

N° d'ordre : 2957

**THÈSE**  
PRÉSENTÉE À  
**L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I**  
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET  
D'INFORMATIQUE

Par **Mohammad HOSSEINI DOLAMA**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

mention : Mathématiques Discrètes

---

**Contribution à l'étude de quelques problèmes de coloration de graphes**

---

**Soutenue le : 4 Février 2005**

**Après avis des rapporteurs :**

Guillaume Fertin ..... Maître de conférences HDR  
Oriol Serra ..... Professeur

**Devant la commission d'examen composée de :**

Guillaume Fertin	.....	Maître de conférences HDR	Rapporteur
André Raspaud	.....	Professeur	Examineur
Nasser Saheb-Djahromi	.....	Maître de conférences HDR	Examineur
Oriol Serra	.....	Professeur	Rapporteur
Éric Sopena	.....	Professeur	Directeur de thèse
Ondrej Sykora	.....	Professeur	Examineur

- 2005 -



# Contribution à l'étude de quelques problèmes de coloration de graphes

---

**Résumé :** Les problèmes de coloration sont au coeur de la théorie des graphes. Dans ce mémoire de thèse, nous nous intéressons essentiellement à deux types de colorations de graphes : les colorations d'incidences et les colorations orientées.

Une *incidence* d'un graphe  $G$  est une paire  $(v, e) \in V(G) \times E(G)$  telle que  $v$  et  $e$  sont incidents. Deux incidences  $(v, e)$  et  $(w, f)$  sont *adjacentes* si l'une des conditions suivantes est satisfaite : (i)  $v = w$ , (ii)  $e = f$  ou (iii) l'arête  $vw$  est égale à  $e$  ou  $f$ . Une *k-coloration d'incidence* d'un graphe  $G$  est une application de l'ensemble des incidences de  $G$  dans un ensemble  $C$  de  $k$  couleurs telle que des couleurs distinctes sont affectées aux incidences adjacentes. Le *nombre chromatique d'incidence* de  $G$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -coloration d'incidence.

Une *k-coloration orientée* d'un graphe orienté  $G$  est une application  $c$  de l'ensemble des sommets  $V(G)$  de  $G$  vers l'ensemble de couleurs  $C = \{1, 2, \dots, k\}$  telle que (i) si  $(x, y)$  est un arc de  $G$  alors  $c(x) \neq c(y)$  et (ii) si  $(x, y)$  et  $(z, t)$  sont deux arcs de  $G$  tels que  $c(x) = c(t)$  alors  $c(y) \neq c(z)$ . Le *nombre chromatique orienté* d'un graphe orienté  $G$  est le plus petit entier  $k$  tel qu'il existe une  $k$ -coloration orientée de  $G$ .

Nous étudions ces deux types de colorations pour différentes familles de graphes.

En particulier, nous proposons différentes bornes pour :

- le nombre chromatique d'incidence des graphes  $k$ -dégénérés, des graphes planaires, des graphes de degré moyen maximum borné et des graphes distances,
- le nombre chromatique orienté des graphes d'excès  $k$ , des graphes planaires  $k$ -extérieurs, des graphes de Halin et des graphes distances.

---

**Discipline :** Informatique

---

**Mots-Clefs :**

Graphe non orienté, graphe orienté, graphe planaire  $k$ -extérieur, graphe de Halin, homomorphisme, excès d'un graphe, incidence, coloration propre, coloration acyclique, coloration orientée, coloration d'incidences, carré d'un graphe, graphe distance.

---

LaBRI,  
Université Bordeaux 1,  
351 cours de la Libération,  
33405 Talence Cedex (FRANCE).

---

# Contribution to the study of some graph coloring problems

---

**Abstract :** Coloring problems are in the core of graph theory. In this thesis, we are interested mainly in two types of graph colorings : incidence colorings and oriented colorings.

