



MATH.en.JEANS

Année 2018-2019

Problème 1. Jamais trois pions alignés

On cherche à placer des pions sur un damier $m \times n$ (m lignes, n colonnes), de façon telle que nous n'avons jamais trois pions alignés, verticalement, horizontalement, ou en diagonale. Voici par exemple ci-contre un placement correct de 6 pions sur le damier 3×3 :

	•	•
•		•
•	•	

La question naturelle que l'on peut se poser est alors la suivante :

- Quel est le nombre maximum de pions que l'on peut placer sur un damier $m \times n$ (en fonction de m et n) ?

Notons que l'on doit définir précisément ce que l'on entend par « alignés » :

alignés consécutivement ?

		•	•	•		
--	--	---	---	---	--	--

ou pas nécessairement ?

		•			•		•
--	--	---	--	--	---	--	---

Nous obtenons ainsi deux problèmes différents, sauf pour le damier 3×3 .

On pourra considérer dans un premier temps des damiers particuliers ($m = 1$, $m = 2$, etc.) avant d'essayer d'en déduire des résultats généraux.

On pourrait également considérer d'autres contraintes de placement : jamais deux, jamais quatre, etc. au lieu de jamais trois ; ou encore ne pas considérer les alignements en diagonale... voire d'autres motifs tels que, par exemple, le motif ci-contre...

•	
•	•

Problème 2. Jamais trois pions alignés, version à deux joueurs

Nous considérons cette fois la version à deux joueurs du problème précédent : à tour de rôle, chaque joueur place un pion sur le damier, le premier joueur créant un alignement de trois pions perdant la partie...

La question naturelle que l'on peut se poser est alors la suivante :

- Pour des valeurs de m et n données, l'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? si oui laquelle ?

Avoir une stratégie gagnante signifie ici pouvoir gagner la partie quoi que fasse son adversaire (on suppose donc que l'adversaire joue de la meilleure façon possible !).

On pourra naturellement considérer les variations évoquées précédemment... Mais la variation suivante mérite certainement d'être considérée :

- au lieu de jouer sur un seul damier, jouons, par exemple, sur deux damiers 3×3 (voire plus),
- à tour de rôle, chaque joueur pose un pion sur l'un des damiers de son choix,
- dès qu'un joueur réalise un alignement sur l'un des damiers, il perd la partie.

Là encore, on pourra faire varier la taille des damiers en commençant par des situations « simples »...

Problème 3. Colorations d'entiers à motif interdit

On va s'intéresser ici à des colorations d'intervalles d'entiers de la forme $[1, n] = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$. Colorier un tel intervalle consiste à associer une couleur à chaque entier de façon telle que certaines contraintes soient respectées. On appellera k-coloration une coloration utilisant k couleurs.

Considérons par exemple la contrainte suivante : on souhaite ne pas avoir de triplet d'entiers (x, y, z) ayant tous les trois la même couleur (on parle alors de triplet monochromatique) et tel que $x + y = z$. Attention, les trois entiers ne sont pas nécessairement distincts ; on peut en particulier avoir $x = y$ et, donc, $z = 2x$...

La question est alors la suivante : si l'on se donne k couleurs, quelle est la plus grande valeur de n pour laquelle il est possible de colorier l'intervalle $[1, n]$ avec k couleurs de façon telle que la contrainte soit respectée ? Cette valeur sera notée $s(k)$.

Si nous prenons $k = 2$, le problème est assez simple. Voici par exemple une 2-coloration de l'intervalle $[1, 4]$ (les éléments coloriés avec la première couleur sont soulignés) : 1 2 3 4. Il suffit ensuite de vérifier que pour toute 2-coloration de l'intervalle $[1, 5]$ (combien y en a-t-il ?), on peut toujours trouver un triplet d'une même couleur satisfaisant l'équation interdite... Ainsi, nous avons $s(2) = 4$. (N'hésitez surtout pas à vérifier cette affirmation !)

Sauriez-vous déterminer $s(3)$? $s(4)$?

On peut naturellement considérer quelques variations de ce problème :

- Que se passe-t-il si l'on interdit maintenant uniquement les triplets pour lesquels les trois entiers sont distincts ?
- On pourrait également s'autoriser un seul triplet interdit par couleur (mais pas deux !). On noterait alors $s'(k)$ la plus grande valeur de n pour laquelle il existe une k-coloration de l'intervalle $[1, n]$ respectant cette nouvelle contrainte. Que valent alors $s'(2)$? $s'(3)$?
- Une autre variation naturelle consiste à modifier l'équation interdite. Par exemple, interdire les triplets (de trois entiers distincts) monochromatiques tels que $x + y = 2z$...

Problème 4. Contrôle de damier

On cherche à placer des jetons sur un damier $m \times n$, de façon telle que toute case vide soit voisine (par un côté) d'au moins une case contenant un jeton.

Voici un exemple ci-contre de solution sur une grille 4×5 :

		•		
•				•
		•		
•			•	

Cette solution utilise 6 jetons... Peut-on faire mieux ?

La question générale est donc : suivant les valeurs de m et n, quel est le nombre minimum de jetons nécessaires pour contrôler le damier $m \times n$? (on pourra dans un premier temps considérer des cas « simples », par exemple lorsque $m = 1$, $m = 2$, ou $m = 3$...).

Là encore, on peut imaginer plusieurs variations :

- un jeton contrôle également les cases avec lesquelles il partage un coin,
- un jeton contrôle toutes les cases « à distance 2 » (en franchissant 1 ou 2 coins ou côtés),
- le damier est un damier « torique » : dans chaque ligne et dans chaque colonne, la première et la dernière case sont voisines,
- etc.

Sur ce, bon courage à toutes et tous...

Éric SOPENA

Chercheur au LaBRI, Eric.Sopena@labri.fr