, le sous-graphe induit par les sommets de degré supérieur ou égal à 2 est une chaîne simple non vide de longueur k, appelée *épine dorsale* de la chenille.

La Figure 1.17 représente un chenille de longueur $k = 9$.

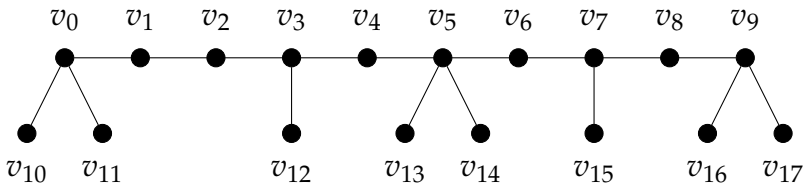


FIGURE 1.17 – Une chenille à 18 sommets

Un sommet non pendant est appelé *sommet-épine*. Plus précisement, un tel sommet est dit sommet *interne* s'il n'est adjacent à aucun sommet pendant, sommet *support* s'il est adjacent à un sommet pendant et *tronc* sinon.

Dans la Figure 1.17 le sommet v_2 est un sommet-épine interne, v_4 est un sommet-épine support et v_5 est un sommet-épine tronc.

Homard

Un homard est un arbre tel que, le sous-graphe induit par les sommets de degré supérieur ou égal à 2 est une chenille non vide.

La Figure 1.18 représente un homard à 21 sommets.

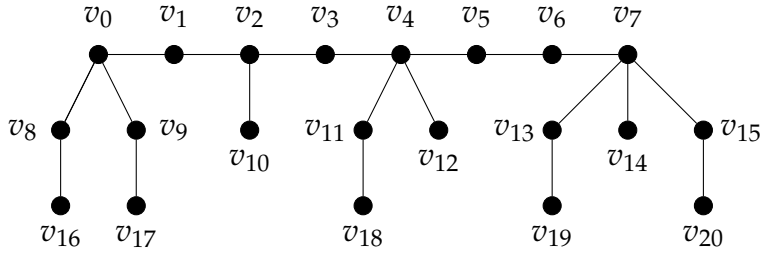


FIGURE 1.18 – Un homard

1.2.7 Grille

Soient G et H deux graphes. Le *produit cartésien* des graphes G et H, noté $G\square H$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est $V(G) \times V(H)$ et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents dans $G\square H$ si et seulement si, $u_1u_2 \in E(G)$ et $v_1 = v_2$, ou $u_1 = u_2$ et $v_1v_2 \in E(H)$.

Une *grille* de dimension $m \times n$ est le produit cartésien des deux chaînes P_m et P_n.

La Figure 1.19 représente la grille $P_3\square P_5$.

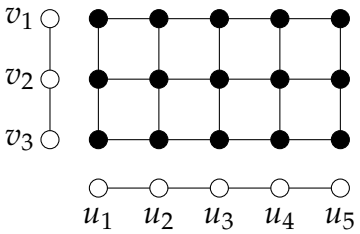


FIGURE 1.19 – La grille $P_3\square P_5$

1.2.8 Graphe circulant

Soient $n \geq 3$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des entiers tels que $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
Le graphe circulant $C(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ est un graphe simple dont l'ensemble de sommets est $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ et l'ensemble d'arêtes $E = \{v_iv_j \mid (j-i) \ mod \ n \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}\}$.

La Figure 1.20 représente trois graphes circulants.

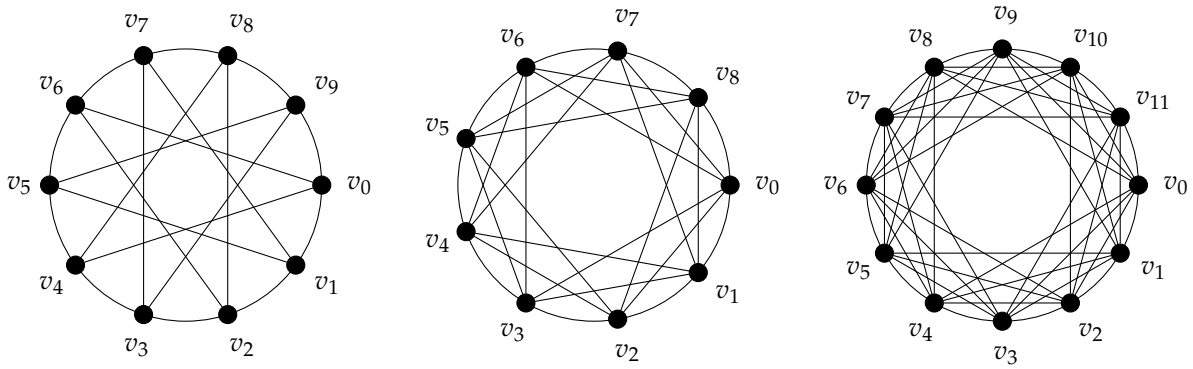


FIGURE 1.20 – Trois graphes circulants

Avant de clôturer ce chapitre, introduisons la notion de graphe orienté. Nous nous limiterons aux définitions qui nous seront utiles pour aborder le dernier chapitre de cette thèse.

1.3 Graphes Orientés

Un graphe *orienté* $\overrightarrow{G} = (V, A)$, est une structure qui diffère d'un graphe non orienté par l'existence d'une direction spécifique pour chaque arête. Dans les graphes orientées, l'ensemble des arêtes $E(G)$ est remplacé par un ensemble d'*arcs*, noté $A(G)$. Les arcs dans $A(G)$ sont des couples $(u, v) \in V^2$ où u est *le sommet initial* ou l'*origine* de l'arc et v est l'*extrémité finale* de l'arc. L'arc $a = (u, v)$ est dit sortant en u et incident en v, et u est appelé *prédécesseur* de v, tandis que v est le *successeur* de u.

La Figure 1.21, représente un graphe orienté d'ordre $n = 5$.

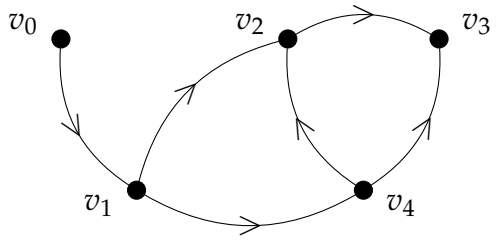


FIGURE 1.21 – Un graphe orienté

1.3.1 Voisinage sortant et voisinage entrant

Dans un graphe orienté $\overrightarrow{G}$, le *voisinage sortant* d'un sommet v, noté $N^+_{\overrightarrow{G}}(v)$, est l'ensemble de tous les successeurs de v, et le *voisinage entrant* de v, noté $N^-_{\overrightarrow{G}}((v)$, est l'ensemble de tous les prédécesseurs de v.

Dans la Figure 1.21, $N^+_{\overrightarrow{G}}(v_0) = N^-_{\overrightarrow{G}}(v_4) = \{v_1\}$, $N^+_{\overrightarrow{G}}(v_4) = \{v_2, v_3\}$ et $N^-_{\overrightarrow{G}}(v_3) = \{v_2, v_4\}$,

1.3.2 Degré entrant et degré sortant

Le *degré entrant* $d^-(v)$ d'un sommet v dans un graphe orienté est le nombre d'arcs admettant v pour extrémité finale, tandis que le *degré sortant* $d^+(v)$ correspond au nombre d'arcs admettant v pour origine.

Dans la Figure 1.21 , $d^-_{\overrightarrow{G}}(v_0) = 1$, $d^+_{\overrightarrow{G}}(v_4) = 2$ et $d^+_{\overrightarrow{G}}(v_3) = 0$.

1.3.3 Chemin et Circuit

Chemin

Un *chemin* dans un graphe orienté $\overrightarrow{G} = (V, A)$ est une séquence de sommets $(v_0, v_2, \ldots, v_k)$ telle que $\overrightarrow{v_i v_{i+1}} \in A$, pour tout i, $0 \leq i \leq k-1$. Les sommets v_0 et v_k sont respectivement l'origine et l'extrémité finale du chemin, et l'entier k est sa *longueur*. Un tel chemin est dit $(v_0 - v_k)$-chemin.

Dans la Figure 1.21, $P_1 = (v_4, v_1, v_2, v_3)$ et $P_2 = (v_4, v_2, v_3)$ sont deux chemins de longueurs différentes joignant v_4 à v_3.

Circuit

Un *circuit* dans un graphe orienté est un chemin dont les extrémités sont confondues. Une boucle est un circuit de longueur 1.

Dans la Figure 1.21, $C = (v_2, v_3, v_4, v_5, v_2)$ est un circuit de longueur 4.

Distance

La *distance* d'un sommet u à un sommet v dans un graphe orienté $\overrightarrow{G} = (V, A)$, notée $d_{\overrightarrow{G}}(u, v)$, est la longueur d'un plus court chemin allant de u a v.

Dans la Figure 1.21, $(d_{\overrightarrow{G_2}}(v_1, v_2) = 1$, $d_{\overrightarrow{G_2}}(v_2, v_4) = 2$, $d_{\overrightarrow{G_2}}(v_4, v_5) = 1$ et $d_{\overrightarrow{G_2}}(v_5, v_4) = 3$.

Chapitre 2

Domination et domination broadcast sur les graphes

Sommaire

2.1 Domination dans les graphes 13
2.2 Domination broadcast dans les graphes 18
2.3 Le nombre d'indépendance broadcast 31

Dans ce chapitre, nous plongeons dans les concepts de domination et de domination broadcast dans les graphes. Nous commençons par définir ces deux notions puis nous présenterons un état de l'art sur les propriétés des fonctions broadcast indépendantes et sur le le nombre d'indépendance broadcast.

2.1 Domination dans les graphes

Le concept de domination nous vient du monde des jeux d'échecs, où l'objectif est de contrôler toutes les cases de l'échiquier avec un nombre minimum de pièces. Ce jeu a une longue histoire, remontant au XVI^{e} siècle en Inde. En 1862, De Jaenisch [33] a proposé un challenge intéressant : calculer le nombre minimal de reines à placer sur un échiquier de taille $n \times n$ pour que chaque case soit occupée par une reine, ou par un seul mouvement d'une reine. Pour $n = 3$ le nombre minimal vaut 3 et pour $n = 8$ il vaut 5, comme illustrés dans la figure 2.1).

Le problème des reines du jeu d'échec est résolu jusqu'à $n = 31$ (voir l'encyclopédie en ligne des séquences entières https://oeis.org/A075324 où les 31 solutions sont présentées dans les deux tableaux 2.1 et 2.2. Pour une exploration plus détaillée du sujet, voir ([16], [29], [30]).

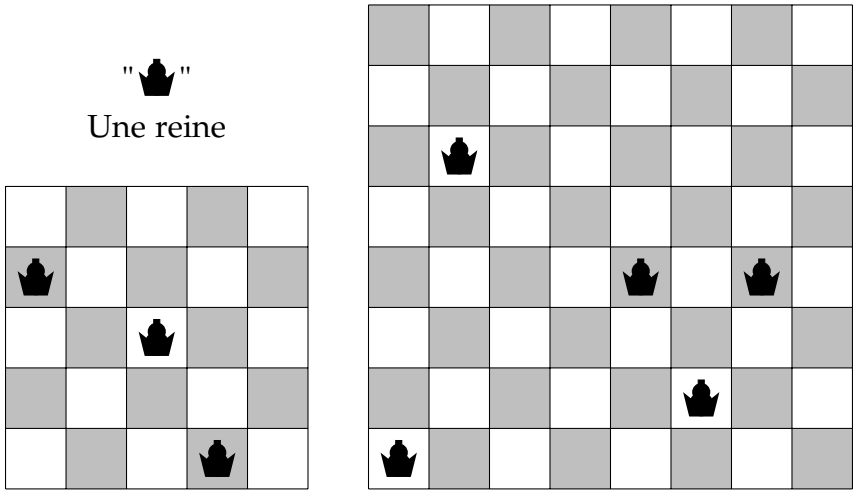


FIGURE 2.1 – Distribution optimale des reines sur des échiquiers 5×5 et 8×8

Taille	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre de Reines	1	1	1	3	3	4	4	5	5	5	5	7	7	8	9

TABLE 2.1 – Tableau des tailles et des nombres de reines (1-15)

Taille	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Nombre de Reines	9	9	10	11	11	11	12	13	13	13	14	15	15	16	16	17

TABLE 2.2 – Tableau des tailles et des nombres de reines (16-31)

En 1958, Claude Berge, a été le premier à étudier le principe de la domination dans les graphes, sous le nom de "coefficient de stabilité externe", et ce n'est qu'en 1962 que Ore a introduit le terme "nombre de domination", que nous utilisons aujourd'hui.

2.1.1 Définitions et notations

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.
Un sous-ensemble de sommets $D \subseteq V$ est appelé un *ensemble dominant* de G si, pour chaque sommet $u \in V \setminus D$, il existe au moins un sommet $v \in D$ tel que $uv \in E$. En d'autres termes, l'ensemble dominant D a la propriété que tout sommet qui n'appartient pas à D est adjacent à au moins un sommet de D.

Un ensemble S est dit *minimal* (resp. *maximal*) pour une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe aucun ensemble S' tel que $S' \subset S$ (resp. $S \subset S'$) et S' satisfait la propriété $\mathcal{P}$.

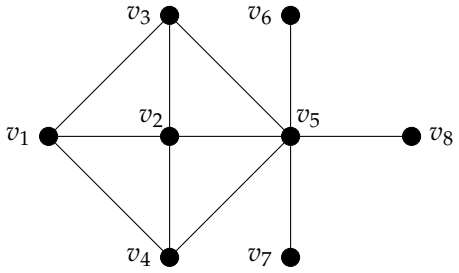
Le *nombre de domination* de G, noté $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G, i.e :

$$\gamma(G) = \min\{|D| : D \text{ est un ensemble dominant de } G\}.$$

Le *nombre de domination supérieure* de G, noté $\Gamma(G)$, est le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G, i.e :

$$\Gamma(G) = \max\{|D| : D \text{ est un ensemble dominant minimal de } G\}.$$

La Figure 2.2 représente un graphe G avec $\gamma(G) = 2$ (cardinal de l'ensemble D_1 ou D_2) et $\Gamma(G) = 5$ (cardinal de l'ensemble dominant D_3).



$$D_1 = \{v_1, v_5\}$$
$$D_2 = \{v_2, v_5\}$$
$$D_3 = \{v_3, v_4, v_6, v_7, v_8\}$$

FIGURE 2.2 – Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 5$

Tout ensemble dominant de cardinalité minimum est appelé un γ-*ensemble*, et tout ensemble dominant minimal de cardinalité maximum est un Γ-*ensemble*. Dans la Figure 2.2, les deux ensembles D_1 et D_2 sont des γ-ensembles, et l'ensemble D_3 est un Γ-ensemble.

Les ensembles dominants minimaux ont été caractérisés par Ore dans [39].

Théorème 2.1. *([39]) Soit D un ensemble dominant de G. D est minimal si et seulement si pour tout sommet $v \in D$, l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

1. *v est un sommet isolé dans $G[D]$.*
2. *Il existe un sommet $u \in V \setminus D$ tel que $N(u) \cap D = \{v\}$.*

2.1.2 Quelques types de domination

Dès l'introduction de la domination dans les graphes, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à cette notion, que ce soit pour ses applications pratiques ou pour son côté théorique. A chaque fois qu'une condition supplémentaire est imposée à l'ensemble dominant, un nouveau paramètre de domination est introduit et étudié, ce qui a conduit à un large

éventail de paramètres de domination. Nous nous limiterons ici à ceux qui sont liés aux paramètres connus de la broadcast domination. Les livres [24, 25, 26, 27, 28] sont des livres de référence sur cette théorie.

Domination stable

Rappelons qu'un sous-ensemble de sommets S de V est dit *stable* (ou *indépendant*) dans un graphe G si tous ses sommets sont deux à deux non adjacents.

Le *nombre de domination stable* de G, noté $i(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble stable maximal de G, i.e :

$$i(G) = \min\{|S| : S \text{ est un ensemble stable maximal de } G\},$$

Le *nombre de stabilité* (ou nombre d'indépendance) de G, noté $\beta_0(G)$ (ou parfois $\alpha(G)$), est le cardinal maximum d'un ensemble stable de G, i.e :

$$\beta_0(G) = \max\{|S| : S \text{ est un ensemble stable de } G\}.$$

Les ensembles stables maximaux ont été caractérisés par Berge en 1962 dans [6].

Proposition 2.2. *([6]) Un ensemble indépendant S est un indépendant maximal si et seulement si, il est indépendant et dominant.*

Proposition 2.3. *([6]) Tout ensemble indépendant maximal dans G est un ensemble dominant minimal de G.*

De la Proposition 2.3 on peut déduire la chaîne d'inégalités suivante :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G). \qquad (1)$$

Domination efficace

Uns sous-ensemble de sommets S est un dominant *efficace* dans un graphe G si chaque sommet de G est dominé exactement une seule fois par un élément de S. En d'autres termes, $|N[v] \cap S| = 1$ pour tout sommet v de G.

Notons que l'existence d'un ensemble dominant efficace n'est pas toujours assurée, puisque les cycles impairs d'ordre n avec $n \geq 5$ et $n \not\equiv 0 \pmod 3$ n'en admettent pas. Cependant, si un graphe admet un tel ensemble, alors celui-ci constitue nécessairement un dominant minimum.

Proposition 2.4. *([4], [5]) Si G admet un ensemble dominant efficace S, alors $|S| = \gamma(G)$.*

Packing

Un sous-ensemble de sommets S de V est un ensemble de *packing* dans un graphe G si, pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| \leq 1$. En d'autres termes, pour toute paire de sommets $u, v \in S$ on a $d(u, v) \geq 3$

Le *nombre de packing* de G, noté $P(G)$, est le cardinal maximum d'un ensemble de packing de G, i.e :

$$P(G) = \max\{|S| : S \text{ est un ensemble de packing de } G\}.$$

Le *nombre de packing inférieur* de G, noté $p(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble de packing maximal dans G, i.e :

$$p(G) = \min\{|S| : S \text{ est un ensemble de packing maximal de } G\}.$$

Des définitions de la domination efficace, indépendante et du packing, on déduit les propriétés suivantes :

Observation 2.5. *[24] Pour tout graphe G*

— *Tout packing dans G est un indépendant de G.*

— *Tout dominant efficace de G est un packing dans G.*

Dans [24], Haynes et al. ont prolongé la chaîne d'inégalités (1).

Théorème 2.6. *([24]) Pour tout graphe G*

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G). \qquad (2)$$

Henning [31] a généralisé en 1991 la définition de la domination en introduisant la *domination distance*.

Domination distance

Soit k un entier positif. Un sous-ensemble de sommets S est appelé un *dominant distance-k* de G si, pour chaque sommet $u \in V \setminus S$, il existe au moins un sommet $v \in S$ tel que $d(u, v) \leq k$.

Le *nombre de domination distance-k* de G , noté $\gamma_{\leq k}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant distance-k de G, i.e :

$$\gamma_{\leq k}(G) = \min\{|S| : \text{S est un ensemble dominant distance-}k \text{ de } G\}.$$

Le *nombre de domination distance-k supérieur* de G, noté $\Gamma_{\leq k}(G)$, est le cardinal maximum d'un ensemble dominant distance-k de G, i.e :

$$\Gamma_{\leq k}(G) = \max\{|S| : \text{S est un ensemble dominant distance-}k \text{ minimal de } G\}.$$

Ainsi, pour $k = 1$ on retrouve les paramètres $\gamma(G) = \gamma_{\leq 1}(G)$ et $\Gamma(G) = \Gamma_{\leq 1}(G)$.

2.2 Domination broadcast dans les graphes

La domination broadcast constitue une variante de la domination standard et a été introduite en 2001 par D.J. Erwin dans le cadre de sa thèse de doctorat [23]. Elle offre une approche particulièrement réaliste pour résoudre les problèmes de couverture dans les réseaux, en tenant compte des dispositifs à portée variable. La domination broadcast étend la notion traditionnelle de domination en permettant aux sommets de diffuser leur domination bien au-delà de leurs voisins immédiats.

2.2.1 Définitions et notations

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.
Une fonction $f : V \to \{0, \ldots, \text{diam}(G)\}$ est *un broadcast* sur G si, pour tout sommet $v \in V$, $f(v) \leq e(v)$, où $e(v)$ représente l'excentricité du sommet v.

- Un sommet v de G est un *f-sommet broadcast* si $f(v) > 0$.
- La *f-valeur* de v, notée $f(v)$, est la valeur attribuée à un sommet v par le broadcast f.
- L'ensemble des f-sommets broadcast est

$$V_f^+ = \{v \in V : f(v) > 0\}.$$

- Le *coût total* d'un *broadcast* f sur G est

$$\sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v).$$

- Un broadcast f est *radial* si son coût $\sigma(f)$ est égal au rayon du graphe, c'est-à-dire

$$\sigma(f) = \text{rad}(G).$$

- Un broadcast f est *diamétral* si son coût $\sigma(f)$ est égal au diamètre du graphe, c'est-à-dire

$$\sigma(f) = \text{diam}(G).$$

- Soient u, v deux sommets de G. Si $f(v) > 0$ et $d(u,v) \leq f(v)$, alors v *f-domine* u (ou u est *f-dominé* par v).

- Le *voisinage broadcast* d'un sommet v, noté $N_f(v)$, est l'ensemble de tous les sommets f-dominés par v :

$$N_f(v) = \{u \in V : d(u,v) \leq f(v)\}$$

et *le voisinage broadcast de f*, noté $N_f(V)$, est l'ensemble de tous les sommets f-dominés par les sommets de V_f^+ :

$$N_f(V) = N_f(V_f^+) = \bigcup_{v \in V_f^+} N_f(v).$$

- Pour un sommet u de G, on note par $H_f(u)$ l'ensemble de tous les f-sommets *broadcast* qui f-dominent u, c'est-à-dire

$$H_f(u) = \{v \in V_f^+ : d(u,v) \leq f(v)\}.$$

- Pour un sommet $v \in V_f^+$, un *f-voisin privé* de v est un sommet u avec $H_f(u) = \{v\}$, et le *f-voisinage privé* de v est l'ensemble de tous ses f-voisins privés.

$$PN_f[v] = \{u \in V : H_f(u) = \{v\}\}.$$

- Pour un sommet $v \in V_f^+$, *la f-frontière* de v est l'ensemble

$$B_f(v) = \{u \in V : d(u,v) = f(v)\}.$$

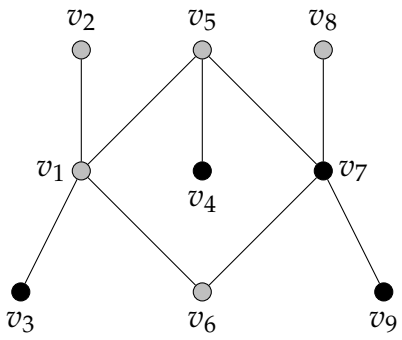
Un *sommet-frontière* de v, est un sommet de l'ensemble $B_f(v)$.

- La *f-frontière privée* d'un sommet $v \in V_f^+$ est soit l'ensemble de ses f-voisins privés qui sont à distance $f(v)$ de v, soit le singleton $\{v\}$ si $f(v) = 1$ et $PN_f[v] = \{v\}$, c'est-à-dire

$$PB_f(v) = \begin{cases} \{v\} & \text{si } f(v) = 1 \text{ et } PN_f[v] = \{v\}, \\ \{u \in PN_f[v] : d(u,v) = f(v)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

  Tout sommet de $PB_f(v)$ est un f-voisin-frontière privé de v. En particulier, si $f(v) = 1$ et $PN_f[v] = \{v\}$, alors v est son propre f-voisin-frontière privé.

Pour mieux saisir ces notions, examinons le graphe G illustré dans la Figure 2.3 où les *f-sommets broadcast* sont colorés en noir. On a $V_f^+ = \{v_3, v_4, v_7, v_9\}$, $\sigma(f) = 5$, $N_f[v_4] = \{v_1, v_4, v_5, v_7\}$, $H_f(v_8) = \{v_7\}$, v_8 est un *voisin privé* de v_7, $H_f(v_2) = \emptyset$ et donc le sommet v_2 n'est *f-dominé* par aucun sommet, $B_f(v_7) = \{v_5, v_6, v_8, v_9\}$ et $PN_f[v_7] = PB_f[v_7] = \{v_6, v_8\}$.



les f-valeurs associées aux sommets :
$f(v_3) = 1$, $f(v_4) = 2$, $f(v_7) = 1$, $f(v_9) = 1$ et
$f(v_1) = f(v_2) = f(v_5) = f(v_6) = f(v_8) = 0$

FIGURE 2.3 – Exemple de *broadcast*

2.2.2 Quelques types de fonctions broadcast

Dunbar et al. [20] ont introduit en 2005, plusieurs paramètres de la broadcast domination, ouvrant ainsi de nouvelles voies de recherche dans ce domaine. Dans cette section, nous définissons sept types de broadcast domination avec leur propriétés et mentionnons les inégalités reliant les paramètres de la broadcast domination avec ceux de la domination.

Un broadcast f est dit *minimal* (resp. *maximal*) sur G s'il n'existe aucun autre broadcast du même type g tel que $g \neq f$ et $g(v) \leq f(v)$ (resp. $g(v) \geq f(v)$) pour tout sommet $v \in V$.

Broadcast dominant

Un *broadcast* f sur G est un broadcast *dominant* si chaque sommet de G est f-dominé par au moins un sommet de V_f^+. En d'autres termes, pour tout sommet $v \in V$, l'ensemble $H_f(v)$ contient au moins un sommet.

Le *nombre de domination broadcast* de G, noté $\gamma_b(G)$, est le coût minimum d'un broadcast dominant sur G, i.e :

$$\gamma_b(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un } \textit{broadcast} \text{ dominant sur } G\}.$$

Le *nombre de domination broadcast supérieure* de G, noté $\Gamma_b(G)$, est le coût maximum d'un broadcast dominant minimal sur G, i.e :

$$\Gamma_b(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast dominant minimal sur } G\}.$$

Un *broadcast dominant* de coût minimum est un γ_b-*broadcast*, et un *broadcast dominant* minimal de coût maximum est un Γ_b-*broadcast*.

La Figure 2.4 représente un graphe G avec $\gamma_b(G) = 2$ (le coût du γ_b-*broadcast* f) et $\Gamma_b(G) = 5$ (le coût du Γ_b-*broadcast* g).

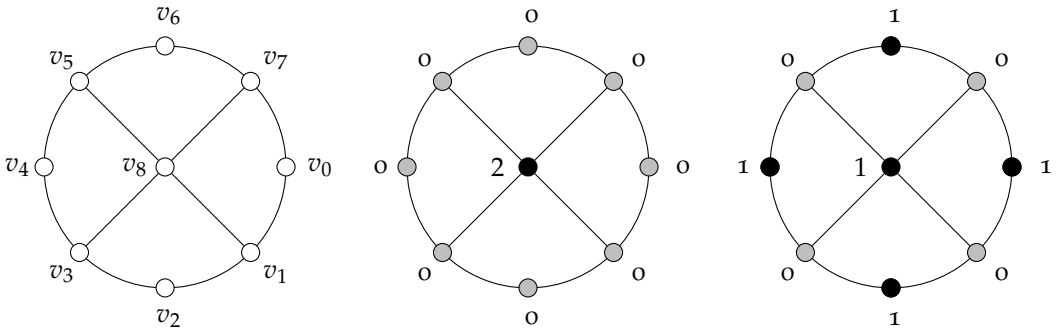


FIGURE 2.4 – Exemples de *broadcasts* dominants

Passons maintenant en revue quelques résultats sur le *nombre de domination broadcast*.

Notons que la fonction caractéristique f_D de tout ensemble dominant minimal D dans un graphe G, définie par :

$$f_D(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in D, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

est un broadcast dominant minimal, et donc :

$$\gamma_b(G) \leq \gamma(G) \quad \text{et} \quad \Gamma(G) \leq \Gamma_b(G). \qquad (i)$$

D'autre part, pour un sommet u dans le périphérique de G (c.à.d. $e(u) = diam(G)$), et pour un sommet u' dans le centre de G (c.à.d. $e(u') = rad(G)$) les deux fonctions f_d et f_r définit par :

$$f_d(v) = \begin{cases} diam(G) & \text{si } v = u, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases} \quad \text{et} \quad f_r(v) = \begin{cases} rad(G) & \text{si } v = u', \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

sont deux broadcasts dominants minimaux, et donc :

$$\gamma_b(G) \leq \text{rad}(G) \quad \text{et} \quad \text{diam}(G) \leq \Gamma_b(G). \qquad (ii)$$

De (i) et (ii), on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.7. *([23]) Pour tout graphe G*

$$\gamma_b(G) \leq \min\{rad(G), \gamma(G)\} \quad et \quad \max\{\text{diam}(G), \Gamma(G)\} \leq \Gamma_b(G).$$

Une autre borne inférieure du nombre de domination broadcast $\gamma_b(G)$, en fonction du diamètre de G, a été établie par Erwin ([22]).

Théorème 2.8. *([22]) Pour tout graphe G,*

$$\gamma_b(G) \geq \left\lceil \frac{diam(G)+1}{3} \right\rceil.$$

Cette borne est atteinte pour les chaînes et les cycles d'ordre $n \geq 3$.

Corollaire 2.9. *([22]) Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

Proposition 2.10. *([15]) Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\gamma_b(C_n) = \gamma_b(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

Broadcast k-dominant

Un *broadcast* f sur G est un broadcast *k-dominant* ou broadcast dominant *k-limité* s'il est dominant et pour chaque sommet $v \in V_f^+$, $f(v) \leq k$.

Le *nombre de k-domination broadcast* de G, noté $\gamma_{b_k}(G)$, est le coût minimum d'un broadcast k-dominant sur G, i.e :

$$\gamma_{b_k}(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast } k\text{-dominant sur } G\}.$$

Le *nombre de k-domination broadcast supérieure* de G, noté $\Gamma_{b_k}(G)$, est le coût maximum d'un broadcast k-dominant minimal sur G, i.e :

$$\Gamma_{b_k}(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast } k\text{-dominant minimal sur } G\}.$$

Un *broadcast k-dominant* de coût minimum est un γ_{b_k}-*broadcast*, et un *broadcast k-dominant* minimal de coût maximum est un Γ_{b_k}-*broadcast*.

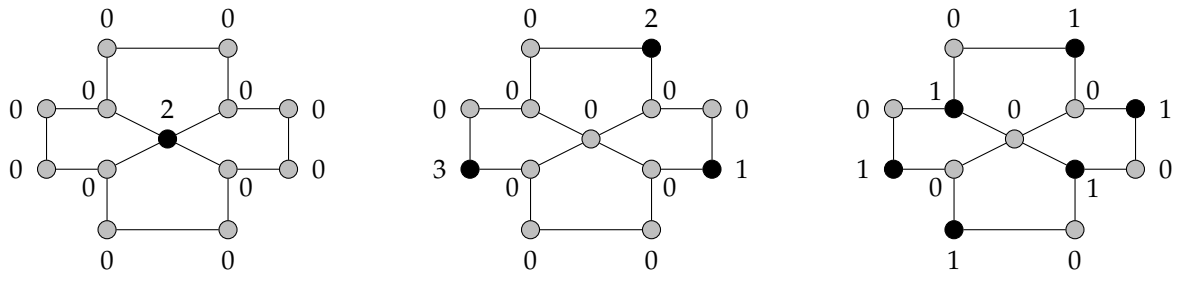
La Figure 2.5 représente trois *broadcasts dominants* sur un graphe G, et on a :

- Pour tout $k \in \{2, 3, 4\}$, le *broadcast* f est un γ_{b_k}-*broadcast* et

$$\gamma_{b_2}(G) = \gamma_{b_3}(G) = \gamma_{b_4}(G) = 2.$$

- Pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, le *broadcast* h est un Γ_{b_k}-*broadcast* et

$$\Gamma_{b_1}(G) = \Gamma_{b_2}(G) = \Gamma_{b_3}(G) = \Gamma_{b_4}(G) = 6.$$



Le *broadcast* f Le *broadcast* g Le *broadcast* h

FIGURE 2.5 – Exemples de *broadcast* 3-dominants

Dans cette dernière figure, on peut remarquer que le *broadcast* g n'est pas minimal (car on peut diminuer la g-valeur du sommet v où $g(v) = 2$, d'une unité).

