Le Jeu du XXX

Année 2013-2014

Élèves :

Pierre DROUOT (Terminale S)
Hugo LAFON (Terminale S)
Simon LASSOURREUILLE (Terminale S)
Hugo SAINT-VIGNES (Terminale S)

Etablissements :

Lycée de la mer de Gujan-Mestras
Jumelé avec l'Université de Bordeaux I

Professeurs :

Mme Christine DELMAIRE
Mme Marie-Line CHABANOL

Chercheur :

M. Eric SOPENA, chercheur au LaBRI, université de Bordeaux

Le sujet traite de l'étude d'une version du célèbre jeu de Nim.

Nous avons choisi de travailler sur la règle du « qui perd gagne » (celui qui prend le dernier jeton perd) et tenté de répondre aux questions posées par notre chercheur Eric SOPENA :

- Sauriez-vous dire si une chaîne de longueur n est gagnante ou perdante (en fonction de n naturellement) ?
- Sauriez –vous proposer une stratégie pour les chaînes gagnantes ?

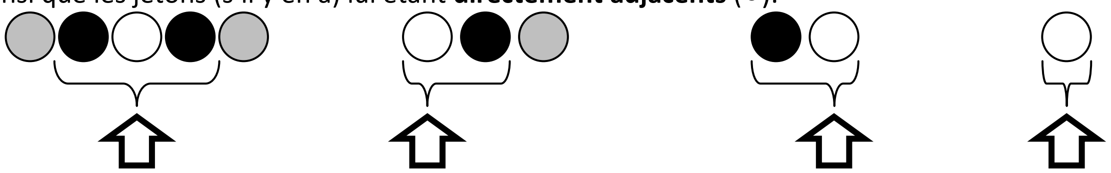
Pour répondre à la première question, nous avons répertorié les chaînes gagnantes ou perdantes jusqu'à 14 jetons puis nous avons remarqué qu'il y avait une répétition modulo 14.
A l'aide d'un tableau à double entrée, nous avons proposé une stratégie pour les chaines gagnantes.
Pour autant, les résultats proposés ne sont que des conjectures mais si vous jouez parfaitement bien, vous pouvez toujours vous appuyer sur cette méthode pour gagner !

Un beau jour d'été, Bob et Alice s'ennuient. Bob propose alors :
« Jouons à un jeu, Alice, mais pas n'importe lequel… Le jeu du XXX !
- Soit, dit Alice, se levant. Mais d'abord je me fais belle. »
Elle part vers la salle de bain. Bob l'avertit, d'un air narquois :
« Ça ne m'empêchera pas de gagner, tu sais. D'ailleurs, c'est moi qui commence !
- Dans ce cas, Je choisis le nombre de jetons, réplique-t-elle, en fermant la porte à double tour »
En réalité, Alice ne compte pas se faire belle, elle l'est déjà. C'est en fait un stratagème pour gagner. Il lui faut trouver une solution pour que Bob morde la poussière, et vite, car déjà elle entend le cliquetis des jetons jetés sur la table...

Le Jeu du XXX

I] Présentation du Jeu du XXX

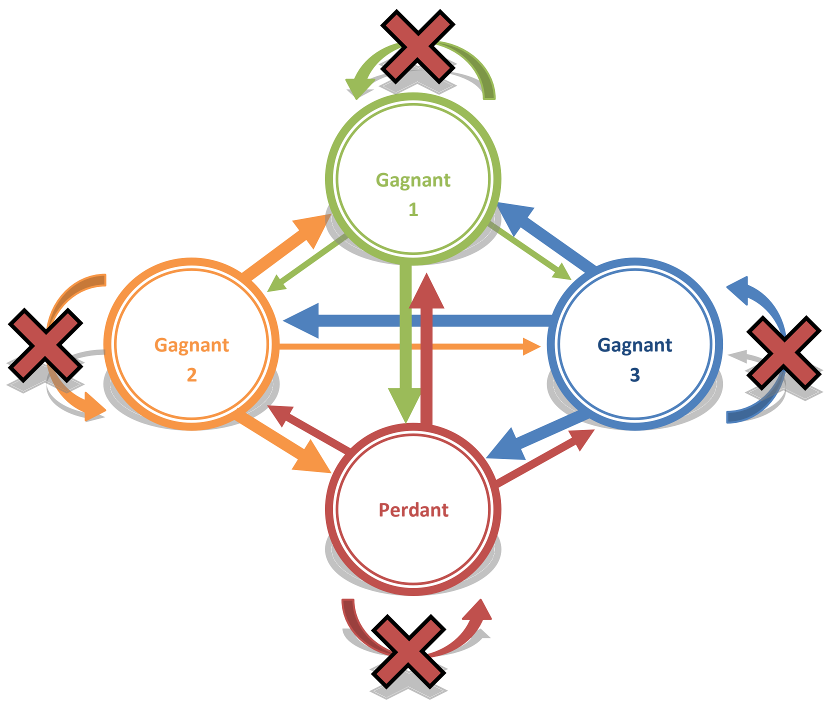
Le **Jeu du XXX** est une variante des **jeux de Nim**, ayant la particularité de se jouer à **deux joueurs** sur différents supports tels que des pierres, des bâtons, ou, comme ici, **des jetons**. Dans ce jeu, les joueurs enlèvent **tour à tour** un jeton (○), ainsi que les jetons (s'il y en a) lui étant **directement adjacents** (●).



