

MATH.en.JEANS

Année 2017-2018

Problème 1. Mise en boîtes !...

On s'intéresse ici à l'ensemble (infini) des entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. On se donne maintenant un ensemble fini E d'entiers naturels non nuls. Nous dirons que deux entiers naturels x et y sont incompatibles si la valeur absolue de leur différence, $|x - y|$, appartient à l'ensemble E .

Exemple. Si l'on prend $E = \{1\}$, les entiers 8 et 9 sont incompatibles, alors que les entiers 2 et 5 sont compatibles.

Maintenant, on souhaite ranger tous les entiers naturels dans des boîtes, en utilisant le moins de boîtes possible, sans que deux entiers incompatibles se retrouvent dans la même boîte !

Sur notre exemple, avec $E = \{1\}$, il est facile de vérifier que deux boîtes suffisent : il suffit de ranger les entiers pairs dans l'une, et les entiers impairs dans l'autre ! En effet, si $|x - y| = 1$, x et y ont nécessairement des parités différentes...

Notre problème est alors le suivant :

- Pour un ensemble E donné, quel est le nombre minimal de boîtes nécessaire pour ranger tous les entiers naturels ?

Si l'on note $\mu(E)$ ce nombre pour un ensemble E donné, notre exemple permet d'établir l'égalité $\mu(\{1\}) = 2$ (en effet, il est aussi facile de montrer qu'une seule boîte ne suffit pas !).

Pour ce problème, l'idée est de considérer des ensembles E ayant des structures particulières... Par exemple :

- E est un singleton (c'est-à-dire, $E = \{a\}$ pour un entier naturel a non nul quelconque),
- E est une paire (c'est-à-dire, $E = \{a, b\}$ pour deux entiers naturels non nuls distincts a et b), par exemple $E = \{1, 3\}$, $E = \{1, 4\}$, $E = \{2, 7\}$...
- E est de la forme $\{1, 2, \dots, k\}$ pour un entier naturel quelconque $k \geq 1$,
- $E = \{3, 10, 13\}$, ou, plus généralement, E est de la forme $\{a, b, a+b\}$, pour deux entiers naturels non nuls distincts a et b ,
- Tout autre forme paraissant « intéressante » (c'est-à-dire, pour laquelle des idées prometteuses se présentent ;-)...).

Rien n'empêche naturellement de s'intéresser aux « dimensions supérieures »... Ainsi, en dimension 2, on cherche à ranger des couples d'entiers naturels, en respectant un ensemble d'incompatibilités E qui est lui-même un ensemble de couple d'entiers...

Exemple. Si $E = \{(1, 2)\}$, alors le couple $(3, 7)$ est incompatible avec les couples $(2, 5)$, $(4, 5)$, $(2, 9)$ et $(4, 9)$...

Problème 2. Le promeneur exigeant...

Un promeneur cherche à « visiter » toutes les cases d'un damier à m lignes et n colonnes, en respectant les règles de déplacement suivantes :

- La première case est toujours la case de coordonnées $(1, 1)$, en haut à gauche.
- On passe d'une case à une autre horizontalement ou verticalement (depuis la case de coordonnées (i, j) , on ne peut donc aller que dans les cases de coordonnées $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$ ou $(i, j+1)$, si ces cases existent...).
- On ne repasse jamais par une case déjà visitée.

Un exemple de promenade, sur un damier 3×4 , est représenté ci-contre (les cases sont numérotées dans l'ordre où elles sont parcourues).

1	2	11	12
4	3	10	9
5	6	7	8

Les questions qui nous intéressent vont être les suivantes :

1. Pour des valeurs de m et n fixées, peut-on déterminer le nombre de promenades distinctes sur le damier $m \times n$?
2. On souhaite maintenant faire découvrir une promenade à un joueur, en lui donnant comme indices quelques cases numérotées, et de façon à ce que la solution soit unique (selon le principe des grilles de Sudoku, où certaines cases sont déjà remplies et où la solution est toujours unique).

Pour notre promenade exemple, combien de cases doit-on dévoiler pour que la solution soit unique ? Lesquelles ? De façon plus générale, pour un damier de taille $m \times n$, combien de cases doit-on dévoiler au minimum pour faire découvrir une promenade de façon unique ?

Une question « symétrique » est la suivante : quel est le nombre maximum de cases que l'on peut dévoiler sans que la solution soit unique ?...

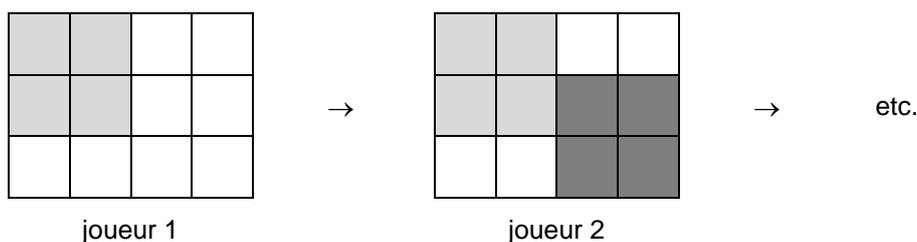
Une façon naturelle d'aborder toutes ces questions est de considérer dans un premier temps des cas « simples », par exemple $m = 1$, ou $m = 2$...

On pourra éventuellement considérer des damiers « transformés » : par exemple, avec des nombres de lignes et de colonnes impairs et un « trou » dans la case centrale... Ou encore un damier dont on a supprimé les quatre cases « coins » (on définira une nouvelle case de départ), ou encore...

Problème 3. Les pilleurs de carrés...

On considère le jeu à deux joueurs suivant, sur un damier à m lignes et n colonnes. À tour de rôle, chaque joueur colorie une zone carrée du damier dont aucune case n'est coloriée. Le joueur qui colorie la dernière case gagne la partie.

Voici un exemple de partie, sur un damier 3×4 :



Il reste alors quatre carrés de taille 1×1 , et donc quatre coups à jouer. C'est donc le joueur 2 qui va colorier la dernière case et gagner la partie ! En jouant différemment, le joueur 1 pouvait-il gagner contre toute défense ?...

Le problème qui nous intéresse est le suivant : pour une taille de damier donnée, quel joueur (le premier ou le deuxième) a une stratégie gagnante, c'est-à-dire, une stratégie lui permettant de gagner quoi que fasse son adversaire ?

On pourra considérer dans un premier temps des cas « simples », tels que les damiers à une ou deux lignes par exemple.

Il est également possible de jouer sur des damiers ayant d'autres formes, telles que celles évoquées dans le problème 2...

Une autre version de ce jeu est également intéressante : que se passe-t-il si l'on décide maintenant que le joueur qui colorie la dernière case perd la partie ?...

Sur ce, bon courage à toutes et tous...

Éric SOPENA

Chercheur au LaBRI, Eric.Sopena@labri.fr