

MATH.en.JEANS

Année 2019 – 2020

Pour chaque problème, la 1^{re} question est « Mais quel nom pourrait-on donner à ce problème ? » ☺...

Problème 1. Des cailloux et des damiers

On considère un damier rectangulaire, de taille $m \times n$ (c'est-à-dire ayant m lignes et n colonnes). Chaque case du damier peut contenir un certain nombre de cailloux (que l'on représentera par le nombre correspondant), éventuellement aucun (nous n'écrirons pas les « 0 »). Nous avons ci-contre une configuration possible d'un damier de taille 3×5 .

	2			2
			4	
3				1

Nous allons maintenant déplacer les cailloux, en utilisant les deux types de mouvement suivants :

- Mouvement 1 : enlever deux cailloux d'une case, et en déposer un sur l'une des cases voisines (horizontalement ou verticalement).
- Mouvement 2 : soit une case X ayant deux cases voisines Y et Z contenant des cailloux ; on enlève alors un caillou à chacune des cases Y et Z , et on rajoute un caillou à la case X .

Remarquons que pour chacun de ces mouvements, le nombre total de cailloux diminue d'une unité. Ces deux mouvements sont illustrés ci-dessous (les cases concernées sont grisées) :

	2			2
			4	
3				1

→

1				2
			4	
3				1

Mouvement 1

1				2
			4	
3				1

→

1				1
			4	1
3				

Mouvement 2

À partir d'une configuration d'un damier, on dit qu'une case est *atteignable* s'il est possible d'y déposer un caillou en effectuant une suite de mouvements autorisés. Naturellement, toute case qui possède au moins un caillou dès le départ est (directement) atteignable.

Nous nous intéressons aux « bonnes » configurations, c'est-à-dire celles à partir desquelles toutes les cases sont atteignables. Par exemple, on obtient une bonne configuration en plaçant dès le départ un unique caillou dans chacune des cases ! Le nombre total de cailloux de cette configuration est égal au nombre de cases, donc $m \times n$. Mais on devrait pouvoir faire mieux... c'est-à-dire trouver des bonnes configurations dont le nombre total de cailloux est inférieur à $m \times n$.

Notre problème est alors le suivant :

- Pour un damier de taille fixée, $m \times n$, quelle est le nombre minimum de cailloux nécessaires pour obtenir une bonne configuration ? Et quelles sont ces bonnes configurations ?

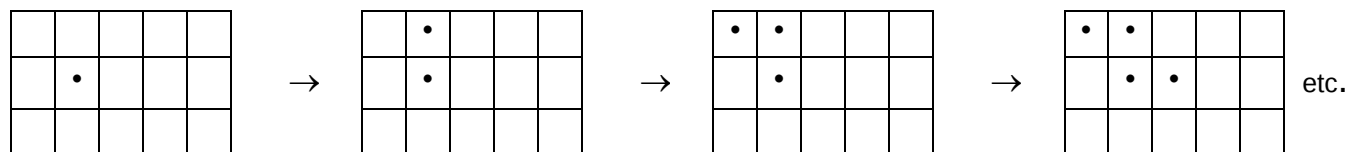
On pourra naturellement considérer des cas « simples », par exemple les damiers à une seule ligne, puis à deux lignes, etc. On pourra également considérer des variantes de ce problème, par exemple :

- Que se passe-t-il si l'on considère que les cases qui « ont un coin en commun » sont aussi voisines ?
- Que se passe-t-il si l'on considère d'autres types de damiers (de forme autre que rectangle, ou ayant des cases triangulaires ou hexagonales...) ?