Le **but du jeu** est de **contraindre son adversaire** à enlever **le dernier jeton** directement ou indirectement (si le dernier jeton est un jeton adjacent). Dans l'exemple ci-dessus, il y a 4 **groupes** (ensembles de jetons non séparés par un espace vide) de 5, 3, 2 et 1 jetons, noté **[5, 3, 2, 1]**, on appelle cela une **situation**. Pour trier les situations, on dit qu'elles appartiennent à une **Classe.** Cette dernière peut être :

- **Perdante** (Quel que soit le jeton enlevé par le joueur, la situation devient **gagnante**)
- **Gagnante** (Il existe au moins un jeton que le joueur peut enlever pour que la situation devienne **Perdante**). Il existe trois classes (1) **gagnantes** : **Gagnant 1**, **Gagnant 2** et **Gagnant 3**.

Le graphe ci-contre résume les propriétés de chaque classe :
Les flèches épaisses indiquent qu'**il existe au moins un coup** ramenant la situation initiale vers la classe pointée, les flèches fines indiquent **qu'il peut (ou pas) exister un coup** faisant de même. On note aussi qu'il n'existe aucun coup qui mène d'une classe vers elle-même. (2)



*Revenons à la situation périlleuse d'Alice, elle imagine son duel sur un groupe de 12 jetons, noté **[12]**.Comme convenu, Bob commence, mais **[12]** est une situation **gagnante** (de classe **Gagnant 2**), ce qui signifie que Bob, qui joue parfaitement, saura qu'il existe au moins un jeton qui, une fois enlevé avec les jetons adjacents, laissera Alice dans une situation **perdante**. Quel que soit le jeton qu'elle enlèvera sur cette situation **perdante**, elle laissera Bob dans une situation **gagnante** (**Gagnant 1**, **Gagnant 2** ou **Gagnant 3**). Là encore, il pourra, et saura, jouer de manière à laisser Alice **perdante**, et ainsi de suite jusqu'à ce que cette malheureuse soit confrontée à la situation **[2]** ou **[1]**, toutes deux **perdantes**, et soit contrainte d'enlever le dernier jeton. Elle aura alors perdu cette manche !*

Si les joueurs jouent parfaitement, on peut donc déterminer l'issue d'une partie à partir de la classe de la situation initiale. Mais comment déterminer la classe d'une situation ?

II] Déterminer la classe d'une situation

a) Classe d'un groupe

On s'intéresse d'abord à une **situation d'un seul groupe**, cas le plus simple, notée **[X]**, X étant le **nombre de jetons** contenus dans ce groupe. Il peut cependant arriver, qu'au cours de la partie, la situation se sépare en **plusieurs groupes**.