Observation 2.11. *[17] Pour tout graphe G*

1. $\gamma(G) = \gamma_{b_1}(G)$,
2. $\gamma_b(G) \leq \gamma_{b_{k+1}}(G) \leq \gamma_{b_k}(G)$, *pour tout entier* $1 \leq k \leq \text{diam}(G) - 1$.
3. *Si* $r = rad(G)$ *alors* $\gamma_b(G) = \gamma_{b_r}(G) \leq \gamma_{b_{r-1}}(G) \leq \cdots \leq \gamma_{b_2}(G) \leq \gamma_{b_1}(G) = \gamma(G)$.

Broadcast non-redondant

Un *broadcast* f sur G est un broadcast *non redondant* si, pour chaque f-sommet broadcast v, $PB_f(v) \neq \emptyset$.

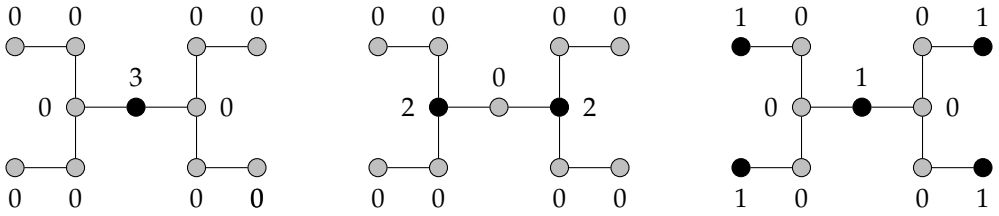
Le *nombre de non-redondance broadcast* de G, noté $ir_b(G)$, est le coût minimum d'un broadcast *non-redondant* maximal sur G, i.e :

$$ir_b(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast non-redondant maximal sur } G\ \}.$$

Le *nombre de non-redondance broadcast supérieure* de G, noté $IR_b(G)$, est le coût maximum d'un broadcast *non-redondant* sur G, i.e :

$$IR(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast non-redondant sur } G\ \}.$$

La Figure 2.6 représente trois *broadcast non-redondant* maximaux et *dominant* minimaux sur un graphe G avec $ir_b(G) = 3$ (le coût du *broadcast* f) et $IR_b(G) = 5$ (le coût du *broadcast* h).



Le *broadcast* f Le *broadcast* g Le *broadcast* h

FIGURE 2.6 – Exemples de broadcast non-redondants

Proposition 2.12. *[1]. Tout broadcast dominant minimal est un broadcast non-redondant maximal.*

Par la Proposition 2.12, on obtient la chaîne d'inégalités (3) liant les paramètres de domination et de broadcast domination, et qui rallongeant la chaîne d'inégalités (2)

Corollaire 2.13. *[1] Pour tout graphe G,*

$$ir_b(G) \leq \gamma_b(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G) \leq \Gamma_b(G) \leq IR_b(G). \qquad (3)$$

Broadcast indépendant

Un broadcast f sur G est un broadcast *indépendant* si aucun f-sommet broadcast ne f-domine un autre f-sommet broadcast. En d'autres termes, pour tout sommet $v \in V_f^+$, $H_f(v)$ contient uniquement le sommet v.

Le *nombre d'indépendance broadcast* de G, noté $\beta_b(G)$, est le coût maximum d'un broadcast indépendant sur G, i.e :

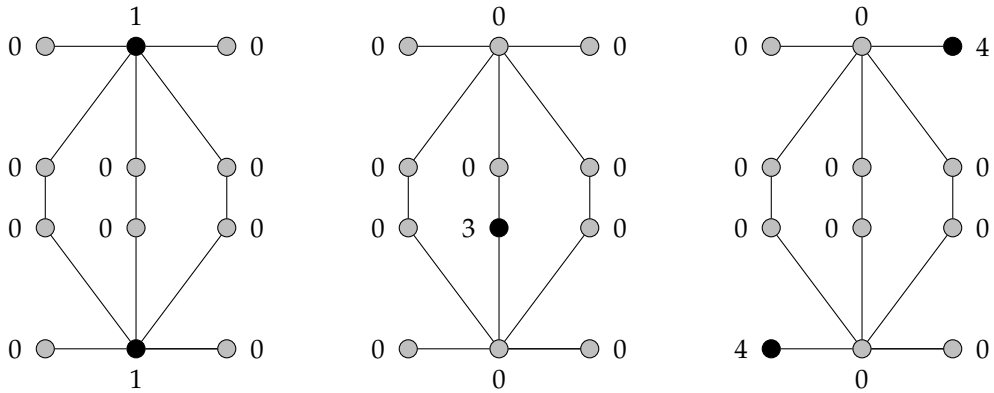
$$\beta_b(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast indépendant sur } G\}.$$

Le *nombre d'indépendance broadcast inférieur* de G, noté $i_b(G)$, est le coût minimum d'un broadcast indépendant maximal sur G, i.e :

$$i_b(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast indépendant maximal sur } G\}.$$

La Figure 2.7 représente trois *broadcast indépendants* sur un graphe G, avec $\beta_b(G) = 8$ (le coût du *broadcast* h) et $i_b(G) = 3$ (le coût du *broadcast* g).

Notons que le *broadcast* f est un dominant indépendant mais pas *minimal* (car on peut augmenter les f-valeurs des deux f-sommets braodcast d'une unité).



Le *broadcast* f Le *broadcast* g Le *broadcast* h

FIGURE 2.7 – Exemples de *broadcast* indépendants

Notons que le broadcast diamétral f_d et le broadcast radial f_r, définis dans la page 21, sont des broadcast indépendants maximaux. D'où, la chaîne d'inégalités suivante :

Proposition 2.14. *([20]) Pour tout graphe G,*

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \beta_b(G) \qquad (4)$$

Observation 2.15. *[22] Pour tout graphe G*

1. *La fonction caractéristique f_S d'un ensemble indépendant maximal S de G est un broadcast indépendant sur G mais pas nécessairement maximal.*
2. *Tout broadcast indépendant maximal est un broadcast dominant. En particulier, tout broadcast indépendant optimal est un broadcast dominant.*

De l'Observation 2.15, deux chaînes d'inégalités sont déduites

Proposition 2.16. *([22]) Pour tout graphe G,*

$$\gamma_b(G) \leq \gamma(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G) \qquad (5)$$

Proposition 2.17. *([20]) Pour tout graphe G,*

$$\gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \beta_b(G) \geq i(G) \geq \gamma(G) \geq \gamma_b(G) \qquad (6)$$

Les paramètres de domination broadcast supérieur $\Gamma_b(G)$ et d'indépendance broadcast $\beta_b(G)$ sont généralement incomparables. Pour le voir, il suffit de considérer la chaîne P_4 et le graphe de Petersen PG (illustré dans la Figure 2.8), où on a $\beta_b(P_4) = 4 \geq \Gamma_b(P_4) = 3$ alors que $\beta_b(PG) = 4 \leq \Gamma_b(PG) = 5$. De meme, ni $\gamma(G)$, ni $i(G)$ ne sont comparables avec $i_b(G)$. Pour le voir, il suffit de considérer la chaîne P_6 et l'étoile subdivisé $S_2(K_{1,t})$, $t \geq 3$, où on a $\gamma(P_6) = i(P_6) = 2 < 3 = i_b(P_6)$ alors que $\gamma(S_2(K_{1,t})) = i(S_2(K_{1,t})) = t > 2 = i_b(S_2(K_{1,t}))$.

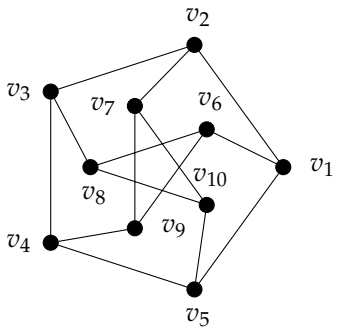


FIGURE 2.8 – Le graphe de Petersen

Broadcast dominant indépendant

Un broadcast f sur G est un broadcast *dominant indépendant* s'il est à la fois dominant et indépendant.

Le *nombre de domination indépendance broadcast* de G, noté $\gamma_{ib}(G)$, est le coût minimum d'un broadcast dominant indépendant sur G, i.e :

$$\gamma_{ib}(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast dominant indépendant sur } G\}.$$

Le *nombre de domination indépendance broadcast supérieure* de G, noté $\Gamma_{ib}(G)$, est le coût maximum d'un broadcast dominant indépendant minimal sur G, i.e :

$$\Gamma_{ib}(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast dominant indépendant minimal sur } G\}.$$

La Figure 2.9 représente trois *broadcasts dominants indépendants* sur un graphe G, avec $\gamma_{ib}(G) = 3$ (le coût du *broadcast* f) et $\Gamma_{ib}(G) = 4$ (le coût du *broadcast* g).

Notons que le *broadcast* h n'est pas minimal (car on peut diminuer les h-valeurs des h-sommets *broadcast* v où $h(v) = 2$ d'une unité).

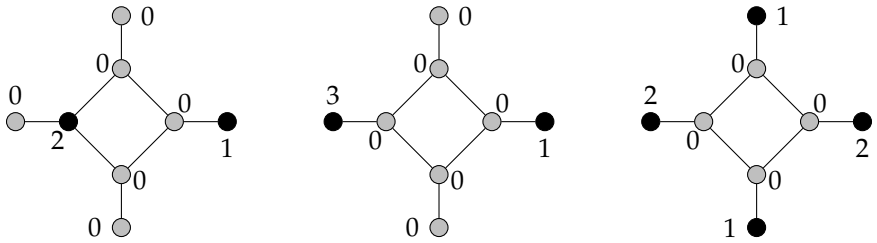


FIGURE 2.9 – Exemples de *broadcast de dominantes et indépendantes*

A partir d'un broadcast dominant f, il est toujours possible de déterminer un broadcast g qui soit à la fois dominant et indépendant, n'excédant pas le coût de f et dont l'ensemble des g-sommets broadcast V_g^+ est compris dans l'ensemble des f-sommets broadcast V_f^+.

Théorème 2.18. *([23]) Si f est un broadcast dominant sur un graphe G, alors il existe un broadcast g sur G, dominant et indépendant, pour lequel $\sigma(g) \leq \sigma(f)$ et $V_g^+ \subset V_f^+$.*

Une conséquence directe du Théorème 2.18 est le corollaire suivant :

Corollaire 2.19. *([23]) Pour tout graphe G,*

$$\gamma_{ib}(G) = \gamma_b(G).$$

Comme le broadcast diamétral f_d (défini à la page 21) est un broadcast indépendant dominant maximal sur G. La chaîne d'inégalités suivante est déduite :

Proposition 2.20. *([20]) Pour tout graphe G,*

$$\gamma_{ib}(G) = \gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \qquad (7)$$

Observation 2.21. *([20]) Pour tout graphe G*

1. *La fonction caractéristique f_S d'un ensemble indépendant maximal S de G est un broadcast dominant indépendant minimmal sur G mais pas nécessairement maximal.*
2. *Tout broadcast dominant indépendant minimal est un broadcast indépendant mais pas nécessairement maximal.*

Du 1^{er} point de l'Observation 2.21, on déduit les inégalités $\gamma_{ib}(G) \leq i(G)$ et $\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G)$ et du 2^{eme} point de cette même observation, on déduit l'inégalité $\Gamma_{ib}(G) \leq \beta_b(G)$.

D'où le résultat d'encadrement du *nombre de domination indépendant broadcast* .

Proposition 2.22. *([20]) Pour tout graphe G,*

$$\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq \min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}.$$

Broadcast de packing

Un broadcast f sur un graphe G est un broadcast *de packing* si chaque sommet $v \in V$ est f-dominé par au plus un sommet de V_f^+, c'est-à-dire que pour tout sommet $v \in V$, l'ensemble $H_f(v)$ contient au plus un sommet.

Le *nombre de packing broadcast* de G, noté $P_b(G)$, est le coût maximum d'un broadcast de packing sur G, i.e :

$$P_b(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast de packing sur } G\}.$$

Le *nombre de packing broadcast inférieur* de G, noté $p_b(G)$ est le coût minimum d'un broadcast de packing maximal sur G, i.e :

$$p_b(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast de packing maximal sur } G\}.$$

La Figure 2.10 représente trois *broadcasts de packing* sur un graphe G, avec $P_b(G) = 6$ (le coût du *broadcast* g) et $p_b(G) = 2$ (le coût du *broadcast* f)

Notons que le *broadcast h* n'est pas maximal puisque on peut augmenter la h-valeur d'un des deux g-sommets broadcast d'une unité.

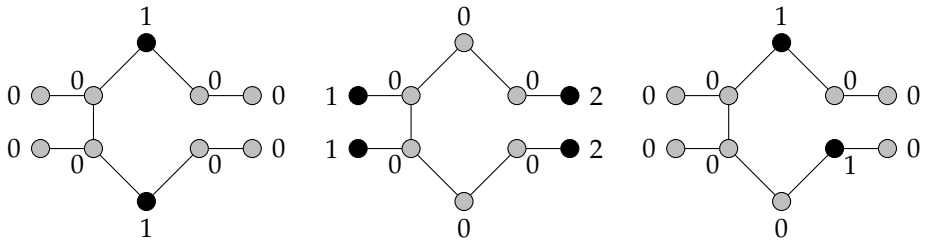


FIGURE 2.10 – Exemples de *broadcast de packing*

Dunbar et al. [20] ont montré que pour certains graphes G, le paramètre $P(G)$ ou $p(G)$ peut être plus grand que $p_b(G)$, tandis que pour d'autres graphes, $p_b(G)$ peut être plus grand.

Observation 2.23. *Pour tout graphe G*

1. *Le broadcast diamétral f_d et le broadcast radial f_r, définis dans la page 21, sont des broadcast de packing.*
2. *La fonction caractéristique d'un packing maximal dans G est un broadcast de packing sur G mais pas nécessairement maximal.*
3. *Tout broadcast de packing est un broadcast indépendant sur G.*
4. *Tout broadcast de packing est un broadcast non-redondant sur G.*

Du 1^{er} point de l'Observation 2.23, on déduit l'inégalité $p_b(G) \leq rad(G) \leq \text{diam}(G) \leq P_b(G)$, du 2^{eme} point de cette même observation, on déduit l'inégalité $p(G) \leq P(G) \leq P_b(G)$, et du 3^{eme} et 4^{eme} point on déduit l'inégalité $\leq P_b(G) \leq \min\{IR_b(G), \beta_b(G)\}$.

D'où on obtient chaîne d'inégalités suivante.

Proposition 2.24. *([20]) Pour tout graphe G,*

$$p_b(G) \leq rad(G) \leq \text{diam}(G) \leq P_b(G) \leq \min\{IR_b(G), \beta_b(G)\}. \qquad (8)$$

Broadcast efficace

Un broadcast f sur G est un broadcast *efficace* si tout sommet de G n'est f-dominé que par un seul sommet de V_f^+. En d'autres termes, pour tout sommet $v \in V$, $H_f(v)$ contient exactement un sommet.

Le *nombre d'efficacité broadcast* de G, noté $\gamma_{eb}(G)$, est le coût minimum d'un broadcast efficace sur G, i.e :

$$\gamma_{eb}(G) = \min\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast efficace sur } G\}.$$

Le *nombre d'efficacité broadcast supérieur* de G, noté $\Gamma_{eb}(G)$, est le coût maximum d'un broadcast efficace sur G, i.e :

$$\Gamma_{eb}(G) = \max\{\sigma(f) : f \text{ est un broadcast efficace sur } G\}.$$

La Figure 2.11 représente trois *broadcasts efficaces* sur un graphe G, avec $\gamma_{eb}(G) = 2$ (le coût du *broadcast* f) et $\Gamma_{eb}(G) = 4$ (le coût du *broadcast diamétral* h).

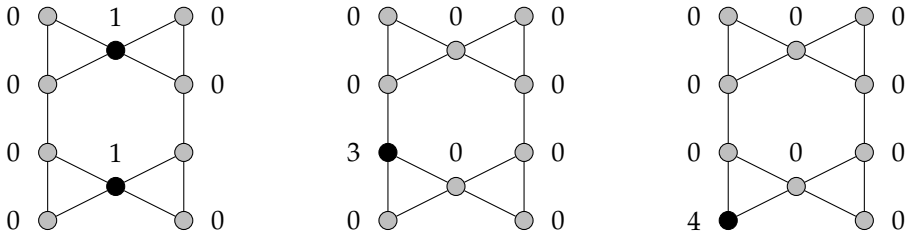


FIGURE 2.11 – Exemples de *broadcast non-redondants*

De la définition d'un broadcast efficace sur un graphe G, on peut dire que tout broadcast efficace est dominant, ce qui nous permet d'avoir l'inégalité $\gamma_b(G) \leq \gamma_{eb}(G)$. Le résultat suivant nous donne l'inégalité dans l'autre sens.

Théorème 2.25. *([20]). Tout graphe G possède un γ_b-broadcast qui est efficace.*

Tout broadcast dominant efficace sur G est un broadcast dominant minimal et indépendant sur G. Par conséquent

$$\Gamma_{eb}(G) \leq \min\{\Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G), \beta_b(G)\}.$$

De plus, le broadcast diamétral f_d (défini à la page 21) est un broadcast dominant efficace sur G. Par conséquent

$$diam(G) \leq \Gamma_{eb}(G).$$

On peut donc étendre la chaîne d'inégalités 7.

Corollaire 2.26. *([20]) Pour tout graphe G*

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_{eb}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \qquad (9)$$

2.3 Le nombre d'indépendance broadcast

Depuis l'introduction du concept de la domination broadcast, plusieurs chercheurs ont manifesté un vif intérêt pour ces paramètres. Cependant, le paramètre d'indépendance broadcast a été relativement moins étudié. À notre connaissance, les seuls travaux qui existent sont ceux de Dunbar et al. [20], Bouchemakh et Zemir [14], Bessy et Rautenbach [8, 11, 10], Mynhardt et Neilson [38], ainsi que Bouchouika et al. [15], et plus récemment ceux d'Ahmane et al. [2, 3].

Bessy et Rautenbach [9] ont étudié l'aspect algorithmique du problème d'indépendance broadcast. Ils ont prouvé qu'il est NP-complet dans le cas des graphes planaires (c.à.d, les graphes qu'on peut dessiner dans le plan sans que les arêtes ne se croisent) connexes et de degré maximum 4, mais qu'il est polynomial pour les arbres, avec un ordre de complexité égal à $O(n^9)$.

2.3.1 Caractérisation des broadcasts indépendants maximaux et bornes sur le nombre d'indépendance broadcast

La première caractérisation d'un broadcast indépendant maximal a été donnée par Erwin [22], en définissant les broadcasts indépendants maximaux par le théorème suivant.

Théorème 2.27. *([22]) Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G.*

1. *Si $V_f^+ = \{v\}$, alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e(v)$.*
2. *Si $|V_f^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

   (a) f est un broadcast dominant, et
   (b) pour tout $v \in V_f^+$, $f(v) = \min\{d(v,u) : u \in V_f^+ \setminus \{v\}\} - 1$.

En dehors des graphes complets, pour lesquels $\beta_b(K_n) = diam(K_n)$, la borne inférieure peut être améliorée. En effet, soit M l'ensemble des sommets périphériques de G tels que pour toute paire de sommets u et v dans M, $d(u,v) = diam(G)$, et soit $\mu(G)$ la cardinalité maximum de M. On a le résultat suivant :

Proposition 2.28. *([20]) Pour tout graphe G connexe d'ordre $n \geq 2$,*

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - 1) \geq 2(diam(G) - 1),$$

et cette borne et atteinte.

Pour tout graphe G tel que $diam(G) \leq 2$ ou $\beta_0(G) \leq 2$, l'inégalité $\beta_b(G) = \beta_0(G)$ est satisfaite. Pour les autres graphes, Bessy et Rautenbach [11], ont réussi à déterminer des relations liant le nombre d'indépendance $\beta_0(G)$ avec le nombre d'indépendance broadcast $\beta_b(G)$.

Théorème 2.29 ([11]). *Si G est un graphe connexe tel que $diam(G) \geq 3$ ou $\beta_0(G) \geq 3$ et f un broadcast indépendant optimal sur G, alors*

$$\sigma(f) \leq 4\beta_0(G) - 4\min\left\{1, \frac{2\beta_0(G)}{f_{max} + 2}\right\},$$

où $f_{max} = \max\{f(x) : x \in V\}$.

Découlant directement du théorème précédent, les mêmes auteurs ont établi le résultat suivant :

Théorème 2.30. *([11]) Soit G est un graphe connexe, alors*

$$\beta_b(G) \leq 4\beta_0(G).$$

En approfondissant leur étude, Bessy et Rautenbach ont amélioré leur borne sur $\beta_b(G)$ de manière significative, en imposant des conditions sur le degré minimum $\delta(G)$ et la maille $g(G)$ d'un graphe G.

Théorème 2.31. *([10]) Soit G est un graphe connexe de maille au moins 6 et de degré minimum au moins 3, alors*

$$\beta_b(G) < 2\beta_0(G).$$

Par le résultat qui suit, on peut affirmer que la borne supérieure $2\beta_0(G)$ sur $\beta_b(G)$ ne peut être améliorée.

Théorème 2.32. *([10]) Pour tout entier positif k, il existe un graphe connexe G de maille et de degré minimum au moins k tel que*

$$\beta_b(G) \geq 2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\beta_0(G).$$

La borne inférieure $\beta_0(G)$ sur $\beta_b(G)$ peut être améliorée en faisant intervenir le nombre de packing de G, sous certaines conditions sur la maille et le degré minimum du graphe G.

Théorème 2.33. *([10]) Soit G un graphe connexe de maille au moins g et de degré minimum au moins δ.*

1. *Si $g = 6$ et $\delta = 5$, alors $\beta_b(G) \geq \beta_0(G) + P(G)$ où $P(G)$ est le nombre de packing de G.*
2. *Si ξ est un nombre réel avec $2 \leq \xi < 4$, $g = 4$, et $\delta \geq \frac{10}{\xi}$, alors $\beta_b(G) \leq \xi\beta_0(G)$.*

2.3.2 Quelques valeurs exactes sur le nombre d'indépendance broadcast

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats concernant *le nombre d'indépendance broadcast* dans quelques classes de graphes.

Dans [23], Erwin à prouvé que la chaîne d'ordre n, $n \geq 3$ atteint la borne $2(diam(G) - 1)$ de la Proposition 2.28 sur $\beta_b(G)$.

Théorème 2.34. *([23]) Pour tout entier $n \geq 3$,*

$$\beta_b(P_n) = 2(n-2).$$

La Figure 2.12 représente un *broadcast indépendant* sur la chaîne P_6.

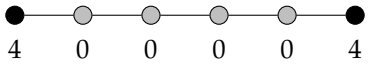


FIGURE 2.12 – Un *broadcast indépendnt* sur P_6

La borne donnée dans la Proposition 2.28 est atteinte pour d'autres classes de graphes, telles que les étoiles $K_{1,n-1}$, $n \geq 3$ [20], les étoiles subdivisées $S(K_{1,t})$, $t \geq 2$ [20] et plus généralement les araignées $S(n^k)$, $n \geq 1$ et $k \geq 2$ [20] :

$$\beta_b(K_{1,n-1}) = (n-1)(\text{diam}(K_{1,n-1}) - 1) = n - 1.$$
$$\beta_b(S(K_{1,t})) = t(\text{diam}(S(K_{1,t}) - 1) = 3t.$$
$$\beta_b(S(n^k)) = k(\text{diam}(S(n^k) - 1) = k(2n-1).$$

Bouchemakh et Zemir [14] ont déterminé les valeurs exactes du nombre d'indépendance broadcast des grilles.

Théorème 2.35. *([14])*
Soit $G_{m,n}$ une grille de dimension (m, n) avec $m \geq 2$ et $n \geq 2$. On a alors :

1. *$\beta_b(G_{m,n}) = 2(m + n - 3) = 2(diam(G_{m,n}) - 1)$ si $m \leq 4$,*
2. *$\beta_b(G_{5,5}) = 15$, $\beta_b(G_{5,6}) = 16$,*
3. *$\beta_b(G_{m,n}) = \lceil \frac{mn}{2} \rceil$ pour tout entiers m, n, $5 \leq m \leq n$, $(m, n) \neq (5,5), (5,6)$.*

Comme nous l'avons déjà noté, les deux paramètres $\Gamma_b(G)$ et $\beta_b(G)$ sont généralement incomparables. Cependant, il existe des classes de graphes pour lesquelles ces deux paramètres sont égaux. Bouchouika et al. [15] ont prouvé l'égalité de ces deux paramètres pour les cycles.

Théorème 2.36. *([15]) Pour tout $n \geq 3$,*

$$\beta_b(C_n) = \Gamma_b(C_n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 3, \\ 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\right) & si\ n \geq 4. \end{cases}$$

Ahmane et al. [2] ont déterminé une formule explicite du nombre d'indépendance broadcast de la chenille sans troncs adjacents. Cette formule fait intervenir tous les types de motifs que peuvent avoir ces chenilles. Vu la complexité de la formule nous ne mentionnons ici que certains classes d'entre elles.

Pour toute chenille CT, désignons par $\lambda(CT)$, $\tau(CT)$ et $n_1(CT)$ le nombre de feuilles, le nombre de troncs et le nombre de sommets supports adjacents à exactement une feuille.

Proposition 2.37. *[2] Pour toute chenille CT de longueur $k \geq 1$, sans tronc, nous avons $\beta_b(CT) = 2k + 2 = 2(diam(CT) - 1)$ si CT n'a aucun sommet support adjacent à au moins trois feuilles et $\beta_b(CT) = \lambda(CT) + n_1(CT)$ sinon.*

Proposition 2.38. *[2] Pour toute chenille CT de longueur $k \geq 1$, sans troncs adjacents et ayant tous ses sommets supports adjacents à au moins trois feuilles, nous avons*

$$\beta_b(CT) = \lambda(CT) + \tau(CT).$$

Le nombre d'indépendance broadcast d'une chenille avec troncs adjacents mais n'ayant aucun sommet support adjacent à au moins trois feuilles à aussi été déterminé.

Proposition 2.39. *[2] Pour toute chenille CT de longueur $k \geq 1$, n'ayant aucun sommet support adjacent à au moins trois feuilles, nous avons*

$$\beta_b(CT) = 2k + 2 = 2(diam(CT) - 1).$$

Pour clôturer cette section, notons que Ahmane et al. [3] ont déterminé aussi une formule explicite du nombre d'indépendance broadcast d'un homard L ayant les deux propriétés suivantes :

1. Chaque sous-arbre maximal de L enraciné en un sommet-épine v_i et ne contenant aucun autre sommet-épine est soit une étoile de centre v_i, soit chaque feuille de L est à distance 2 de v_i.

2. L ne contient pas de sous-arbre ayant une unique branche avec exactement trois feuilles à distance 2 d'un sommet-épine.

Comme pour la classe des chenilles, la formule du nombre de d'indépendance broadcast des homards est très complexe et demande l'introduction d'un nombre important de notations, nous omettrons donc de l'insérer ici.

Chapitre 3

Nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants $C(n;1,a)$

Sommaire

3.1 Résultats préliminaires 37
3.2 Broadcasts indépendants optimaux 2-limités 43
3.3 Bornes générales sur le nombre d'indépendance broadcast de $C(n;1,a)$ 51
3.4 Quelques valeurs exactes 54

Dans ce chapitre, nous examinons le nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants non orientés de la forme $C(n;1,a)$, où $2 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, également connus sous le nom *double-loop networks*. Nous déterminons des bornes et des valeurs exactes pour presque toutes les valeurs de a. Les résultats de cette recherche ont été publiés dans le journal "*Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*" [34].

La Figure 3.1 représente les deux graphes circulants $C(10;1,3)$ et $C(12;1,4)$

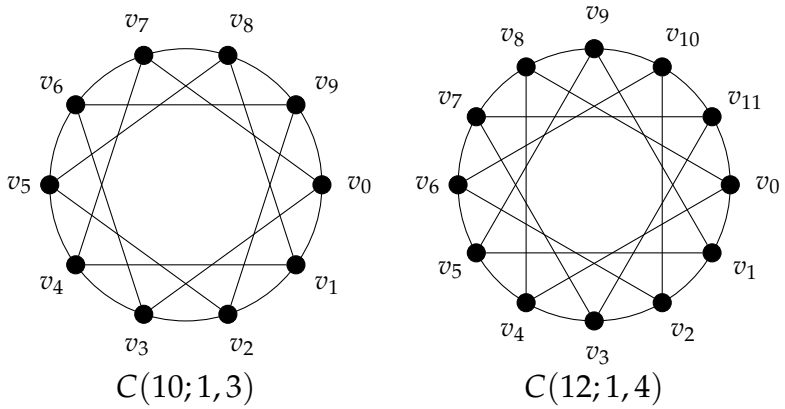


Figure 3.1 – Deux graphes circulants

3.1 Résultats préliminaires

Rappelons que la fonction caractéristique f_S de tout ensemble indépendant maximal S dans un graphe G est un broadcast indépendant, pas nécessairement maximal, ce qui nous permet d'avoir le résultat suivant.

Observation 3.1. *Pour tout graphe G, $\beta_b(G) \geq \alpha(G)$. De plus, $\beta_b(G) = \alpha(G)$ si et seulement s'il existe un β_b-broadcast f sur G tel que $f(v) = 1$ pour chaque sommet broadcast $v \in V_f^+$.*

Avant d'aborder les cas généraux dans les sections suivantes, examinons le nombre de stabilité et le nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants de la forme $C(n;1,a)$ dans les deux cas $n = 2a$ et $n = 3a$. Commençons par le nombre de stabilité de $C(n;1,2)$.

Lemme 3.2. *Pour tout entier $a \geq 2$,*

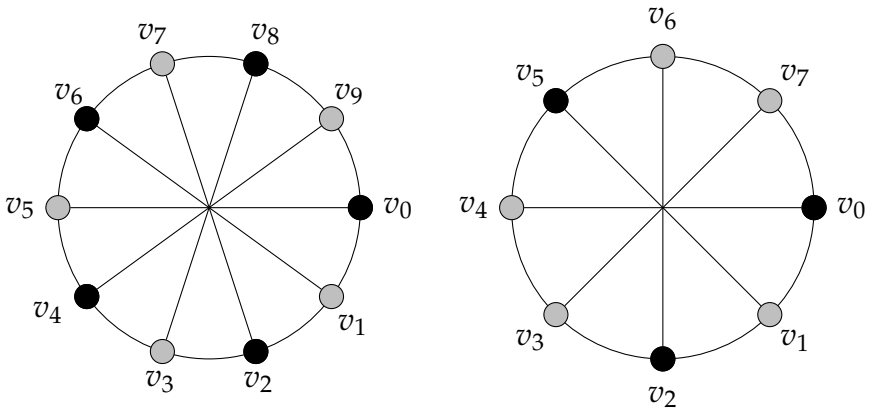
$$\alpha(C(2a;1,a)) = \begin{cases} a, & \text{si } a \text{ est impair,} \\ a-1, & \text{si } a \text{ est pair.} \end{cases}$$

Preuve.

Puisque $C(4;1,2) = K_4$ et $\alpha(K_4) = 1$, nous pouvons supposer que $a \geq 3$.

Si a est impair, alors l'ensemble $S = \{v_i |\ i \text{ est pair}\}$ forme un ensemble indépendant de $C(2a;1,a)$ (Figure 3.2(a) illustre l'ensemble S dans le graphe $C(10;1,5)$). Ainsi, $\alpha(C(2a;1,a)) \geq |S| = a$. Par ailleurs, comme C_{2a} est un sous-graphe de $C(2a;1,a)$, nous avons $\alpha(C(2a;1,a)) \leq \alpha(C_{2a}) = a$. On en déduit le résultat.