Problème 2. Des cailloux, des damiers... et deux joueurs : Libérateur et Encercleur

On considère à nouveau un damier rectangulaire, de taille $m \times n$ (c'est-à-dire ayant m lignes et n colonnes), mais cette fois deux joueurs, appelés *Libérateur* et *Encercleur*, vont s'affronter. À tour de rôle, chaque joueur va déposer un caillou sur une case vide avec la contrainte suivante : à part pour le tout premier coup, le caillou doit être

déposé sur une case voisine, horizontalement ou verticalement, d'une case occupée (ayant déjà un caillou). Voici par exemple une séquence de jeu « légale » (sur cet exemple, après le premier coup, le joueur suivant a quatre coups possibles) :



Nos deux joueurs ont des objectifs différents : Encercleur cherche à « entourer » une case vide par quatre cases occupées, alors que Libérateur cherche à l'en empêcher... Remarquons ici que comme seules les cases ne se trouvant pas sur un bord possèdent quatre cases voisines, les damiers « intéressants » sont ceux qui possèdent au moins trois lignes et trois colonnes (dans le cas contraire, Encercleur ne peut jamais gagner).

On dira que l'un de ces joueurs a une *stratégie gagnante* s'il est capable de gagner quoi que fasse son adversaire. La question qui nous intéresse est alors la suivante :

- Sur quelles tailles de damier Libérateur possède-t-il une stratégie gagnante ?

Cette question peut être considérée pour deux versions de ce jeu, qui correspondent respectivement au cas où Libérateur joue en premier, et au cas où Encercleur joue en premier.

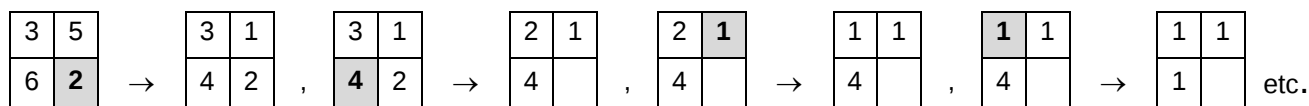
Comme pour le problème précédent, on peut également considérer, par exemple, les variantes suivantes :

- Que se passe-t-il si l'on considère qu'une case vide est encerclée dès qu'elle a trois voisines occupées ?
- Que se passe-t-il si l'on considère que les cases qui « ont un coin en commun » sont aussi voisines ?
- Que se passe-t-il si l'on considère d'autres types de damiers (de forme autre que rectangle, ou ayant des cases triangulaires ou hexagonales...) ?

On peut également considérer le problème où les joueurs peuvent jouer « n'importe où », c'est-à-dire sur une case n'ayant pas nécessairement de voisine occupée...

Problème 3. Des cailloux, des damiers... et deux joueurs : Aline et Bastien

On considère toujours un damier rectangulaire, de taille $m \times n$ (c'est-à-dire ayant m lignes et n colonnes), encore une fois deux joueurs qui vont s'affronter, mais cette fois ceux-ci sont appelés *Aline* et *Bastien*. Au départ, chaque case du damier contient un certain nombre de cailloux. À tour de rôle, chaque joueur va choisir une case, puis enlever des cailloux (autant qu'il le souhaite, mais au moins un au total) sur les cases voisines, horizontalement et verticalement, de la case choisie. Voici par exemple une séquence de jeu « légale » sur un damier de taille 2×2 (la case choisie est indiquée en grisé) :



Remarquons ici qu'il n'est pas nécessaire d'enlever des cailloux dans toutes les cases voisines qui en possèdent (voir le 4^e coup de notre exemple).

Aline joue toujours en premier, et le jeu s'arrête dès qu'aucun coup n'est possible, c'est-à-dire lorsqu'il ne reste plus aucun caillou. Le premier joueur qui ne peut jouer est déclaré *perdant*. Comme dans le problème précédent, un joueur a une stratégie gagnante s'il est capable de gagner quoi que fasse son adversaire.

La question qui nous intéresse est ici la suivante :

- Pour un damier de taille $m \times n$, dans quels cas (c'est-à-dire pour quelles configurations initiales de cailloux) Aline a-t-elle une stratégie gagnante ?

On pourra naturellement commencer par le damier « le plus simple », c'est-à-dire celui de dimension 2×2 .

Une variante intéressante à étudier est celle où l'on considère que le premier joueur qui ne peut jouer est déclaré *gagnant* et non plus perdant... On peut également décider que chaque joueur peut enlever des cailloux à la fois sur la case choisie et sur les cases voisines, ce qui change tout...

Sur ce, bon courage à toutes et tous !
 Éric SOPENA
 Chercheur au LaBRI, Eric.Sopena@labri.fr