Apres étude des 14 premiers cas (pour X allant de 0 à 13, 0 étant **gagnant** car il implique que le joueur adverse vient de prendre le dernier jeton), en répertoriant tous les coups possibles (méthode expliquée en annexe), on obtient le tableau suivant :

Perdant	Gagnant 1	Gagnant 2	Gagnant 3
1	**0**	**3**	**5**
2	**4**	**12**	**10**
6	**8**		
7	**9**		
11	**13**		

Par exemple, si Alice défie Bob sur ***[11]****, et qu'elle joue parfaitement, elle gagnera la partie, car* ***[11]*** *est* ***Perdant*** *pour le joueur qui commence. Mais Alice n'est pas une petite joueuse, elle compte gagner sur bien plus de jetons.*

Du fait qu'un groupe peut être séparé en deux au cours d'une partie, prolonger le tableau n'est pas aisé, mais cela reste possible grâce à un tableau à double entrée présenté dans la partie suivante, et à l'aide d'outils informatiques. Voici ce que l'on obtient en prolongeant le tableau jusqu'à 33 :

Perdant	Gagnant 1	Gagnant 2	Gagnant 3
1	**0**	**3**	**5**
2	**4**	**12**	**10**
6	**8**	17 = *14 x 1 +* ***3***	19 = *14 x 1 +* ***5***
7	**9**	26 = *14 x 1 +* ***12***	24 = *14 x 1 +* ***10***
11	**13**	31 = *14 x 2 +* ***3***	33 = *14 x 2 +* ***5***
15 = *14 x 1 +* ***1***	14 = *14 x 1 +* ***0***	**…**	**…**
16 = *14 x 1 +* ***2***	18 = *14 x 1 +* ***4***		
20 = *14 x 1 +* ***6***	22 = *14 x 1 +* ***8***		
21 = *14 x 1 +* ***7***	23 = *14 x 1 +* ***9***		
25 = *14 x 1 +* ***11***	27 = *14 x 1 +* ***13***		
29 = *14 x 2 +* ***1***	28 = *14 x 2 +* ***0***		
30 = *14 x 2 +* ***2***	32 = *14 x 2 +* ***4***		
…	**…**		

D'abord d'apparence aléatoire, les valeurs de X définissant une même classe suivent une **période de 14**. C'est-à-dire qu'un groupe **[X]** est de la même classe qu'un groupe **[X + 14]**. De plus, cette propriété permet de déterminer la classe d'un groupe à partir du nombre de jetons seulement, en effet, **la classe d'un groupe de X jetons est la classe d'un groupe comportant le reste de la division euclidienne de X par 14 jetons.** (3)

*Fière de sa trouvaille, Alice range son Smartphone, sur lequel elle a prolongé le tableau. Elle sait désormais que, si elle affronte Bob sur **[76]**, et joue parfaitement, elle gagnera, car le reste de la division euclidienne de 76 par 14 est 6 (76 = 14 x 5 + **6** ou 76 ≡ **6** [14]), et **[6]** est **Perdant** pour Bob, d'après le tableau des 14 premières valeurs. Néanmoins, Alice n'est pas convaincue, battre Bob sur un seul groupe ne suffira pas à venger toutes ses précédentes défaites, elle préférerait affronter Bob sur une situation de 2 groupes, voire plus…*

b) Situation composée d'au moins deux groupes

Dans le cas d'une situation à **plusieurs groupes**, comment, à partir du nombre de jetons, peut-on déterminer la classe de la situation ?
Prenons l'exemple de **[X, Y]**. À l'aide de la méthode précédente, on peut déterminer la classe de chacun des deux groupes. En analysant des situations, et leurs résultats, on peut conjecturer le tableau suivant, mettant en relation la **classe d'une situation** en fonction de la classe de chacun des groupes.

	Perdant	**Gagnant 1**	**Gagnant 2**	**Gagnant 3**
Perdant	Gagnant 1	Perdant	Gagnant 3	Gagnant 2
Gagnant 1	Perdant	Gagnant 1	Gagnant 2	Gagnant 3
Gagnant 2	Gagnant 3	Gagnant 2	Perdant	Gagnant 1
Gagnant 3	Gagnant 2	Gagnant 3	Gagnant 1	Perdant

La ligne du haut représente la classe du groupe X, tandis que la colonne de gauche représente celle du groupe Y. La case correspondant à la colonne de la classe du groupe X et à la ligne du groupe Y représente la classe de la situation **[X, Y]**. On remarque ici l'intérêt des classes **Gagnant 2** et **Gagnant 3**, dont le comportement diffère de la classe **Gagnant 1**.