Si a est pair, alors l'ensemble $S' = \{v_i |\ 0 \leq i \leq a-2,\ i \text{ est pair}\} \cup \{v_i |\ a+1 \leq i \leq 2a-3,\ i \text{ est impair}\}$ forme un ensemble indépendant de $C(2a;1,a)$ (Figure 3.2(b) illustre l'ensemble S' dans le graphe $C(8;1,4)$), et ainsi $\alpha(C(2a;1,a)) \geq |S'| = a-1$. Notons que le cycle impair $C = \{v_0, v_1, \ldots, v_a, v_0\}$, avec $\alpha(C) = \frac{a}{2}$, est un sous-graphe de $C(2a;1,a)$. Par conséquent, pour tout ensemble indépendant I de $C(2a;1,a)$, il existe au moins deux sommets consécutifs v_i, v_{i+1} qui ne sont pas dans I. Cela implique $\alpha(C(2a;1,a)) \leq \frac{2a-1}{2}$, et donc $\alpha(C(2a;1,a)) = a-1$. □



(a) Les sommets du stable S (les sommets noirs), $a = 5$

(b) Les sommets du stable S' (les sommets noirs), $a = 4$

FIGURE 3.2 – Deux ensembles de stables S dans $C(10;1,5)$ et S' dans $C(8;1,4)$

Théorème 3.3. *Pour tout entier $a \geq 2$,*

$$\beta_b(C(2a;1,a)) = \begin{cases} \alpha(C(2a;1,a)) = a-1, & \text{si } a = 2^p \text{ pour un entier } p \geq 1, \\ \alpha(C(2a;1,a)) = a, & \text{si } a \text{ est impair}, \\ a, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Le cas $a = 2$ découle directement du Lemme 3.2. Nous pouvons donc supposer que $a \geq 3$.

Pour commencer, considérons le graphe $C(2a;1,a)$ comme le produit cartésien du graphe $P_a \times K_2$, auquel sont ajoutées deux arêtes supplémentaires (voir la Figure 3.3), où ces arêtes sont dessinées en pointillés.

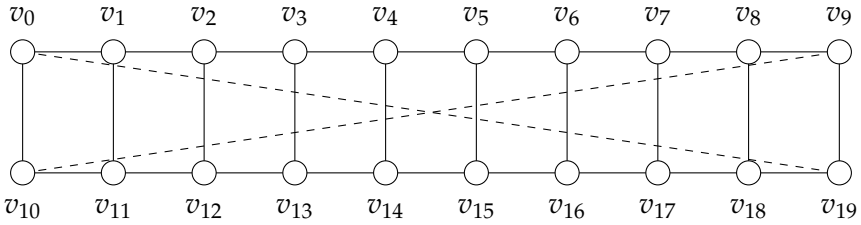


FIGURE 3.3 – Le graphe circulant $C(20;1,10)$

Soit maintenant un β_b-broadcast indépendant f sur $C(2a;1,a)$. Notons que $\alpha(C(2a;1,a))$ est donné par le Lemme 3.2. Si $|V_f^+| = 1$, alors

$$\sigma(f) = \operatorname{diam}(C(2a;1,a)) = \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor < \alpha(C(2a;1,a)),$$

ce qui donne $\sigma(f) < \beta_b(C(2a;1,a))$ selon l'Observation 3.1, une contradiction. Par conséquent, $|V_f^+| \geq 2$. Pour chaque sommet f-broadcast v_i, v_i f-domine exactement $4f(v_i)$ (voir la Figure 3.4 pour le cas $a = 10$ et $f(v_3) = 3$) et f-domine exactement une fois. Pour chaque sommet non-broadcast v_j, v_j est f-dominé au plus par deux sommets $v_i, v_i' \in V_f^+$, tels que $v_i \in \{v_{j+s}, v_{j+a+s}, \mid s \in 1,2,\ldots \lfloor \frac{a}{2} \rfloor\}$, et $v_i' \in \{v_{j-s}, v_{j+a-s}, \mid s \in 1,2,\ldots \lfloor \frac{a}{2} \rfloor\}$, cela implique que chaque sommet non-broadcast est f-dominé au plus trois fois, et au plus $|V_f^+|$ sommets peuvent être dominés trois fois, qui sont les sommets v_{i+a} avec $v_i \in V_f^+$, nous obtenons

$$4f(V_f^+) \leq 3|V_f^+| + |V_f^+| + 2\left(2a - 2|V_f^+|\right) = 4a, \tag{3.1}$$

et donc

$$\beta_b(C(2a;1,a)) = \sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v) = f(V_f^+) \leq a. \tag{3.2}$$

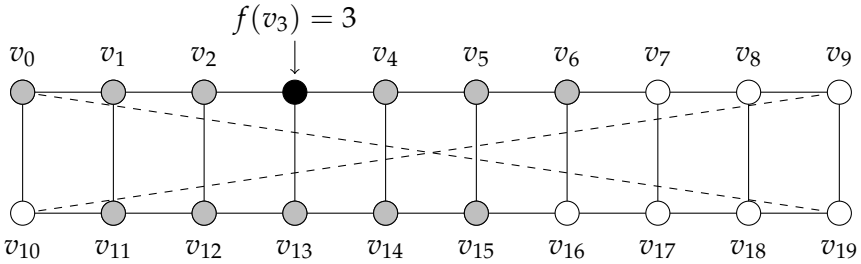


FIGURE 3.4 – Le graphe circulant $C(20;1,10)$, avec $f(v_3) = 3$

Nous examinons maintenant séparément les trois cas énoncés dans le théorème.

1. a est impair.
   Soit g l'application de $V(C(2a;1,a))$ dans $\{0,1\}$ définie par $g(v_i) = 1$ si et seulement si i est pair. Comme a est impair, g constitue un broadcast indépendant sur $C(2a;1,a)$. Cela entraîne $\beta_b(C(2a;1,a)) \geq \sigma(g) = a$ et, puisque g satisfait à (3.2), $\beta_b(C(2a;1,a)) = a$. En utilisant l'Observation 3.1, nous obtenons alors $\beta_b(C(2a;1,a)) = \alpha(C(2a;1,a)) = a$.
2. $a = 2^p$ pour un entier $p \geq 1$. Par l'Observation 3.1 et le Lemme 3.2, nous avons $\beta_b(C(2a;1,a)) \geq \alpha(C(2a;1,a)) = a - 1$, car a est pair. Soit g un β_b-broadcast indépendant sur $C(2a;1,a)$. Supposons d'abord que tous les sommets g-broadcast n'ont pas le même coût, et soit v_i et v_j deux sommets quelconques avec $g(v_i) < g(v_j)$ tels que la distance $d(v_i, v_j)$ est minimale parmi tous les sommets g-broadcasts avec des coûts différents. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $i < j$. Nous considérons deux sous-cas, selon que v_i et v_j sont du même côté de l'échelle ou non, où le sommet v_i se trouve dans le coin supérieur gauche dans la nouvelle représentation.

   (a) *$j - i > a$ (v_i et v_j ne sont pas du même côté de l'échelle (voir Figure 3.5(a)).*
   Puisqu'aucun sommet g-broadcast ne se trouve sur une plus courte chaîne reliant v_i et v_j, et comme $g(v_i) < g(v_j)$ donc v_{j+a} n'est pas g-dominé par v_i et donc il est

g-dominé au plus deux fois. Par conséquent, l'inégalité (3.1) devient

$$4g(V_g^+) \leq 3(|V_g^+|-1)+|V_g^+|+2\left(2a-2|V_g^+|+1\right)=4a-1,$$

ce qui donne

$$\beta_b(C(2a;1,a))=\sigma(g)=\sum_{v\in V_g^+} g(v)=g(V_g^+)\leq\left\lfloor\frac{4a-1}{4}\right\rfloor=a-1.$$

(b) $j-i<a$ (v_i *et* v_j *sont du même côté de l'échelle (voir Figure 3.5(b)).* S'il existe un sommet g-broadcast v_k avec $i+a<k<j+a$ alors, puisque aucun sommet g-broadcast ne se trouve sur la plus courte chaîne reliant v_i et v_j, nous avons nécessairement $v_k\in\{v_{i+a+1},v_{j+a-1}\}$. En considérant soit v_i et v_k, soit v_j et v_k, au lieu de v_i et v_j, nous retournons au sous-cas précédent.

Si un tel sommet n'existe pas, alors v_{i+a} et v_{j+a} sont tous les deux g-dominés au plus deux fois et donc, en utilisant le même argument qu'auparavant, nous obtenons $\beta_b(C(2a;1,a))\leq a-1$.

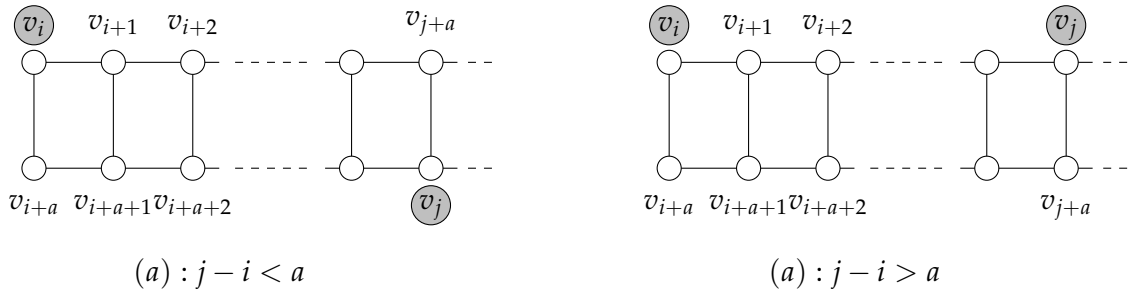


FIGURE 3.5 – Le graphe circulant $C(2a;1,a)$

Nous obtenons donc $\beta_b(C(2a;1,a))=a-1$ dans les deux sous-cas, comme requis.
Supposons maintenant que $g(v)=k$ pour chaque sommet $v\in V_g^+$ et soit v_i n'importe quel sommet de ce type. Si $v_{i+a+k}\notin V_g^+$, alors le sommet v_{i+a} est g-dominé au plus deux fois et donc, comme précédemment, nous obtenons $\beta_b(C(2a;1,a))=\sigma(g)=a-1$. La même conclusion s'applique si $v_{i-a-k}\notin V_g^+$. Supposons enfin que $v_{i+a+k},v_{i-a-k}\in V_g^+$ pour chaque sommet $v_i\in V_g^+$ et supposons, sans perte de généralité, que $v_0\in V_g^+$. Nous avons alors (rappelons que les indices sont pris modulo $2a$)

$$V_g^+=\{v_0,v_{a+k},v_{2k},v_{a+3k},\ldots\}=\{v_0,v_{2k},v_{4k},\ldots,v_{a+k},v_{a+3k},v_{a+5k},\ldots\}.$$

Ainsi, chaque sommet g-broadcast v_i avec $0\leq i<a$ satisfait $i=2kt$ pour un certain t, $0\leq t<\frac{a}{2k}$. Puisque $v_{-a-k}=v_{a-k}$ est un sommet g-broadcast et que $0<a-k<a$, nous obtenons $a-k=2kt'$, pour un certain t', $0<t'<\frac{a}{2k}$. Ce qui entraîne $a=(2t'+1)k$, contredisant l'hypothèse $a=2^p$, de sorte que ce dernier cas ne peut se réaliser.

3. a est paire $a \neq 2^p$ pour tout $p > 0$.
   Cela implique que $a = (2\ell+1)2^k$ pour certains entiers positifs k et ℓ. Soit g l'application de $V(C(2a;1,a))$ dans $\{0,2^k\}$ définie par $g(v_i) = 2^k$ si et seulement si $i \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$, ce qui donne $V_g^+ = \{v_{p2^{k+1}} |\ 0 \leq p \leq 2\ell\}$ (La Figure 3.6 illustre un broadcast indépendant g sur $C(20;1,a)$ avec un coût $\sigma(g) = 10$).

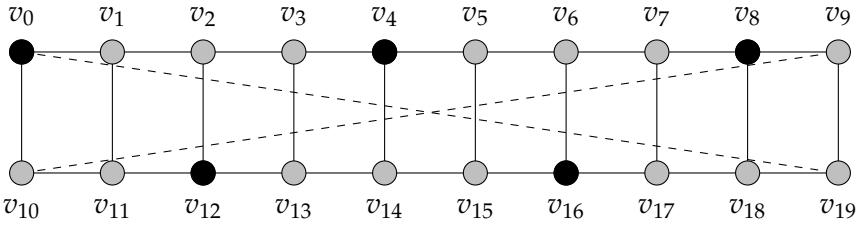


FIGURE 3.6 – Les sommets de V_g^+ (les sommets noirs) avec $a = 10$, $\ell = 2$ et $k = 1$.

Pour toute paire de sommets g-broadcasts $v_i = v_{p2^{k+1}}$ et $v_j = v_{q2^{k+1}}$, $0 \leq p < q \leq 2\ell$, nous avons

$$d(v_i, v_j) = \min\{(q-p)2^{k+1}, |(p-q)2^{k+1} + a| + 1, (p-q)2^{k+1} + 2a\},$$

ce qui donne, puisque $a = (2\ell+1)2^k$,

$$d(v_i, v_j) = \min\{(q-p)2^{k+1}, |2(p-q+\ell)+1|2^k + 1, (p-q+2\ell+1)2^{k+1}\} \geq 2^k + 1.$$

Par conséquent, g est un broadcast indépendant sur $C(2a;1,a)$, avec un coût

$$\sigma(g) = 2^k \left(\frac{2a}{2^{k+1}}\right) = a,$$

ce qui donne

$$\beta_b(C(2a;1,a)) \geq \sigma(g) = a,$$

et donc, puisque g satisfait (3.2), $\beta_b(C(2a;1,a)) = \alpha_b(C(2a;1,a)) = a$. Cela achève la preuve.

□

Nous considérons maintenant le cas $n = 3a$.

Théorème 3.4. *Pour tout entier $a \geq 3$,*

$$\beta_b(C(3a;1,a)) = \alpha(C(3a;1,a)) = a.$$

Preuve.

Soit f un β_b-broadcast independent sur $C(3a;1,a)$. Pour chaque sommet $v_i \in V_f^+$, nous définissons

$$C_f^i = \{v_i, \ldots, v_{i+f(v_i)-1}\} \cup \{v_{i+a}, \ldots, v_{i+a+f(v_i)-1}\} \cup \{v_{i+2a}, \ldots, v_{i+2a+f(v_i)-1}\}.$$

Nous avons clairement $|C_f^i| = 3f(v_i)$ pour chaque $v_i \in V_f^+$, et $C_f^i \cap C_f^{i'} = \emptyset$ pour chaque paire distincte de sommets v_i et $v_{i'}$ dans V_f^+, car sinon $d(v_i, v_{i'}) \leq \max\{f(v_i), f(v_{i'})\}$, ce qui contredirait le fait que f est un broadcast independent. Cela donne

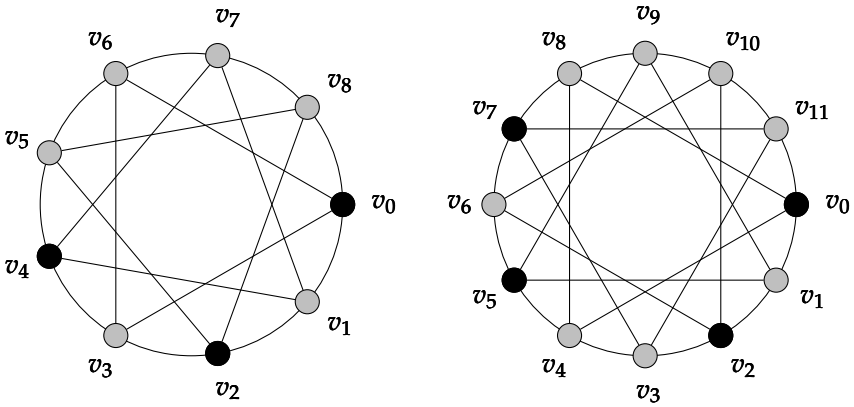
$$3f(V_f^+) = \sum_{v_i \in V_f^+} |C_f^i| \leq 3a,$$

et donc

$$\beta_b(C(3a;1,a)) = \sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v) = f(V_f^+) \leq \frac{3a}{3} = a.$$

Considérons maintenant l'application f de $V(C(3a;1,a))$ dans $\{0,1\}$ définie comme suit, selon la parité de a.

1. Si a est impair, alors $f(v_i) = 1$ si et seulement si i est pair et $i < 2a$ (voir la Figure 3.7(a)).
2. Si a est pair, alors $f(v_i) = 1$ si et seulement si $(i \mod a+1)$ est impair et $i \leq 2a$ (voir la Figure 3.7(b)).



(a) $\sigma(f_1) = 3$ sur $C(9;1,3)$ (b) $\sigma(f_2) = 4$ sur $C(12;1,4)$

FIGURE 3.7 – Deux broadcast inépendants, f_1 sur $C(9;1,3)$ et f_2 sur $C(12;1,4)$.

Dans les deux cas, f est un broadcast independent sur $V(C(3a;1,a))$ avec $\sigma(f) = a$. Cela implique que $\beta_b(C(3a;1,a)) \geq a$, et donc, grâce à l'Observation 3.1, $\beta_b(C(3a;1,a)) = \alpha(C(3a;1,a)) = a$.

□

3.2 Broadcasts indépendants optimaux 2-limités

Notre objectif dans cette section est de prouver que presque tous les graphes circulants de la forme $C(n;1,a)$, $2 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, admettent un broadcast independent optimal où le coût de chaque sommet de cette fonction est inférieur ou égal à 2. Rappelons que nous notons par $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ les sommets de $C(n;1,a)$ et que les indices sont toujours considérés modulo n. Nous disons qu'une arête v_iv_j est une *k-arête* pour un entier k, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, si $j = i+k$ ou $i = j+k$. Par conséquent, chaque arête dans $C(n;1,a)$ est soit une 1-arête, soit une a-arête.

Soit f un broadcast independent sur $C(n;1,a)$. Pour chaque sommet f-broadcast $v_i \in V_f^+$, nous notons $D_f(v_i)$ l'ensemble des sommets f-dominés par v_i, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} D_f(v_i) &= \bigcup_{k=0}^{f(v_i)} \{v_j \mid i-(f(v_i)-k)a-k \leq j \leq i-(f(v_i)-k)a+k\} \\ &\cup \bigcup_{k=0}^{f(v_i)} \{v_j \mid i+(f(v_i)-k)a-k \leq j \leq i+(f(v_i)-k)a+k\}. \end{aligned}$$

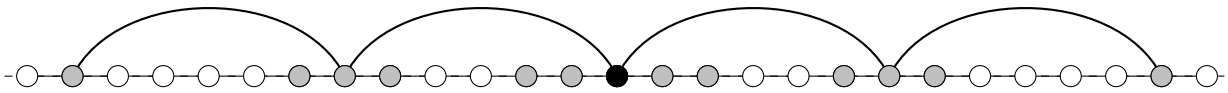


FIGURE 3.8 – L'ensemble $D_f(v_i)$ (les sommets noirs et gris), avec $a = 6$.

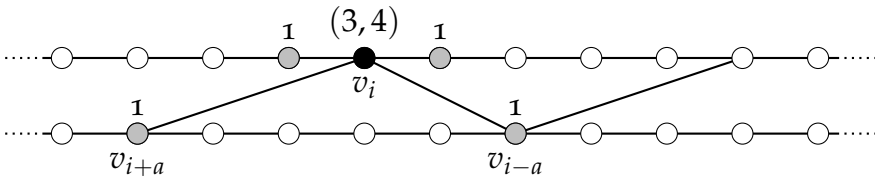
Figure 3.8 illustre cette définition sur un graphe circulant de la forme $C(n;1,6)$ (avec $n \geq 26$) pour un sommet v_i avec $f(v_i) = 2$.

On dit qu'un broadcast indépendant f est *ℓ-limité*, pour un entier $\ell \geq 1$, si $f(v) \leq \ell$ pour chaque sommet v. En particulier, un broadcast indépendant 1-limité correspond à la fonction caractéristique d'un ensemble indépendant. Cela implique qu'un tel broadcast existe toujours pour chaque graphe, et donc chaque graphe admet un broadcast indépendant ℓ-limité pour chaque $\ell \geq 1$. En considérant les β_b-broadcasts utilisés dans les preuves des Théorèmes 3.3 et 3.4, nous avons déjà le résultat suivant :

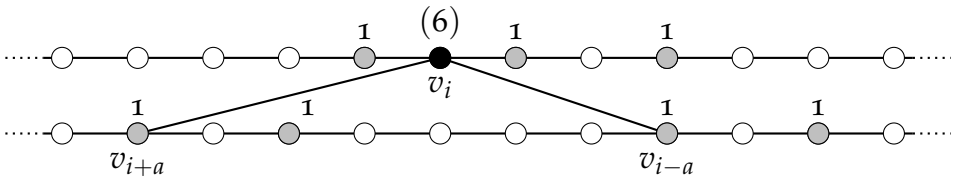
Proposition 3.5. *Pour tout entier $a \geq 2$, ce qui suit est vérifié.*

1. *$C(2a;1,a)$ admet un β_b-broadcast 2-limité si a est impair ou $a = 2^p$ pour un certain $p \geq 1$.*
2. *$C(3a;1,a)$ admet un β_b-broadcast 2-limité .*

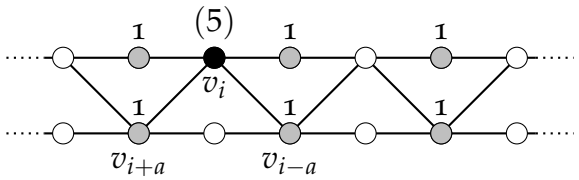
Lemme 3.6. *Si n, a et r sont trois entiers tels que $n = 2a+r$, $2 \leq r < a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, alors $C(n;1,a)$ admet un β_b-broadcast 2-limité .*



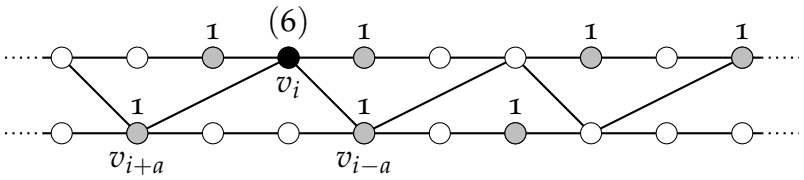
(a) Item 1 : $f(v_i) \in \{3,4\}$, $a = 10$ et $r = 5$ (donc $p = 0$ et $n = 25$)



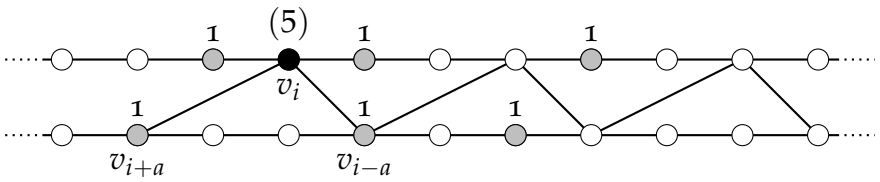
(b) Item 1 : $f(v_i) = 6$, $a = 8$ et $r = 7$ (donc $p = 2$ et $n = 23$)



(c) Item 2 : $f(v_i) = 5$, $a = 12$ et $r = 2$ (donc $p = 2$ et $n = 26$)



(d) Item 3 : $f(v_i) = 6$, $a = 12$ et $r = 3$ (donc $d = 2$ et $n = 27$)



(e) Item 3 : $f(v_i) = 5$, $a = 12$ et $r = 3$ (donc $d = 1$ et $n = 27$)

FIGURE 3.9 – Construction de la fonction g dans la preuve de Lemme 3.6.

Preuve.

Il suffit de prouver que, pour chaque broadcast independent f sur $C(n;1,a)$, il existe un broadcast independent g sur $C(n;1,a)$ telle que $\sigma(g) \geq \sigma(f)$ et $g(v) \leq 2$ pour chaque sommet $v \in V_g^+$.

Soit f un broadcast independent sur $C(n;1,a)$, et g une application définie de $V(C(n;1,a))$ dans $\{0,1,2\}$ comme suit (la construction de l'application g est illustrée dans la Figure 3.9, où la valeur de $f(v_i)$ est indiquée entre crochets ; toutes les a-arêtes ne sont pas dessinées, mais les arêtes manquantes sont parallèles à celles qui sont dessinées ; on a aussi $v_{i-a} = v_{i+a+r}$, et donc v_{i+a} et v_{i-a} sont séparés par $r-1$ sommets).

1. Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $2 < f(v_i) \leq r$, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i, \\ 1 & \text{si } j = i-a \text{ ,} \\ & \text{ou } i-1 \leq j \leq i+p+1 \text{ et } j-i+1 \text{ est pair,} \\ & \text{ou } i+a \leq j \leq i+a+p \text{ et } j-i-a \text{ est pair,} \end{cases}$$

   où $p = f(v_i) - 3$ si $f(v_i)$ est impair, et $p = f(v_i) - 4$ si $f(v_i)$ est pair (voir Figure 3.9(a,b)).

2. Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $\left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil > f(v_i) \geq r+1$ et r est pair, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i, \\ 1 & \text{si } i-1 \leq j \leq i+p+1 \text{ et } j-i+1 \text{ est pair,} \\ & \text{ou } i+a \leq j \leq i+a+r+p \text{ et } j-i-a \text{ est pair,} \end{cases}$$

   où $p = f(v_i) - 3$ si $f(v_i)$ est impair, et $p = f(v_i) - 4$ si $f(v_i)$ est pair (voir Figure 3.9(c)).

3. Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $f(v_i) \geq r+1$ et r est impair, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i, \\ 1 & \text{si } i-2 \leq j \leq i + \left\lfloor \frac{d+2}{2} \right\rfloor r + (d \mod 2) \\ & \quad \text{et } (j-i+2) \mod (r+2) \text{ est impair,} \\ & \text{ou } i+a \leq j \leq i+a+\left\lceil \frac{d+2}{2} \right\rceil r + 1 - (d \mod 2) \\ & \quad \text{et } (j-i-a+3) \mod (r+2) \text{ est impair,} \end{cases}$$

   où $d = f(v_i) - (r+1)$ (voir Figure 3.9(d,e)).

4. Pour tous les autres sommets v_k, on laisse $g(v_k) = f(v_k)$.

Notons qu'en particulier, $g(v_i) = f(v_i)$ pour chaque sommet broadcast v_i avec $f(v_i) \leq 2$. De plus, tous les sommets ayant été fixés à 1 dans les items ci-dessus sont distincts de v_i et à une distance ne dépassant pas $f(v_i)$ de v_i, ce qui signifie que leur f-valeur était égale à 0.

Nous allons maintenant prouver que g est un broadcast independent sur $C(n;1,a)$. Pour ce faire, nous prouvons d'abord l'assertion suivante.

Assertion A. *Pour chaque sommet v_j dont la g-valeur est fixée à 1 dans les Items 1, 2 ou 3 ci-dessus, nous avons $d(v_i,v_j) \leq f(v_i) - 2$.*

Preuve.

Dans l'Item 1, chaque sommet, dont la g-valeur est fixée à 1, est à une distance d'au plus $p+1 \leq f(v_i)-2$ de v_i. Dans l'Item 2, chaque sommet dont la g-valeur est fixée à 1 est à une distance d'au plus $\max\{p+1, r-1\} \leq f(v_i)-2$ de v_i.

Considérons maintenant un sommet v_j qui est le plus éloigné (de v_i) parmi ceux dont la g-valeur est fixée à 1 dans l'Item 3, et supposons tout d'abord que $i-2 \leq j \leq i + \left\lfloor \frac{d+2}{2} \right\rfloor r + (d \mod 2)$. Puisque $r \geq 3$ et r est impair, v_j est à une distance de $d(v_i,v_j) = 2\left\lfloor \frac{d+2}{2} \right\rfloor + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1$ de v_i (en allant à $v_{i+\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor r}$ en utilisant $(2\left\lfloor \frac{d+2}{2} \right\rfloor)$ a-arêtes , puis en revenant à v_j en utilisant $(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1)$ 1-arêtes). Puisque $d = f(v_i) - r - 1$ et $r \geq 3$, cela donne

$$d(v_i,v_j) \leq f(v_i) - r + 1 + \frac{r-1}{2} - 1 = f(v_i) - \frac{r+1}{2} \leq f(v_i) - 2.$$

Supposons enfin que $i + a \leq j \leq i + a + \left\lceil \frac{d+2}{2} \right\rceil r + 1 - (d \mod 2)$. Dans ce cas, v_j est à distance $d(v_i,v_j) = 1 + 2(\left\lfloor \frac{d+2}{2} \right\rfloor - 1) + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1$ de v_i (en allant à $v_{i+a+\lceil \frac{d+2}{2} \rceil r}$ en utilisant $(1 + 2(\left\lfloor \frac{d+2}{2} \right\rfloor - 1))$ a-arêtes , puis en revenant à v_j en utilisant $(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1)$ 1-arêtes).

Comme précédemment, puisque $d = f(v_i) - r - 1$ et $r \geq 3$, cela donne

$$\begin{aligned} d(v_i,v_j) &\leq 1 + 2\left(\left\lfloor \frac{d+2}{2} \right\rfloor - 1\right) + \frac{r-1}{2} - 1 = 2\left(\left\lfloor \frac{f(v_i)-r+1}{2} \right\rfloor - 1\right) + \frac{r-1}{2} \\ &\leq 2\left(\frac{f(v_i)-r+1}{2}\right) + \frac{r-1}{2} - 2 = f(v_i) - \frac{r-1}{2} - 2 \\ &\leq f(v_i) - 2, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de l'assertion. □

Grâce à cette assertion, et puisque f était un broadcast indépendant sur $C(n;1,a)$, aucun sommet g-broadcast v_i avec $g(v_i) = f(v_i) \in \{1,2\}$ ne g-domine un sommet dont la g-valeur a été fixée à 1. Par conséquent, afin de prouver que g est effectivement un broadcast indépendant sur $C(n;1,a)$, il reste à prouver que l'ensemble des sommets dont la g-valeur a été fixée à 1 est un ensemble indépendant. De plus, grâce à l'assertion A, les Items 1, 2 et 3 peuvent être considérés séparément. Cela est immédiatement le cas pour les sommets dont la g-valeur a été fixée à 1 dans les Items 1 et 2. Dans l'Item 3, grâce à la parité de leur indice, aucun de ces deux sommets n'est relié par une 1-arête. De plus, ces deux sommets ne peuvent pas être reliés par une arête a car $(j-i+2) - (j-i-a+3) = a-1$.

Afin de terminer la preuve, nous devons seulement montrer que $\sigma(g) \geq \sigma(f)$. En effet, dans l'Item 1, le nombre de sommets fixés à 1 est $n_1 = 1 + \frac{p+4}{2} + \frac{p+2}{2} = p+4$, ce qui donne $n_1 = f(v_i)$ si $f(v_i)$ est pair, ou $n_1 = f(v_i) + 1 > f(v_i)$ si $f(v_i)$ est impair.

Dans l'Item 2, le nombre de sommets fixés à 1 est $n_2 = \frac{p+4}{2} + \frac{p+2}{2} + \frac{r}{2} = \frac{2p+6+r}{2}$, ce qui donne $n_2 = \frac{2f(v_i)-2+r}{2} \geq f(v_i)$ (rappelons que $r \geq 2$) si $f(v_i)$ est pair, ou $n_2 = \frac{2f(v_i)+r}{2} > f(v_i)$ si $f(v_i)$ est impair.

Considérons enfin l'Item 3. Remarquons que, comme $r+2$ est impair, dans chaque séquence de $r+2$ sommets consécutifs situés entre v_{i-2} et $v_{i+\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor r+(d \mod 2)}$, ou entre v_{i+a} et $v_{i+a+\lceil \frac{d+2}{2} \rceil r+1-(d \mod 2)}$, exactement $\frac{r+1}{2}$ sommets sont fixés à 1. Par conséquent, le nombre de sommets fixés à 1 dans l'Item 3 est soit

$$n_3 = \left\lceil \frac{r+1}{2(r+2)} \left(\frac{d+2}{2} r + 3 \right) \right\rceil + \left\lceil \frac{r+1}{2(r+2)} \left(\frac{d+2}{2} r + 2 \right) \right\rceil,$$

si d est pair, ou

$$n_3 = \left\lceil \frac{r+1}{2(r+2)} \left(\frac{d+1}{2} r + 4 \right) \right\rceil + \left\lceil \frac{r+1}{2(r+2)} \left(\frac{d+3}{2} r + 1 \right) \right\rceil,$$

si d est impair. Dans les deux cas, on obtient

$$n_3 \geq \frac{r+1}{2(r+2)} \big((d+2)r + 5 \big) = r + 1 + \frac{(dr+1)(r+1)}{2(r+2)} \geq r + 1 + \frac{dr(r+1)}{2(r+2)}.$$

Comme $r \geq 3$, nous avons $r(r+1) \geq 2(r+2)$, et donc

$$n_3 \geq r + 1 + d = f(v_i).$$

Ainsi, nous avons $\sigma(g) \geq \sigma(f)$, comme requis. Cela achève la preuve. □

Dans ce qui suivra, nous supposons $n > 3a$.

