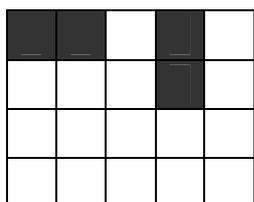


Math en Jeans

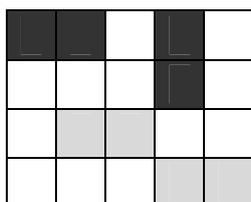
Année 2011-2012

Problème 1. Les dominos de Solaria

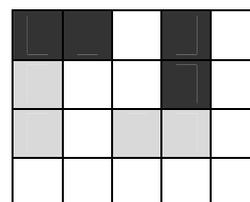
Nous allons jouer sur un damier de taille $n \times m$ (n lignes de m cases). Il s'agit d'un jeu à deux joueurs où, alternativement, chaque joueur doit déposer un domino (qui couvre donc deux cases) de façon telle que deux dominos ne soient jamais en contact (par un côté de case). Voici par exemple des coups autorisés et des coups interdits (les dominos noirs sont déjà présents sur le damier 4×5) :



Damier initial



Quelques coups autorisés



Quelques coups interdits

Le premier joueur ne pouvant placer de domino sera déclaré perdant. La question générale est alors la suivante : suivant les valeurs de n et m , l'un des joueurs (le premier ou le second) a-t-il une stratégie gagnante ? si oui, quelle est cette stratégie ?

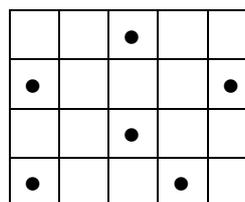
On pourra naturellement considérer quelques variantes de ce jeu... Par exemple :

- on interdit également de placer des dominos en contact par un coin de case,
- le premier joueur ne pouvant jouer est déclaré cette fois gagnant,
- le premier joueur ne peut placer ses dominos qu'horizontalement, le second joueur que verticalement,
- etc. (y compris les combinaisons des précédentes variations).

Problème 2. Contrôle de damier

On cherche cette fois à placer des jetons sur un damier, de façon telle que toute case vide soit voisine (par un côté) d'une case contenant un jeton.

Voici un exemple ci-contre de solution sur une grille 4×5 :



Cette solution utilise 6 jetons... Peut-on faire mieux ?

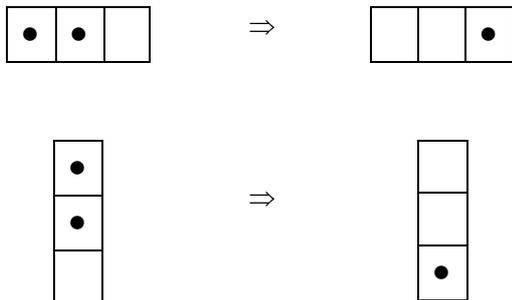
La question générale est donc : suivant les valeurs de n et m , quel est le nombre minimum de jetons nécessaires pour contrôler le damier $n \times m$? (on pourra dans un premier temps considérer des cas « simples », par exemple $n = 2$, ou $n = 3$...).

Là encore, on peut imaginer plusieurs variations :

- un jeton contrôle également les cases avec lesquelles il partage un coin,
- un jeton contrôle toutes les cases « à distance 2 » (en franchissant 1 ou 2 coins ou côtés),
- etc.

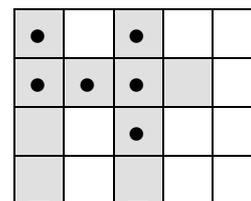
Problème 3. Solitaire

On s'intéresse au jeu de solitaire sur un damier. Initialement, le damier est dans une certaine configuration, correspondant à un ensemble de jetons disposés sur certaines de ses cases. Un coup consiste à « manger » un pion en sautant par-dessus. Il y a donc deux types de prises, horizontalement ou verticalement :



Maintenant, pour une configuration donnée, on s'intéresse aux cases « atteignables », c'est-à-dire celles qui peuvent être atteintes par un jeton après une série de coups (naturellement, les cases comportant un jeton dès le départ sont atteignables).

Voici un exemple ci-contre de configuration initiale et (sauf erreur) les cases atteignables en léger grisé :



Les deux questions qui nous intéressent sont alors les suivantes :

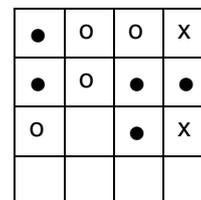
- pour des valeurs de n et m données, quel est le nombre de jetons minimum nécessaires pour obtenir une configuration permettant d'atteindre toutes les cases ? quelle est cette configuration ?
- pour des valeurs de n et m données, quel est le nombre minimum de jetons nécessaires pour que toutes les cases soient atteignables, quelle que soit la configuration initiale contenant ce nombre de jetons ?

Là encore, on pourra dans un premier temps considérer des cas « simples », par exemple n = 1, ou n = 2...

Problème 4. Premier rectangle

Deux joueurs vont à nouveau s'affronter sur un damier n x m... Le premier joueur dispose de jetons noirs, le second de jetons blancs. À tour de rôle, chaque joueur pose un jeton de sa couleur sur une case inoccupée et le premier joueur parvenant à placer ses jetons aux quatre coins d'un rectangle gagne la partie.

Voici un exemple ci-contre de configuration obtenue en cours de partie, gagnante pour joueur noir.



En effet, le joueur blanc doit jouer... et il ne peut contrer les deux menaces du joueur noir, indiquées ici par des x.

Les questions naturelles sont alors les suivantes :

- pour des valeurs de n et m données, peut-il y avoir des parties nulles (aucun des deux joueurs ne parvient à obtenir les quatre coins d'un rectangle) ?
- pour des valeurs de n et m données, l'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? si oui laquelle ?

Ici encore, on pourra commencer par considérer des cas « simples », par exemple n = 2 ou n = 3...

Une variation intéressante est certainement la suivante : le premier joueur obtenant un rectangle perd la partie. D'autres variations sont certainement possibles, n'hésitez donc pas à laisser courir votre imagination...

Bon courage à toutes et tous...

Éric SOPENA
 Chercheur au LaBRI
 sopena@labri.fr