*« Une situation **[124, 45]** correspondrait assez bien » se dit tout bas Alice. En effet, 45 (45 = 14 x 3 + **3**) est **Gagnant 2**, et 124 (124 = 14 x 8 + **12**) est aussi **Gagnant 2**. D'après le tableau à double entrée, la combinaison de ces deux classes donne une situation **Perdante**, ce qui lui assurerait la victoire. « Mais comment faire lorsqu'on a plus de deux groupes ? » se demande-elle.*

Pour déterminer la classe d'une situation de plusieurs groupes, il faut **raisonner par paires**. Pour une situation **[A, B, C, D]**, il faudra par exemple déterminer les classes respectives de **[A, B]** et de **[C, D]**, comme décrit précédemment, puis celle de **[[A, B], [C, D]]** comme si **[A, B] et [C, D]** étaient chacune la classe d'un unique groupe.

« Il ne me manque plus qu'à trouver comment jouer parfaitement et je pourrai lui faire goûter la défaite ! » jubile Alice, cela fait déjà 10 minutes qu'elle se fait belle, et Bob ne saurait tarder à s'impatienter.

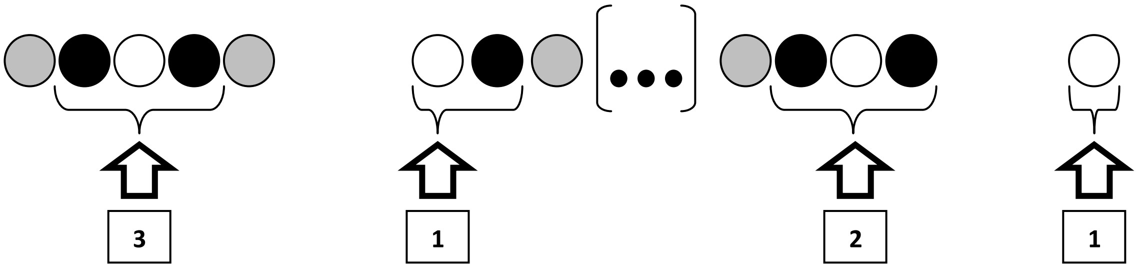
III] Jouer parfaitement

Pour **gagner une manche**, il ne suffit pas de commencer sur une situation **gagnante**, il faut aussi savoir trouver le jeton à enlever pour **maintenir son adversaire dans une situation perdante**, et ce n'est pas des plus simples.
Face à une situation **gagnante** comme **[X]**, il faut trouver le jeton à enlever pour transformer la situation en **[Y]**, appartenant à la classe **Perdant**, ou bien en **[W, Z]** tel que, d'après le tableau des classes, cette situation soit aussi **Perdante**. Lorsque la situation initiale est composée de plusieurs groupes, comme par exemple **[X, A, B, C]**, il faut jouer sur X de manière à ce que **[Y, A, B, C]**, ou **[W, Z, A, B, C]** si on sépare le groupe X en **[W, Z]**, soient **Perdants**.

Cependant, il est difficile de prévoir tout cela au cours d'une partie c'est pourquoi il faut en faire un **tableau solution** désignant le jeton à prélever pour transformer une situation **gagnante** en situation **perdante**.

Dans l'explication précédente, les classes des groupes A, B et C sont inutiles pour savoir où jouer sur X, il suffit juste de connaître la classe de la situation **[A, B, C]**, à l'aide du tableau des classes. Dans le cas où un seul groupe rentre en jeu, comme au début de l'explication, il faut considérer **[X]** par **[D, X]**, **[D]** étant de classe Gagnant 1, car la classe Gagnant 1 est **l'élément neutre**, ce qui signifie qu'elle n'influe en rien une situation : la classe de **[D, X]** est alors la même que **[X]** ou **[D, D, X]**. (4)

Enfin, enlever un jeton sur un groupe se désigne par un nombre N correspondant au Nième jeton enlevé **en partant d'une extrémité** du groupe (l'extrémité choisie importe peu car un groupe est symétrique) :



Voici le Tableau solution permettant de **jouer parfaitement** (5). Il faut tout d'abord choisir le **groupe le plus long**, c'est dans celui-ci que l'on va enlever un jeton, et se référer à la ligne lui correspondant en fonction du reste de la division euclidienne par 14 du nombre de jetons qu'il contient (dans la colonne de gauche). Ensuite, il faut se référer à la classe des **groupes restants**, c'est-à-dire la classe d'une situation composée de tous les groupes de la situation sauf du groupe dans lequel on joue. Comme pour le tableau des classes, il suffit ensuite de relier colonne et ligne pour trouver **quel jeton enlever sur le groupe principal** pour mener la situation vers une situation Perdante pour l'adversaire.

