

# Math en Jeans

## Année 2007-2008

Pour changer un peu, je vous propose cette année un premier jeu avec plusieurs questions qui peuvent être réparties entre plusieurs groupes...

### Problème 1. Le jeu du XXX

On s'intéresse à un jeu à deux joueurs, où les joueurs jouent chacun leur tour. Le premier joueur qui ne pourra pas jouer sera déclaré *perdant*.

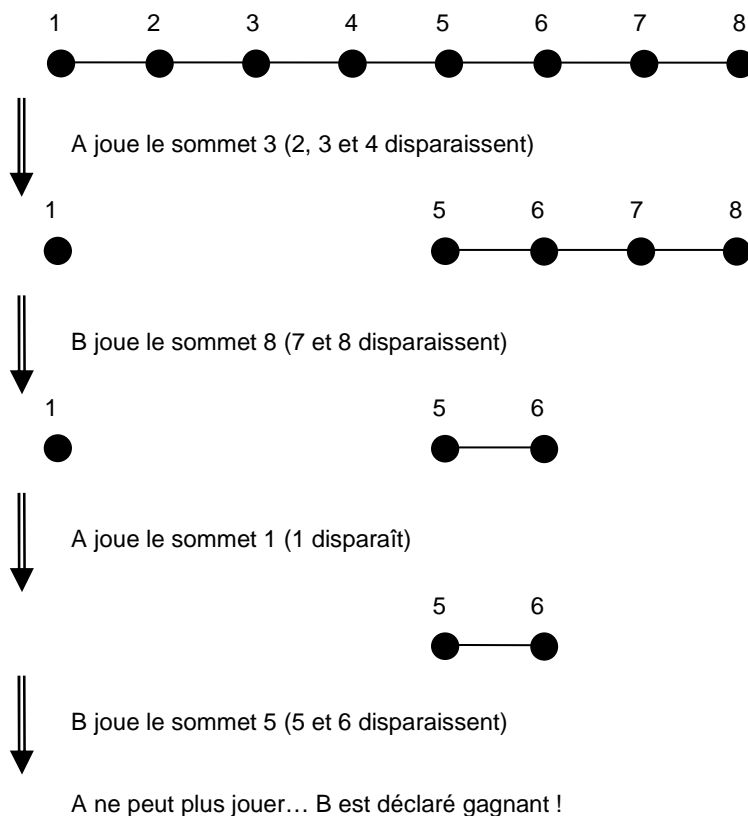
Ce jeu se joue sur une *chaîne* à  $n$  sommets (par exemple 8 sommets), que l'on peut représenter ainsi :



Nous dirons que deux sommets sont *voisins* s'ils sont reliés par un trait (appelé *arête*). Dans notre exemple, les sommets 3 et 4 sont voisins, de même que les sommets 6 et 7. Par contre, les sommets 1 et 3, ou 4 et 8, ne sont pas voisins.

Pour jouer, un joueur choisit un sommet puis le supprime, en supprimant également tous ses voisins. Lorsqu'un joueur supprime le (ou les) dernier(s) sommet(s), il gagne la partie (en effet, son adversaire ne pouvant plus jouer, il sera déclaré perdant).

Voici un exemple de partie (les joueurs sont notés A et B) :



Pensez-vous que A aurait pu gagner (en jouant différemment) ?

On appellera *configuration* une situation de jeu. Dans l'exemple précédent, nous avons une configuration *initiale* (la chaîne à 8 sommets), puis une deuxième configuration composée d'une chaîne à 1 sommet et d'une chaîne à 4 sommets, puis etc.

On dira qu'une configuration est *gagnante* si le joueur qui doit jouer peut gagner quoi que fasse son adversaire. À l'inverse, une configuration est *perdante* si, quoi que fasse le premier joueur, le second peut gagner.

Notre problème général peut alors s'énoncer ainsi :

- peut-on déterminer si une configuration est gagnante ou perdante ?
- dans le cas où une configuration est gagnante, quelle stratégie doit adopter le premier joueur pour gagner ?

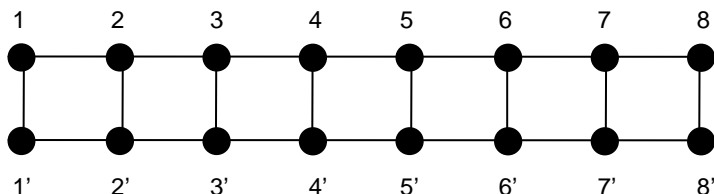
Voici maintenant quelques questions inspirées de ce jeu, avec parfois quelques variantes...

0. **Baptême.** Quel nom proposeriez-vous pour ce jeu ?

1. **Le jeu sur les chaînes.** Sauriez-vous dire si une chaîne de longueur  $n$  est gagnante ou perdante (en fonction de  $n$  naturellement) ? Sauriez-vous proposer une stratégie pour les chaînes gagnantes ?