Lemme 3.7. *Si n et a sont deux entiers tels que $3 \leq a < \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ et $n > 3a$, alors $C(n; 1, a)$ admet un β_b-broadcast 2-limité .*

Preuve.

Encore une fois, la preuve se réduit à montrer que, pour tout broadcast indépendant f sur $C(n; 1, a)$, il existe un broadcast indépendant g sur $C(n; 1, a)$ telle que $\sigma(g) \geq \sigma(f)$ et $g(v) \leq 2$ pour chaque sommet $v \in V_g^+$.

Considérons un broadcast indépendant f sur $C(n; 1, a)$, et soit g l'application de $V(C(n; 1, a))$ dans $\{0, 1, 2\}$ définie comme suit (la construction de l'application g est illustrée dans la Figure 3.10, tous les a-arêtes n'étant pas dessinées).

1. Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $2 < f(v_i) \leq a$, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i, \\ 1 & \text{si } i-1 \leq j \leq i+p+1 \text{ et } j-i+1 \text{ est pair,} \\ & \text{ou } i-a \leq j \leq i-a+p \text{ et } j-i+a \text{ est pair,} \\ & \text{ou } i+a \leq j \leq i+a+p \text{ et } j-i-a \text{ est pair,} \end{cases}$$

   où $p = f(v_i) - 3$ si $f(v_i)$ est impair, et $p = f(v_i) - 4$ si $f(v_i)$ est pair (voir Figure 3.10(a)).

2. Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $f(v_i) \geq a+1$ et a est impair, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i, \\ 1 & \text{si } i-a \leq j \leq i+(1+d)a \text{ et } j-i+a \text{ is pair,} \end{cases}$$

   où $d = f(v_i) - (a+1)$ (voir Figure 3.10(b)).

3. Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $f(v_i) \geq a+1$ et a est pair, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \\ 1 & \text{si } i-a-1 \leq j \leq i+(2+d)a \text{ et } (j-i+a+1) \mod (a+1) \text{ est impair,} \end{cases}$$

   où $d = f(v_i) - (a+1)$ (voir Figure 3.10(c)).

4. Pour tous les autres sommets v_k, on laisse $g(v_k) = f(v_k)$.

Notons que, comme dans la preuve du lemme précédent, $g(v_i) = f(v_i)$ pour chaque sommet f-broadcast avec $f(v_i) \leq 2$. De plus, tous les sommets fixés à 1 dans les items ci-dessus sont également distincts de v_i et à une distance ne dépassant pas $f(v_i)$ de v_i, ce qui signifie que leur f-valeur était égale à 0.

Nous allons maintenant prouver que g est un broadcast indépendant sur $C(n;1,a)$. Pour ce faire, nous prouvons d'abord l'assertion suivante.

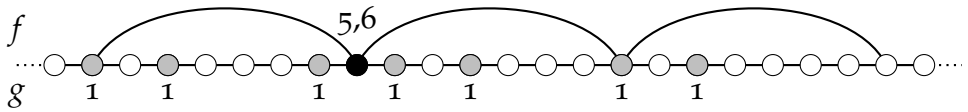
Assertion B. *Pour chaque sommet v_j dont la g-valeur est fixé à 1 dans les Items 1, 2 ou 3 ci-dessus, nous avons $d(v_i, v_j) \leq f(v_i) - 2$.*

Preuve. Dans l'Item 1, chaque sommet dont la g-valeur est fixée à 1 est à distance au plus $p+1 \leq f(v_i) - 2$ de v_i.

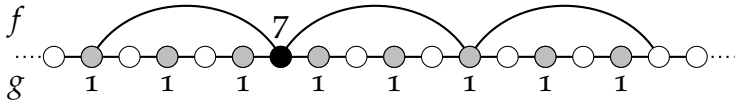
Parmi les sommets dont la g-valeur pourrait être fixée à 1 dans l'Item 2, puisque a est impair, le sommet dont la distance à v_i est maximale est le sommet v_j avec $j = da + \frac{a+1}{2}$, ce qui donne

$$d(v_i, v_j) = d + \frac{a+1}{2} = f(v_i) - \frac{a+1}{2} \leq f(v_i) - 2$$

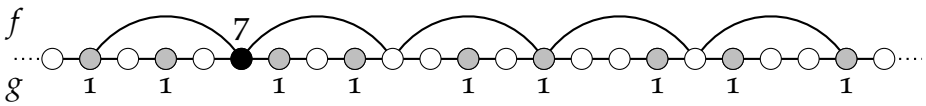
(rappelons que, dans ce cas, nous avons $a \geq 3$).



(a) Item 1 : $f(v_i) \in \{5,6\}$ et $a = 7$ (donc $p = 2$)



(b) Item 2 : $f(v_i) = 7$ et $a = 5$ (donc $d = 1$)



(c) Item 3 : $f(v_i) = 7$ et $a = 4$ (donc $d = 2$)

FIGURE 3.10 – Construction de la fonction g dans la preuve de Lemme 3.7.

De même, dans l'Item 3, parmi les sommets dont la g-valeur est fixée à 1, puisque a est pair, le sommet dont la distance à v_i est maximale est le sommet v_j avec $j = (d+1)a + \frac{a}{2}$, ce qui donne

$$d(v_i, v_j) = d + 1 + \frac{a}{2} = f(v_i) - \frac{a}{2} \leq f(v_i) - 2$$

(rappelons que, dans ce cas, nous avons $a \geq 4$).

Cela conclut la preuve de cette assertion. □

Grâce à l'Assertion B, et puisque f était un broadcast indépendant sur $C(n; 1, a)$, aucun sommet g-broadcast v_i avec $g(v_i) = f(v_i) \in \{1, 2\}$ g-domine un sommet dont la g-valeur a été fixée à 1. Par conséquent, pour prouver que g est effectivement un broadcast indépendant sur $C(n; 1, a)$, il reste à prouver que l'ensemble des sommets dont la g-valeur a été fixée à 1 est un ensemble indépendant. De plus, grâce à l'Assertion B, les Items 1, 2 et 3 peuvent être considérés séparément. Cela est immédiatement le cas pour les sommets dont la g-valeur a été fixée à 1 dans l'Item 1. Il découle de la parité de leur indice dans l'Item 2 (puisque a est impair, ni une 1-arête ni une a-arête, ne peut relier de tels tels sommets), et de la valeur modulo $(a+1)$ de leur indice dans les Items 3 (ce qui, encore une fois, implique que ni une 1-arête ni une a-arête, puisque a est pair, ne peut relier de tels sommets).

Pour finir la preuve, nous devons seulement montrer que nous avons $\sigma(g) \geq \sigma(f)$. En effet, dans l'Item 1, le nombre de sommets fixés à 1 est $n_1 = \frac{p+4}{2} + \frac{p+2}{2} + \frac{p+2}{2} = \frac{3p+8}{2}$, ce qui donne $n_1 = \frac{3f(v_i)-4}{2} \geq f(v_i)$ si $f(v_i)$ est pair (dans ce cas, $f(v_i) \geq 4$, et l'égalité n'est satisfaite que lorsque $f(v_i) = 4$), ou $n_1 = \frac{3f(v_i)-1}{2} > f(v_i)$ si $f(v_i)$ est impair (dans ce cas, $f(v_i) \geq 3$).

Dans l'Item 2, le nombre de sommets fixés à 1 est

$$n_2 = \left\lceil \frac{(2+d)a+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2a+1+da}{2} \right\rceil.$$

Si $d = 0$, puisque a est impair, on obtient $n_2 = \left\lceil \frac{2a+1}{2} \right\rceil = a+1 = f(v_i)$. Sinon, c'est-à-dire si $d \geq 1$, puisque $a \geq 3$, on a $n_2 = \left\lceil \frac{2a+1+da}{2} \right\rceil \geq a + \frac{1}{2} + \frac{ad}{2} \geq a+d+1 = f(v_i)$

Enfin, dans l'Item 3, notons que, pour chaque séquence de $a+1$ sommets consécutifs, $\frac{a}{2}$ d'entre eux sont fixés à 1. Ainsi, le nombre total de sommets fixés à 1 est

$$n_3 = \left\lceil \frac{a}{2(a+1)} \left((d+3)a+2\right) \right\rceil \geq \frac{3a^2+da^2+2a}{2(a+1)} = a + \frac{da^2}{2(a+1)} + \frac{a^2}{2(a+1)}.$$

Puisque $a \geq 4$, nous avons $\frac{a^2}{2(a+1)} > 1$, ce qui donne $n_3 > a+d+1 = f(v_i)$.

Ainsi, nous avons $\sigma(g) \geq \sigma(f)$, comme requis. Cela conclut la preuve. En combinant les résultats de la Proposition 3.5 et des Lemmes 3.6 et 3.7, nous obtenons directement le théorème suivant.

Théorème 3.8. *Chaque graphe circulant de la forme $C(n;1,a)$, $3 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, admet un β_b-broadcast 2-limité si aucune des conditions suivantes n'est satisfaite : (i) $n = 2a$ et a est pair, ou (ii) $n = 2a+1$.*

□

Notons que les graphes circulants de la forme $C(n;1,a)$, avec $a = 2$ ou $n = 2a+1$, n'admettent pas nécessairement un β_b-broadcast 2-limité. Pour prouver cette affirmation, considérons l'exemple du graphe circulant $C(21;1,2)$, et soit f l'application de $V(C(21;1,2))$ dans $\{0,3\}$ définie par $f(v_0) = f(v_7) = f(v_{14}) = 3$ et $f(v_i) = 0$ sinon.

Puisque 2 est pair, f est clairement un broadcast indépendant sur $C(21;1,2)$, avec un coût $\sigma(f) = 9$, ce qui donne $9 \leq \beta_b(C(21;1,2))$. Supposons maintenant qu'il existe un β_b-broadcast 2-limité g sur $C(21;1,2)$. Si $|V_g^+| \leq 4$, nous obtenons immédiatement $\sigma(g) \leq 8$, car g est 2-limité. Supposons maintenant $|V_g^+| > 4$. Chaque sommet $v_i \in V_g^+$ g-domine exactement $4f(v_i)+1$ sommets, et chaque sommet $v_j \notin V_g^+$ est g-dominé au maximum 2 fois. Par conséquent, comme g est un broadcast indépendant, nous obtenons

$$\sum_{v_i \in V_g^+} (1 + 4g(v_i)) \leq 2(n - |V_g^+|) + |V_g^+|,$$

ce qui donne (rappelons que $|V_g^+| > 4$)

$$\sigma(g) = g(V_g^+) \leq \frac{21 - |V_g^+|}{2} \leq 8.$$

Dans les deux cas, nous obtenons une contradiction avec l'optimalité de g.

Enfin, puisque $C(21;1,10)$ est isomorphe à $C(21;1,2)$, nous concluons qu'il existe également des graphes circulants de la forme $C(2a+1;1,a)$ qui n'admettent pas de β_b-broadcast 2-limité .

3.3 Bornes générales sur le nombre d'indépendance broadcast de $C(n;1,a)$

Dans cette section, nous allons établir des bornes sur le coût des broadcasts indépendants sur les graphes circulants de la forme $C(n;1,a)$, où $2 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ces bornes revêtiront une importance particulière dans la recherche des valeurs exactes du nombre d'indépendance broadcast. Avant l'établissement de ces bornes, introduisons quelques notations et un lemme utile.

Soit f un broadcast indépendant sur $C(n;1,a)$. Nous partitionnons l'ensemble des sommets f-broadcasts comme suit :

$$V_f^1 = \{v_i \in V_f^+ \mid f(v_i) = 1\}, \quad V_f^2 = \{v_j \in V_f^+ \mid f(v_j) = 2\},$$

$$V_f^{\geq 2} = \{v_j \in V_f^+ \mid f(v_j) \geq 2\}.$$

En particulier, si f est 2-limité , alors $V_f^+ = V_f^1 \cup V_f^2$.

Considérons maintenant un broadcast indépendant 2-limité f et un sommet $v_i \in V_f^1$ tel que $f(v_{i-1}) = f(v_{i-2}) = 0$. Comme f est un broadcast indépendant, nous avons nécessairement $f(v_{i+1}) = 0$. De plus, nous avons soit $f(v_{i+2}) = 0$, soit $f(v_{i+2}) = 1$. Par conséquent, les valeurs de la séquence de sommets $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots$ ont la forme soit 100, soit 10100, soit $1010 \ldots 100$.

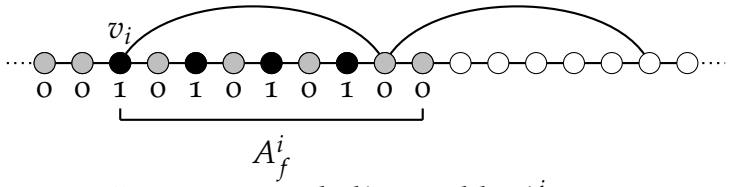
Pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$ tel que $f(v_{i-1}) = f(v_{i-2}) = 0$, nous posons

$$A_f^i = \{v_{i+\ell},\ 0 \leq \ell \leq 2p+2\},$$

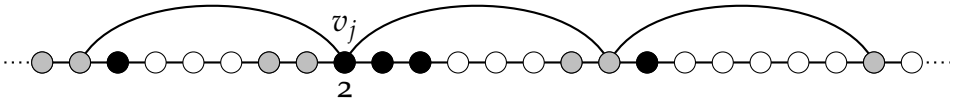
l'ensemble des sommets satisfaisant (i) $f(v_{i+2k}) = 1$ et $f(v_{i+2k+1}) = 0$ pour chaque k, $0 \leq k \leq p$, et (ii) $f(v_{i+2p+2}) = 0$.

Maintenant, pour chaque sommet $v_j \in V_f^2$, nous posons

$$B_f^j = \{v_{j-a+1}\} \cup \{v_j, v_{j+1}, v_{j+2}\} \cup \{v_{j+a+1}\}.$$



Les sommets de l'ensemble A_f^i , $a = 7$



Les sommets de l'ensemble B_f^j (les sommets noirs) , $a = 7$

FIGURE 3.11 – Les ensembles A_f^i et B_f^j.

La définition de ces deux ensembles est illustrée dans la Figure 3.11. Ces ensembles présentent les propriétés suivantes.

Lemme 3.9. *Pour tout broadcast indépendant 2-limité f sur $C(n;1,a)$, $2 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, les assertions suivantes sont satisfaites.*

1. *Pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$, tel que $f(v_{i-1} = f(v_{i-2}) = 0$, $|A_f^i| = 2f(A_f^i) + 1$.*
2. *Pour chaque sommet $v_j \in V_f^2$, $|B_f^j| = 5$.*
3. *$\sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| \leq n$.*

Preuve. Les deux premiers items découlent directement de la définition des ensembles A_f^i et B_f^j. Il découle également de la définition que $A_f^i \cap A_f^{i'} = \emptyset$ pour chaque paire de sommets distincts v_i et $v_{i'}$ dans V_f^1. De même, nous avons nécessairement $B_f^j \cap B_f^{j'} = \emptyset$ pour chaque paire de sommets distincts v_j et $v_{j'}$ dans V_f^2, car sinon nous aurions $d(v_j, v_{j'}) \leq \max\{f(v_j), f(v_{j'})\} = 2$, ce qui contredirait le fait que f est un broadcast indépendant. Le même argument produit $A_f^i \cap B_f^j = \emptyset$ pour chaque paire de sommets $v_i \in V_f^1$ et $v_j \in V_f^2$. Dans leur ensemble, ces trois propriétés impliquent que l'Item 3 est également vérifié. □

Le résultat ci-dessous donne une borne supérieure générale sur le nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants de la forme $C(n;1,a)$, avec $3 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $3a \leq n$.

Proposition 3.10. *Soient n et a deux entiers tels que $3 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $3a \leq n$, alors, pour chaque broadcast indépendant 2-limité sur $C(n;1,a)$, on a :*

$$\sigma(f) \leq \left\lfloor \frac{n - \left|V_f^2\right|}{2} \right\rfloor.$$

Preuve. Soit f un broadcast indépendant 2-limité sur $C(n;1,a)$ (qui existe par le Théorème 3.8). A partir du Lemme 3.9, nous obtenons

$$\sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| = 2f(V_f^1) + \left|V_f^{001}\right| + 3f(V_f^2) - \left|V_f^2\right| \leq n,$$

où $V_f^{001} = \{v_i \in V_f^1 \quad | \quad f(v_{i-1} = f(v_{i-2}) = 0\}$

ce qui donne

$$2f(V_f^+) = 2f(V_f^1) + 2f(V_f^2) \leq n - \left|V_f^{001}\right| + \left|V_f^2\right| - f(V_f^2) \leq n + \left|V_f^2\right| - f(V_f^2).$$

Maintenant, puisque $f(v_j) = 2$ pour chaque $v_j \in V_f^2$, nous avons $f(V_f^2) = 2\left|V_f^2\right|$, et donc

$$\sigma(f) = f(V_f^+) \leq \left\lfloor \frac{n - \left|V_f^2\right|}{2} \right\rfloor.$$

Ceci achève la preuve. □

Proposition 3.11. *Si n et a sont deux entiers tels que $2 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et a est pair, alors, pour chaque broadcast indépendant 2-limité sur $C(n;1,a)$, on a :*

$$\sigma(f) \leq \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)} \left(n - \frac{a-4}{a} \left|V_f^2\right| \right) \right\rfloor.$$

Preuve. Soit f un broadcast indépendant 2-limité sur $C(n;1,a)$. Observons tout d'abord que nous avons nécessairement $|A_f^i| \leq a+1$ pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$, car sinon cela donnerait $f(v_i) = f(v_{i+a}) = 1$, contredisant le fait que f est un broadcast indépendant. Cela implique $f(A_f^i) \leq \frac{a}{2}$. Utilisant l'Item 1 du Lemme 3.9, nous obtenons alors

$$\frac{|A_f^i|}{f(A_f^i)} = \frac{2f(A_f^i)+1}{f(A_f^i)} = 2 + \frac{1}{f(A_f^i)} \geq 2 + \frac{2}{a} = \frac{2(a+1)}{a},$$

et donc

$$|A_f^i| \geq \frac{2(a+1)}{a} f(A_f^i).$$

A partir du Lemme 3.9, nous obtenons ensuite

$$n \geq \sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| \geq \frac{2(a+1)}{a} f(V_f^1) + 3f(V_f^2) - \left|V_f^2\right|,$$

ce qui donne

$$n \geq \frac{2(a+1)}{a} f(V) + \frac{a-2}{a} f(V_f^2) - \left|V_f^2\right|.$$

Enfin, puisque $f(V_f^2) = 2\left|V_f^2\right|$, nous obtenons

$$\frac{2(a+1)}{a} f(V) \leq n + \left|V_f^2\right| - \frac{2(a-2)}{a}\left|V_f^2\right| = n - \frac{a-4}{a}\left|V_f^2\right|,$$

et donc

$$\sigma(f) = f(V) \leq \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)} \left(n - \frac{a-4}{a}\left|V_f^2\right| \right) \right\rfloor.$$

Cela achève la preuve. □

Proposition 3.12. *Soient n, a, k_1 et k_2 quatre entiers tels que $n = k_1(a+1) + k_2(a-1)$, $6 \leq a \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ et a est pair. Alors, pour chaque broadcast indépendant f sur $C(n;1,a)$, on a*

$$\sigma(f) \geq k_1 \left(\frac{a}{2}\right) + k_2 \left(\frac{a}{2} - 1\right).$$

Preuve. Soit $n = k_1(a+1) + k_2(a-1)$. Le graphe circulant $C(n;1,a)$ se compose de k_1 séquences de $a+1$ sommets et k_2 séquences de $a-1$ sommets. Soit f une application de $V(C(n;1,a))$ dans $\{0,1\}$, définie comme suit (voir Figure 3.12 pour le cas $a = 12$). Pour chaque séquence de $a+1$ ou $a-1$ sommets, nous attribuons les valeurs de la forme $1010\ldots10100$. Comme a est pair, pour chaque deux séquences consécutives, les sommets f-broadcast ne sont pas adjacents deux à deux, et donc, f est un broadcast indépendant sur $C(n;1,a)$, avec un coût $\sigma(f) = k_1 \left(\frac{a}{2}\right) + k_2 \left(\frac{a}{2} - 1\right)$. Ainsi,

$$\sigma(f) \geq k_1 \left(\frac{a}{2}\right) + k_2 \left(\frac{a}{2} - 1\right).$$

Ceci achève la preuve.

□

3.4 Quelques valeurs exactes

Dans la section actuelle, notre objectif principal est de calculer le nombre d'indépendance broadcast pour des graphes circulants $C(n;1,a)$, pour différentes valeurs de n et a. Nos résultats révèlent, grâce à l'Observation 3.1, que dans plusieurs cas, le nombre d'indépendance d'un graphe, qui mesure la plus grande taille d'un ensemble de sommets non adjacents deux à deux, n'est autre que le nombre d'indépendance broadcast.

Dans [40], Liancheng, Zunquan et Yuansheng ont déterminé la valeur exacte du nombre d'indépendance de certains graphes circulants de la forme $C(n;1,a)$.

Proposition 3.13. *[40] Pour chaque couple d'entiers n et a tels que $2 \leq a \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, nous avons :*

1. $\alpha(C(n;1,a)) = \frac{n}{2}$, *pour n pair et a impair,*

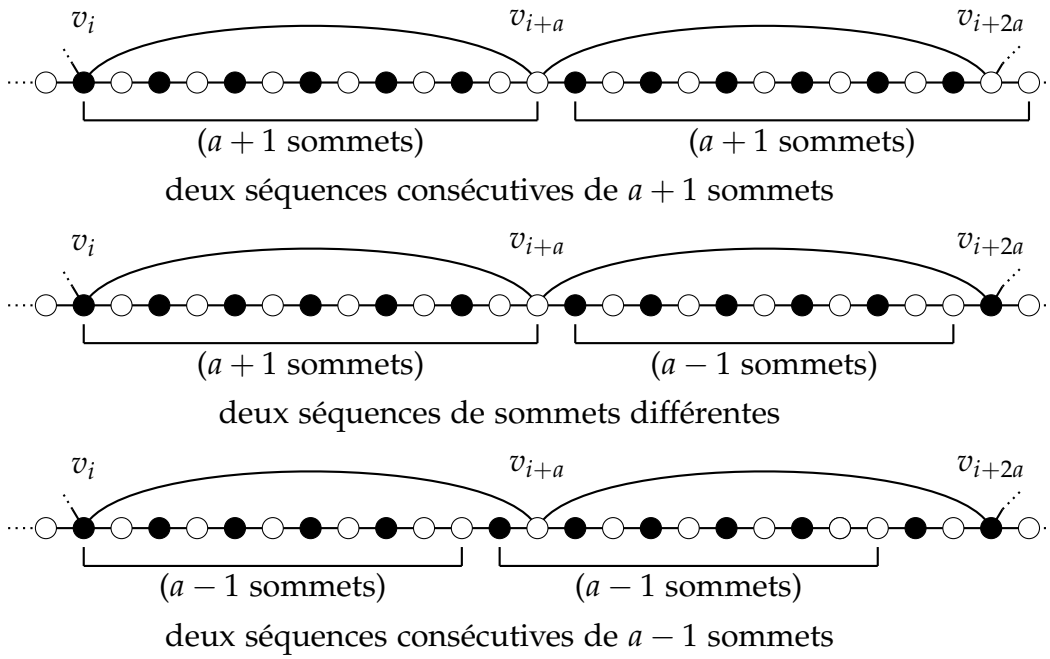


FIGURE 3.12 – Construction de la fonction f dans le preuve de la Proposition 3.12 ($a = 12$) .

2. $\alpha(C(n;1,a)) = \frac{n-k}{2}$, *pour n impair et* $a \in \{3,5\}$,
3. $\alpha(C(n;1,2)) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$,
4. $\alpha(C(n;1,4)) = \lfloor \frac{2n}{5} \rfloor$.

Dans cette section, nous étendrons plusieurs résultats de la Proposition 3.13.

Nous examinons d'abord le cas des graphes circulants de la forme $C(n;1,2)$, avec $n \geq 4$. Nous constatons qu'il est assez simple de démontrer que, pour tout $n \geq 4$, les sommets antipodaux dans $C(n;1,2)$ sont à distance $\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil$ l'un de l'autre. Cette particularité des graphes $C(n;1,2)$ est cruciale et nous conduit directement à la formulation de l'observation suivante.

Observation 3.14. *Pour tout entier n,* $n \geq 4$, $\mathrm{diam}(C(n;1,2)) = \left\lceil \dfrac{n-1}{4} \right\rceil$.

Le nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants de la forme $C(n;1,2)$ est donné par le résultat suivant.

Théorème 3.15. *Pour tout entier* $n \geq 6$,

$$\beta_b(C(n;1,2)) = \begin{cases} \dfrac{n-3}{2}, & \text{si } n \equiv 9 \mod 12, \\ 2(\mathrm{diam}(C(n;1,2)) - 1) = 2\left(\left\lceil \dfrac{n-1}{4} \right\rceil - 1\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Puisque $C(4;1,2)$ et $C(5;1,2)$ sont des graphes complets, le résultat est évidemment valable pour $n \in \{4,5\}$. Supposons maintenant $n \geq 6$. D'après la Observation 2.28, $\beta_b(C(n;1,2)) \geq 2(\text{diam}(C(n;1,2)) - 1)$ est valable pour tout n. Nous allons prouver que nous avons $\beta_b(C(n;1,2)) \leq 2(\text{diam}(C(n;1,2)) - 1)$ si $n \not\equiv 9 \pmod{12}$, et $\beta_b(C(n;1,2)) = \frac{n-3}{2}$ autrement.

Soit f un broadcast indépendant β_b sur $C(n;1,2)$. Chaque sommet $v \in V_f^+$ f-domine $4f(v)+1$ sommets. De plus, chaque f-broadcast sommet est f-dominé exactement une fois, et chaque non-broadcast sommet est f-dominé au plus deux fois. Cela donne

$$4f(V_f^+) + |V_f^+| \leq 2\left(n - |V_f^+|\right) + |V_f^+|,$$

et donc

$$\beta_b(C(n;1,2)) = \sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v) = f(V_f^+) \leq \frac{n - |V_f^+|}{2}.$$

Nous considérons maintenant trois cas, selon la valeur de $|V_f^+|$.

1. $|V_f^+| \leq 2$.
   Si $|V_f^+| = 1$, alors $V_f^+ = \{v_i\}$ pour un certain sommet v_i, et donc

   $$\sigma(f) = f(v_i) \leq e(v_i) = \text{diam}(C(n;1,2)) \leq 2(\text{diam}(C(n;1,2)) - 1).$$

   Si $|V_f^+| = 2$, alors $V_f^+ = \{v_i, v_j\}$ pour certains sommets distincts v_i et v_j, et donc

   $$\sigma(f) = f(v_i) + f(v_j) \leq 2(\text{diam}(C(n;1,2)) - 1).$$

2. $|V_f^+| \geq 4$.
   Dans ce cas, nous obtenons

   $$\sigma(f) \leq \left\lfloor \frac{n - |V_f^+|}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor \leq 2\left(\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil - 1\right)$$

   et donc $\sigma(f) \leq 2\left(\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil - 1\right) = 2(\text{diam}(C(n;1,2)) - 1)$ d'après l'Observation 3.14.

3. $|V_f^+| = 3$.
   Soit $V_f^+ = \{v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}\}$, avec $0 \leq i_0 < i_1 < i_2 < n-1$. Nous considérons deux sous-cas, selon la parité de n.

   (a) n est pair.
   Puisque f est un β_b-broadcast , nous avons

   $$f(v_{i_j}) = \min\left\{d(v_{i_j}, v_{i_{j-1}}) - 1, d(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) - 1\right\}$$

pour chaque j, $0 \leq j \leq 2$ (les indices sont pris modulo 3). De plus, puisque $\min\{x, y\} \leq \frac{x+y}{2}$ pour chaque paire d'entiers x et y, nous obtenons

$$\sigma(f) = f(v_{i_0}) + f(v_{i_1}) + f(v_{i_2}) \leq d(v_{i_0}, v_{i_1}) + d(v_{i_1}, v_{i_2}) + d(v_{i_2}, v_{i_0}) - 3.$$

Maintenant, puisque

$$d(v_{i_j}, v_{i_{j'}}) = \left\lceil \frac{|i_j - i_{j'}|}{2} \right\rceil \leq \frac{|i_j - i_{j'}| + 1}{2}$$

pour chaque paire de sommets distincts v_{i_j} et $v_{i_{j'}}$, nous obtenons

$$\sigma(f) \leq \left\lfloor \frac{|i_0 - i_1| + |i_1 - i_2| + |i_2 - i_0| + 3}{2} \right\rfloor - 3 = \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

Finalement, puisque n est pair, nous obtenons

$$\sigma(f) \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor = \frac{n-4}{2} \leq 2\left(\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil - 1 \right) = 2(\mathrm{diam}(C(n;1,2)) - 1).$$

(b) n est impair.
Si chaque sommet non-broadcast est f-dominé exactement deux fois, alors nous avons nécessairement $f(v_{i_0}) = f(v_{i_1}) = f(v_{i_2}) = \ell$ pour une certaine valeur ℓ. De plus, puisque chaque sommet v_{i_j}, $0 \leq j \leq 2$, f-domine $4f(v_{i_j}) + 1 = 4\ell + 1$ sommets, nous obtenons donc $12\ell + 3 = 2(n-3) + 3$ (chaque sommet dans V_f^+ est f-dominé seulement une fois), et donc $\ell = \frac{n-3}{6}$. Cela implique $n \equiv 3 \pmod 6$ et $\sigma(f) = \frac{n-3}{2}$. Maintenant, nous avons

$$\sigma(f) = \frac{n-3}{2} = 3\ell = 2\left(\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil - 1 \right) = 2(\mathrm{diam}(C(n;1,2)) - 1)$$

si ℓ est pair, c'est-à-dire $n \equiv 3 \pmod{12}$, alors que nous avons

$$\sigma(f) = \frac{n-3}{2} = 3\ell > 3\ell - 1 = 2\left(\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil - 1 \right) = 2(\mathrm{diam}(C(n;1,2)) - 1)$$

si ℓ est impair, c'est-à-dire $n \equiv 9 \pmod{12}$.

Supposons maintenant qu'au moins un sommet non-broadcast soit dominé par f une seule fois, ce qui implique $4f(V_f^+) + 3 \leq 2(n-4) + 4 = 2n - 4$ et donc

$$\sigma(f) = f(V_f^+) \leq \left\lfloor \frac{2n-7}{4} \right\rfloor.$$

Puisque n est impair, nous obtenons

$$\sigma(f) \leq \left\lfloor \frac{2n-7}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n-8}{4} \right\rfloor \leq 2\left(\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil - 1 \right) = 2(\mathrm{diam}(C(n;1,2)) - 1).$$

Dans tous les cas, nous obtenons donc $\beta_b(C(n;1,2)) = \sigma(f) \leq 2(\mathrm{diam}(C(n;1,2)) - 1)$ si $n \not\equiv 9 \pmod{12}$, et $\beta_b(C(n;1,2)) = \sigma(f) = \frac{n-3}{2}$ si $n \equiv 9 \pmod{12}$, ce qui complète la preuve. □

En comparant la valeur de $\alpha(C(n;1,2))$ donnée dans [40] avec $\beta_b(C(n;1,2))$, il est clairement vu que $\alpha(C(n;1,2)) < \beta_b(C(n;1,2))$ est presque toujours vrai.

Etant donné que les graphes circulants $C(2a+1;1,a)$ et $C(2a+1;1,2)$ sont isomorphes, pour chaque entier a avec $a \geq 2$. Cette équivalence structurelle entre ces deux formes de graphes circulants conduit naturellement au corollaire suivant.

Corollaire 3.16. *Pour tout entier $a \geq 2$,*

$$\beta_b(C(2a+1;1,a)) = \begin{cases} a-1, & \text{si } a = 2 \text{ ou } a \equiv 4 \pmod 6, \\ 2\left(\left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil - 1 \right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous déterminons maintenant le nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants de la forme $C(n;1,a)$ lorsque n est pair et a est impair.