Reste de la division euclidienne par 14 du nombre de jetons du plus grand groupe.	**Classe des groupes restants**	**Gagnant 1 (ou rien)**	**Perdant**	**Gagnant 2**	**Gagnant 3**
	Classe				
0	Gagnant 1	2	Perdant	1	
1	Perdant	Perdant	1	2	
2	Perdant	Perdant	1		3
3	Gagnant 2	1	2	Perdant	4
4	Gagnant 1	1	Perdant		
5	Gagnant 3	2	3	1	Perdant
6	Perdant	Perdant	1	2	
7	Perdant	Perdant	2		1
8	Gagnant 1	1	Perdant		2
9	Gagnant 1	1	Perdant	3	
10	Gagnant 3	2	1	4	Perdant
11	Perdant	Perdant	1		
12	Gagnant 2	3	2	Perdant	1
13	Gagnant 1	1	Perdant		2

*Si, par exemple, Alice se retrouve, pendant sa partie, dans une situation **gagnante** elle saura, en jetant un œil sur le tableau inscrit sur son Smartphone ou sur une feuille de papier, comment jouer pour mener Bob vers des situations perdantes, et le vaincre. Cette dernière élabore ainsi des plans dans sa tête : « Si je suis confrontée à **[33, 26, 18]** de classe **[Gagnant 3**, **Gagnant 2**, **Gagnant 1]**, avec **[26, 18]** de classe **Gagnant 2** donc **[33, 26, 18]** est comme **[33, [26, 18]]** soit **[Gagnant 3**, **[Gagnant 2]]**. Donc le tout est **Gagnant 1**, je peux donc gagner en jouant parfaitement. Pour cela je jouerai sur le groupe de 33 jetons, le plus grand groupe qui se réfère à la ligne « 5 » du tableau (car 33 = 2 x 14 + **5**). La classe de l'ensemble restant, de **[26, 18]** est **Gagnant 2** donc en me référant au tableau solution à la colonne Gagnant 2 et à la ligne « 5 », je dois jouer le premier jeton ! Ainsi, en jouant ce jeton, le groupe de 33 qui deviendra un groupe de 31, je laisserai bob se casser les dents sur la situation **[31, 26, 18]**, qui est **perdante**, Haha ! »*

Il peut parfois arriver que la case atteinte soit **grise**, il suffit dans ce cas de **jouer dans un autre groupe**, et de se référer à nouveau au tableau avec ces paramètres. Si la classe indique « **Perdante** », c'est que la situation dans laquelle on joue est **Perdante**, si l'adversaire joue parfaitement, la manche est perdue.

IV] Conclusion

Il est donc désormais possible de **gagner à tous les coups**, à condition de jouer sur une situation **gagnante** et de suivre ces instructions :

Soit la situation **[A, B, C]**, A étant le plus grand groupe.

1 - On détermine la classe de **[A]** grâce à la division euclidienne de A par 14.

2 - Grâce au tableau des classes, on détermine alors la classe de la situation des groupes restants, c'est-à-dire **[B, C]**.

3 - À l'aide du tableau solution, on enlève le pion adéquat sur A afin de laisser à l'adversaire une situation **perdante**.

4 - L'adversaire joue et laisse une nouvelle situation **gagnante**, on répète alors l'opération jusqu'à gagner.

« À moi la victoire ! s'écrie Alice sortant en trombe de la salle de bain. Voici les jeux Bob : quatre groupes, de 103, 81, 45, et 42 jetons !
- Rien que ça ! s'exclame Bob, dubitatif. Je relève le Défi ! »

***

*Après un duel épique, ponctué d'émotions et de rebondissements, Bob se retrouve, dépité, face à un **[2]**, c'est bien la première fois qu'il prend le dernier jeton. Alice, quant à elle, affiche un grand sourire, il l'avait bien mérité !*
« Bien joué Alice, mais ce n'est que de la chance, personne ne peut me battre au jeu du XXX !
- Plus maintenant, Bob, et si tu persistes à te croire le plus fort, je te propose un nouveau défi. Mais maintenant, changeons les règles : celui qui prend le dernier jeton a gagné la partie.
-Soit, accorde Bob après quelques secondes de réflexion, mais avant… je… je vais me laver les dents ! »

