# À la recherche du dernier carré

**Année 2017-2018**

Ont participé :

- Margaux JACQUEMIN (2e GT)
- Maël JEREZ (2e GT)
- Téo GOIFFON (2e GT)
- Hugo FERRY (2e GT)
- Hugo DEPOUMPS (1e S-SI)
- Yanis MOULOUDI (2e GT)

Encadrés par Christine DELMAIRE, professeur de mathématiques

Établissement : Lycée de la Mer, Gujan-Mestras (33)

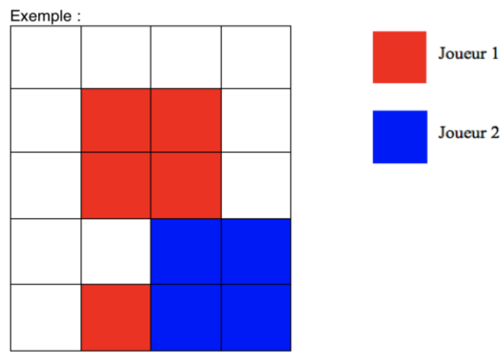
Chercheur : Éric SOPENA, chercheur au LaBRI à Talence (33)

## Présentation du sujet

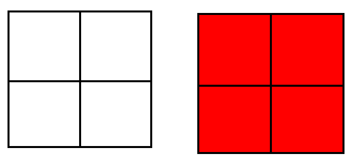
Éric nous a présenté le sujet que nous avons nommé « Le Dernier Carré ».
Le principe est simple : ce jeu se joue à deux sur un damier à $m$ lignes et $n$ colonnes. À tour de rôle, chaque joueur colorie une zone carrée ($1 \times 1, 2 \times 2, \ldots, m \times m$) du damier dont aucune case n'est coloriée. Le joueur qui colorie la dernière case gagne la partie.
Le problème qui nous intéresse est le suivant : pour une taille de damier donnée, quel joueur a une stratégie gagnante en imaginant que les deux joueurs jouent au mieux ?

Nous avons trouvé plusieurs stratégies suivant la parité des dimensions des damiers qui amènent le premier joueur à une situation gagnante, détaillée dans la première partie de cet article.
Tout est une question de parité…

En premier lieu, nous avons testé des parties sur différents damiers de forme rectangulaire et de différentes tailles ($2 \times 3, 4 \times 5$, …). Nous avons analysé les parties gagnantes pour le premier joueur pour essayer d'en déduire des stratégies et c'est en augmentant progressivement la longueur de nos grilles après avoir fixé la largeur que nous avons commencé à avoir des résultats probants.
Dans cet article, nous utilisons les couleurs suivantes :



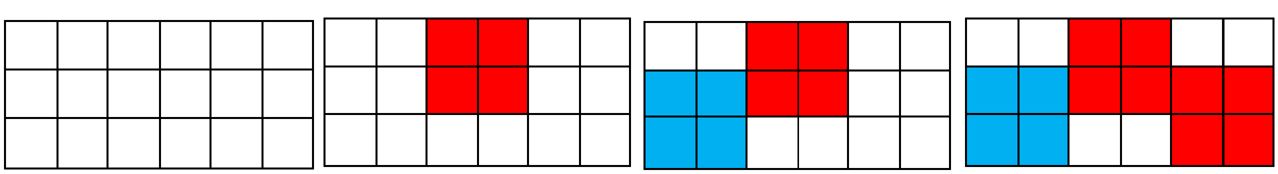

Nous avons tout de suite observé que dans ce jeu, si le damier est carré, le joueur 1 gagne à tous les coups.



## 1. Première stratégie

Au début, nous avons commencé nos recherches sur des rectangles très simples (par exemple : 8 sur 3, 12 sur 4 …). À l'issue de tous ces essais (et de beaucoup d'échecs), nous sommes parvenus à établir une première propriété :

> *"Après le tour d'un joueur, s'il reste un nombre pair de cases qu'on ne peut prendre qu'une par une (il ne reste que des petits carrés), alors ce joueur gagne la partie."*



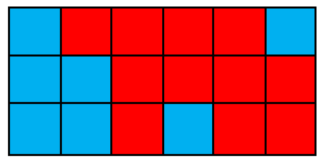
Ici, il reste 6 cases (un nombre pair) qu'on ne peut prendre qu'une par une à la fin du tour du joueur rouge.

Quand le joueur bleu a joué, il n’en reste plus que 5. Puis

- Rouge : plus que 4 cases
- Bleu : plus que 3 cases
- Rouge : plus que 2 cases
- Bleu : plus qu’1 case

Et le joueur rouge va alors prendre le dernier carré et gagner.