An *incidence* in a graph  $G$  is a pair  $(v, e) \in V(G) \times E(G)$  such that  $v$  and  $e$  are incident. Two incidences  $(v, e)$  and  $(w, f)$  are *adjacent* if one of the following holds : (i)  $v = w$ , (ii)  $e = f$  or (iii) the edge  $vw$  equals  $e$  or  $f$ . A *k-incidence-coloring* of a graph  $G$  is a mapping from the set of the incidences of  $G$  to a set  $C$  of  $k$  colors such that adjacent incidences are assigned distinct colors. The *incidence chromatic number* of  $G$  is the smallest  $k$  such that  $G$  admits a  $k$ -incidence coloring.

An *oriented k-coloring* of an oriented graph  $G$  is a mapping  $c$  from the vertices set  $V(G)$  of  $G$  to the colors set  $C = \{1, 2, \dots, k\}$  such that (i) if  $(x, y)$  is an arc in  $G$  then  $c(x) \neq c(y)$  and (ii) if  $(x, y)$  and  $(z, t)$  are two arcs in  $G$  such that  $c(x) = c(t)$  then  $c(y) \neq c(z)$ . The *oriented chromatic number* of an oriented graph  $G$  is the smallest integer  $k$  such that  $G$  admits an oriented  $k$ -coloring.

We study these two types of colorings for different families of graphs.

In particular, we propose different bounds for :

- the incidence chromatic number of  $k$ -degenerated graphs, planar graphs, graphs of bounded maximum average degree and distance graphs,
- the oriented chromatic number of graphs with excess  $k$ ,  $k$ -outerplanar graphs, Halin graphs and distance graphs.

---

**Discipline :** Computer Science

---

**Keywords :**

Undirected graph, oriented graph,  $k$ -outerplanar graph, Halin graph, homomorphism, excess of a graph, incidence, proper coloring, acyclic coloring, oriented coloring, square of a graph, distance graph.

---

LaBRI,  
Université Bordeaux 1,  
351 cours de la Libération,  
33405 Talence Cedex (FRANCE).

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Éléments de théorie des graphes</b>	<b>7</b>
1.1 Graphes et homomorphismes . . . . .	7
1.2 Relation d'adjacence et degrés . . . . .	10
1.3 Chemins et cycles . . . . .	12
1.4 Graphes complets et bipartis . . . . .	12
1.5 Connexité . . . . .	14
1.6 Arbres, forêts et autres propriétés des graphes . . . . .	16
1.7 Contractions et mineurs . . . . .	19
<b>2 Coloration d'incidence</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Coloration d'incidence et arête-coloration forte . . . . .	30
2.3 Coloration d'incidence et étoile-arboricité . . . . .	34
2.4 $(k, \ell)$ -coloration d'incidence . . . . .	34
2.5 Graphes $k$ -dégénérés . . . . .	36
2.6 Graphes sans mineur $K_4$ . . . . .	38
2.7 Graphes planaires . . . . .	43
2.8 Graphes 3-dégénérés . . . . .	49
2.9 Graphes de degré moyen maximum borné . . . . .	53
<b>3 Coloration orientée</b>	<b>65</b>
3.1 Introduction . . . . .	65
3.1.1 Colorations propres . . . . .	65

3.1.2	Colorations acycliques . . . . .	66
3.1.3	Colorations impropres . . . . .	68
3.1.4	Colorations orientées . . . . .	69
3.2	Coloration des graphes d'excès $k$ . . . . .	76
3.2.1	Introduction . . . . .	76
3.2.2	Nombre chromatique des graphes d'excès $k$ . . . . .	77
3.2.3	Nombre chromatique orienté des graphes d'excès $k \leq 2$ . . . . .	78
3.2.4	Nombre chromatique orienté des graphes d'excès $k \geq 3$ . . . . .	81
3.3	Graphes planaires 2-extérieurs sans triangle . . . . .	90
3.4	Les graphes de Halin . . . . .	103
<b>4</b>	<b>Coloration des graphes distances</b>	<b>111</b>
4.1	Introduction . . . . .	111
4.2	Coloration d'incidence . . . . .	114
4.3	Nombre chromatique d'incidence d'un graphe et ... . . . .	120
4.4	Colorations propres et acycliques . . . . .	124
4.5	Colorations orientées . . . . .	126
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>133</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>140</b>
	<b>Index</b>	<b>141</b>