Fin

Épilogue

Quelque temps plus tard, Alice alla passer un week-end chez son oncle Clark, professeur de mathématiques, et lui conta son aventure…
« Tu sais Alice, le jeu que tu me décris est un jeu qui a été propose il y a bien longtemps, dans les années 1930 il me semble, par un passionne du jeu d'échecs, Thomas Rayner Dawson. Le jeu initial se jouait sous une forme un peu différente, avec des pions du jeu d'échecs, mais tout a fait équivalente a ta version avec jetons. Par la suite, on a appelé ce jeu "Les échecs de Dawson".
– Et lui, il savait comment gagner ?
– Euh… pas vraiment, non. Mais lui aussi croyait savoir…
– Lui aussi ? Que veux-tu dire ?
– Eh bien… ce jeu est très complique en fait. Même aujourd'hui, personne n'a encore pu découvrir la stratégie gagnante, ni même dire dans quel cas une situation et gagnante ou perdante. Mais le plus fantastique dans tout ca, c'est que tu as retrouve par toi-même les résultats, erronés, de Dawson !
– Comment ca ?
– Lui aussi croyais que tout dépendait du reste de la division euclidienne par 14 et que les situations perdantes étaient celles dont ce reste valait 1, 2, 6, 7 ou 11. Il disait même avoir pu vérifier tout cela jusqu'à des rangées de 50 jetons… et sans ordinateur bien sur !
– Mouais… mais pourquoi dis-tu que tout cela est faux ? J'ai quand même trouve la même chose que lui !
*– Oh moi je ne dis rien… C'est Thomas Ferguson, professeur de mathématiques à l'université de Californie, a Los Angeles, qui explique que l'erreur de Dawson a été découverte grâce a un programme d'ordinateur, en 1974. Le programme a permis de voir que la situation a 43 jetons était en fait gagnante pour le premier joueur alors que, pourtant, 43 = 3 x 14 + **1** !...*
– Humm, c'est bien dommage tout ca… Que peut-on faire alors ?
– Eh bien, a part continuer à chercher je ne vois pas ! »
Alice sourit, et attrapa son Smartphone.
« Attends, dit l'oncle Clark, autre chose… Tu sais, l'autre version dont tu parlais, celle ou le dernier a pouvoir jouer gagne la partie…
– Oui, et alors ?
– Eh bien cette version-la, on sait la résoudre !
– Ah oui, et comment ?
– Tout simplement en calculant le reste de la division euclidienne par 34 ! Il y a quelques exceptions au début, mais à partir de 52 jetons ca marche…
– Et quelles sont les situations perdantes alors ?
– Lorsque le nombre de jetons vaut 0, 4, 8, 14, 19, 24, 28, 34, 38 ou 42 et, lorsque celui-ci dépasse 51, lorsque le reste de la division euclidienne par 34 vaut 4, 8, 20, 24 ou 28.
– Ca alors ! Mais comment trouve-t-on tout ca ?
– C'est un peu complique mais… »
L'explication fut interrompue par la sonnerie du Smartphone d'Alice… sur lequel s'affichait le visage hilare de Bob.

Quelques liens :

- Thomas Rayner Dawson : *http://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Dawson*
- Pour jouer en ligne aux échecs de Dawson (version ≪ le dernier qui joue gagne la partie ≫) :
  - *http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Games/DawsonChess.shtml*
  - *http://www.math.ucla.edu/~tom/Games/dawson.html*
- Une version du jeu sur un damier : *http://www.lkozma.net/game.html*
- L'article de Thomas S. Ferguson (en anglais) : *http://miseregames.org/docs/DawsonChess.pdf*

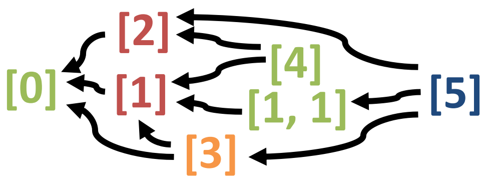
Annexe

Questions complémentaires :

Comment a-t-on déterminé la classe des 14 premiers cas (tableau page 2) ?