Théorème 3.17. *Si n et a sont deux entiers tels que n est pair, $n \geq 6$, a est impair et $3 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, alors*

$$\beta_b(C(n;1,a)) = \alpha(C(n;1,a)) = \frac{n}{2}.$$

Preuve. D'après la Proposition 3.10, nous obtenons que

$$\sigma(g) \leq \left\lfloor \frac{n - \left| V_g^2 \right|}{2} \right\rfloor$$

pour chaque indépendant 2-limité g sur $C(n;1,a)$, ce qui implique $\beta_b(C(n;1,a)) \leq \frac{n}{2}$. Considérons maintenant la fonction f de $V(C(n;1,a))$ vers $\{0,1\}$ définie par $f(v_i) = 1$ si et seulement si i est pair. Etant donné que a est impair, il est clair que f est un broadcast indépendant sur $C(n;1,a)$. Cela implique que $\beta_b(C(n;1,a)) \geq \sigma(f) = \frac{n}{2}$ et donc, grâce à l'Observation 3.1, $\beta_b(C(n;1,a)) = \alpha(C(n;1,a)) = \frac{n}{2}$. Cela achève la preuve. □

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer le nombre d'indépendance broadcast pour des graphes circulants de la forme $C(n;1,3)$ et $C(n;1,4)$.

Théorème 3.18. *Pour tout entier $n \geq 6$,*

$$\beta_b(C(n;1,3)) = \alpha(C(n;1,3)) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{n-3}{2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Si n est pair, le résultat découle directement du Théorème 3.17.

Supposons maintenant que n est impair et considérons l'application f de $V(C(n;1,3))$ vers $\{0,1\}$ définie par $f(v_i) = 1$ si et seulement si i est pair et $i \leq n-5$. Puisque tous les sommets broadcast ont un indice pair qui n'est pas supérieur à $n-5$ et que 3 est impair, f est clairement un 1-broadcast indépendant sur $C(n;1,3)$ avec $\sigma(f) = \frac{n-3}{2}$ et $V_f^2 = \emptyset$. Nous obtenons donc $\beta_b(C(n;1,3)) \geq \frac{n-3}{2}$.

Maintenant, pour l'inégalité inverse, d'après la Proposition 3.10, nous obtenons $\sigma(g) \leq \left\lfloor \frac{n-\left|V_g^2\right|}{2} \right\rfloor$ pour chaque 2-broadcast indépendant sur $C(n;1,3)$. Si $\left|V_g^2\right| \geq 2$, alors $\sigma(g) \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor = \frac{n-3}{2} = \sigma(f)$. Si $\left|V_g^2\right| = 1$, disons $V_g^2 = \{v_j\}$, alors nous avons nécessairement $g(v_{j-1}) = g(v_{j-2}) = g(v_{j-3}) = g(v_{j-4}) = 0$, et donc v_{j-1} et v_{j-2} n'appartiennent à aucun ensemble A_f^i pour tout $v_i \in V_g^1$. En utilisant cette remarque avec le Lemme 3.9, nous obtenons alors

$$\sum_{v_i \in V_g^1} |A_g^i| + \sum_{v_j \in V_g^2} |B_g^j| = 2f(V_g^1) + \left|V_g^1\right| + 3f(v_j) - 1 \leq n-2,$$

ce qui donne, puisque $f(v_j) \geq 2$,

$$\sigma(g) = f(V_g^1) + f(v_j) \leq \frac{n-2-\left|V_g^1\right| - f(v_j) + 1}{2} \leq \frac{n-3}{2} = \sigma(f).$$

Finalement, si $\left|V_g^2\right| = 0$ alors, puisque n est impair, il existe nécessairement un sommet $v_i \in V_g^1$ tel que $g(v_{i+2}) = 0$, ce qui implique $g(v_{i+1}) = g(v_{i+3}) = 0$. Cela implique v_{i+3} n'appartient à aucun ensemble $A_g^{i'}$ pour tout $v_{i'} \in V_g^1$. En utilisant cette remarque avec le Lemme 3.9, nous avons alors $2f(V_g^1) + \left|V_g^1\right| \leq n-1$, et donc

$$\sigma(g) = f(V_g^1) \leq \frac{n-1-\left|V_g^1\right|}{2} \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor = \frac{n-3}{2} = \sigma(f).$$

Ainsi, dans tous les cas précédents, nous avons $\sigma(g) \leq \sigma(f) = \frac{n-3}{2}$, et, grâce à l'Observation 3.1, $\beta_b(C(n;1,3)) = \alpha(C(n;1,3)) = \dfrac{n-3}{3}$. ce qui complète la preuve. □

Théorème 3.19. *Pour tout entier $n \geq 8$,*

$$\beta_b(C(n;1,4)) = \alpha(C(n;1,4)) = \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor.$$

Preuve. D'après la Proposition 3.11, nous obtenons

$$\sigma(g) \leq \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)} \left(n - \frac{a-4}{a} \left| V_g^2 \right| \right) \right\rfloor$$

pour tout 2-broadcast indépendant sur $C(n;1,a)$, ce qui donne $\sigma(g) \leq \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor$, et donc $\beta_b(C(n;1,4)) \leq \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor$.

Nous construisons maintenant une fonction f de $V(C(n;1,4))$ vers $\{0,1\}$. Soit $n = 5k + r$ avec $0 \leq r \leq 4$. Nous considérons cinq cas, selon de la valeur de r.

1. $r = 0$.
   Nous posons $f(v_i) = 1$ si $(i \mod 5)$ est impair, et $f(v_i) = 0$ sinon.
2. $r = 1$.
   Nous posons $f(v_i) = 1$ si $(i \mod 5)$ est impair et $i \leq n-7$, $f(v_{n-2}) = f(v_{n-5}) = 1$, et $f(v_i) = 0$ sinon.
3. $r = 2$.
   Nous posons $f(v_i) = 1$ si $(i \mod 5)$ est impair et $i \leq n-3$, et $f(v_i) = 0$ sinon.
4. $r = 3$.
   Nous posons $f(v_i) = 1$ si $(i \mod 5)$ est impair, et $f(v_i) = 0$ sinon.
5. $r = 4$.
   Nous posons $f(v_i) = 1$ si $(i \mod 5)$ est impair et $i \leq n-7$, $f(v_{n-2}) = f(v_{n-5}) = f(v_{n-5}) = 1$, et $f(v_i) = 0$ sinon.

Il est clair que dans chacun des cas précédents, f est un 2-broadcast indépendant sur $C(n;1,4)$ telle que $\sigma(f) = \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor$ et $V_f^2 = \emptyset$. Par conséquent, $\beta_b(C(n;1,4)) = \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor$ et, grâce à l'Observation 3.1, $\beta_b(C(n;1,4)) = \alpha(C(n;1,4))$. Ceci complète la preuve. □

Maintenant, grâce à la Proposition 3.11, nous disposons d'un autre résultat permettant de déterminer le nombre d'indépendance broadcast pour les graphes circulants de type $C((a+1)k;1,a)$, où $a \geq 5$ et $k \geq 2$ (notons que les cas où $a = 2$, 3 et 4 ont déjà été traités, comme l'indiquent respectivement les Théorèmes 3.15, 3.18 et 3.19).

Théorème 3.20. *Considérons deux entiers a et k tels que $a \geq 5$ et $k \geq 2$. Dans ce cas, nous avons*

$$\beta_b(C((a+1)k;1,a)) = \alpha(C((a+1)k;1,a)) = k \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil$$

Preuve. Si a est impair, alors $(a+1)k$ est pair et le résultat découle directement du Théorème 3.17.

Supposons maintenant que a est pair, ce qui implique $a \geq 6$. D'après la Proposition 3.11, nous obtenons

$$\sigma(g) \leq \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)} \left((a+1)k - \frac{a-4}{a} \left| V_g^2 \right| \right) \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)} (a+1)k \right\rfloor = \frac{ak}{2}$$

pour chaque broadcast indépendant 2-limité g sur $C((a+1)k;1,a)$, ce qui implique

$$\beta_b(C((a+1)k;1,a)) \leq \frac{ak}{2}.$$

Considérons maintenant la fonction f de $V(C((a+1)k;1,a))$ vers $\{0,1\}$ définie par $f(v_i) = 1$ si et seulement si $(i \mod a+1)$ est impair. Comme a est pair, f est clairement un broadcast indépendant 1-limité sur $C((a+1)k;1,a)$ avec $\sigma(f) = \frac{ak}{2}$ et $V_f^2 = \emptyset$. Cela implique $\beta_b(C((a+1)k;1,a)) \geq \frac{ak}{2}$ et donc, grâce à l'Observation 3.1, $\beta_b(C((a+1)k;1,a)) = \alpha(C((a+1)k;1,a)) = \frac{ak}{2}$. Ceci complète la preuve. □

Nous considérons maintenant le cas des graphes circulants $C(n;1,a)$ lorsque a divise n. Nous introduisons d'abord deux nouveaux ensembles de sommets, en modifiant légèrement la définition des ensembles A_f^i et B_f^j définis dans la Section 4.3, en utilisant des a-arêtes au lieu 1-arêtes. Soit f un broadcast indépendant 2-limité sur $C(n;1,a)$. Considérons maintenant tout sommet $v_i \in V_f^1$ tel que $f(v_{i-a}) = f(v_{i-2a}) = 0$. Puisque f est un broadcast indépendant, nous avons nécessairement $f(v_{i+a}) = 0$. De plus, nous avons alors soit $f(v_{i+2a}) = 0$ soit $f(v_{i+2a}) = 1$. Ainsi, les valeurs de broadcast de la séquence de sommets $v_i v_{i+a} v_{i+2a} \ldots$ sont de la forme soit 100, soit 10100, soit $1010 \ldots 100$.

Pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$ tel que $f(v_{i-a}) = f(v_{i-2a}) = 0$, nous définissons alors

$$A'^i_f = \{v_{i+\ell a},\ 0 \leq \ell \leq 2p+2\},$$

comme l'ensemble des sommets satisfaisant (i) $f(v_{i+2ka}) = 1$ et $f(v_{i+(2k+1)a}) = 0$ pour tout k, $0 \leq k \leq p$, et (ii) $f(v_{i+(2p+2)a}) = 0$.

Maintenant, pour chaque sommet $v_j \in V_f^2$, nous définissons

$$B'^j_f = \{v_j\} \cup \{v_{j+a-1}, v_{j+a}, v_{j+a+1}\} \cup \{v_{j+2a}\}.$$

Ces ensembles possèdent les mêmes propriétés que celles des ensembles A_f^i et B_f^j présentés dans le Lemme 3.9, et la preuve suit le même raisonnement que celui utilisé pour le Lemme 3.9, et pour cette raison, elle n'est pas détaillée ici.

Lemme 3.21. *Pour tout broadcast indépendant 2-limité f sur $C(n;1,a)$, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *Pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$ tel que $f(v_{i-a}) = f(v_{i-2a}) = 0$, on a $|A'^i_f| = 2f(A'^i_f) + 1$.*
2. *Pour chaque sommet $v_j \in V_f^2$, on a $|B'^j_f| = 5$.*
3. *La somme $\sum_{v_i \in V_f^1} |A'^i_f| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B'^j_f|$ est inférieure ou égale à n.*

Nous sommes désormais en mesure de déterminer le nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants de la forme $C(qa;1,a)$, avec $a \geq 5$ et $q \geq 4$. Rappelons que les cas où $a = 2$, 3 et 4 ont été préalablement traités dans les Théorèmes 3.15, 3.18 et 3.19, respectivement, tandis que les cas où $q = 2$ et $q = 3$ sont abordés dans les Théorèmes 3.3 et 3.4, respectivement.

Théorème 3.22. *Si a et q sont deux entiers tels que $a \geq 5$ et $q \geq 4$, alors nous avons*

$$\begin{aligned}\beta_b(C(qa;1,a)) &= \alpha(C(qa;1,a)) \\ &= \begin{cases} \dfrac{qa}{2}, & \text{si } a \text{ est impair et } q \text{ est pair,} \\ \dfrac{(q-1)a}{2}, & \text{si } a \text{ et } q \text{ sont tous deux impairs,} \\ \left\lfloor \dfrac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor, & \text{si } a \text{ et } q \text{ sont tous deux pairs,} \\ \min\left\{ \left\lfloor \dfrac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor, \dfrac{(q-1)a}{2} \right\}, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}\end{aligned}$$

Preuve. Examinons séparément les quatre cas suivants :

1. a est impair et q est pair.
   Dans ce cas, qa est pair et le résultat découle directement du Théorème 3.17.
2. a et q sont impairs.
   Ici, $q \geq 5$ et, d'après le Lemme 3.7, $C(qa;1,a)$ admet un β_b-broadcast 2-limité . Soit f un broadcast indépendant 2-limité sur $C(qa;1,a)$. Remarquons d'abord que, comme q est impair, nous avons nécessairement $|A'^i_f| \leq q$ pour tout sommet $v_i \in V^1_f$, sinon cela impliquerait $f(v_i) = f(v_{i+(q-1)a}) = f(v_{i-a}) = 1$, ce qui contredirait le fait que f est un broadcast indépendant. Par conséquent, $f(A'^i_f) \leq \frac{q-1}{2}$, et grâce au Item 1 du Lemme 3.21, nous obtenons

$$\frac{|A'^i_f|}{f(A'^i_f)} = \frac{2f(A'^i_f)+1}{f(A'^i_f)} = 2 + \frac{1}{f(A'^i_f)} \geq 2 + \frac{2}{q-1} = \frac{2q}{q-1},$$

   ce qui conduit à

$$|A'^i_f| \geq \frac{2q}{q-1} f(A'^i_f).$$

   En utilisant les Items 2 et 3 du Lemme 3.21, nous obtenons

$$qa \geq \sum_{v_i \in V^1_f} |A'^i_f| + \sum_{v_j \in V^2_f} |B'^j_f| \geq \frac{2q}{q-1} f(V^1_f) + \frac{5}{2} f(V^2_f),$$

ce qui donne

$$qa \geq \frac{2q}{q-1}\sigma(f) + \frac{q-5}{2(q-1)}f(V_f^2) \geq \frac{2q}{q-1}\sigma(f),$$

et enfin

$$\sigma(f) \leq \frac{(q-1)a}{2}.$$

Considérons maintenant la fonction g de $V(C(qa;1,a))$ à $\{0,1\}$ définie par $g(v_i) = 1$ si i est pair et $i \leq (q-1)a-1$, et $g(v_i) = 0$ dans le cas contraire. Il est évident que g est un broadcast indépendant 1-limité sur $C(qa;1,a)$. De plus,

$$\beta_b(C(qa;1,a)) \geq \sigma(g) = \frac{(q-1)a}{2},$$

et ainsi, grâce à l'Observation 3.1,

$$\beta_b(C(qa;1,a)) = \alpha(C(qa;1,a)) = \frac{(q-1)a}{2}.$$

3. a et q sont pairs.
Notons d'abord que si $a+1$ divise q, disons $q = \ell(a+1)$ pour un certain entier $\ell \geq 1$, ce qui donne $qa = \ell a(a+1)$, le résultat découle directement du Théorème 3.20 pour $k = \ell a$, car

$$\frac{ak}{2} = \frac{\ell a^2}{2} = \frac{qa^2}{2(a+1)} = \left\lfloor \frac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor.$$

Supposons maintenant que ce n'est pas le cas, de sorte que $k(a+1) < q < (k+2)(a+1)$ pour un certain entier pair $k \geq 2$. Soit $q = k(a+1) + 2\ell$ (rappelons que k et q sont pairs) pour un certain entier ℓ, $1 \leq \ell \leq a$. D'après la Proposition 3.11, nous avons

$$\sigma(f) \leq \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)} \left(qa - \frac{a-4}{a} \left| V_f^2 \right| \right) \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor,$$

pour tout broadcast indépendant 2-limité f sur $C(qa;1,a)$. De plus, nous avons

$$\left\lfloor \frac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor = \frac{(a-1)q}{2} + \left\lfloor \frac{q}{2(a+1)} \right\rfloor = \frac{(a-1)q}{2} + \frac{k}{2},$$

ce qui implique

$$\beta_b(C(qa;1,a)) \leq \frac{(a-1)q}{2} + \frac{k}{2}.$$

Étant donné que $qa = (ka+\ell)(a+1) + \ell(a-1)$, et grâce à la Proposition 3.12, nous obtenons

$$\beta_b(C(qa;1,a)) \geq \frac{(ka+\ell)a}{2} + \frac{\ell(a-2)}{2} = \frac{ka^2}{2} + \ell(a-1) = \frac{ka^2}{2} + \frac{q-k(a+1)}{2}(a-1),$$

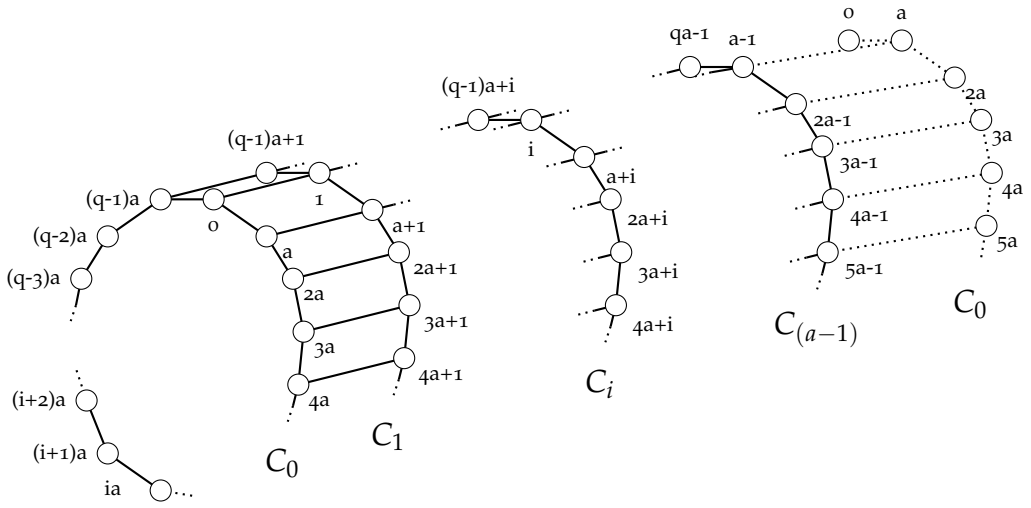


FIGURE 3.13 – Le graphe circulant $C(qa;1,a)$ (seuls les indices des sommets sont indiqués)

ce qui donne

$$\beta_b(C(qa;1,a)) \geq \frac{(a-1)q}{2} + \frac{k}{2}.$$

Enfin, par l'Observation 3.1, nous concluons

$$\beta_b(C(qa;1,a)) = \alpha(C(qa;1,a)) = \left\lfloor \frac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor.$$

4. a est pair et q est impair.
   Le graphe $C(qa;1,a)$ peut être considéré comme a copies $C_0, \ldots, C_{a-1}$ d'un cycle de taille q, avec $C_k = \{v_k, v_{k+a}, v_{k+2a} \ldots, v_{k+(q-1)a}\}$, pour chaque k, $0 \leq k \leq a-1$, connectés cycliquement comme illustré dans la Figure 3.13.
   Nous considérons trois sous-cas.

   (a) $q = a - 1$.
   Puisque q est impair, de manière similaire au Cas 2 (q et a impairs), nous avons

$$\sigma(f) \leq \frac{(q-1)a}{2}$$

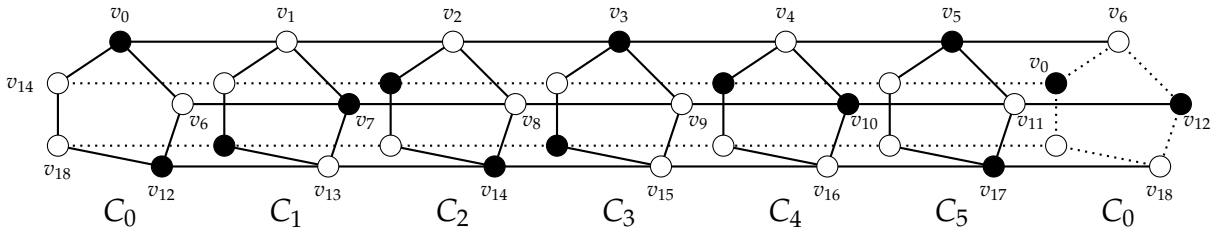


FIGURE 3.14 – Construction des ensembles S_i dans la preuve de Théorème 3.22 ($a = 6$, $q = 5$)

pour tout broadcast indépendant f sur $C(qa; 1, a)$. Considérons les ensembles S_k, $0 \leq k \leq a-1$ définis comme suit (voir la Figure 3.14 pour le cas $a = 6$ et $q = 5$).

$$\begin{aligned}
S_0 &= \{v_0, v_{2a}, v_{4a}, \ldots, v_{(q-5)a}, v_{(q-3)a}\},\\
S_1 &= \{v_{1+a}, v_{1+3a}, v_{1+5a}, \ldots, v_{1+(q-4)a}, v_{1+(q-2)a}\},\\
S_2 &= \{v_{2+2a}, v_{2+4a}, v_{2+6a}, \ldots, v_{2+(q-3)a}, v_{2+(q-1)a}\},\\
&\vdots\\
S_{a-1} &= \{v_{a-1}, v_{3a-1}, v_{5a-1}, \ldots, v_{n-4a-1}, v_{n-2a-1}\}.
\end{aligned}$$

De cette définition, il est clair que $\bigcup_{k=0}^{a-1} S_k$ forme un ensemble indépendant dans $V(G)$. Cela donne

$$\left|\bigcup_{k=0}^{a-1} S_k\right| = a\frac{q-1}{2} \leq \alpha(C(qa; 1, a)) \leq \beta_b(C(qa; 1, a)).$$

Grâce à l'Observation 3.1, nous obtenons alors

$$\beta_b(C(qa; 1, a)) = \alpha(C(qa; 1, a)) = \frac{(q-1)a}{2}.$$

(b) $q < a - 1$.
Posons $a = q + 1 + 2\ell$ (rappelons que a et q ont des parités différentes) pour un certain entier ℓ, $\ell \geq 1$. Pour chaque cycle C_k, $k \in \{0, 1, \ldots, q\}$, définissons S_k comme dans le sous-cas précédent et, pour chaque cycle C_k, $k \in \{0, 1, \ldots, q\}$, définissons (voir la Figure 3.15 pour le cas $a = 10$, $q = 5$ et $\ell = 2$)

$$\begin{aligned}
S_k &= \{v_k, v_{k+2a}, v_{k+4a}, \ldots, v_{k+(q-5)a}, v_{k+(q-3)a}\}, \text{ si } k \text{ est pair},\\
S_k &= \{v_{k+a}, v_{k+3a}, v_{k+5a}, \ldots, v_{k+(q-4)a}, v_{k+(q-2)a}\}, \text{ si } k \text{ est impair}.
\end{aligned}$$

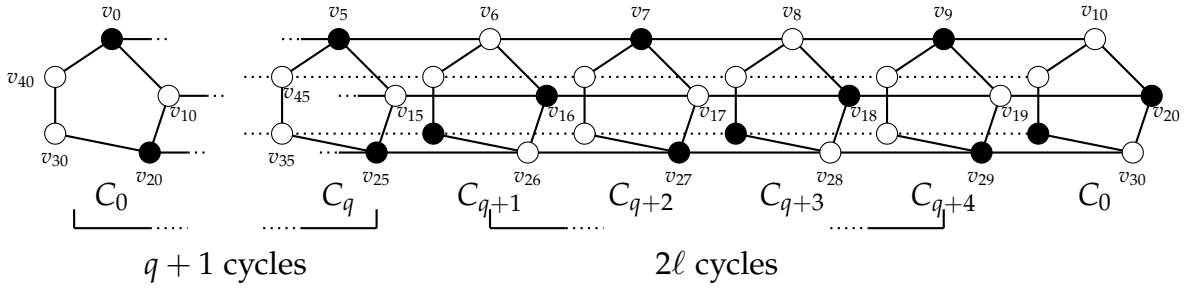


FIGURE 3.15 – Construction des ensembles S_i dans la preuve de Théorème 3.22 ($a = 10$, $q = 5$, $\ell = 2$)

De cette définition, il est clair que $\bigcup_{k=0}^{a-1} S_k$ forme un ensemble indépendant de $C(qa;1,a)$. Nous avons alors

$$|\bigcup_{k=0}^{a-1} S_k| = a\frac{q-1}{2} \leq \alpha(C(qa;1,a)) \leq \beta_b(C(qa;1,a))$$

et, comme q est impair, nous obtenons

$$\beta_b(C(qa;1,a)) \leq a\left(\frac{q-1}{2}\right).$$

Grâce à l'Observation 3.1, nous concluons finalement

$$\beta_b(C(qa;1,a)) = \alpha(C(qa;1,a)) = \frac{(q-1)a}{2}.$$

(c) $q > a+1$.
Observons d'abord que si $a+1$ divise q, disons $q = \ell(a+1)$ pour un certain entier $\ell \geq 1$, ce qui implique $qa = \ell a(a+1)$, le résultat découle directement du Théorème 3.20 pour $k = \ell a$, car

$$\frac{ak}{2} = \frac{\ell a^2}{2} = \frac{qa^2}{2(a+1)} = \left\lfloor \frac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor.$$

Supposons maintenant que ce n'est pas le cas, et donc $k(a+1) < q < (k+2)(a+1)$ pour un certain entier impair $k \geq 1$. Soit $q = k(a+1) + 2\ell$ (rappelant que k et q sont impairs) pour un certain entier ℓ, $1 \leq \ell \leq a$. D'après la Proposition 3.11,

nous obtenons

$$\begin{aligned}\beta_b(C(qa;1,a)) \leq \left\lfloor \frac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{q(a-1)(a+1)+q}{2(a+1)} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{q(a-1)(a+1)+(a+1)}{2(a+1)} + \frac{q-(a+1)}{2(a+1)} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{q(a-1)(a+1)+(a+1)}{2(a+1)} + \frac{(k-1)(a+1)+2\ell}{2(a+1)} \right\rfloor \\ &= \frac{(a-1)q+1}{2} + \frac{k-1}{2}.\end{aligned}$$

De plus, nous avons $qa = (ka+\ell)(a+1)+\ell(a-1)$ et, grâce à la Proposition 3.12, nous obtenons

$$\beta_b(C(qa;1,a)) \geq (ka+\ell)\frac{a}{2} + \ell(\frac{a}{2}-1) = \frac{ka^2}{2} + \ell(a-1) = \frac{ka^2}{2} + \frac{q-k(a+1)}{2}(a-1),$$

ce qui donne

$$\beta_b(C(qa;1,a)) \geq \frac{(a-1)q+1}{2} + \frac{k-1}{2}.$$

Par conséquent, grâce à l'Observation 3.1, nous concluons finalement

$$\beta_b(C(qa;1,a)) = \alpha(C(qa;1,a)) = \frac{(a-1)q+1}{2} + \frac{k-1}{2} = \left\lfloor \frac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor.$$

Ceci complète la preuve. □

Notre dernier résultat sur la valeur du nombre d'indépendance broadcast d'une classe plus générale de graphes circulants est le suivant.

Théorème 3.23. *Soient n, a, q et r des entiers tels que $n = qa+r$, a est pair, $a \geq 6$ et $q \geq \max\{2, r\}$. Si q et r sont de même parité ou q et r sont de parités différentes et $q+r \geq a-1$, alors nous avons*

$$\beta_b(C(n;1,a)) = \alpha(C(n;1,a)) = \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)} n \right\rfloor.$$

Preuve. En appliquant la Proposition 3.11, nous obtenons

$$\sigma(f) \leq \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)} \left(n - \frac{a-4}{a} \left| V_f^2 \right| \right) \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)} n \right\rfloor,$$

pour tout broadcast indépendant 2-limité f sur $C(n;1,a)$. Nous examinons deux cas.

1. q et r ont la même parité.
   Considérons d'abord le cas où $a+1$ divise $q-r$, c'est-à-dire $q-r = \ell(a+1)$ pour

un certain entier ℓ, ce qui implique $qa + r = (q - \ell)(a + 1)$. Le résultat suit alors directement du Théorème 3.20 pour $k = q - \ell$, car

$$\frac{ak}{2} = \frac{a(q-\ell)}{2} = \frac{(qa+r)a}{2(a+1)} = \left\lfloor \frac{(qa+r)a}{2(a+1)} \right\rfloor.$$

Supposons maintenant que ce n'est pas le cas, de sorte que $k(a+1) < q - r < (k+2)(a+1)$ pour un certain entier pair k. Soit $q - r = k(a+1) + 2\ell$ (rappelons que k et $q - r$ sont pairs) pour un certain entier ℓ, $1 \leq \ell \leq a$. Nous obtenons

$$\left\lfloor \frac{a}{2(a+1)}(qa+r) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{qa(a+1) - (q-r)a}{2(a+1)} \right\rfloor = \frac{aq}{2} + \left\lfloor -\frac{(q-r)a}{2(a+1)} \right\rfloor.$$

Puisque $-\ell < -\frac{\ell a}{(a+1)} < -\ell + 1$, il vient

$$\left\lfloor -\frac{(q-r)a}{2(a+1)} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{(k(a+1)+2\ell)a}{2(a+1)} \right\rfloor = -\frac{ka}{2} + \left\lfloor -\frac{\ell a}{(a+1)} \right\rfloor = -\frac{ka}{2} - \ell,$$

ce qui donne

$$\beta_b(C(qa+r;1,a)) \leq \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)}(qa+r) \right\rfloor = \frac{aq}{2} - \frac{ak}{2} - \ell = \frac{(q-k)a}{2} - \ell.$$

De plus, sachant que

$$qa + r = \frac{q+r}{2}(a+1) + \frac{q-r}{2}(a-1) = \frac{q+r+k(a-1)}{2}(a+1) + \ell(a-1),$$

et grâce à la Proposition 3.12, nous obtenons

$$\beta_b(C(qa+r;1,a)) \geq \frac{q+r+k(a-1)}{2}\left(\frac{a}{2}\right) + \ell(\frac{a}{2} - 1) = \frac{q+r+k(a-1)+2\ell}{2}\left(\frac{a}{2}\right) - \ell.$$

À nouveau, comme $q - r = k(a+1) + 2\ell$, il s'ensuit

$$\beta_b(C(qa;1,a)) \geq \frac{q+r+q-r-2k}{2}\left(\frac{a}{2}\right) - \ell = \frac{(q-k)a}{2} - \ell,$$

et donc, grâce à l'Observation 3.1, nous concluons finalement

$$\beta_b(C(qa+r;1,a)) = \alpha(C(qa+r;1,a)) = \frac{(a-1)q+1}{2} + \frac{k-1}{2} = \left\lfloor \frac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor.$$

2. q et r ont des parités différentes.
   De manière similaire au cas précédent, si $a+1$ divise $q-r$, alors nous avons

$$\frac{ak}{2} = \left\lfloor \frac{(qa+r)a}{2(a+1)} \right\rfloor.$$

   Supposons maintenant le contraire. Nous examinons deux sous-cas, selon que $q-r$ soit supèrieur ou infèrieur à $a+1$.