# Table des figures

1.1	Exemples de graphes . . . . .	8
1.2	Exemple d'homomorphisme . . . . .	8
1.3	Un graphe $G$ et deux sous-graphes $G'$ et $G''$ de $G$ . . . . .	9
1.4	Deux graphes $G, G'$ avec leur union, différence et intersection . . . . .	10
1.5	Un graphe $G$ isomorphe à son complément $\bar{G}$ . . . . .	11
1.6	Exemple de graphe . . . . .	11
1.7	Un cycle $C_9$ avec une corde $uv$ , et deux cycles induits $C_7$ et $C_4$ . . . . .	13
1.8	Exemples de graphe complet ( $a$ ), biparti complet ( $b$ ) et d'étoile ( $c$ ) . . . . .	13
1.9	Exemple de graphe . . . . .	14
1.10	Un graphe non connexe . . . . .	15
1.11	Exemples de sommets d'articulation et d'isthme . . . . .	15
1.12	Un graphe $G$ et son graphe-bloc $B(G)$ . . . . .	16
1.13	Exemple d'arbre . . . . .	17
1.14	Construction de 3-arbres . . . . .	17
1.15	Autres exemples de graphes . . . . .	18
1.16	Contraction de l'arête $e = uv$ . . . . .	20
1.17	Exemple de mineur . . . . .	20
1.18	Exemple de mineur topologique . . . . .	21
2.1	$I_v = \{\text{incidences notées } *\}, A_v = \{\text{incidences notées } \square\}$ . . . . .	24
2.2	Les incidences notées $*$ sont adjacentes (configurations ( $i$ ), ( $ii$ ) et ( $iii$ )), celles notées $\square$ sont non adjacentes (configuration ( $iv$ )) . . . . .	24
2.3	Un sommet $u$ de degré $\Delta(G)$ . . . . .	25
2.4	Un $n$ -cycle . . . . .	26
2.5	Une 5-coloration d'incidence du graphe de Petersen . . . . .	27
2.6	Un 5-cycle de $G_p$ . . . . .	27

2.7	Contre-exemple pour le Lemme 2.1.11 . . . . .	29
2.8	Un graphe planaire extérieur $G$ de degré maximum 4 et de nombre chromatique d'incidence 6 . . . . .	29
2.9	Couplages dans le graphe de Petersen . . . . .	30
2.10	Une 4-arête-coloration de $G_p$ (a), et une 5-arête-coloration forte de $G_p$ (b) . . . . .	31
2.11	Une coloration d'incidence de $K_4$ , la matrice d'incidence de $K_4$ et les sous-matrices permutations correspondantes . . . . .	32
2.12	Une coloration forte des arêtes du graphe $H(K_4)$ . . . . .	33
2.13	Le graphe $S(K_4)$ et une famille couvrante de forêts d'étoiles orientées $G_1, G_2, G_3$ , et $G_4$ . . . . .	35
2.14	$\sigma(A_v) = \{5, 6, 7\}$ , $\sigma(I_v) = \{1, 2, 3, 4\}$ , $\sigma(I_w) = \{3, 4, 7, 8\}$ et $F_G^\sigma(v, vw) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . . . . .	36
2.15	Un sommet $v$ de degré $t$ et ses voisins dans $G$ . . . . .	37
2.16	Un graphe $G$ pour l'exemple 2.6.1 . . . . .	38
2.17	Configuration pour le cas 2 du Théorème 2.6.3 . . . . .	39
2.18	Configurations pour le cas 3.(a) du Théorème 2.6.3 . . . . .	40
2.19	Configurations pour le cas 3.(b) du Théorème 2.6.3 . . . . .	42
2.20	Le graphe $G_k$ . . . . .	44
2.21	Configurations pour la preuve du Théorème 2.8.1 . . . . .	50
2.22	Configuration pour la preuve du Théorème 2.9.1 . . . . .	54
2.23	Configurations interdites pour le Théorème 2.9.3 . . . . .	55
2.24	Configurations pour la preuve du Théorème 2.9.6 . . . . .	58
2.25	Configurations interdites pour le Théorème 2.9.8 . . . . .	60
3.1	Colorations d'un graphe $G$ . . . . .	66
3.2	Une coloration et une coloration acyclique d'un même graphe . . . . .	67
3.3	Un graphe planaire de nombre chromatique acyclique 5 . . . . .	67
3.4	$(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ -coloration impropre d'un graphe $G$ . . . . .	68
3.5	Coloration d'un graphe orienté $G$ . . . . .	69
3.6	Coloration du circuit à 5 sommets $\vec{C}_5$ . . . . .	70
3.7	Les graphes orientés $G_0, G_1, G_2, G_3$ . . . . .	71
3.8	Un graphe de degré maximum 3 et de nombre chromatique orienté 7 . . . . .	75
3.9	Une orientation du graphe biparti complet $K_{n,n}$ . . . . .	75
3.10	Le tournoi $T_5$ . . . . .	79