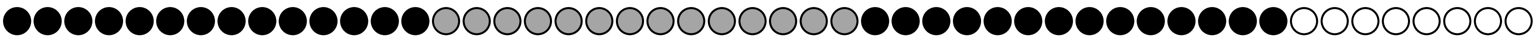
Pour déterminer à quelle classe appartiennent des groupes tels que **[3]** ou **[10]**, on réalise un graphe orienté représentant toutes les situations vers lesquelles un groupe donné peut mener, en voici un extrait :

Par exemple, la situation **[5]** appartient à la classe **Gagnant 3** car, d'après le graphe, page 1, il existe au moins un coup menant vers une situation **Perdante**, **[2]**, au moins un coup menant vers une situation **Gagnant 1**, **[1, 1]**, et un Dernier menant vers **Gagnant 2**, **[3]**.



Comment déterminer le reste de la division euclidienne du nombre de jeton par 14 d'un groupe ?

Voici un paquet de 50 Jetons, pour connaitre sa classe, on imagine des divisions de 14 jetons (ici en noir et gris)



Le nombre de jetons restants (ne rentrant pas dans une division de 14), en blanc, est alors le reste de la division euclidienne du nombre de jetons total par 14, la classe de ce groupe est donc la même que celle d'un groupe de 8 jetons (**Gagnant 1**).

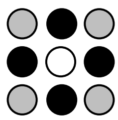
Comment jouer lorsque l'on est dans une situation **perdante** ?

Dans une situation **Perdante**, il n'y a en théorie **aucun moyen de gagner**. Cependant, l'adversaire peut toujours **faire des erreurs**, surtout lorsque le nombre de groupe se multiplie. Afin de lui compliquer la tâche et maximiser ses chances de faire une erreur, la meilleure technique est de casser les grands groupes en deux en jouant au milieu.

Existe-t-il d'autres variantes du jeu du XXX ?

Il existe une **multitude de variantes**, à commencer par celle proposée par Alice, où le joueur qui a pris le dernier pion a gagné la partie. Il existe aussi des règles telles que la **« Quick »**, dans laquelle, à chaque tour, le joueur joue une fois dans chacun des groupes de la situation, ou encore la **« Gros Bras »** où l'un des deux joueurs joue deux fois de suite tandis que l'autre ne joue qu'une fois.

Enfin, on peut jouer au jeu du XXX sur plusieurs configurations, ici les jetons sont disposés en ligne. Mais on peut aussi jouer sur un **cercle** de jetons, sur un **quadrillage** (dans ce cas, on peut enlever jusqu'à 4 jetons adjacents) où même sur un **Globe** terrestre où le croisement des méridiens et parallèles représentent des jetons.



Pour chacune de ces variantes, **les solutions et manières de jouer sont différentes**.

Quizz :

Ces situations sont-elles **perdantes** ? Sinon, dans quel groupe jouer, et quel pion enlever pour en faire une situation **gagnante** (plusieurs réponses sont possible) ?

A) [2014]
B) [145, 101, 100]
C) [4, 8, 15, 16, 23, 42]
D) [116, 80]
E) [2110, 1727]
F) [18965, 66582, 42251, 12335]

Réponses : A) Non, 2014, 3 B) Oui
C) Non, 42, 2 D) Non, 80, 2 E) Oui
F) Non, 18956, 3

Notes d'édition :

(1) Le numéro de la classe correspond à la fonction de Grundy de la situation de jeu. Cette fonction associe un nombre à chaque situation du jeu. Les situations qui valent 0 sont les situations perdantes. En remontant dans le graphe des situations (voir l'exemple donné en annexe) on donne à une configuration dont toutes les configurations suivantes ont été évaluées, la plus petite valeur qui n'est pas attribuée à une des configurations suivantes. Le calcul de cette fonction est une entreprise très difficile en règle générale. Ce problème ne fait pas exception. Dans le cas présent, les auteurs affirment que cette fonction ne peut prendre que les valeurs 0,1,2 et 3 mais cela n'est pas démontré.

(2) La grosseur des flèches partant des situations gagnantes s'explique avec la note précédente. Par contre, il n'est pas expliqué pourquoi il y a une flèche épaisse partant d'une situation perdante et allant dans une situation gagnante1. Cela ne semble pas évident.

(3) Attention, la propriété en question n'est pas démontrée et n'est qu'une observation empirique.

(4) Le fait que la classe gagnant1 soit l'élément neutre résulte du tableau précédent qui lui-même n'est qu'une conjecture, ces résultats ne sont pas démontrés.

(5)La manière dont ce tableau a été obtenu n'est malheureusement pas expliquée ici.