

MATH.en.JEANS

Année 2020 – 2021

Pour chaque problème, la 1^{re} question est « Mais quel nom pourrait-on donner à ce problème ? » ☺...

Problème 1. Des drapeaux colorés...

On considère un damier rectangulaire, de taille $m \times n$ (c'est-à-dire ayant m lignes et n colonnes). Chaque case du damier peut contenir un drapeau d'une certaine couleur (que l'on représentera par un nombre correspondant à sa couleur), éventuellement aucun. Nous avons ci-contre une configuration possible, avec cinq drapeaux dont trois de la même couleur (couleur 2), d'un damier de taille 3×5 .

| | | | | |
|--|---|---|---|--|
| | 2 | | | |
| | 1 | 3 | 2 | |
| | | 2 | | |

Nous cherchons à placer des drapeaux sur ce damier en utilisant un maximum de couleurs possibles, mais avec la contrainte suivante : pour chaque paire de couleurs distinctes, disons A et B , nous voulons trouver quelque part un drapeau A « voisin » d'un drapeau B (par voisin, nous entendons ici contigus, horizontalement ou verticalement).

Dans notre exemple précédent, nous avons trois couleurs, 1, 2 et 3. Nous avons bien deux drapeaux voisins de couleurs 1 et 2 (verticalement), 1 et 3 (horizontalement) ainsi que 2 et 3 (horizontalement et verticalement). Notre contrainte est respectée, cette configuration est *valide* pour trois couleurs !

Sur ce damier 3×5 , il est possible que l'on puisse aller au-delà de trois couleurs, non ? Mais jusqu'à combien précisément ?

Les questions qui vont nous intéresser sont les suivantes :

1. Pour un damier de taille fixée, $m \times n$, quelle est le nombre maximum de couleurs pour lequel on peut trouver une configuration valide ?
2. Si l'on veut placer des drapeaux de k couleurs différentes, quel est la taille « minimale » d'un damier permettant de le faire ?

On pourra dans un premier temps considérer ces deux questions en ne considérant que des damiers de forme particulière, par exemple de taille $1 \times n$, $2 \times n$, etc. ou de forme carrée, c'est-à-dire de taille $n \times n$.

On pourra également considérer quelques variantes de ce problème, par exemple :

- Que se passe-t-il si l'on considère que les cases « qui ont un coin en commun » sont aussi voisines ?
- Que se passe-t-il si l'on veut, de plus, que pour chaque couleur on ait deux drapeaux voisins (deux voisins de couleur 1, deux voisins de couleur 2, etc.) ?
- Toute variante que vous proposeriez peut s'avérer intéressante à considérer...

Problème 2. Des soustractions...

On dispose d'une liste d'entiers, par exemple (2,5,8). À chaque étape, on choisit un nombre quelconque non nul d'entiers dans cette liste, par exemple 2 entiers, disons 5 et 8, auxquels on retranche une valeur quelconque, par exemple 3. L'exemple que nous venons de décrire correspond au « coup » :

$$(2,5,8) \rightarrow (2,2,5)$$

Le but du jeu est de « vider » (mettre à zéro) complètement la liste... en un minimum de coups ! Sur notre exemple, nous pouvons le faire en trois coups (ce n'est pas la seule façon de faire) :

$$(2,5,8) \rightarrow (2,2,5) \rightarrow (0,0,3) \rightarrow (0,0,0)$$

Bien sûr, le nombre de coups nécessaire peut être inférieur au nombre d'entiers dans la liste : si tous les entiers sont égaux, un seul coup suffit ! Mais ce n'est pas le seul exemple... Ainsi, en deux coups pour trois entiers :

$$(1,2,3) \rightarrow (0,2,2) \rightarrow (0,0,0)$$

Nous pouvons nous intéresser aux questions suivantes :

1. Combien de coups sont nécessaires (et suffisants) pour vider une liste de la forme $(1, 2, \dots, k)$?
2. Est-il possible de caractériser les listes « vidables » en 1 seul coup ? en 2 coups ? etc.
3. À l'inverse, à quoi ressemblent les listes à k éléments que l'on ne peut pas vider en moins de k coups ? en moins de $k-1$ coups ?

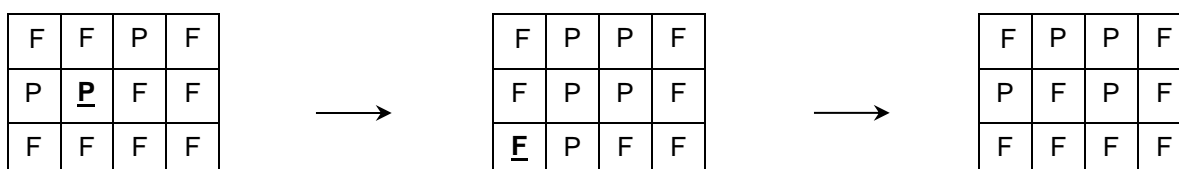
Là encore, plusieurs variantes sont envisageables... En voici une à titre d'exemple :

- Que se passe-t-il si on change légèrement la règle, en n'autorisant pas le joueur à choisir plus de p entiers à la fois dans la liste lors de chaque coup (par exemple pas plus de trois) ?

Problème 3. Des pièces...

On dispose de $m \times n$ pièces de monnaie (ayant un côté « pile » et un côté « face ») disposées en m rangées de n pièces. Un « coup » consiste à choisir l'une des pièces et à retourner toutes les pièces voisines (la pièce choisie n'est pas retournée). Les voisines d'une pièce sont celles situées immédiatement au-dessus, au-dessous, à gauche ou à droite. Une pièce a ainsi au plus quatre pièces voisines. Une pièce située dans un coin n'a que deux voisines, une pièce située sur un bord (sans être dans un coin) a trois voisines.

Voici un exemple de coups à partir d'une configuration de 3 rangées de 4 pièces. Une pièce « P » correspond à un côté pile, une pièce « F » à un côté face. Pour chaque coup, la pièce choisie est en gras souligné :



Le problème qui nous intéresse est le suivant :

1. En supposant qu'initialement toutes les pièces sont orientées côté pile ; est-il possible de les orienter toutes côté face par une succession de coups ? La réponse dépend-elle des valeurs de m et n ?

Naturellement, on pourra commencer par des cas « simples ». Par exemple :

2. Que se passe-t-il si l'on a une seule rangée de n pièces ?
3. Deux rangées de n pièces ?
4. Si $m = n$?...

Il est également toujours possible de considérer des « variantes » du problème initial. Par exemple :

- Que se passe-t-il si l'on retourne également la pièce choisie ?
- Que se passe-t-il si l'on retourne également les pièces « voisines par un coin » (une pièce non au bord possède alors 8 voisines) ? En retournant ou pas la pièce choisie ?
- Que se passe-t-il si l'on ne peut choisir à chaque coup que des pièces ayant un nombre impair de voisines côté pile ? En retournant ou pas la pièce choisie ?

Il est également possible d'essayer de déterminer toutes les configurations de départ (ou le plus grand nombre) pour lesquelles il est possible d'obtenir au final la configuration où toutes les pièces sont côté face...

On peut enfin s'intéresser à d'autres dispositions des pièces, par exemple en triangle :

- rectangle : une rangée de 1 pièce, puis de 2 pièces, de 3 pièces... de n pièces.
- isocèle : une rangée de 1 pièce, puis de 3 pièces, de 5 pièces... de $2p+1$ pièces.

Sur ce, bon courage à toutes et tous !

Éric SOPENA

Chercheur au LaBRI, Eric.Sopena@labri.fr