

Math en Jeans

Année 2014-2015

Problème 1. Jeu de soustractions – version solitaire

On dispose d'une liste d'entiers, par exemple (2,5,8). À chaque étape, on choisit un nombre quelconque non nul d'entiers dans cette liste, par exemple 2 entiers, 5 et 8, auxquels on retranche une valeur quelconque, par exemple 3. L'exemple que nous venons de décrire correspond au « coup » :

$$(2,5,8) \rightarrow (2,2,5)$$

Le but du jeu est de « vider » complètement la liste... en un minimum de coups ! Sur notre exemple, nous pouvons le faire en trois coups (ce n'est pas la seule façon de faire) :

$$(2,5,8) \rightarrow (2,2,5) \rightarrow (0,0,3) \rightarrow (0,0,0)$$

Bien sûr, le nombre de coups nécessaire peut être inférieur au nombre d'entiers dans la liste : si tous les entiers sont égaux, un seul coup suffit ! Mais ce n'est pas le seul exemple... Ainsi, en deux coups pour trois entiers :

$$(1,2,3) \rightarrow (0,2,2) \rightarrow (0,0,0)$$

Nous pouvons nous intéresser aux questions suivantes :

- Quel nom pourrait-on donner à ce jeu ?
- Combien de coups sont nécessaires (et suffisants) pour vider une liste de la forme (1,2,...,k) ?
- Est-il possible de caractériser les listes « vidables » en 1 seul coup ? en 2 coups ? etc.
- À l'inverse, à quoi ressemblent les listes à k éléments que l'on ne peut pas vider en moins de k coups ? en moins de k-1 coups ?
- Que se passe-t-il si on change légèrement la règle, en n'autorisant pas le joueur à choisir plus de p entiers à la fois dans la liste lors de chaque coup (par exemple pas plus de trois) ?

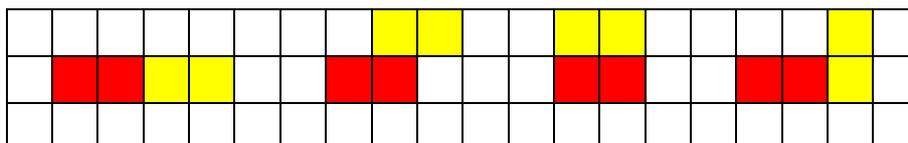
Problème 2. Jeu de soustractions – version à deux joueurs

On utilise les mêmes règles que dans le problème précédent mais, cette fois, le jeu se joue à deux joueurs qui jouent alternativement. Nous considérons que le joueur qui vide la liste gagne la partie.

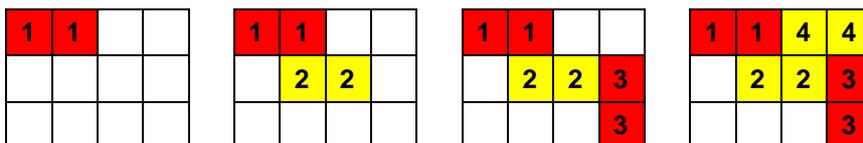
- Quel joueur (le premier à jouer ou le second) a une stratégie gagnante avec une liste de départ de la forme (1,2,...,k) ?
- Sur quelles autres formes de listes pourrait-on déterminer le joueur ayant une stratégie gagnante ?
- Que se passe-t-il si l'on décide plutôt que le joueur qui vide la liste perd la partie ?

Problème 3. Jouons avec des dominos (1)

Deux joueurs disposent d'un damier m x n (m lignes et n colonnes) et de dominos, chaque domino pouvant recouvrir exactement deux cases du damier. Le premier joueur dépose un domino sur le damier. Ensuite, à tour de rôle, chaque joueur doit déposer un domino *adjacent au domino que vient de déposer son adversaire*. Par « adjacent » nous entendons que les deux dominos doivent « se toucher » de l'une des façons suivantes (à symétrie près) :



Le premier joueur qui ne peut plus jouer (car il n'est pas possible de déposer un domino adjacent à celui que vient de déposer son adversaire) perd la partie. Voici un exemple de partie sur un damier 3 x 14 (les numéros permettent de retrouver l'ordre dans lequel sont posés les dominos) :



Le premier joueur (rouge) ne peut plus jouer... il a perdu la partie.

On se pose alors les questions suivantes :

- Quel nom pourrait-on donner à ce jeu ?
- Pour une taille de damier donnée $m \times n$, quel joueur a une stratégie gagnante : le premier ? le second ? (On pourra commencer par considérer des tailles « simples », comme $1 \times n$, puis $2 \times n$, etc.)
- Qu'en est-il si on modifie la règle en disant que deux dominos se touchant « par un coin » sont adjacents ?
- Qu'en est-il si on considère plutôt que le premier joueur ne pouvant jouer gagne la partie ?

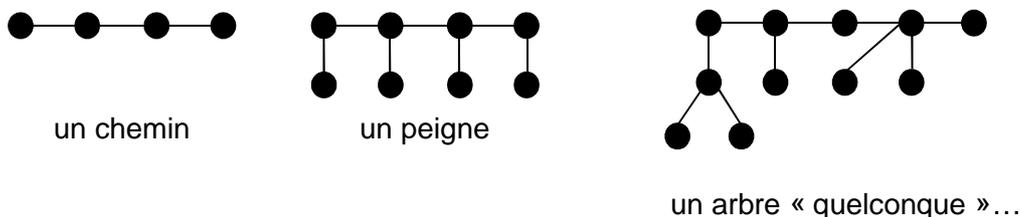
Problème 4. Jouons avec des dominos (2)

Toujours le même jeu, les mêmes questions, mais cette fois les deux joueurs ont des dominos « différents » : le premier joueur ne peut poser ses dominos qu'horizontalement, le deuxième joueur que verticalement...

On pourra dans ce cas également regarder les damiers « carrés » (avec $n = m$) qui, a priori, n'avantagent aucun des deux joueurs...

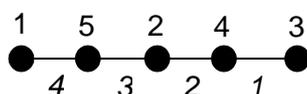
Problème 5. Bonnes numérotations des sommets d'un arbre

On appelle « arbre » une structure obtenue en reliant n points (appelés sommets) par $n-1$ lignes (appelées arêtes), chacune reliant deux points, de façon telle que la structure ne contient aucun cycle (on ne peut pas revenir au sommet de départ en traversant des arêtes sans emprunter deux fois la même arête). Voici quelques exemples d'arbres :



On cherche à numéroter de 1 à n les sommets d'un arbre à n sommets de façon telle que, si on inscrit sur chaque arête la différence entre les valeurs de ses extrémités, toutes les $n-1$ arêtes ont des valeurs distinctes...

Voici par exemple une bonne numérotation du chemin à 5 sommets :



On se pose alors les questions suivantes :

- Est-ce que tous les chemins admettent une bonne numérotation ?
- Est-ce que tous les peignes admettent une bonne numérotation ?
- Quelles formes particulières d'arbres admettent une bonne numérotation ?

*Bon courage à toutes et tous...
 Éric SOPENA
 Chercheur au LaBRI, sopena@labri.fr*