   (a) $q-r < a+1$.
   Dans ce cas, nous obtenons

$$\begin{aligned}\beta_b(C(qa+r;1,a)) \leq \left\lfloor \frac{a}{2(a+1)}(qa+r) \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{qa(a+1)-(q-r)a}{2(a+1)} \right\rfloor \\ &= \frac{aq}{2} + \left\lfloor -\frac{(q-r)a}{2(a+1)} \right\rfloor.\end{aligned}$$

   Puisque $q-r < a+1$, il vient

$$-\frac{q-r+1}{2} < -\frac{(q-r)a}{2(a+1)} < -\frac{q-r+1}{2} + 1,$$

   et donc

$$\beta_b(C(qa+r;1,a)) \leq \frac{aq}{2} - \frac{q-r+1}{2}.$$

   Étant donné que $qa+r = \frac{q+r+1-a}{2}(a+1) + \frac{q-r+1+a}{2}(a-1)$, et grâce à la Proposition 3.12, nous avons

$$\beta_b(C(qa+r;1,a)) \geq \left(\frac{q+r+1-a}{2}\right)\frac{a}{2} + \left(\frac{q-r+1+a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}-1\right),$$

   ce qui donne

$$\beta_b(C(qa;1,a)) \geq \frac{aq}{2} - \frac{q-r+1}{2}.$$

   Enfin, grâce à l'Observation 3.1, nous concluons

$$\beta_b(C(qa;1,a)) = \alpha(C(qa;1,a)) = \frac{aq}{2} - \frac{q-r+1}{2}.$$

   (b) $q-r > a+1$.
   Dans cette situation, nous avons $k(a+1) < q-r < (k+2)(a+1)$ pour un certain entier impair $k \geq 1$. Soit $q-r = k(a+1)+2\ell$ (rappelons que k et $q-r$ sont impairs) pour un entier ℓ, $1 \leq \ell \leq a$. Puisque

$$\left\lfloor -\frac{(q-r)a}{2(a+1)} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{(k(a+1)+2\ell)a}{2(a+1)} \right\rfloor = -\frac{ka}{2} + \left\lfloor -\frac{\ell a}{(a+1)} \right\rfloor,$$

et $-\ell < -\frac{\ell a}{(a+1)} < -\ell+1$, il en résulte

$$\left\lfloor \frac{a(qa+r)}{2(a+1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{qa(a+1)-(q-r)a}{2(a+1)} \right\rfloor = \frac{aq}{2} + \left\lfloor -\frac{(q-r)a}{2(a+1)} \right\rfloor = \frac{aq}{2} - \frac{ka}{2} - \ell.$$

Cela implique

$$\beta_b(C(qa+r;1,a)) \leq \left\lfloor \frac{a(qa+r)}{2(a+1)} \right\rfloor = \frac{aq}{2} - \frac{ak}{2} - \ell = \frac{(q-k)a}{2} - \ell.$$

De plus, étant donné que $qa+r = \frac{q+r+1-a}{2}(a+1) + \frac{q-r+a+1}{2}(a-1)$ et $q-r = k(a+1)+2\ell$, nous obtenons

$$qa+r = \frac{q+r+k(a-1)}{2}(a+1) + \ell(a-1).$$

Par conséquent, nous avons

$$\beta_b(C(qa+r;1,a)) \geq \frac{q+r+k(a-1)}{2} \cdot \frac{a}{2} + \ell(\frac{a}{2}-1) = \frac{q+r+k(a-1)+2\ell}{2} \cdot \frac{a}{2} - \ell,$$

ce qui donne

$$\beta_b(C(qa+r;1,a)) \geq \frac{q+r+q-r-2k}{2} \cdot \frac{a}{2} - \ell = \frac{(q-k)a}{2} - \ell.$$

Finalement, grâce à l'Observation 3.1, nous concluons

$$\beta_b(C(qa+r;1,a)) = \alpha(C(qa+r;1,a)) = \left\lfloor \frac{qa^2}{2(a+1)} \right\rfloor.$$

Ceci complète la preuve. □

Chapitre 4

Nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants orientés $\overrightarrow{C}(n;1,a)$

Sommaire

4.1 Résultats préliminaires 71
4.2 Broadcast indépendant optimal ℓ-limité 78
4.3 Bornes générales sur le nombre d'indépendance broadcast sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ 88
4.4 Quelques valeurs exactes 100

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants orientés. Cette étude représente une continuité logique de notre exploration précédente des graphes circulants non orientés.

Les résultats de cette étude ont été soumis pour publication et sont disponibles sur [35].

4.1 Résultats préliminaires

Notons tout d'abord qu'un broadcast indépendant sur un graphe non orienté G constitue également un broadcast indépendant sur toute orientation $\overrightarrow{G}$ de ce graphe. Cette affirmation repose sur le fait que, pour toute paire de sommets u et v dans G, la distance dans $\overrightarrow{G}$, notée $d_{\overrightarrow{G}}(u,v)$, est supèrieure ou égale à la distance dans G, soit $d(u,v)$. Cette observation fondamentale nous amène à une proposition intéressante qui établit une borne infèrieure.

Proposition 4.1. *Si n et a sont deux entier tels que $n > 3$, $|a| \geq 1$, et $a \notin \{1, n-1\}$, alors*

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq \max\{\beta_b(C(n;1,a)), \mathrm{diam}(\overrightarrow{C}(n;1,a))\}.$$

Soient n et a, deux entiers tels que $n > |a|$ (avec $|a| \geq 1$) et $a \notin \{1, n-1\}$. Il est intéressant de noter que les graphes $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ et $\overrightarrow{C}(n;-1,-a)$ sont isomorphes. Cette propriété se retrouve aussi entre les graphes $\overrightarrow{C}(n;-1,a)$ et $\overrightarrow{C}(n;1,-a)$, conduisant ainsi aux relations $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n;-1,-a))$ et $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;-1,a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,-a))$. Par conséquent, notre analyse peut se restreindre aux graphes circulants orientés de la forme $\overrightarrow{C}(n;1,\pm a)$. Maintenant, en tenant compte d'un autre isomorphisme énoncé dans l'Observation ci-dessous, le champ d'étude sera restreint aux graphes circulalnts orientés $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ avec $a \geq 2$.

Observation 4.2. *Si n et a sont deux entiers tels que, $2 \leq a \leq n-2$, alors*

$$\overrightarrow{C}(n;1,a) \simeq \overrightarrow{C}(n;1,-(n-a)).$$

Théorème 4.3. *Pour tout entier $a \geq 2$,*

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(2a;1,a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(2a;1,-a)) = \mathrm{diam}(\overrightarrow{C}(2a;1,a)) = a.$$

Preuve. Soit f un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(2a;1,a)$ et soient $V_f^1 = \{v_i \in V_f \mid f(v_i) = 1\}$ et $V_f^{\geq 2} = \{v_i \in V_f \mid f(v_i) \geq 2\}$ une partition de V_f^+.
Pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$ et $v_j \in V_f^{\geq 2}$, nous définissons les ensembles

$$A_f^i = \{v_i, v_{i+1}\} \text{ et } B_f^j = \{v_j, v_{j+1}, \ldots, v_{j+f(v_j)}\} \cup \{v_{j+a+1}, v_{j+a+2}, \ldots, v_{j+a+f(v_j)-1}\}.$$

La définition de l'ensemble B_f^j est illustrée dans la Figure 4.1 avec $n = 16$ et $a = 8$.

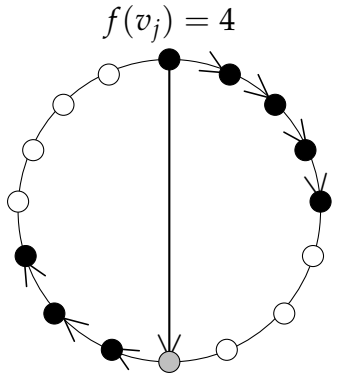


FIGURE 4.1 – L'ensemble B_f^j (les sommets noirs) avec $n = 16$ et $a = 8$

Il est évident que ces ensembles sont disjoints deux à deux avec des tailles $|A_f^i| = 2$ et $|B_f^j| = 2f(v_j)$. Ainsi,

$$\sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^{\geq 2}} |B_f^j| = 2f(V_f^1) + 2f(V_f^{\geq 2}) \leq n,$$

ce qui entraîne

$$f(V_f^+) = f(V_f^1) + f(V_f^{\geq 2}) \leq \frac{n}{2} = a.$$

Maintenant, étant donné que dans $\overrightarrow{C}(2a; 1, a)$,

$$\text{diam}(\overrightarrow{C}(2a; 1, a)) = e(v_0) = d(v_0, v_{n-1}) = a,$$

nous obtenons, grâce à la Proposition 4.1, $\beta_b(\overrightarrow{C}(2a; 1, a)) \geq a$. Cela implique

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(2a; 1, a)) = a.$$

De l'Observation 4.2, nous avons

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(2a; 1, a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(2a; 1, -a)) = \text{diam}(\overrightarrow{C}(2a; 1, a)) = a.$$

Ceci complète la preuve.

□

Théorème 4.4. *Si n et a sont deux entier tels que $n = 3a - 1$ et $a \geq 4$, alors*

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n; 1, a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n; 1, -(2a-1))) = \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor.$$

Preuve. Soit f un broadcast β_b-indépendant sur $\overrightarrow{C}(n; 1, a)$.
Pour chaque sommet f-broadcast v_i de V_f^+, soit $L(v_i)$ l'ensemble des sommets f-dominés uniquement par v_i, c'est-à-dire

$$L(v_i) = \left\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+f(v_i)}\right\} \cup \left\{v_{i+a+1}, v_{i+a+2}, \ldots, v_{i+a+f(v_i)-1}\right\}$$

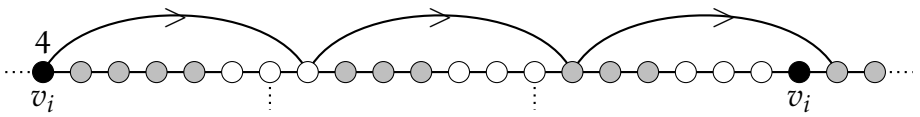
$$\cup \left\{v_{i+2a}, v_{i+2a+1}, \ldots, v_{i+2a+f(v_i)-2}\right\}.$$

onform La Figure 4.2 illustre $L(v_i)$ sur un graphe circulant orienté $\overrightarrow{C}(20; 1, 7)$ avec $f(v_i) = 4$.

Les ensembles $L(v_i)$ possèdent les deux propriétés suivantes :

1. Pour deux sommets distincts v_i et v_j dans V_f^+, $L(v_i) \cap L(v_j) = \emptyset$, car sinon nous aurions $d(v_i, v_j) \leq \max\{f(v_i), f(v_j)\}$, ce qui contredirait le fait que f est un broadcast indépendant.
2. Pour chaque sommet $v_i \in V_f^+$, $|L(v_i)| = 3f(v_i) - 1$.

De ces deux propriétés, nous déduisons que



$d(v_{i+6}, v_i) = 2 \qquad d(v_{i+13}, v_i) = 1$

FIGURE 4.2 – L'ensemble $L(v_i)$ (les sommets noirs et gris), avec $a = 7$ et $f(v_i) = 4$

$$\sum_{v_i \in V_f^+} |L(v_i)| = 3f(V_f^+) - \left|V_f^+\right| \leq n,$$

ce qui nous donne

$$f(V_f^+) \leq \left\lfloor \frac{n + \left|V_f^+\right|}{3} \right\rfloor.$$

Enfin, puisque $\left|V_f^+\right| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, nous obtenons

$$\sigma(f) = f(V_f^+) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Pour l'inégalité inverse, nous construisons une fonction g de $V(\overrightarrow{C}(n;1,a))$ vers $\{0,1,2\}$ avec un coût de $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Pour ce faire, nous considérons deux cas, selon de la parité de a.

1. Si a est impair, nous dfinissons $g(v_i) = 1$ si i est pair, et $g(v_i) = 0$ sinon. Comme a est impair, alors n est pair et g est clairement un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ avec un coût de $\sigma(g) = \frac{n}{2}$. D'où $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq \frac{n}{2}$.
2. Si a est pair, nous posons

$$g(v_i) = \begin{cases} 2, & \text{si } i = 0, \\ 1, & \text{si } (i \text{ est impair, et } 3 \leq i \leq a-1 \text{ ou } 2a+1 \leq i \leq 3a-3), \\ & \text{ou si } (i \text{ est pair, et } a+2 \leq i \leq 2a-2), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Voir la Figure 4.3 pour le cas $n = 17$ et $a = 6$)

Puisque a est pair, g constitue un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ avec un coût de

$$\sigma(g) = 2 + \left(\frac{a-4}{2} + 1\right) + \left(\frac{a-4}{2} + 1\right) + \left(\frac{a-4}{2} + 1\right) = \frac{3a}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}.$$

Ainsi, nous avons $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

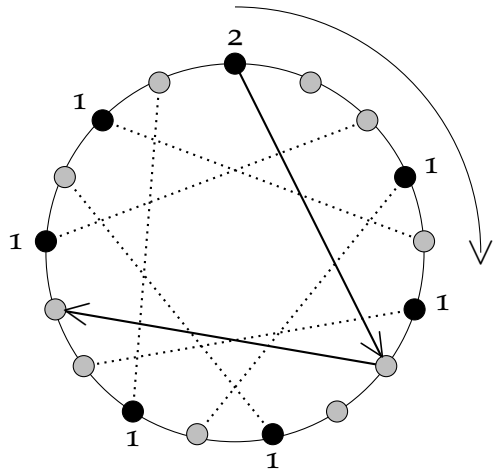


FIGURE 4.3 – Construction de l'application g dans le preuve de Théorème 4.4 avec $n = 17$ et $a = 6$

Par l'Observation 4.2, nous obtenons alors

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,2)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,-(2a-1))) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Ceci complète la preuve.

□

Théorème 4.5. *Pour tout entier $n \geq 4$,*

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,2)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,-(n-2))) = \text{diam}(\overrightarrow{C}(n;1,2)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Preuve. Nous commençons par déterminer le diamètre du graphe $\overrightarrow{C}(n;1,2)$. Pour chaque sommet $v_i \in V(\overrightarrow{C}(n;1,2))$, $d(v_0,v_i) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$. Alors

$$\text{diam}(\overrightarrow{C}(n;1,2)) = e(v_0) = \max_{v_i \in V} d(v_0,v_i) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Par conséquent, de la Proposition 4.1, $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,2)) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Nous prouvons maintenant l'inégalité inverse. Soit f un β_b-broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,2)$. Nous considérons deux cas, selon la valeur de $|V_f^+|$.

1. Si $|V_f^+| = 1$. Alors $V_f^+ = \{v_i\}$ pour un certain sommet v_i, et donc

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,2)) = \sigma(f) = f(v_i) \leq e(v_0) = \text{diam}(\overrightarrow{C}(n;1,2)).$$

2. Si $|V_f^+| \geq 2$. Dans ce cas, chaque broadcast-sommet $v \in V_f^+$, v f-domine $2f(v)+1$ sommets. De plus, chaque sommet est f-dominé au plus une fois. Cela donne

$$2f(V_f^+) + |V_f^+| \leq n,$$

et donc

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,2)) = \sigma(f) = f(V_f^+) \leq \left\lfloor \frac{n-|V_f^+|}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor < \text{diam}(\overrightarrow{C}(n;1,2)),$$

ce qui est impossible. Donc $|V_f^+| = 1$ et

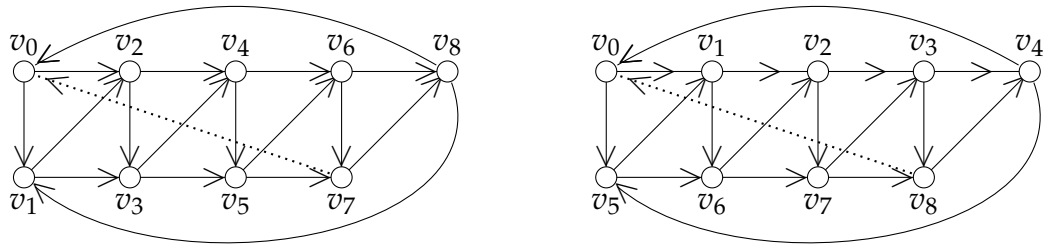
$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,2)) = \text{diam}(\overrightarrow{C}(n;1,2)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Conformêment à l'Observation 4.2, nous obtenons alors

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,2)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,2-n)) = \text{diam}(\overrightarrow{C}(2a;1,a)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

□

Puisque les graphes circulants $\overrightarrow{C}(2a-1;1,a)$ et $\overrightarrow{C}(2a-1;1,2)$ sont isomorphes pour chaque entier a, $a \geq 2$, comme représenté dans la Figure 4.4, l'exemple des deux graphes isomorphes $\overrightarrow{C}(9;1,2)$ et $\overrightarrow{C}(9;1,5)$ sert d'illustration à cette isomorphie. En conséquence, le Théorème 4.5 conduit au corollaire suivant



Le graphe $\overrightarrow{C}(9;1,2)$ Le graphe $\overrightarrow{C}(9;1,5)$

FIGURE 4.4 – Deux graphes isomorphes $\overrightarrow{C}(9;1,2)$ et $\overrightarrow{C}(9;1,5)$

Corollaire 4.6. *Pour tout entier $a \geq 2$,*

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(2a-1;1,a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(2a-1;1,-(a-1))) = \text{diam}(\overrightarrow{C}(2a-1;1,a)) = a-1.$$

Théorème 4.7. *Pour tout entier $n \geq 4$,*

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,3)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,-(n-3))) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Preuve. Soit f un β_b-broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,3)$. Chaque sommet f-broadcast v_i de V_f^+, v_i domine tous les sommets consécutifs de v_i jusqu'à $v_{i+3f(v_i)-2}$($3f(v_i)-1$ sommets). Par conséquent,

$$3f(V_f^+) - |V_f^+| \leq n,$$

ce qui implique

$$f(V_f^+) \leq \left\lfloor \frac{n + |V_f^+|}{3} \right\rfloor.$$

Puisque $|V_f^+| \leq \frac{n}{2}$, nous obtenons

$$\sigma(f) = f(V_f^+) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Nous démontrons maintenant l'inégalité inverse. Pour cela, nous construisons une fonction g de $V(\overrightarrow{C}(n;1,3))$ vers $\{0,1,2\}$, en considérant deux cas, selon la parité de n.

1. Si n est pair, alors nous posons $g(v_i) = 1$ si et seulement si i est pair. Comme n est pair, g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,3)$ avec un coût de $\sigma(g) = \frac{n}{2}$. Ainsi, $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,3)) \geq \frac{n}{2}$.
2. Si n est impair, nous posons

$$g(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \text{ est pair et } 0 \leq i \leq n-7, \\ 2, & \text{si } i = n-5, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

(voir la Figure 4.5 pour le cas $n = 17$).

Il est évident que g constitue un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,3)$ de

$$\sigma(g) = 2 + \left(\frac{n-7}{2} + 1\right) = \frac{n-1}{2}.$$

Par conséquent, $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,3)) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

D'après l'Observation 4.2, nous concluons que $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,3)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,3-n)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ceci termine la preuve. □

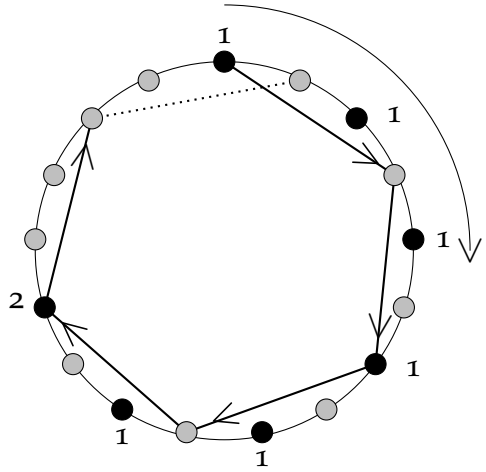


FIGURE 4.5 – Construction de la fonction f dans le preuve de Théorème 4.7 avec $n = 17$

4.2 Broadcast indépendant optimal ℓ-limité

Dans cette section, nous nous intéressons aux graphes circulants orientés $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ avec $n = qa + r$, $a \geq 4$, $q \geq 2$, et $0 \leq r \leq a-1$. Notre objectif principal est d'identifier des classes pour lesquelles il existe un broadcast indépendant optimal f dont la f-valeur maximale ne peut dépasser un certain entier ℓ. Il convient de souligner qu'aucune borne ℓ ne peut dépasser le diamètre de $\overrightarrow{G}$, car $f(v) \leq \text{diam}(\overrightarrow{G})$ pour tout sommet v. commençons par déterminer une borne supérieure du $\text{diam}(\overrightarrow{G})$.

Proposition 4.8. *Si n, a, q et r sont quatre entiers tels que $n = qa + r$, $a \geq 4$, $q \geq 2$, et $0 \leq r \leq a-1$, alors*

$$diam(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \leq q + a - 2.$$

Preuve. Pour tout sommet $v_i \in V = V(\overrightarrow{C}(n;1,a))$, il existe un chemin reliant v_0 à v_i, défini par

$$P_i = (v_0, v_a, v_{2a}, \ldots, v_{pa}, v_{pa+1}, \ldots, v_i), \text{ où } p = \left\lfloor \tfrac{i}{a} \right\rfloor,$$

ce qui donne

$$d(v_0, v_i) \leq p + i - pa, \text{ où } p + i - pa \text{ est la longueur du chemin } P_i.$$

Puisque $\text{diam}(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = e(v_0)$, nous obtenons

$$\text{diam}(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = \max_{v_i \in V}(d(v_0, v_i)) \leq \max_{0 \leq i \leq n-1}\left(\left\lfloor \frac{i}{a} \right\rfloor + i - \left\lfloor \frac{i}{a} \right\rfloor a\right)$$

$$\leq \max\{q - 1 + a - 1; q + r - 1\} = q + a - 2.$$

Cela conclut la preuve. □

La borne supérieure du diamètre, établie dans la Proposition 4.8, est atteinte. Pour le prouver, commençons par donner un résultat sur la distance entre deux sommets quelconques de $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, avec $n = qa + r$, $q \geq 2$,$0 \leq r \leq a-1$ et $4 \leq a \leq q + r + 1$.

Proposition 4.9. *Soient n, a, q et r quatre entiers tels que $n = qa$, $a \geq 4$ et $q \geq 3$ ou $n = qa + r$ avec $q \geq 2$, $1 \leq r \leq a-1$ et $4 \leq a \leq r + q + 1$. Pour chaque paire de sommets v_i, v_j, $i < j$, du graphe orienté $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, nous avons*

$$d(v_i, v_j) = \left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor (1-a) + j - i.$$

Preuve. Soient v_i et v_j deux sommets du graphe $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, tels que $i < j$. Pour tout chemin $v_i - v_j$, il existe un entier ℓ tel que

$$P = P_\ell = (v_i, v_{i+a}, \ldots, v_{i+\ell a}, v_{i+\ell a+1}, \ldots, v_j)$$

et

$$d(v_i, v_j) = \min_{\ell \geq 0} |E(P_\ell)| = \min_{\ell \geq 0} \ell + (j - (i + \ell a)),$$

où $|E(P_\ell)|$ est la longueur du chemin P_ℓ.

Lorsque $r = 0$, le plus court chemin de v_i à v_j est donné par :

$$P = (v_i, v_{i+a}, \ldots, v_{i+\left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor a}, v_{i+\left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor a+1}, \ldots, v_j).$$

Supposons maintenant que $r \neq 0$. Nous examinons quatre cas, selon la valeur de ℓ, pour prouver que

$$d(v_i, v_j) = \min_{\ell \geq 0} |E(P_\ell)| = \left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor (1-a) + j - i.$$

1. Si $0 \leq \ell < \left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor$, alors

$$|E(P_\ell)| = \ell + j - (i + \ell a) = \ell(1-a) + j - i.$$

Comme $2 < a$, nous obtenons

$$|E(P_\ell)| > \left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor (1-a) + j - i.$$

2. Si $\ell = \left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor$, alors $P_\ell = (v_i, v_{i+a}, v_{i+2a}, \ldots, v_{i+\left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor a}, v_{i+\left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor a+1}, \ldots, v_j)$. Par conséquent,

$$|E(P_\ell)| = \left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor (1-a) + j - i.$$

3. Si $\left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor + 1 \leq \ell \leq q$, alors $j < \ell a$ et

$$P_\ell = (v_i, v_{i+a}, v_{i+2a}, \ldots, v_{\ell a}, v_{\ell a+1}, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j).$$

Il est clair que le sommet v_i apparaît deux fois dans le chemin P_ℓ, ce qui implique que ce chemin n'est pas minimal.

4. Si $q+1 \leq \ell$, alors

$$P_\ell = (v_i, v_{i+a}, v_{i+2a}, \ldots, v_{i+qa}, v_{i+(q+1)a}, \ldots, v_{i+\ell a}, v_{i+\ell a+1}, v_{i+\ell a+2}, \ldots, v_j).$$

Soient P'_ℓ et $P'_{\ell'}$ deux chemins définis par :

$$P'_\ell = (v_i, v_{i+a}, v_{i+2a}, \ldots, v_{i+(q+1)a} = v_{i+a-r}) \text{ et } P'_{\ell'} = (v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{i+a-r}).$$

Comme $a \leq q + r + 1$, nous avons $|E(P'_\ell)| \geq |E(P'_{\ell'})|$. De plus, P'_ℓ est un sous-chemin de P_ℓ, alors il existe un chemin $P_{\ell'}$ tel que $\ell' \leq q$ et $|E(P_\ell)| \geq |E(P_{\ell'})|$. On en déduit

$$|E(P_\ell)| \geq |E(P_{\ell'})| \geq \left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor (1-a) + j - i.$$

Dans tous les cas, nous obtenons $|E(P_\ell)| \geq \left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor (1-a) + j - i$, et l'égalité est atteinte dans le cas $\ell = \left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor$, ce qui implique que

$$d(v_i, v_j) = \min_{\ell \geq 0} |E(P_\ell)| = \left\lfloor \frac{j-i}{a} \right\rfloor (1-a) + j - i.$$

Cela conclut la preuve. □

Proposition 4.10. *Soient n, a, q et r quatre entiers tels que $n = qa$ avec $a \geq 4$ et $q \geq 3$, ou $n = qa + r$ avec $q \geq 2$, $1 \leq r \leq a-1$ et $4 \leq a \leq r + q + 1$. Pour chaque paire de sommets v_i, v_j, $i < j$, du graphe orienté $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, nous avons :*

$$diam(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = q + a - 2.$$

Preuve. Soit $V = V(\overrightarrow{C}(n;1,a))$. d'après la Proposition 4.9, et puisque $\text{diam}(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = e(v_0)$, nous avons

$$\text{diam}(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = \max_{v_i \in V} d(v_0, v_i) = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left(\left\lfloor \frac{i}{a} \right\rfloor (1-a) + i \right) = q + a - 2.$$

Cette valeur est donnée par la distance entre v_0 et v_{qa-1}. Cela conclut la preuve. □

Maintenant, nous entamons le processus d'identification de deux broadcast indépendants ℓ-limité s sur les graphes circulants de la forme $\overrightarrow{C}(qa+r;1,a)$, où $a \geq 4$, $q \geq 2$, et $0 \leq r \leq a-1$. Nous commencerons d'abord par le cas où $a \leq q + r + 1$.

Lemme 4.11. *Soient n, a, q et r quatre entiers tels que $n = qa + r$. Si $4 \leq a \leq q + r + 1$ et $0 \leq r \leq a - 2$, ou $a \leq q + 1$ et $r = a - 1$, alors $\overrightarrow{C}(n; 1, a)$ admet un β_b-broadcast $(a-1)$-limité .*

Preuve. Il suffit de démontrer que pour tout broadcast indépendant f sur $\overrightarrow{C}(n; 1, a)$, il existe un broadcast indépendant g sur $\overrightarrow{C}(n; 1, a)$ tel que $\sigma(g) \geq \sigma(f)$ et $g(v) \leq a - 1$ pour chaque sommet $v \in V_g^+$.
Soit f un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n; 1, a)$ et g la fonction de $V(\overrightarrow{C}(n; 1, a))$ vers $\{0, 1, \ldots, a - 1\}$ définie comme suit (la construction de la fonction g est illustrée dans la Figure 4.6, toutes les arêtes de longueur a n'étant pas dessinées).

1. Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $a \leq f(v_i) \leq 2a - 3$, alors nous posons

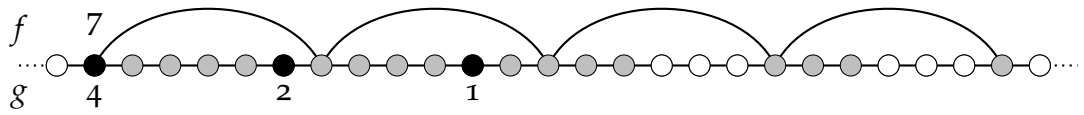
$$g(v_j) = \begin{cases} a - 2 & \text{si } j = i, \\ d & \text{si } j = i + (a - 1)\ , \\ 1 & \text{si } j = i + 2a - 2\ , \end{cases}$$

   où $d = f(v_i) - (a - 1)$ (voir Figure 4.6(a)).

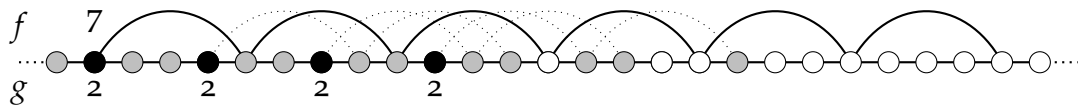
2. Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $p(a - 1) \leq f(v_i) \leq (p + 1)(a - 1) - 1$, pour un certain $p \geq 2$, alors nous définissions

$$g(v_j) = \begin{cases} a - 2 & \text{si } i \leq j \leq i + (4p - 5)(a - 1), \\ & \quad \text{et} (j - i) \mod (a - 1) \text{ est impair}, \end{cases}$$

   (voir Figure 4.6(b)).



(a) Item 1 : $f(v_i) = 7$ et $a = 6$ (donc $d = 2$)



(b) Item 2 : $f(v_i) = 7$ et $a = 4$ (donc $p = 2$)

FIGURE 4.6 – Construction de la fonction g dans la preuve du Lemme 4.11

3. Pour tout autre sommet v_k, nous posons $g(v_k) = f(v_k)$.

Nous allons maintenant démontrer que dans tous les cas, g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n; 1, a)$. Pour ce faire, nous commençons par prouver l'assertion suivante.

Assertion C. *Pour chaque sommet v_j dont la g-valeur est fixée à 1, d ou $a-2$ dans l'Item 1, ou $a-2$ dans l'Item 2, nous avons $d(v_i,v_j) \leq f(v_i) - g(v_j)$.*

Preuve. Dans l'Item 1, grâce à la Proposition 4.9, nous avons

$$d(v_i, v_{i+a-1}) = a-1 \leq f(v_i) - d = f(v_i) - g(v_{i+a-1}),$$

et

$$d(v_i, v_{i+2a-2}) = a-1 \leq f(v_i) - 1 = f(v_i) - g(v_{i+2a-2}).$$

De la Proposition 4.9, la distance entre le sommet v_i et tous les sommets dont la g-valeur pourrait être fixés à $a-2$ dans l'Item 2 est inchangée, et elle est donnée par $d(v_i,v_j) = a-1$. De plus, puisque $p \geq 2$, nous avons :

$$d(v_i,v_j) \leq (p-1)(a-1) < p(a-1) - (a-2) = f(v_i) - g(v_j).$$

Cela conclut la preuve de l'assertion. □

Grâce à l'Assertion C, et puisque f est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, aucun g-broadcast sommet v_i dans un item ne domine un autre g-broadcast sommet v_j dans un autre item. Par conséquent, pour prouver que g est en effet un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, il reste à prouver l'assertion suivante.

Assertion D. *Pour chaque paire de sommets de g-broadcast, v_i et v_j dans un item quelconque, nous avons :*

$$d(v_i,v_j) > g(v_i).$$

Preuve. Dans l'Item 1, et d'après la Proposition 4.9, nous avons

$$\begin{aligned}
&d(v_i, v_{i+a-1}) = d(v_i, v_{i+2a-2}) = a-1 > g(v_i),\\
&d(v_{i+a-1}, v_{i+2a-2}) = a-1 > d = g(v_{i+a-1}),\\
&d(v_{i+a-1}, v_i) = \min\{q+r, q\} = q > d = g(v_{i+a-1}), \text{ et}\\
&\min\{d(v_{i+2a-2}, v_i), d(v_{i+2a-2}, v_{i+a-1})\} > 1 = g(v_{i+2a-2}).
\end{aligned}$$

Maintenant, dans l'Item 2, et D'après de la Proposition 4.9, nous avons pour chaque paire de sommets v_j, $v_{j'}$ dont la g-valeur est définie comme $a-2$

$$d(v_j, v_{j'}) = a-1 > g(v_j).$$

Cela conclut la preuve de l'assertion. □

Pour terminer la preuve, nous devons seulement montrer que nous avons $\sigma(g) \geq \sigma(f)$. Pour chaque v_i dans l'Item 1, nous avons $g(v_i) + g(v_{i+a-1}) + g(v_{i+2a-2}) = a-1+d = f(v_i)$. Dans l'Item 2, le nombre de sommets définis comme $a-2$ est $n_1 = 4(p-1)$. Nous considérons trois cas, selon les valeurs de a et de p.