3.11	Configuration pour le cas 2 du Théorème 3.2.9 . . . . .	81
3.12	Configuration pour le cas 3 du Théorème 3.2.9 . . . . .	81
3.13	Configuration pour le cas 4(a) du Théorème 3.2.12 . . . . .	84
3.14	Configurations pour le cas 4.(b).i du Théorème 3.2.12 . . . . .	85
3.15	Configuration pour le cas 5.(b).i du Théorème 3.2.12 . . . . .	88
3.16	Configurations pour la Proposition 3.2.16 . . . . .	89
3.17	Famille de graphes pour la preuve du Théorème 3.2.17 . . . . .	89
3.18	Un graphe planaire extérieur sans triangle $G$ avec $\vec{\chi}(G) \geq 6$ . . . . .	91
3.19	Un graphe planaire extérieur 2-connexe $B$ avec $C(B)$ . . . . .	92
3.20	Configuration pour le Fait 3.3.7 . . . . .	96
3.21	Construction du graphe $G_{i+1}$ à partir du graphe $G_i$ . . . . .	97
3.22	Configuration pour le Fait 3.3.9 . . . . .	98
3.23	Configuration pour le cas 4(d) . . . . .	100
3.24	Un graphe planaire 2-extérieur sans triangle $G$ avec $\vec{\chi}(G) \geq 11$ . . . . .	100
3.25	Graphe des relations entre les couleurs $c_1, c_2, \dots, c_{10}$ . . . . .	101
3.26	Le graphe $G_9$ . . . . .	103
3.27	Configuration pour le cas 2.(b) du Théorème 3.4.2 . . . . .	105
3.28	Configuration pour le cas 2.(d).iii.B du Théorème 3.4.2 . . . . .	109
3.29	Un graphe de Halin de nombre chromatique orienté 8 . . . . .	110
4.1	Un exemple de graphe carré . . . . .	121
4.2	Configuration pour la preuve du Théorème 4.3.6 . . . . .	122
4.3	Configuration pour l'étape 1 du Théorème 4.5.4 . . . . .	127
4.4	Configuration pour l'étape 2 du Théorème 4.5.4 . . . . .	128
4.5	Configuration pour les étapes 3 et 4 du Théorème 4.5.4 . . . . .	128



# Introduction

La coloration de graphes est l'un des problèmes anciens et largement étudié de la théorie de graphes. De nombreux problèmes réels peuvent se ramener à un problème de coloration de graphes. La notion de coloration de graphes correspond en effet à la partition d'un ensemble d'objets en plusieurs classes suivant certaines règles. L'ensemble d'objets peut être constitué des sommets (respectivement des arêtes, des arêtes et des sommets ou des incidences) d'un graphe, les classes sont des ensembles de sommets (respectivement d'arêtes, d'arêtes et de sommets ou d'incidences) de même couleur et les règles sont des règles de coloration des sommets (respectivement des arêtes, des arêtes et des sommets ou des incidences). Différents types de coloration peuvent être définis suivant les règles considérées : coloration propre, arête-coloration, coloration orientée, coloration totale, coloration d'incidence, etc. Par exemple, lorsqu'on donne des couleurs différentes à deux sommets joints par une arête dans le graphe, il s'agit d'une coloration *propre* du graphe et lorsqu'on colorie deux arêtes incidentes à un sommet dans le graphe par deux couleurs distinctes, il s'agit d'une arête-coloration du graphe.