*On pourra naturellement commencer par observer ce qui se passe pour de « petites » valeurs de  $n$ ...*

2. **Le jeu sur les échelles.** On appelle échelle à  $n$  barreaux le dessin suivant (échelle à 8 barreaux) :



Attention, les règles de voisinage ont changé : par exemple, le sommet 2 a maintenant 3 voisins, 1, 3 et 2'...

Sauriez-vous dire si une échelle à  $n$  barreaux est gagnante ou perdante (toujours en fonction de  $n$ ) ? Sauriez-vous proposer une stratégie pour les échelles gagnantes ?

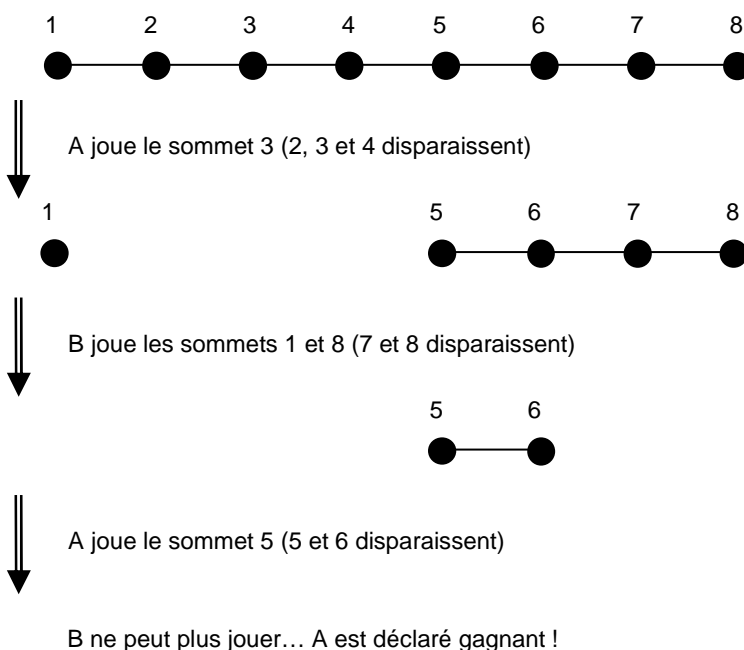
*On pourra naturellement commencer par observer ce qui se passe pour de « petites » valeurs de  $n$ . Bizarrement, il est possible que le jeu sur les échelles soit « plus simple » que sur les chaînes...*

3. **La version « Qui perd gagne ».** Changeons légèrement la règle (mais avec quelles conséquences ?...): dorénavant, le premier joueur qui ne peut plus jouer est déclaré gagnant !

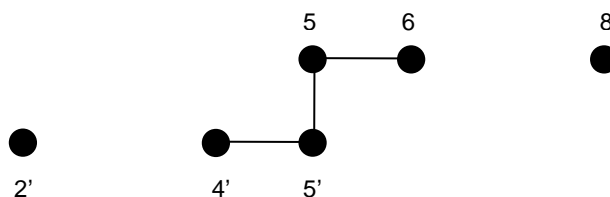
Que peut-on dire maintenant dans le cas des chaînes ? dans le cas des échelles ?

*Encore une fois, on pourra commencer par observer ce qui se passe pour de « petites » valeurs de  $n$ ... Attention ! Ne croyez pas qu'une configuration perdante en situation normale devient gagnante en « qui perd gagne » : en effet, l'adversaire ne joue plus de la même façon... puisqu'il cherche lui aussi à perdre.*

4. **La version « Quick ».** Pour jouer plus vite, on propose la modification suivante : lorsqu'une configuration est composée de plusieurs « morceaux séparés » (on dira plusieurs *composantes*), alors le joueur doit jouer un coup dans chaque composante. Notre exemple de partie pourrait alors devenir :



Autre exemple... Dans le cas de l'échelle à huit barreaux, si A joue le sommet 3, puis B les sommets 1 et 7', nous obtenons la configuration à trois composantes suivante :



Que peut-on dire maintenant dans le cas des chaînes ? dans le cas des échelles ?

5. **La version « gros bras ».** Encore une modification... Nous sommes tellement aguerris maintenant (prétentieux ?), que nous offrons à notre adversaire la possibilité de jouer deux coups de suite (A joue 1 coup, B joue 2 coups, A joue 1 coup, B joue deux coups, etc.) !

Nous avons maintenant deux types de configurations gagnantes (ou perdantes) : celles qui sont gagnantes pour A (le premier joueur ne joue qu'un coup), et celles qui sont gagnantes pour B (le premier joueur joue deux coups).

Que peut-on dire maintenant dans le cas des chaînes ? dans le cas des échelles ?

6. On peut naturellement « combiner » les changements proposés. Par exemple, que donne la version « qui perd gagne » en « quick » ?
7. Comme d'habitude, rien n'interdit de se poser soi-même un nouveau problème...

**Bon courage à toutes et tous...**

**Éric SOPENA**

Chercheur au LaBRI

*sopena@labri.fr*