Un nombre pair de cases restantes signifie que le joueur qui vient de jouer aura après son tour un nombre pair de cases, et l’adversaire un nombre impair, jusqu’à ce qu’il n’y ait plus qu’une case. Alors, ce joueur prendra la dernière case et gagnera.



Nous avons découvert par la suite que cette propriété est «LA propriété », celle à laquelle toutes les stratégies se ramènent… Essayez donc !

Après avoir trouvé la première propriété, nous avons testé quelques rectangles au cas par cas.

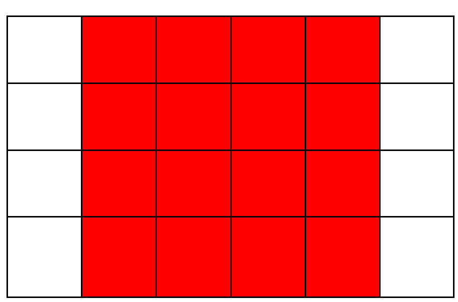
Devant la multitude de cas restants, une bonne infinité, nous avons plutôt essayé de chercher des stratégies qui nous ramenaient à utiliser la propriété précédente.

Et nous en avons trouvé qui dépendaient de la parité des dimensions des damiers.

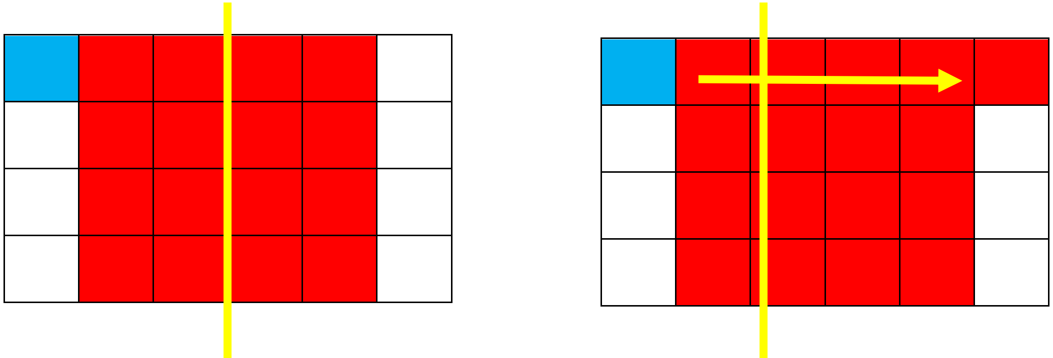
## 2. Vers les mêmes parités

Propriété : Dans un rectangle, la longueur et la largeur sont toutes les deux paires ou impaires (1).

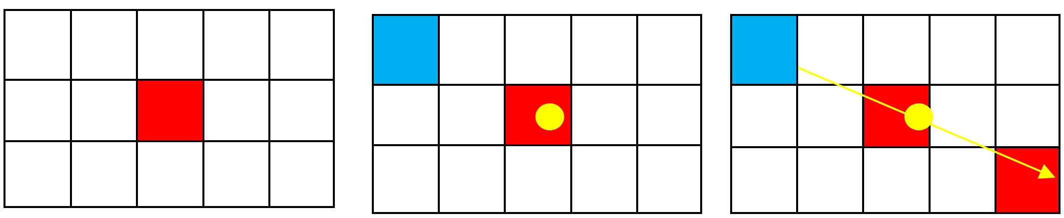
1) *“Le joueur 1 doit (2) placer un carré de la taille de la largeur au centre du damier. Il doit ensuite jouer symétriquement à son adversaire pour triompher.”*



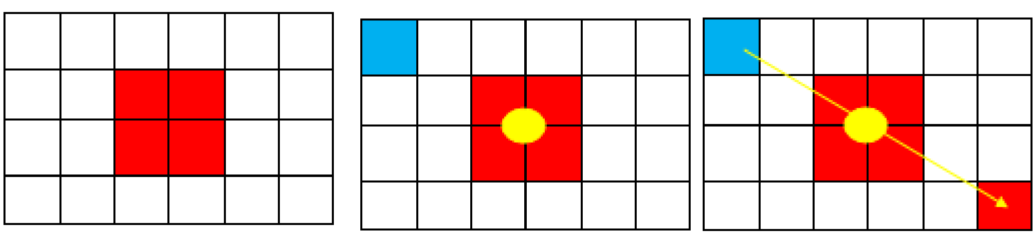
Puis



2) *“Le joueur 1 doit placer un carré de $1 \times 1$ si $L$ (la longueur) et $l$ (la largeur) sont impaires ou un carré de $2 \times 2$ si $L$ et $l$ sont paires au centre du damier. Il doit ensuite jouer symétriquement à son adversaire pour triompher.”* (3)



Ou



Ces deux propriétés permettent au premier joueur (le joueur rouge) de triompher.