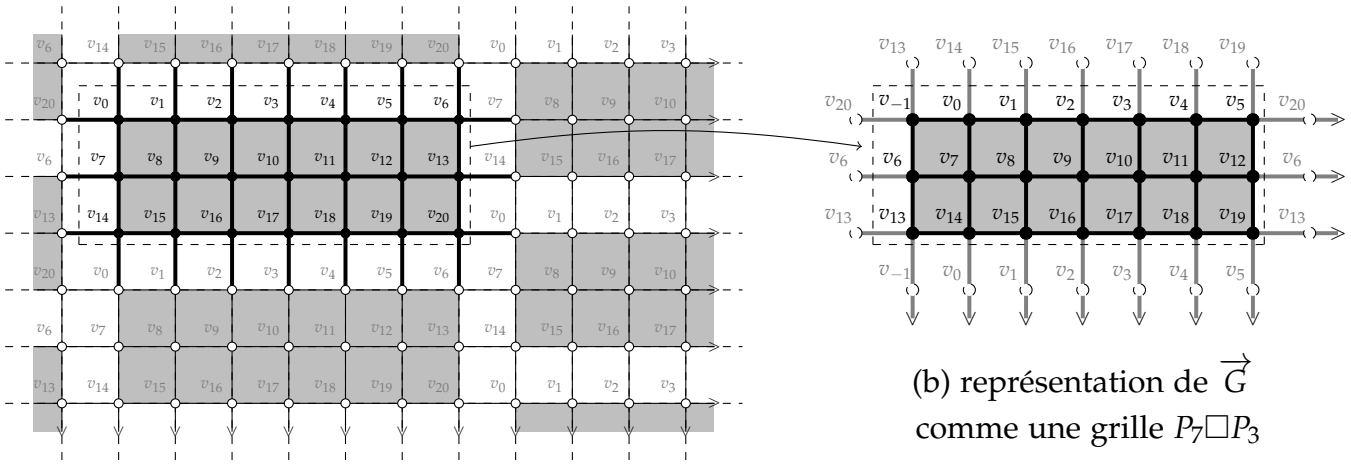
1. Si $p = 2$ et $a \geq 4$, alors $n_1(a-2) = 4(a-2) \geq 3(a-1) - 1 \geq f(v_i)$.
2. Si $a = 2$ et $p \geq 2$, alors $n_1(a-2) = 8(p-1) \geq 3(p+1) - 1 \geq f(v_i)$.
3. Si $p \geq 3$ et $a \geq 5$, alors $n_1(a-2) = 4(p-1)(a-2) = (2p-2)(2a-4) \geq (p+1)(a-1) > f(v_i)$.

Dans tous les cas, nous avons $n_1(a-2) \geq f(v_i)$. Nous avons donc $\sigma(g) \geq \sigma(f)$, comme requis. Cela conclut la preuve. □

considérons le cas des graphes circulants $\overrightarrow{C}(n; 1, a)$ lorsque a divise n.

Lemme 4.12. *Si n, q et a sont trois entiers tels que $n = qa$ et $3 \leq q$, alors $\overrightarrow{C}(n; 1, a)$ admet un β_b-broadcast $(a-1)$-limité si $a - 1 \leq q$, et un β_b-broadcast q-limité si $a - 1 > q$.*

Preuve. Avant de commencer la preuve, notons que le graphe circulant orienté $\overrightarrow{C}(qa; 1, a)$ peut être illustré comme une grille modifiée avec des arcs supplémentaires, ou encore comme une grille infinie créée par des répétitions connectées de la grille $P_a \square P_q$ (Figure 4.7 illustre le graphe circulant $\overrightarrow{C}(qa; 1, a)$, avec $q = 3$ et $a = 7$). Pour un broadcast indépendant f sur $\overrightarrow{C}(qa; 1, a)$, cette illustration nous permet d'avoir une meilleure vue des sommets dominés par f dans le graphe.



(b) représentation de $\overrightarrow{G}$ comme une grille $P_7 \square P_3$

FIGURE 4.7 – Le graphe circulant $\overrightarrow{C}(qa; 1, a)$ avec $q = 3$ et $a = 7$

Soit f un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(qa; 1, a)$. Afin de prouver l'assertion, nous devons établir qu'il existe un broadcast indépendant g sur $C(qa; 1, a)$ tel que $\sigma(g) \geq \sigma(f)$ et, pour chaque sommet $v \in V_g^+$, $g(v) \leq a - 1$ si $a - 1 \leq q$ ou $g(v) \leq q$ si $q < a - 1$. Nous considérons deux cas, selon la valeur maximale entre a et $q - 1$, pour définir l'application g de $V(\overrightarrow{C}(qa; 1, a))$ dans $\{0, 1 \ldots, \min\{a - 1, q\}\}$.

1. $a - 1 \leq q$. Dans ce cas, le résultat découle directement du Lemme 4.11 (La même construction pour la fonction g peut être appliquée ici également).
2. $q < a - 1$.

(a) Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $q+1 \leq f(v_i) \leq 2q-1$, alors posons

$$g(v_j) = \begin{cases} q-1 & \text{si } j = i, \\ d & \text{si } j = i+(q-k)a+k \text{ et } 1 \leq k \leq d+1, \end{cases}$$

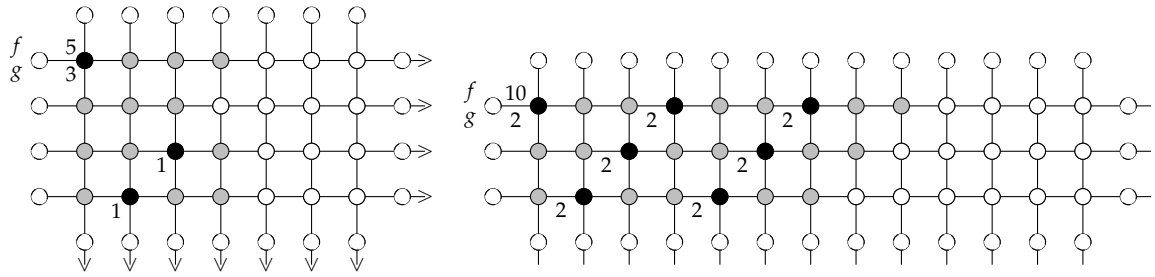
où $d = f(v_i) - q$ (voir Figure 4.8(a)).

(b) Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $pq \leq f(v_i) \leq (p+1)q-1$ et $p \geq 2$, alors nous posons

$$g(v_j) = q-1 \text{ si } j = i \text{ ou } (d \leq j \leq d+(p-2)q \text{ et } (j-d) \equiv 0 \mod (q))$$

où $d = i+(q-k)a+k$ et $1 \leq k \leq q$ (voir Figure 4.8(b))

(c) Pour tout autre sommet v_i, nous laissons $g(v_i) = f(v_i)$



(a) : $f(v_i) = 5$, $q = 4$, $a = 7$ (donc $d = 1$) (b) : $f(v_i) = 10$, $a = 13$, $q = 3$

FIGURE 4.8 – Construction de la fonction g dans la preuve de Lemme 4.12

Nous allons maintenant démontrer que, dans tous les cas, g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(qa;1,a)$. Pour ce faire, nous allons d'abord prouver l'assertion suivante.

Assertion E. *Pour chaque sommet v_j dont la g-valeur est fixée à d dans l'Item 1, ou $q-1$ dans l'Item 2, $d(v_i,v_j) \leq f(v_i) - g(v_j)$.*

Preuve. D'après Proposition 4.9, il est évident que pour chaque sommet dont la g-valeur est fixée à d dans l'Item 1,

$$d(v_i,v_j) = q \leq f(v_i) - g(v_j).$$

Maintenant, dans l'Item 2, en utilisant toujours la Proposition 4.9, nous pouvons facilement voir que le sommet le plus éloigné de v_i parmi les sommets dont la g-valeur pourrait être fixé à 1 est le sommet v_j avec $j = i+q+(p-2)q$, ce qui donne

$$d(v_i,v_j) = q+(p-2)q < pq-(q-1) = f(v_i) - g(v_j).$$

Cela conclut la preuve de l'assertion. □

Avec cette assertion, nous pouvons conclure que dans chaque item et pour chaque sommet g modifié par la fonction g, les sommets g-dominés par ce sommet sont déjà f-dominés

par le sommet v_i. Ainsi, pour prouver que g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(qa;1,a)$, il suffit de montrer que pour chaque paire de sommets g-broadcast v_i et v_j dans un Item, $d(v_i,v_j) > g(v_i)$. De plus, en appliquant à nouveau la formule de distance de Proposition 4.9, nous pouvons facilement voir que dans chaque item $d(v_i,v_j) \geq q-1 \geq g(v_i)$ pour chaque paire de sommets g-broadcast v_i et v_j.

Pour conclure la preuve, nous devons prouver que $\sigma(g) \geq \sigma(f)$. Dans l'Item 1, le nombre de sommets fixés à $q-1$ et à d sont respectivement $n_1 = 1$ et $n_2 = d+1$, ce qui donne

$$n_1 + n_2(d+1) = q - 1 + d(d+1) \geq f(v_i).$$

Dans l'Item 2, le nombre de sommets fixés à $q-1$ est $n_1 = 1+q(p-1)$, ce qui donne

$$n_1(q-1) = q(p-1)(q-1) + q - 1.$$

Étant donné que $q \geq 3$ et $p \geq 2$, nous avons $q(p-1)(q-1)+q-1 \geq 2q(p-1)+q-1 \geq qp+q-1$, et donc

$$n_1(q-1) \geq qp + q - 1 = f(v_i).$$

Nous avons ainsi établi $\sigma(g) \geq \sigma(f)$, comme requis. Cela conclut la preuve.

□

considérons maintenant le cas des graphes circulants $\overrightarrow{C}(qa+r;1,a)$ avec $r = a-1$.

Lemme 4.13. *Si n, q et a sont trois entiers tels que $n = qa+a-1$, alors $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ admet un β_b-broadcast $(a-1)$-limité si $a-1 \leq q$, et un β_b-broadcast q-limité , si $a-1 > q$*

Preuve. Si $q = 2$, le résultat découle directement du Théorème 4.4, qui affirme que $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ admet un β_b broadcast limité par 2. Soit $q \geq 3$. Nous devons démontrer que, pour tout broadcast indépendant f sur $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{C}(n;1,a)$, il est toujours possible de construire un autre broadcast g sur $\overrightarrow{G}$ qui satisfait trois conditions : Premièrement, pour chaque sommet $v \in V_g^+$, $g(v) \leq \min\{a-1,q\}$. Deuxièmement, g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{G}$, et troisièmement, $\sigma(g) \geq \sigma(f)$.

Soit f un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{G}$. Nous considérons deux cas, selon la valeur maximale entre a et $q-1$, pour définir l'application g de $V(\overrightarrow{G})$ dans $\{0,1\ldots,\min\{a-1,q\}\}$.

1. $a-1 \leq q$. Dans ce cas, nous avons $n = q(a+1)-1$, et donc le résultat découle directement du Lemme 4.11 (La même construction pour la fonction g peut être appliquée ici également).
2. $q < a-1$.
   (a) Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $q+1 \leq f(v_i) \leq 2q-1$, alors nous définissions

$$g(v_j) = \begin{cases} q-1 & \text{si } j = i, \\ d & \text{si } j = i+(q-k)a+k \text{ et } 0 \leq k \leq d, \end{cases}$$

   $d = f(v_i) - q$.

(b) Si v_i est un sommet f-broadcast tel que $pq \leq f(v_i) \leq (p+1)q-1$, $p \geq 2$, alors nous définissions

$$g(v_j) = q-1 \text{ si } j = i \text{ ou } (d \leq j \leq d+(p-2)q \text{ et } (j-d) \equiv 0 \mod (q)),$$

où $d = i+(q-k)a+k$ et $0 \leq k \leq q$.

(c) Pour tout autre sommet v_i, nous définissions $g(v_i) = f(v_i)$.

La preuve que g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(qa+a-1;1,a)$ est similaire à celle du Lemme 4.12. □

Lemme 4.14. *Soient n, a, et ℓ trois entiers tels que $4 \leq a$ et $2 \leq \ell \leq a-1$. Si $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ admet un broadcast indépendant ℓ-limité f, et s'il existe un sommet f-broadcast v_i tel que $f(v_i) = \ell - 1$ et $\ell \leq d(v_{i+a-1}, v_i)$, alors les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *Si $\ell = a-1$ et $0 \leq f(v_{i+a-1}) < a-2$, alors il existe un broadcast indépendant g sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ tel que*
$$g(v_i) = g(v_{i+a-1}) = a-2.$$
2. *Si $\ell < a-1$ et $1 \leq f(v_{i+a-1}) < \ell - 1$, alors il existe un broadcast indépendant g sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ tel que*
$$g(v_i) = g(v_{i+a-1}) = \ell - 1.$$

Preuve. Pour démontrer cette proposition, nous devons simplement montrer que pour tout broadcast indépendant f sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, s'il existe un sommet $v_i \in V_f^+$ tel que $f(v_i) = \ell - 1$ et $\ell \leq d(v_{i+a-1}, v_i)$, alors il existe un broadcast indépendant g sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ tel que $g(v_i) = g(v_{i+a-1}) = \ell - 1$ et $\sigma(g) \geq \sigma(f)$. Soit f un broadcast indépendant ℓ-limité sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, où $f(v_i) = \ell - 1$ et $\ell \leq d(v_{i+a-1}, v_i)$. Nous définissions la fonction g de $V(\overrightarrow{C}(n;1,a))$ vers $\{0,1,\ldots,\ell\}$ comme suit.

1. $\ell = a-1$.
Soit $f(v_{i+a-1}) = p$ et $f(v_{i+(p+2)a-1}) = q$, tels que $0 \leq p < a-2$ et $0 \leq q \leq a-2$. Nous considérons deux sous-cas, selon la valeur de q.

(a) Si $0 \leq q \leq a-3-p$, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} a-2 & \text{si } j = i, \\ q+p+1 & \text{si } j = i+a-1, \\ 0 & \text{si } j = i+(p+2)a-1. \end{cases}$$

Notons que les sommets dominés par le sommet v_{i+a-1} sont déjà dominés par v_i, v_{i+a-1} et $v_{i+(p+2)a-1}$, ce qui implique que la fonction g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ avec un coût $\sigma(g) > \sigma(f)$.

(b) Si $a-2-p \leq q \leq a-2$, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} a-2 & \text{si } j = i \text{ ou } j = i+a-1, \\ 0 & \text{si } j = i+(p+2)a-1, \\ q-(a-2-p) & \text{si } j = i+(p+2)a+(a-3-p). \end{cases}$$

Dans ce cas, les sommets g-dominés par le sommet v_{i+a-1} sont déjà f-dominés par v_i, v_{i+a-1} et $v_{i+(p+2)a-1}$. De plus, le sommet $v_{i+(p+2)a+(a-3-p)}$ n'est f-dominé que par $v_{i+(p+2)a-1}$, car le sommet $v_{i+(p+1)a+(a-3-p)}$ est f-dominé par v_i. De plus, comme

$$d(v_{i+(p+2)a-1}, v_{i+(p+2)a+(a-3-p)}) = f(v_{i+(p+2)a-1}) - g(i+(p+2)a+(a-3-p)),$$

alors les sommets g-dominés par le sommet $v_{i+(p+2)a+(a-3-p)}$ sont déjà f-dominés par $v_{i+(p+2)a-1}$. Cela implique que g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, avec un coût $\sigma(g) = \sigma(f)$.

2. $\ell < a-1$.
Soit $f(v_{i+a-1}) = p$ et $f(v_{i+(p+2)a-1}) = q$, tels que $0 \leq p < \ell-1$ et $0 \leq q \leq \ell-1$. Maintenant, nous considérons trois sous-cas, selon la valeur de q.

(a) Si $0 < p < \ell-1$ et $0 \leq q \leq \ell-p-2$, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} \ell-1 & \text{si } j = i, \\ q+p+1 & \text{si } j = i+a-1, \\ 0 & \text{si } j = i+(p+2)a-1. \end{cases}$$

Notons que les sommets g-dominés par le sommet v_{i+a-1} sont déjà f-dominés par v_i, v_{i+a-1} et $v_{i+(p+2)a-1}$, ce qui implique que g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, avec un coût $\sigma(g) > \sigma(f)$.

(b) Si $0 < p < \ell-1$ et $\ell-p+1 \leq q \leq \ell$, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} \ell-1 & \text{si } j = i \text{ ou } j = i+a-1, \\ 0 & \text{si } j = i+(p+2)a-1, \\ q-(\ell-1-p) & \text{si } j = i+(p+2)a+(a-3-p). \end{cases}$$

Les sommets g-dominés par le sommet v_{i+a-1} sont déjà f-dominés par v_i, v_{i+a-1}, et $v_{i+(p+2)a-1}$. Puisque le sommet $v_{i+(p+1)a+(a-3-p)}$ est f-dominé par v_i, le sommet $v_{i+(p+2)a+(a-3-p)}$ n'est f-dominé que par $v_{i+(p+2)a-1}$. De plus, comme

$$d(v_{i+(p+2)a-1}, v_{i+(p+2)a+(a-3-p)}) = f(v_{i+(p+2)a-1}) - g(i+(p+2)a+(a-3-p)),$$

alors les sommets g-dominés par le sommet $v_{i+(p+2)a+(a-3-p)}$ sont déjà f-dominés par $v_{i+(p+2)a-1}$. Cela implique que g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, avec un coût $\sigma(g) = \sigma(f)$.

(c) Si $p = 0$ et $q \leq \ell - 1$, alors nous distinguons deux sous-cas selon que le sommet v_{i+a-1} est f-dominé ou non.

i. Si v_{i+a-1} n'est dominé par aucun sommet f, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} \ell & \text{si } j = i, \\ q+1 & \text{si } j = i+a-1, \\ 0 & \text{si } j = i+2a-1. \end{cases}$$

Dans ce cas, les sommets g-dominés par le sommet v_{i+a-1} sont déjà f-dominés par v_i et v_{i+2a-1}, ce qui implique que la fonction g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, avec un coût $\sigma(g) > \sigma(f)$.

ii. Si v_{i+a-1} est dominé par un sommet f avec $i < k < i+a$, alors nous posons

$$g(v_j) = \begin{cases} \ell & \text{si } j = i, \\ f(v_k) - 1 & \text{si } j = k, \\ q+1 & \text{si } j = i+a-1, \\ 0 & \text{si } j = i+2a-1. \end{cases}$$

Nous pouvons facilement montrer que les sommets g-dominés par le sommet v_{i+a-1} sont déjà f-dominés par v_i et v_{i+2a-1}. De plus, puisque le sommet v_{i+a-1} est f-dominé uniquement par v_k, $d(v_k, v_{i+a-1}) = f(v_k)$, car sinon, v_k dominerait v_{i+2a-1}, ce qui contredirait le fait que f est un broadcast indépendant. Par conséquent, le sommet v_{i+a-1} n'est pas dominé par v_k dans le broadcast g. Ainsi, nous pouvons conclure que g est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, avec un coût $\sigma(g) = \sigma(f)$. Comme $g(v_i) = \ell$, $g(v_{i+a-1}) > 0$, et selon les deux cas (a) et (b), il existe un broadcast indépendant h sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ tel que $h(v_i) = h(v_{i+a-1}) = \ell - 1$ et $\sigma(h) \geq \sigma(f)$.

Cela conclut la preuve. □

4.3 Bornes générales sur le nombre d'indépendance broadcast sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$

Après avoir identifié dans la section précédente quelques classes de graphes circulants orientés $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ pour lesquels il existe des broadcasts indépendants limités par $a-1$ ou q, nous entamons maintenant une exploration de bornes du coût des broadcasts indépendants.

On considère le cas où le graphe admet un broadcast indépendant $(a-1)$-limité , et le cas où il admet un broadcast indépendant q-limité .

4.3.1 Bornes pour les broadcast indépendants $(a-1)$-limité s

Nous introduisons d'abord quelques notations et un lemme utile dans le cas où $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ admet un broadcast indépendant limité par $(a-1)$. Soit f un broadcast indépendant limité par $(a-1)$ sur $\overrightarrow{G}$. Nous définissions :

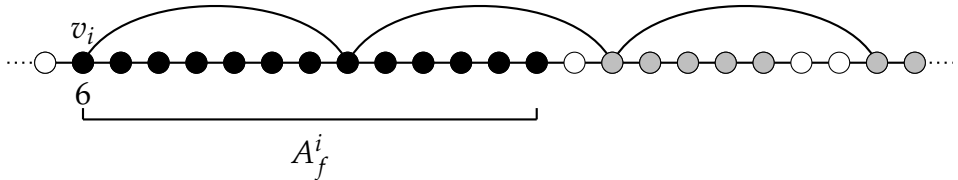
$$V_f^1 = \{v_i \in V_f \mid f(v_i) = a-1\} \quad \text{et} \quad V_f^2 = \{v_i \in V_f \mid f(v_i) \leq a-2\}.$$

En particulier, si f est limité par $(a-1)$, alors $V_f^+ = V_f^1 \cup V_f^2$.

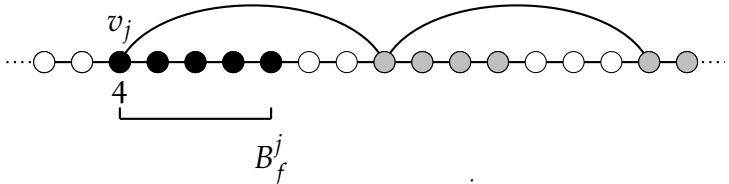
Pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$ et $v_j \in V_f^2$, nous définissions les ensembles :

$$A_f^i = \{v_{i+k},\ 0 \leq k \leq 2a-2\} \text{ et } B_f^j = \{v_{j+k},\ 0 \leq k \leq f(v_j)\}.$$

La définition de ces deux ensembles est illustrée dans la Figure 4.9.



Les sommets de l'ensemble A_f^i, $f(v_i) = 6$, $a = 7$



Les sommets de l'ensemble B_f^j, $f(v_j) = 4$, $a = 7$

FIGURE 4.9 – Les ensembles A_f^i et B_f^j

Ces ensembles ont les propriétés suivantes :

Lemme 4.15. *Pour chaque broadcast indépendant $(a-1)$-limité f sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ avec $4 \leq a$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$, $|A_f^i| = 2a-1$,*
2. *Pour chaque sommet $v_j \in V_f^2$, $|B_f^j| = f(v_j)+1$,*

3. $\sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| \leq n$.

Preuve. Les deux premiers items découlent directement de la définition des ensembles A_f^i et B_f^j. Il découle également de la définition que $A_f^i \cap A_f^{i'} = \emptyset$ pour toute paire de sommets distincts v_i et $v_{i'}$ dans V_f^1, car sinon nous aurions $d(v_j, v_{j'}) \leq \max\{f(v_j), f(v_{j'})\} = a-1$, ce qui contredirait le fait que f est un broadcast indépendant. De manière similaire, nous avons $B_f^j \cap B_f^{j'} = \emptyset$ pour tous deux sommets distincts v_j et $v_{j'}$ dans V_f^2. Le même argument donne $A_f^i \cap B_f^j = \emptyset$ pour toute paire de sommets $v_i \in V_f^1$ et $v_j \in V_f^2$. Avec ces trois intersections vides, l'Item 3 est également vérifié. Cela termine la preuve. □

Proposition 4.16. *Soient n, a, q et r quatre entiers tels que $n = qa + r$. Si $4 \leq a \leq q + r + 1$ et $0 \leq r \leq a-2$, ou $a \leq q+1$ et $r = a-1$, alors, pour tout broadcast indépendant $(a-1)$-limité f sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, nous avons :*

$$\sigma(f) \leq n - \left|V_f^+\right| - (a-1)\left|V_f^1\right|.$$

Preuve. Soit f un broadcast indépendant $(a-1)$-limité sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, qui existe d'après le Lemme 4.11. À partir du Lemme 4.15, nous obtenons :

$$\sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| = 2f(V_f^1) + \left|V_f^1\right| + f(V_f^2) + \left|V_f^2\right| \leq n,$$

ce qui donne

$$f(V_f^+) = f(V_f^1) + f(V_f^2) \leq n - \left|V_f^+\right| - f(V_f^1).$$

Maintenant, puisque $f(v_i) = a-1$ pour tout $v_i \in V_f^1$, nous avons $f(V_f^1) = (a-1)\left|V_f^1\right|$, et donc

$$\sigma(f) = f(V_f^+) \leq n - \left|V_f^+\right| - (a-1)\left|V_f^1\right|.$$

Cela achève la preuve. □

Proposition 4.17. *Soient n, a, q et r quatre entiers tels que $n = qa + r$. Si $4 \leq a \leq q + r + 1$ et $0 \leq r \leq a-2$, ou $a \leq q+1$ et $r = a-1$, alors, pour tout broadcast indépendant $(a-1)$-limité f sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, nous avons*

$$\sigma(f) \leq \left\lfloor \left(\frac{a-2}{a-1}\right)\left(n - \left|V_f^1\right|\right) \right\rfloor - (a-3)\left|V_f^1\right|.$$

Preuve. Soit f un broadcast indépendant $(a-1)$-limité sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$. Pour chaque sommet $v_j \in V_f^2$, nous avons $f(v_j) \leq a-2$ et $|B_f^j| = f(v_j) + 1$, ce qui implique

$$\frac{|B_f^j|}{f(v_j)} = \frac{f(v_j)+1}{f(v_j)} = 1 + \frac{1}{f(v_j)} \geq 1 + \frac{1}{a-2} = \frac{a-1}{a-2},$$

ce qui donne

$$|B_f^j| \geq \left(\frac{a-1}{a-2}\right) f(v_j),$$

et donc

$$\sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| \geq \left(\frac{a-1}{a-2}\right) f(V_f^2).$$

À partir du Lemme 4.15, nous obtenons

$$n \geq \sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| \geq 2f(V_f^1) + \left|V_f^1\right| + \left(\frac{a-1}{a-2}\right) f(V_f^2),$$

ce qui donne

$$n \geq \left(\frac{a-1}{a-2}\right) f(V) + \left(\frac{a-3}{a-2}\right) f(V_f^1) + \left|V_f^1\right|.$$

Enfin, puisque $f(V_f^1) = (a-1)\left|V_f^1\right|$, nous obtenons

$$\left(\frac{a-1}{a-2}\right) f(V) \leq n - \left|V_f^1\right| - \left(\frac{a-3}{a-2}\right)(a-1)\left|V_f^1\right|,$$

ce qui donne

$$f(V) \leq \left(\frac{a-2}{a-1}\right)\left(n - \left|V_f^1\right|\right) - (a-3)\left|V_f^1\right|,$$

et donc

$$\sigma(f) = f(V) \leq \left\lfloor \left(\frac{a-2}{a-1}\right)\left(n - \left|V_f^1\right|\right) \right\rfloor - (a-3)\left|V_f^1\right|.$$

Cela achève la preuve. □

Lemme 4.18. *Soient n, q, k et s quatre entiers tels que $n = k(a-1)+s$, $a \geq 4$ et $0 \leq s \leq \min\{a,k\}-2$, alors $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ admet un β_b-broadcast $(a-1)$-limité .*

Preuve. Soit $n = ka - (k-s)$ avec $a \geq 4$ et $0 \leq s \leq \min\{a,k\}-2$. Nous examinons deux cas, selon de la valeur maximale entre a et $k-s$.

1. $k-s \leq a$. On peut écrire n comme $n = qa + r$, où $q = k-1$ et $r = (a-k+s)$. Puisque $k \geq 3$ et $k-s \geq 2$, nous obtenons $q \geq 2$, $0 \leq r \leq a-2$ et $a \leq q+r+1$. D'après le Lemme 4.11, $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ admet un β_b-broadcast indépendant $(a-1)$-limité .
2. $a < k-s$. Soit $k-s = pa+t$, avec $1 \leq p$ et $0 \leq t \leq a-1$, ce qui donne

$$n = ka - (k-s) = (k-p-1)a + a - t.$$

Maintenant, nous examinons trois cas, selon la valeur de t

(a) Si $t = 0$, alors $n = (k-p)a$, avec $p \geq 2$ car sinon $k - s = a$, ce qui est impossible. Puisque $a \geq 4$, alors $k \geq pa \geq 4p$, et ainsi $k - p \geq 3p \geq 6$, ce qui nous permet de noter $n = qa$ avec $q = k - p$. De plus, puisque $2 \leq p$, $4 \leq a$ et $k = pa + s$, alors, $a \leq p(a-1) \leq k - p$, et alors $a \leq q$. D'après le Lemme 4.12, $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ admet un β_b-broadcast indépendant $(a-1)$-limité .

(b) Si $t = 1$, alors $n = (k-p-1)a + a - 1$, avec $p \geq 1$. Puisque $a \geq 4$, alors $k \geq pa + 1 \geq 4p + 1$, et ainsi $k - p - 1 \geq 3p \geq 3$, cela nous permet également de noter $n = qa + r$ avec $q = (k-p-1)$ et $r = a - 1$. De plus, puisque $1 \leq p$, $4 \leq a$, et $k = pa + s$ alors, $a \leq p(a-1) + 1 \leq k - p$, et donc $a \leq q + 1$. D'après le Lemme 4.13, $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ admet un β_b-broadcast indépendant $(a-1)$-limité .

(c) Si $2 \leq t \leq a - 1$, alors nous pouvons écrire n comme $n = qa + r$, où $q = k - p - 1$, $r = a - t$ et $0 \leq r \leq a - 2$. Puisque $p \geq 1$ et $a \geq 4$, alors $k \geq pa + 2 \geq 4p + 2 \geq p + 5$, et donc $k - p - 1 > 3$. De plus, nous avons $q + r + 1 = k - p + a - t \geq p(a-1) + a \geq a$, alors $a \leq q + r + 1$. D'après le Lemme 4.11, $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ admet un indépendant β_b-broadcast $(a-1)$-limité .

□

Proposition 4.19. *Soient n, a, k et s quatre entiers tels que $n = k(a-1) + s$ et $a \geq 4$. Si $0 \leq s \leq \min\{a, k\} - 2$, alors*

1. $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq k(a-2)$, *pour $s = 0$,*
2. $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq (k-1)(a-2) + 1$, *pour $s = 1$,*
3. $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq (k-s)(a-2) + (s-1)(s+1)$, *pour $s \geq 2$.*

Preuve. D'après le Lemme 4.18, $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ admet un β_b-broadcast indépendant $(a-1)$-limité . Nous construisons maintenant une fonction f de $V(\overrightarrow{C}(n;1,a))$ vers $\{0, 1, \ldots, a-1\}$, basée sur le résultat du Lemme 4.14, en fixant le coût à $a - 2$ pour le sommet v_0. Nous examinons trois cas, selon de la valeur de s.

1. $s = 0$. On pose $f(v_i) = a - 2$ si $i \equiv 0 \pmod{a-1}$, et $f(v_i) = 0$ sinon. D'après la Proposition 4.9, pour chaque paire de sommets $v_i, v_j \in V_f^+$, $d(v_i, v_j) = a - 1$, Par conséquent, f est clairement un β_b-broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$.

2. $s = 1$. On pose

$$f(v_i) = \begin{cases} a-2 & \text{si } i = p(a-1) \text{ et } 0 \leq p \leq k-3, \\ a-1 & \text{si } i = (k-2)(a-1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la Proposition 4.9, pour chaque paire de sommets $v_i, v_j \in V_f^+$ tels que $v_i \neq v_{(k-2)(a-1)}$, $d(v_i, v_j) = a - 1 > f(v_i)$ et $d(v_{(k-2)(a-1)}, v_i) = a > f(v_{(k-2)(a-1)})$. Par conséquent, f est un β_b-broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$.

3. $2 \leq s \leq a-1$. On pose

$$f(v_i) = \begin{cases} a-2 & \text{si } i = p(a-1) \text{ et } 0 \leq p \leq k-s-1, \\ s-1 & \text{si } i = p(a-1) \text{ et } k-s \leq p \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la Proposition 4.9, pour chaque paire de sommets $v_i, v_j \in V_f^+$ tels que $0 \leq i \leq (k-s-1)(a-1)$, $d(v_i,v_j) = a-1 > f(v_i)$, et pour chaque paire de sommets $v_i, v_j \in V_f^+$ tels que $(k-s)(a-1) \leq i \leq k(a-1)$, $d(v_i,v_j) = s-1 > f(v_i)$. Par conséquent, f est un β_b-broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$.

