



MATH.en.JEANS

Année 2021 – 2022

Pour chaque problème, la 1^{re} question est « Mais quel nom pourrait-on donner à ce problème ? » ☺...

Problème 1. Premier rectangle

Deux joueurs vont s'affronter sur une grille $m \times n$ (m lignes, n colonnes). Le premier joueur dispose de jetons noirs, le second de jetons blancs. À tour de rôle, chaque joueur pose un jeton de sa couleur sur une case inoccupée et le premier joueur parvenant à placer ses jetons aux quatre coins d'un rectangle gagne la partie.

Voici un exemple, ci-contre, de configuration obtenue en cours de partie, configuration gagnante pour le joueur noir.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ● | o | o | x |
| ● | o | ● | ● |
| o | | ● | x |
| | | | |

En effet, le joueur blanc doit jouer... et il ne peut contrer les deux menaces du joueur noir, indiquées ici par des x.

Les questions naturelles sont alors les suivantes :

- Pour des valeurs de m et n données, peut-il y avoir des parties nulles (aucun des deux joueurs ne parvient à obtenir les quatre coins d'un rectangle) ?
- Pour des valeurs de m et n données, l'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? si oui laquelle ?

On pourra commencer par considérer des cas « simples », par exemple $m = 2$ ou $m = 3$...

Une variante intéressante est la suivante : cette fois, le premier joueur obtenant un rectangle perd la partie ! D'autres variantes sont certainement possibles, n'hésitez donc pas à laisser courir votre imagination...

On pourrait également considérer que le but du jeu est d'obtenir (ou pas, selon la variante considérée) les quatre coins d'un carré plutôt que d'un rectangle (ou tout autre forme géométrique raisonnable).

Problème 2. Maudits rectangles !

Considérons à nouveau une grille de $n \times m$ cases. On souhaite placer des entiers de 1 à k (k étant le plus petit possible) dans les cases de la grille de façon telle qu'on ne puisse trouver un « rectangle » dont les quatre coins contiennent le même entier.

L'exemple ci-contre montre un « rectangle interdit » dans une grille 5×7 .

| | | | | | | |
|--|---|--|--|--|---|--|
| | | | | | | |
| | 2 | | | | 2 | |
| | | | | | | |
| | 2 | | | | 2 | |
| | | | | | | |

La question principale est la suivante :

- Peut-on caractériser les grilles (c'est-à-dire leur dimension) que l'on peut remplir de cette façon en utilisant les entiers 1 et 2 ? les entiers 1, 2 et 3 ? etc.

On pourra naturellement commencer par considérer des grilles de taille $2 \times m$, puis $3 \times m$, etc.

Voici par exemple une grille 4×6 correctement remplie avec 3 entiers :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |

On pourra également considérer d'autres motifs interdits que les rectangles, par exemple les carrés, ou encore les « équerres » (un rectangle dont l'un des coins est supprimé).

Problème 3. Des soustractions...

On dispose d'une liste d'entiers, par exemple $(2,5,8)$. À chaque étape, on choisit un nombre quelconque non nul d'entiers dans cette liste, par exemple deux entiers, disons 5 et 8, auxquels on retranche une valeur quelconque, par exemple 3. L'exemple que nous venons de décrire correspond au « coup » :

$$(2,5,8) \rightarrow (2,2,5)$$

Le but du jeu est de « vider » complètement la liste (mettre à zéro tous les entiers)... en un minimum de coups ! Sur notre exemple, nous pouvons le faire en trois coups (ce n'est pas la seule façon de faire) :

$$(2,5,8) \rightarrow (2,2,5) \rightarrow (0,0,3) \rightarrow (0,0,0)$$

Bien sûr, le nombre de coups nécessaires peut être inférieur au nombre d'entiers dans la liste : si tous les entiers sont égaux, un seul coup suffit ! Mais ce n'est pas le seul exemple... Ainsi, en deux coups pour trois entiers :

$$(1,2,3) \rightarrow (0,2,2) \rightarrow (0,0,0)$$

Nous pouvons nous intéresser aux questions suivantes :

1. Combien de coups sont nécessaires (et suffisants) pour vider une liste de la forme $(1,2,\dots,k)$?
2. Est-il possible de caractériser les listes « vidables » en 1 seul coup ? en 2 coups ? etc.
3. À l'inverse, à quoi ressemblent les listes à k éléments que l'on ne peut pas vider en moins de k coups ? en moins de $k-1$ coups ?

Là encore, plusieurs variantes sont envisageables... En voici une à titre d'exemple :

- Que se passe-t-il si on change légèrement la règle, en n'autorisant pas le joueur à choisir plus de p entiers à la fois dans la liste lors de chaque coup (par exemple pas plus de trois) ?

Problème 4. Des drapeaux colorés...

On considère une grille rectangulaire, de taille $m \times n$ (c'est-à-dire ayant m lignes et n colonnes). Chaque case de la grille peut contenir un drapeau d'une certaine couleur (que l'on représentera par un nombre correspondant à sa couleur), éventuellement aucun. Nous avons ci-contre une configuration possible, avec cinq drapeaux dont trois de la même couleur (couleur 2), d'une grille de taille 3×5 .

| | | | | |
|--|---|---|---|--|
| | 2 | | | |
| | 1 | 3 | 2 | |
| | | 2 | | |

Nous cherchons à placer des drapeaux sur cette grille en utilisant un maximum de couleurs possibles, mais avec la contrainte suivante : *pour chaque paire de couleurs distinctes, disons A et B, nous voulons trouver quelque part un drapeau A « voisin » d'un drapeau B* (par voisin, nous entendons ici contigus, horizontalement ou verticalement).

Dans notre exemple précédent, nous avons trois couleurs, 1, 2 et 3. Nous avons bien deux drapeaux voisins de couleurs 1 et 2 (verticalement), 1 et 3 (horizontalement) ainsi que 2 et 3 (horizontalement et verticalement). Notre contrainte est respectée, cette configuration est *valide* pour trois couleurs !

Sur ce damier 3×5 , il est possible que l'on puisse aller au-delà de trois couleurs, non ? Mais jusqu'à combien précisément ?

Les questions qui vont nous intéresser sont les suivantes :

1. Pour une grille de taille fixée, $m \times n$, quelle est le nombre maximum de couleurs pour lequel on peut trouver une configuration valide ?
2. Si l'on veut placer des drapeaux de k couleurs différentes, quel est la taille « minimale » d'une grille permettant de le faire ?

On pourra dans un premier temps considérer ces deux questions en ne considérant que des grilles de forme particulière, par exemple de taille $1 \times n$, $2 \times n$, etc. ou de forme carrée, c'est-à-dire de taille $n \times n$.

On pourra également considérer quelques variantes de ce problème, par exemple :

- Que se passe-t-il si l'on considère que les cases « qui ont un coin en commun » sont aussi voisines ?
- Que se passe-t-il si l'on veut, de plus, que pour chaque couleur on ait deux drapeaux voisins (deux voisins de couleur 1, deux voisins de couleur 2, etc.) ?
- Toute variante que vous proposeriez peut bien sûr s'avérer intéressante à considérer...

Sur ce, bon courage à toutes et tous !

François DROSS, Éric SOPENA

Chercheurs au LaBRI, université de Bordeaux

Francois.Dross@u-bordeaux.fr, Eric.Sopena@u-bordeaux.fr