Dans ces cas-là, une fois que le joueur rouge a joué, le joueur bleu peut colorier n’importe quel carré, le rouge jouera le carré symétrique, de telle sorte qu’il reste toujours un nombre pair de cases à colorier. En s’appuyant sur la première propriété, on peut en conclure que le premier joueur gagne à tous les coups.

## 3. Vers des parités différentes

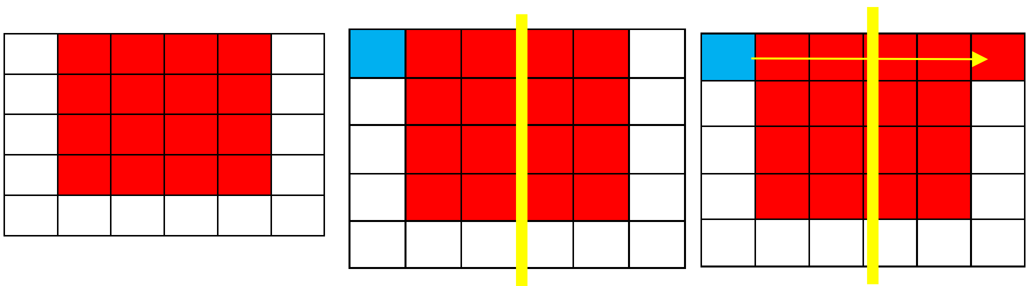
Et si la longueur et la largeur n'ont pas la même parité (l'une est impaire, l'autre est paire).

Ici, on a à nouveau deux cas :

- quand la longueur est paire, et la largeur impaire,
- quand la longueur est impaire, et la largeur paire.

**Premier cas : longueur paire, largeur impaire**

*Le premier joueur (le rouge) joue un carré de la taille de la largeur moins une unité* (4), comme dans l'exemple ci-dessous :

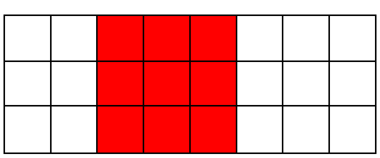


En prenant ce carré de la taille de la largeur moins une unité, on crée un axe de symétrie et il reste un nombre pair de cases. La première stratégie nous permet ici aussi d'affirmer que le premier joueur gagne.

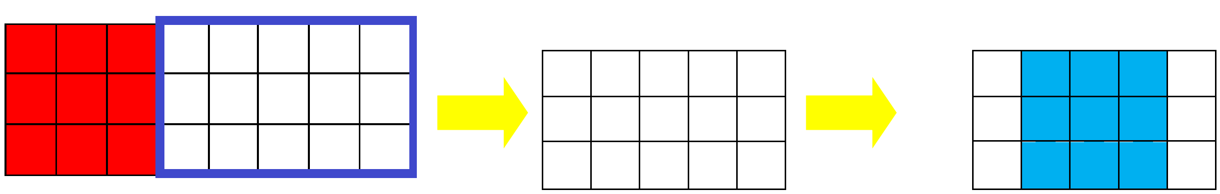
Nous nous sommes demandé ensuite si le premier joueur pouvait gagner à tous les coups en prenant un carré de la taille de la largeur.

Si c'est le cas, on n'a plus d'axe de symétrie et il reste alors une bande, qui amène à un nouveau damier ayant un nombre impair de cases restantes, ce serait alors le joueur bleu qui gagnerait.

Comme par exemple :



…et placé ainsi, on obtient un « nouveau » damier, mais les tours sont inversés, et c'est le joueur bleu qui gagne.

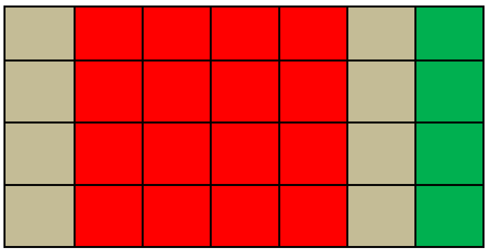
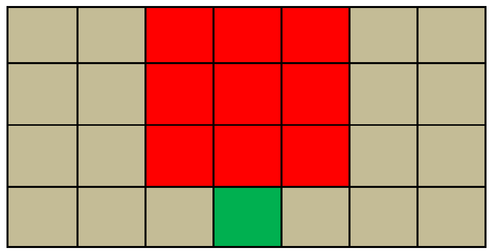


En effet, le joueur bleu utilise la propriété pour un damier de longueur et largeur impaire, et va donc gagner.