□

4.3.2 Bornes pour les broadcast indépendants q-limités

Dans cette section, nous considérons les graphes circulants orientés $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{C}(n;1,a)$ tels que $n = qa$ ou $n = qa + a - 1$, avec $3 \leq q+1 < a$. D'après le Lemme 4.12 et le Lemme 4.13, $\overrightarrow{G}$ admet un β_b-broadcast indépendant q-limité , qu'on notera f. Nous définissions

$$V_f^1 = \{v_i \in V_f \mid f(v_i) = q\},$$

et

$$V_f^2 = \{v_i \in V_f \mid f(v_i) \leq q-1\}.$$

En particulier, si f est limité e par q, alors $V_f^+ = V_f^1 \cup V_f^2$.
Nous distinguons deux cas, selon de la valeur de n.

1. Si $n = qa$, alors, pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$ et $v_j \in V_f^2$, nous définissions

$$A_f^i = \{v_{i+k}, \text{ avec } 0 \leq k \leq q \text{ ou } (k = i + pa + q - p \text{ et } 1 \leq p \leq q-1)\}$$

et

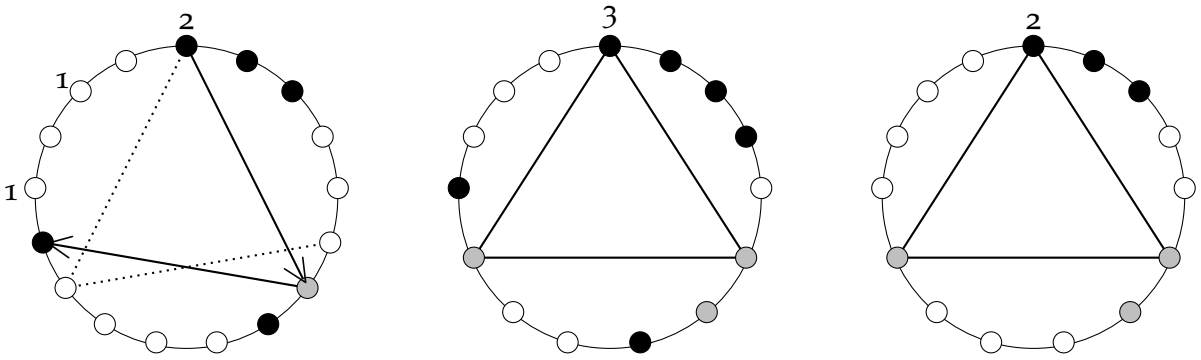
$$B_f^j = \{v_{j+k},\ 0 \leq k \leq f(v_j)\}.$$

2. Si $n = qa + a - 1$, alors, pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$ et $v_j \in V_f^2$, nous définissions

$$A_f^i = \{v_{i+k}, \text{ avec } 0 \leq k \leq q \text{ ou } (k = i + pa + q - p \text{ et } 1 \leq p \leq q)\}$$

et

$$B_f^j = \{v_{j+k},\ 0 \leq k \leq f(v_j)\}.$$



Les sommets de l'ensemble A_f^i avec $n = qa + q - 1$, $f(v_i) = 2$, $q = 2$ et $a = 6$

Les sommets de l'ensemble A_f^i avec $n = qa$, $f(v_i) = 3$, $q = 3$ et $a = 5$

Les sommets de l'ensemble B_f^j avec $n = qa$, $f(v_i) = 2$ $q = 3$ et $a = 5$

FIGURE 4.10 – Les ensembles A_f^i et B_f^j

La définition de ces deux ensembles est illustrée dans la Figure 4.10.

Ces ensembles possèdent les propriétés suivantes.

Lemme 4.20. *Pour chaque β_b-broadcast indépendant q-limité f sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, les propriétés suivantes sont vérifiéess.*

1. *Pour chaque sommet $v_i \in V_f^1$, nous avons*

$$|A_f^i| = \begin{cases} 2q & si\ n = qa, \\ 2q+1 & si\ n = qa + a - 1. \end{cases}$$

2. *Pour chaque sommet $v_j \in V_f^2$, $|B_f^j| = f(v_j) + 1$.*
3. $\sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| \leq n$.

Preuve. Les deux premiers items suivent directement de la définition des ensembles A_f^i et B_f^j. Il découle également de la définition que $A_f^i \cap A_f^{i'} = \emptyset$ pour chaque deux sommets distincts v_i et $v_{i'}$ dans V_f^1. De même, de la définition, nous avons $B_f^j \cap B_f^{j'} = \emptyset$ pour chaque deux sommets distincts v_j et $v_{j'}$ dans V_f^2, Le même argument donne $A_f^i \cap B_f^j = \emptyset$ pour chaque deux sommets $v_i \in V_f^1$ et $v_j \in V_f^2$. Toutes ces propriétés réunies impliquent que l'item est également vérifié. □

Proposition 4.21. *Si n, a, q et r sont quatre entiers tels que $n = qa + r$, $r \in \{0, a-1\}$ et $q < a - 1$ alors, pour chaque β_b-broadcast indépendant f sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, nous avons*

$$\sigma(f) = f(V_f^+) \leq \begin{cases} n - \left|V_f^2\right| - q\left|V_f^1\right| & si\ r = 0, \\ n - \left|V_f^+\right| - q\left|V_f^1\right| & si\ r = a-1. \end{cases}$$

Preuve. Soit f un β_b-broadcast indépendant q-limité sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, ce qui existe d'après le Lemme 4.13 et le Lemme 4.12. Nous considérons deux cas, selon de la valeur de r.

1. $r = 0$. Du Lemme 4.20, nous avons

$$\sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| = 2f(V_f^1) + f(V_f^2) + \left|V_f^2\right| \leq n,$$

ce qui donne

$$f(V_f^+) = f(V_f^1) + f(V_f^2) \leq n - \left|V_f^2\right| - f(V_f^1).$$

Maintenant, puisque $f(v_i) = q$ pour chaque $v_i \in V_f^1$, nous avons $f(V_f^1) = q\left|V_f^1\right|$, et donc

$$\sigma(f) = f(V_f^+) \leq n - \left|V_f^2\right| - q\left|V_f^1\right|.$$

2. $r = a - 1$. Du Lemme 4.20, nous avons

$$\sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| = 2f(V_f^1) + \left|V_f^1\right| + f(V_f^2) + \left|V_f^2\right| \leq n,$$

ce qui donne

$$f(V_f^+) = f(V_f^1) + f(V_f^2) \leq n - \left|V_f\right| - f(V_f^1).$$

Maintenant, puisque $f(v_i) = q$ pour chaque $v_i \in V_f^1$, nous avons $f(V_f^1) = q\left|V_f^1\right|$, et donc

$$\sigma(f) = f(V_f^+) \leq n - \left|V_f^+\right| - q\left|V_f^1\right|.$$

Cela complète la preuve. □

Proposition 4.22. *Si n, a, q et r sont quatre entiers tels que $n = qa + r$, $r \in \{0, a-1\}$ et $q < a - 1$ alors, pour chaque β_b-broadcast indépendant f sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, nous avons*

$$\sigma(f) = f(V_f^+) \leq \begin{cases} \left\lfloor \left(\frac{q-1}{q}\right) n \right\rfloor - (q-2)\left|V_f^1\right|, & \text{si } r = 0, \\ \left\lfloor \left(\frac{q-1}{q}\right) \left(n - \left|V_f^1\right|\right) \right\rfloor - (q-2)\left|V_f^1\right|, & \text{si } r = a-1. \end{cases}$$

Preuve. Soit f un β_b-broadcast indépendant q-limité sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, ce qui existe d'après le Lemme 4.13 et le Lemme 4.12. Pour chaque vertex $v_j \in V_f^2$, nous avons $f(v_j) \leq q - 1$ et $|B_f^j| = f(v_j) + 1$. Alors,

$$\frac{|B_f^j|}{f(v_j)} = \frac{f(v_j)+1}{f(v_j)} = 1 + \frac{1}{f(v_j)} \geq 1 + \frac{1}{q-1} = \frac{q}{q-1},$$

ce qui donne

$$|B_f^j| \geq \left(\frac{q}{q-1}\right) f(v_j),$$

et donc

$$\sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| \geq \left(\frac{q}{q-1}\right) f(V_f^2).$$

Nous considérons deux cas, selon de la valeur de r.

1. $r = 0$. Du Lemme 4.20, nous avons

$$n \geq \sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| \geq 2f(V_f^1) + \left(\frac{q}{q-1}\right) f(V_f^2),$$

ce qui donne

$$n \geq \left(\frac{q}{q-1}\right) f(V) + \left(\frac{q-2}{q-1}\right) f(V_f^1).$$

Puisque $f(V_f^1) = q\left|V_f^1\right|$, nous obtenons

$$\left(\frac{q}{q-1}\right) f(V) \leq n - \left(\frac{q-2}{q-1}\right) q\left|V_f^1\right|,$$

ce qui donne

$$f(V) \leq \left(\frac{q-1}{q}\right) n - (q-2)\left|V_f^1\right|,$$

et donc

$$\sigma(f) = f(V) \leq \left\lfloor \left(\frac{q-1}{q}\right) n \right\rfloor - (q-2)\left|V_f^1\right|.$$

2. $r = a - 1$. Du Lemme 4.20, nous avons

$$n \geq \sum_{v_i \in V_f^1} |A_f^i| + \sum_{v_j \in V_f^2} |B_f^j| \geq 2f(V_f^1) + \left|V_f^1\right| + \left(\frac{q}{q-1}\right) f(V_f^2),$$

ce qui donne

$$n \geq \left(\frac{q}{q-1}\right) f(V) + \left(\frac{q-2}{q-1}\right) f(V_f^1) + \left|V_f^1\right|.$$

Enfin, puisque $f(V_f^1) = q\left|V_f^1\right|$, nous obtenons

$$\left(\frac{q}{q-1}\right) f(V) \leq n - \left|V_f^1\right| - \left(\frac{q-2}{q-1}\right) q\left|V_f^1\right|,$$

ce qui donne

$$f(V) \leq \left(\frac{q-1}{q}\right)\left(n - \left|V_f^1\right|\right) - (q-2)\left|V_f^1\right|,$$

et donc

$$\sigma(f) = f(V) \leq \left\lfloor \left(\frac{q-1}{q}\right)\left(n - \left|V_f^1\right|\right) \right\rfloor - (q-2)\left|V_f^1\right|.$$

Cela complète la preuve. □

Proposition 4.23. *Si n, a et q sont trois entiers avec $n = qa$ et $3 \leq q < a-1$. Si $a = kq+1+s$ avec $k \geq 1$ et $0 \leq s \leq q-1$, alors nous avons*

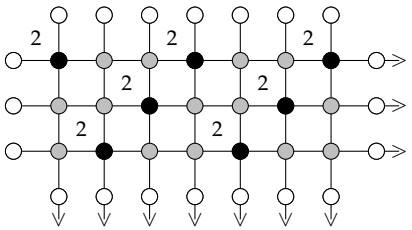
1. $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq a(q-1)$, *pour* $s = 0$,
2. $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq (a-1)(q-1)+1$, *pour* $s = 1$,
3. $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq (a-s)(q-1)+s(s-1)$, *pour* $s \geq 2$.

Preuve. D'après le Lemme 4.12 et comme $q+1 < a$, $\overrightarrow{C}(qa;1,a)$ admet un β_b-broadcast indépendant q-limité . Grâce au Lemme 4.14, nous construisons un broadcast f de $V(\overrightarrow{C}(qa;1,a))$ vers $\{0,1,\ldots,q\}$. Nous considérons trois cas, selon de la valeur de s.

1. $s = 0$. Nous posons

$$f(v_i) = \begin{cases} q-1 & \text{si } i = \alpha q \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq a-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(voir Figure 4.11 pour le cas $a = 7$, $q = 3$ et $k = 2$).



$a = 7, q = 3, k = 2, s = 0$

FIGURE 4.11 – Construction de la fonction f pour le cas $a = 7$ et $q = 3$

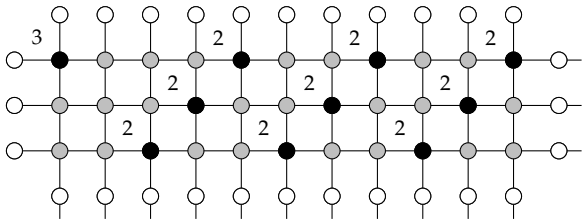
De la Proposition 4.9, pour chaque paire de sommets g-broadcast $v_i \neq v_j$, nous avons $d(v_i, v_j) = q$, ce qui implique que f est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(qa;1,a)$, avec un coût

$$\sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v) = a(q-1) \leq \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)).$$

2. $s = 1$. On pose

$$f(v_i) = \begin{cases} q & \text{si } i = 0, \\ q-1 & \text{si } i = \alpha(a-1) - \beta q \text{ avec } 1 \leq \alpha \leq q \text{ et } 0 \leq \beta \leq k-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Voir Figure 4.12 pour le cas $a = 11$, $q = 3$, et $k = 3$)



$a = 11, q = 3, k = 3, s = 1$

FIGURE 4.12 – Construction de la fonction f pour le cas $a = 11$ et $q = 3$

De la Proposition 4.9, pour chaque paire de sommets g-broadcast $v_i \neq v_j$, nous avons $d(v_i, v_j) \geq f(v_i) + 1$, ce qui implique que f est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(qa;1,a)$, avec un coût

$$\sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v) = q + kq(q-1) = (a-1)(q-1) + 1 \leq \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)).$$

3. $2 \leq s \leq q-1$. On pose

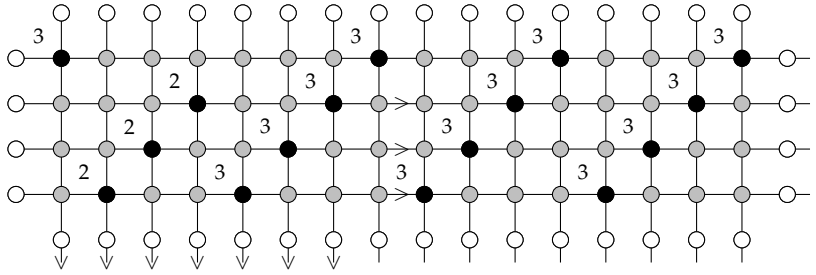
$$f(v_i) = \begin{cases} q-1 & \text{si } i = 0 \text{ ou } i = \alpha(a-1) - \beta q \text{ avec } 1 \leq \alpha \leq q \text{ et } 0 \leq \beta \leq k-1, \\ s-1 & \text{si } i = (q-p)a + p \text{ avec } 1 \leq p \leq s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Voir Figure 4.13 pour le cas $a = 16$, $q = 4$, $k = 3$, et $s = 3$)
De la Proposition 4.9, pour chaque paire de sommets g-broadcast $v_i \neq v_j$, nous avons $d(v_i, v_j) \geq f(v_i) + 1$, ce qui implique que f est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(qa;1,a)$, avec un coût

$$\sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v) = (kq+1)(q-1) + s(s-1) = (a-s)(q-1) + s(s-1) \leq \beta_b(G).$$

Cela complète la preuve.

□



$a = 16, q = 4, k = 3, s = 3$

FIGURE 4.13 – Construction de la fonction f pour le cas $a = 16$ et $q = 4$

Proposition 4.24. *Soient n, a et q trois entiers tels que $n = qa + a - 1$, $3 \leq q < a - 1$. Si $a = kq + 1 + s$ avec $1 \leq k$ et $0 \leq s \leq q - 1$, alors*

1. $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq (a+k)(q-1)$, *pour $s = 0$,*
2. $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq (a+k-1)(q-1)+1$, *pour $s = 1$,*
3. $\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq (a+k-s)(q-1)+(s-1)(s+1)$, *pour $s \geq 2$.*

Preuve. D'après le Lemme 4.13 et puisque $q+1 < a$, $\overrightarrow{C}(qa+a-1;1,a)$ admet un broadcast indépendant limité par q. Grâce au Lemme 4.14, nous construisons une application f de $V(\overrightarrow{C}(qa+a-1;1,a))$ dans $\{0,1,\ldots,q\}$. Pour cela, nous considérons trois cas, selon de la valeur de s.

1. $s = 0$. Nous posons

$$f(v_i) = \begin{cases} q-1 & \text{si } i = \alpha q \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la Proposition 4.9, pour chaque paire de sommets g-broadcast $v_i \neq v_j$, $d(v_i, v_j) = q$. Cela implique que f est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, avec un coût

$$\sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v) = (a+k)(q-1) \leq \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)).$$

2. $s = 1$. Nous posons

$$f(v_i) = \begin{cases} q & \text{si } i = 0, \\ q-1 & \text{si } i = \alpha(a-1) - \beta q \text{ avec } 1 \leq \alpha \leq q+1 \text{ et } 0 \leq \beta \leq k-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la Proposition 4.9, pour chaque paire de sommets g-broadcast $v_i \neq v_j$, $d(v_i, v_j) \geq f(v_i) + 1$. Cela implique que f est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, avec un

coût

$$\sigma(f) = \sum_{v \in V_f^+} f(v) = q + k(q+1)(q-1) = (a+k-1)(q-1) + 1 \leq \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)).$$

3. $2 \leq s \leq q-1$. Nous posons

$$f(v_i) = \begin{cases} q-1 & \text{si } i = 0 \text{ ou } i = \alpha(a-1) - \beta q \text{ avec } 1 \leq \alpha \leq q+1 \text{ et } 0 \leq \beta \leq k-1, \\ s-1 & \text{si } i = (q-p)a + p \text{ avec } 0 \leq p \leq s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la Proposition 4.9, pour chaque paire de sommets g-broadcast $v_i \neq v_j$, $d(v_i, v_j) \geq f(v_i) + 1$. Cela implique que f est un broadcast indépendant sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, avec un coût

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \sum_{v \in V_f^+} f(v) = (k(q+1)+1)(q-1) + (s+1)(s-1) \\ &= (a+k-s)(q-1) + (s+1)(s-1) \leq \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)). \end{aligned}$$

Cela complète la preuve. □

4.4 Quelques valeurs exactes

Théorème 4.25. *Si n, a, et k sont trois entiers tels que $n = k(a-1)$, $a \geq 4$, et $k \geq 3$, alors*

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = \beta_b(C(n;1,-(n-a))) = (a-2)k.$$

Preuve. D'après la Proposition 4.19, $\overrightarrow{C}((a-1)k;1,a)$ admet un broadcast indépendant $(a-1)$-limité , ce qui implique

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq (a-2)k.$$

De plus, D'après la Proposition 4.17, nous obtenons que

$$\sigma(f) \leq \left\lfloor \left(\frac{a-2}{a-1}\right)\left(n - \left|V_f^1\right|\right) \right\rfloor - (a-3)\left|V_f^1\right| \leq \left\lfloor \left(\frac{a-2}{a-1}\right) n \right\rfloor,$$

pour tout broadcast indépendant $(a-1)$-limité sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, ce qui donne

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \leq (a-2)k.$$

Finalement, par l'Observation 4.2, nous obtenons

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,-n+a)) = (a-2)k.$$

Ceci complète la preuve. □

Théorème 4.26. *Si n, a, q et k sont quatre entiers tels que $n = qa$, $3 \leq q$ et $4 \leq a$, alors*

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,-(q-1)a)) = \begin{cases} (q+k)(a-2) & \text{si } q = k(a-1),\ k \geq 1, \\ a(q-1) & \text{si } a = kq+1,\ k \geq 2. \end{cases}$$

Preuve. Nous considérons séparément les deux cas.

1. $q = k(a-1)$ avec $k \geq 1$. Alors $a \leq q+1$. D'après le Lemme 4.12, $\overrightarrow{C}(qa;1,a))$ admet un f-broadcast indépendant limité par $(a-1)$. De plus, comme $n = ka(a-1)$ et D'après le Théorème 4.25 nous obtenons

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(qa;1,a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(qa;1,-(q-1)a)) = ka(a-2) = (q+k)(a-2).$$

2. Si $a = kq+1$ avec $k \geq 2$, alors $q+1 < a$. D'après le Lemme 4.12, $\overrightarrow{C}(n;1,a))$ admet un f-broadcast indépendant limité par q. Maintenant, D'après la Proposition 4.23, nous avons
$$\beta_b(\overrightarrow{C}(q(kq+1);1,a)) \geq a(q-1).$$
De plus, D'après la Proposition 4.22 nous obtenons que
$$\sigma(f) = f(V) \leq \left\lfloor \left(\frac{q-1}{q}\right)\left(n - \left|V_f^1\right|\right)\right\rfloor - (q-2)\left|V_f^1\right|,$$
pour tout f-broadcast indépendant limité par q sur $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, ce qui implique
$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \leq a(q-1).$$
Finalement, par l'Observation 4.2, nous obtenons
$$\beta_b(\overrightarrow{C}(qa;1,a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(qa;1,-(q-1)a)) = a(q-1).$$

Ceci complète la preuve. □

Théorème 4.27. *Si n, a, q et k sont quatre entiers tels que $n = qa+a-1$, $3 \leq q$ et $4 \leq a$, alors*

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,-(qa-1)) = \begin{cases} (q+k+1)(a-2) & \text{si } q = k(a-1),\ k \geq 1, \\ (a+k)(q-1) & \text{si } a = kq+1,\ k \geq 2. \end{cases}$$

Preuve. Soit $n = qa + a - 1$. Nous considérons les deux cas séparément.

1. Si $q = k(a-1)$ avec $k \geq 1$, alors $a \leq q+1$. D'après le Lemme 4.13, $\overrightarrow{C}(n;1,a))$ admet un f-broadcast indépendant limité par $(a-1)$. De plus, puisque $n = (ka+1)(a-1)$ et D'après le Théorème 4.25 nous obtenons

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) = (ka+1)(a-2) = (q+k+1)(a-2).$$

2. Si $a = kq+1$ avec $k \geq 2$, alors $q+1 < a$. D'après le Lemme 4.13, $\overrightarrow{C}(q(n;1,a))$ admet un f-broadcast indépendant limité par q. Maintenant, d'après la Proposition 4.24, nous avons

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \geq (a+k)(q-1).$$

   De plus, d'après la Proposition 4.22, nous obtenons que

$$\sigma(f) = f(V) \leq \left\lfloor \left(\frac{q-1}{q}\right)\left(n - \left|V_f^1\right|\right)\right\rfloor - (q-2)\left|V_f^1\right|,$$

   pour tout f-broadcast indépendant limité par q sur $\overrightarrow{C}(q(n;1,a))$, ce qui implique

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(n;1,a)) \leq (a+k)(q-1).$$

   Finalement, par l'Observation 4.2, nous obtenons

$$\beta_b(\overrightarrow{C}(q(n;1,a)) = \beta_b(\overrightarrow{C}(q(n;1,a-n)) = (a+k)(q-1).$$

□

Conclusion et perspectives

Dans le cadre de cette thèse, notre objectif était de déterminer la valeur exacte du nombre d'indépendance broadcast des graphes circulants, qu'ils soient orientés ou non. Confrontés par la structure complexe de ces graphes, nous nous sommes restreint aux graphes circulants générés par $S = \{1, a\}$. Notre démarche a été d'étudier les propriétés des fonctions broadcast indépendantes optimales pour extraire des classes sur lesquelles il est possible de transformer les valeurs des sommets de sorte à ce qu'ils ne dépassent pas un seuil donné. Ces propriétés ont permis de déterminer de très bonnes bornes sur le nombre d'indépendance broadcast menant à sa valeur exacte pour plusieurs classes de graphes. Plus précisément, nous avons démontré que pour tout graphe circulant non orienté de type $C(n; 1, a)$, avec $2 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, il existe une fonction broadcast indépendante optimale f tel que $f(v) \leq 2$ pour tous les sommets v, sauf dans les cas où $n = 2a + 1$ ou $n = 2a$ et a est un entier pair. Ce résultat a été fondamental dans la détermination des valeurs exactes du nombre d'indépendance broadcast et mieux encore, dans la plupart des cas, nous avons trouvé que $\beta_b(G) = \beta_0(G)$. En ce qui concerne les graphes circulants orientés de la forme $\overrightarrow{C}(n; 1, a)$, avec $2 \leq |a| \leq n - 1$, notre étude a permis de prouver que plusieurs classes admettent une fonction broadcast indépendante optimale f tel que $f(v) \leq a - 1$ pour tout sommet v ou $f(v) \leq \lfloor \frac{n}{a} \rfloor$ pour tout sommet v. Comme pour le cas non orienté, ce résultat a permis de trouver les valeurs exactes du nombre d'indépendance broadcast pour diverses classes de ces graphes circulants orientés.

Tournant notre regard vers l'horizon de la recherche future, plusieurs perspectives intéressantes émergent de ce travail que ce soit pour les graphes circulants non orientés de la forme $C(n; 1, a)$ ou orientés de la forme $\overrightarrow{C}(n; 1, a)$. Les problèmes ci-dessous nous semblent intéressants à explorer :

1. Déterminer le nombre d'indépendance broadcast pour les classes restantes.

2. Améliorer les bornes sur le nombre d'indépendance broadcast, qui ont été prouvées dans notre manuscrit, et en déterminer d'autres.
3. Est-il vrai que pour tout $a \geq 5$, l'égalité $\beta_b(C(n;1,a)) = \alpha(C(n;1,a))$ est satisfaite ? Sinon, caractériser les graphes circulants $C(n;1,a)$ vérifiant cette égalité.
4. Étudier l'invariant β_b pour des graphes circulants générés par un ensemble $S \neq \{1,a\}$.
5. Déterminer le diamètre des graphes $\overrightarrow{C}(n;1,a)$ dans le cas général.
6. Dans les graphes $\overrightarrow{C}(n;1,a)$, existe-t-il toujours une fonction broadcast indépendante optimale f telle que $f(v) \leq a-1$ pour tout sommet v ou $f(v) \leq q$ pour tout sommet v ?

Bibliographie

[1] D Ahmadi, G. Fricke, C Schroeder, S. Hedetniemi et R. Laskar. « Broadcast irredundance in graphs ». In : *Congr. Numer* 224 (2015), p. 17-31.

[2] M. Ahmane, I. Bouchemakh et É. Sopena. « On the broadcast independence number of caterpillars ». In : *Discrete Applied Mathematics* 244 (2018), p. 20-35.

[3] M. Ahmane, I. Bouchemakh et É. Sopena. « On the broadcast independence number of locally uniform 2-lobsters ». In : *Discussiones Mathematicae Graph Theory* (2019).

[4] D. W. Bange, A. E. Barkauskas et P. J. Slater. « A constructive characterization of trees with two disjoint minimum dominating sets ». In : *Congressus Numerantium* 21 (1978), p. 101-112.

[5] D. Bange, A. Barkauskas et P. Slater. « Disjoint dominating sets in trees ». In : *Sandia Laboratories Report SAND* 78 (1978).

[6] C Berge. *The theory of graphs and its applications*. Methuen, London, 1962.

[7] J.-C. Bermond et D. Tzvieli. « Minimal diameter double-loop networks : Dense optimal families ». In : *Networks* 21.1 (1991), p. 1-9.

[8] S. Bessy et D. Rautenbach. « Algorithmic aspects of broadcast independence ». In : *Discrete Applied Mathematics* 314 (2022), p. 142-149.

[9] S. Bessy et D. Rautenbach. « Algorithmic aspects of broadcast independence ». In : *Discrete Applied Mathematics* 314 (2022), p. 142-149.

[10] S. Bessy et D. Rautenbach. « Girth, minimum degree, independence, and broadcast independence ». In : *Commun. Com. Optim* 4(2) : (2019), p. 131-139.

[11] S. Bessy et D. Rautenbach. « Relating broadcast independence and independence ». In : *Discrete Mathematics* 342.12 (2019), p. 111589.

[12] F. Boesch et R. Tindell. « Circulants and their connectivities ». In : *Journal of Graph Theory* 8.4 (1984), p. 487-499.

[13] F. Boesch et J.-F. Wang. « Reliable circulant networks with minimum transmission delay ». In : *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 32.12 (1985), p. 1286-1291.

[14] I. Bouchemakh et M. Zemir. « On the broadcast independence number of grid graph ». In : *Graphs and Combinatorics* 30.1 (2014), p. 83-100.

[15] S. Bouchouika, I. Bouchemakh et E. Sopena. « Broadcasts on paths and cycles ». In : *Discrete Applied Mathematics* 283 (2020), p. 375-395.

[16] A. P. Burger et C. M. « An upper bound for the minimum number of queens covering the n× n chessboard ». In : *Discrete Applied Mathematics* 121.1-3 (2002), p. 51-60.

[17] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo et M. L. Puertas. « Dominating 2-broadcast in graphs : complexity, bounds and extremal graphs ». In : *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 12.1 (2018), p. 205-223.

[18] B.-X. Chen, J.-X. Meng et W.-J. Xiao. « A diameter formula for an undirected double-loop network ». In : *Ars Combinatoria* 90 (2009), p. 395-404.

[19] Y. Cheng et F. K. Hwang. « Diameters of weighted double loop networks ». In : *Journal of Algorithms* 9.3 (1988), p. 401-410.

[20] J. E. Dunbar, D. J. Erwin, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi et S. T. Hedetniemi. « Broadcasts in graphs ». In : *Discrete Applied Mathematics* 154.1 (2006), p. 59-75.

[21] P. Erdös et D. F. Hsu. « Distributed loop network with minimum transmission delay ». In : *Theoretical Computer Science* 100.1 (1992), p. 223-241.

[22] D. J. Erwin. « Dominating broadcasts in graphs ». In : *Bull. Inst. Combin. Appl* 42.89 (2004), p. 105.

[23] D. J. Erwin. *Cost domination in graphs*. Western Michigan University, 2001.

[24] T. W. Haynes. *Domination in graphs : volume 2 : advanced topics*. Routledge, 2017.

[25] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et M. A. Henning. *Domination in graphs : Core concepts*. Springer, 2023.

[26] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et M. A. Henning. *Topics in domination in graphs*. T. 64. Springer, 2020.

[27] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning et al. *Structures of domination in graphs*. T. 66. Springer, 2021.

[28] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. Slater. *Fundamentals of domination in graphs*. CRC press, 2013.

[29] J. T. Hedetniemi et S. T. Hedetniemi. « Domination in chessboards ». In : *Structures of Domination in Graphs* (2021), p. 341-386.

[30] S. M. Hedetniemi et R. Reynolds. « Combinatorial problems on chessboards : II ». In : *Domination in Graphs*. Routledge, 2017, p. 133-162.

[31] M. Henning, O. R. Oellermann et H. C. Swart. « Bounds on distance domination parameters ». In : *J. Combin. Inform. System Sci* 16.1 (1991), p. 11-18.

[32] F. K. Hwang. « A survey on multi-loop networks ». In : *Theoretical Computer Science* 299.1-3 (2003), p. 107-121.

[33] C. F. Jaenisch. *Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs : précédé d'une introduction à l'usage des lecteurs, soit étrangers aux échecs, soit peu versés dans l'analyse*. T. 1. Londres, 1862.

[34] A. Laouar, I. Bouchemakh et E. Sopena. « On the Broadcast Independence Number of Circulant Graphs ». In : *discrete mathematics algorithms and applications Vol. 16, No. 5 2350053 (36 pages)* (2023).

[35] A. Laouar, I. Bouchemakh et E. Sopena. « On the Broadcast Independence Number of oriented Circulant Graphs ». In : *https ://liforce.usthb.dz/wp-content/uploads/2024/02/Article01-2024-1.pdf* (2024).

[36] C. L. Liu. *Introduction to combinational mathematics*. McGraw-Hill Book Co, New York-Toronto, Ont-London, 1968.

[37] E. A. Monakhova. « A survey on undirected circulant graphs ». In : *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications* 4.01 (2012), p. 1250002.

[38] C. Mynhardt et L Neilson. « Boundary independent broadcasts in graphs ». In : *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 116 (2021), p. 79-100.

[39] O. Ore. « Theory of graphs ». In : *Colloquium Publications*. American Mathematical Society. 1962.

[40] L. Xu, Z. Xia et Y. Yang. « Some results on the independence number of circulant graphs C (n ;{1, k}) ». In : *OR Trans* 13.4 (2009), p. 65-70.

[41] J. Zerovnik et T. Pisanski. « Computing the diameter in multiple-loop networks ». In : *Journal of algorithms* 14.2 (1993), p. 226-243.