Dans le cas général, on obtient au deuxième tour un damier de longueur et largeur impaires (5), car comme on enlève à la longueur un nombre impair, on obtient un nombre impair de cases restantes. En effet, si on soustrait un nombre impair à un nombre pair, on obtient un nombre impair.

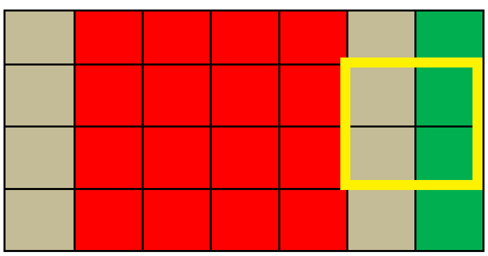
**Deuxième cas : longueur impaire, largeur paire**

En revanche, quand la longueur est impaire et la largeur paire, les quelques recherches que nous avons eu le temps de mener ont montré que placer un carré ne crée pas d'axe de symétrie, la technique qui a jusqu'à maintenant permis de « résoudre » le damier.

Ici, les cases vertes n'ont pas de symétriques (6).

Et le carré jaune brise l'axe de symétrie, et renverse la situation (le joueur bleu peut alors jouer symétriquement au rouge)



Nous n'avons pas eu le temps de plus développer et de rechercher d'autres propriétés.

## 4. Conclusion

Ces quelques mois de recherche nous ont permis de répondre en partie à notre problème même si nous sommes conscients qu'il reste encore une petite infinité de cas à résoudre.
Nous avons tout d'abord énoncé et démontré la propriété fondamentale : « s'il ne reste que des carrés de taille $1 \times 1$ en nombre pair, le dernier joueur ayant joué va gagner ». Elle est fondamentale car dans toutes nos stratégies, on se ramène à l'application de cette propriété.
Ensuite, nous nous sommes aperçus que la parité des dimensions du damier nous permettait de trouver des stratégies gagnantes.
Si les deux dimensions sont soit paires soit impaires, nous avons trouvé deux propriétés qui permettent au premier joueur de gagner, en plaçant au centre du damier le plus grand des carrés.

Si les deux dimensions sont de parités différentes, on a pu résoudre le problème lorsque la longueur (la plus grande des dimensions) est paire et la largeur est impaire mais pas dans le cas contraire. Nous n'avons pas eu assez de temps pour trouver une stratégie gagnante pour le joueur rouge dans ce dernier cas (7).

À vos grilles et à vos couleurs pour poursuivre notre travail !

## Notes d'édition

(1) Cette "propriété" est juste l'hypothèse que l'on fait pour ce paragraphe.

(2) "*Le joueur 1 doit…"* Il ne *doit* pas vraiment, en fait il y a plusieurs stratégies possibles comme le montre la stratégie différente donnée en 2). Il faut lire ceci comme une instruction donnée au joueur 1 selon la première stratégie. De même pour la seconde stratégie un peu plus loin.

(3) Pour la première stratégie, on utilise la symétrie par rapport à l'axe vertical dessiné en jaune, et ici la symétrie par rapport au centre du rectangle. Dans les deux cas cela fonctionne car, après le coup du premier joueur, les carrés dont aucune case n'est coloriée ne rencontrent pas leur symétriques (qui sont aussi incolores) ; et si le joueur 2 colorie un carré, le joueur 1 peut colorier le symétrique.

(4) Ce carré doit être centré dans le sens de la longueur comme sur le dessin, pour obtenir la symétrie cherchée

(5) Ceci dans le cas où le carré colorié par le joueur 1 est placé au bord du rectangle comme sur les dernières figures. Mais on peut voir que pour l'exemple du rectangle $8 \times 3$, dans tous les cas où le joueur 1 colorie un carré de taille la largeur, le joueur 2 a une stratégie gagnante (par exemple pour le premier cas dessiné pour ce rectangle).

(6) En fait, dans chacune des deux figures dessinées ici il y a bien un axe de symétrie, horizontal pour la première et vertical pour la seconde. Mais on trouve des carrés hors de la zone coloriée rencontrant leur symétrique (le carré vert pour la seconde figure, et pour la première le carré dessiné en-dessous avec le trait jaune).

(7) Et d'ailleurs, est-on sûr que le joueur 1 a toujours une stratégie gagnante ?