Il existe de nombreux autres types de coloration de graphes et de nombreux résultats que nous ne détaillerons pas ici, mais nous pouvons citer l'excellent ouvrage de Jensen et Toft [43], "Graph Coloring Problems", qui rassemble la grande majorité de ces résultats ainsi que de nombreuses questions ouvertes.

\* \* \*

Une coloration *propre* d'un graphe  $G$  est une application de l'ensemble des sommets de  $G$  vers un ensemble de couleurs telle que les images respectives de deux sommets adjacents dans  $G$  sont différentes. Si l'ensemble de couleurs est d'ordre  $k$ , l'application est une  $k$ -coloration propre du graphe. Il est alors naturel de définir le plus petit entier  $k$  tel qu'un graphe  $G$  admette une  $k$ -coloration, cet entier est appelé le *nombre chromatique* du graphe  $G$ .

Les problèmes de coloration propre de graphes non orientés participent encore pour une grande part aux problèmes de Théorie de Graphes, bien qu'à ce jour de nombreuses questions fondamentales aient été résolues.

Le théorème des quatre couleurs, tout graphe planaire (carte) est 4-coloriable, est le résultat le plus célèbre de théorie de graphes. Malgré un énoncé simple, le théorème est

resté une conjecture pendant plus d'un siècle, durant lequel il fut abordé par les plus grands mathématiciens.

En 1969 Heesch trouve des conditions “presque” nécessaires et suffisantes pour qu'une configuration soit réductible, et une méthode générale pour trouver un ensemble inévitable de configurations.

En 1976, Appel, Haken et Koch [7, 8] donnent la première preuve du théorème. Cette preuve utilise 1482 configurations réductibles et a nécessité plus de 1200 heures de calcul sur trois ordinateurs. Une nouvelle preuve de ce théorème, utilisant seulement 633 configurations réductibles, a été proposée par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas [56] en 1996.

La notion de coloration propre *acyclique* a été introduite par Grünbaum en 1973. On impose sur une coloration propre d'un graphe une contrainte sur la coloration des cycles du graphe : une coloration propre est acyclique si et seulement si tout sous-graphe induit par les sommets coloriés de deux couleurs différentes ne contient pas de cycle. On définit le nombre chromatique acyclique d'un graphe  $G$  comme le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une  $k$ -coloration acyclique. Grünbaum a montré que tout graphe planaire pouvait être acycliquement colorié en 9 couleurs et conjecturé que la borne exacte devait être égale à 5 [36]. Borodin a prouvé cette conjecture [11] en 1979. En ce qui concerne la famille des graphes de degré borné, le problème semble plus difficile. Alon, McDiarmid et Reed ont obtenu en 1991 un encadrement du nombre chromatique acyclique d'un graphe en fonction de son degré maximal par des méthodes probabilistes [5].

\* \* \*

La notion de coloration de graphes orientés a été introduite par Courcelle en 1994 [23]. Les graphes orientés considérés sont des graphes orientés antisymétriques. Cette notion de coloration orientée a par la suite été étudiée et développée par plusieurs auteurs tels que Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud, Sopena et Zhu. Une coloration d'un graphe orienté est une coloration propre du graphe non orienté sous-jacent sur laquelle on impose une contrainte supplémentaire liée à l'orientation. Plus formellement, une coloration orientée est une application des sommets d'un graphe orienté  $G$  vers un ensemble de couleurs telle que (i) deux sommets adjacents ont des couleurs différentes (ii) si  $uv$  et  $xy$  sont deux arcs dans  $G$  et si  $u$  et  $y$  sont de même couleur alors  $v$  et  $x$  sont de couleur différente. Le nombre chromatique orienté d'un graphe orienté  $G$  est défini comme le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une  $k$ -coloration orientée.

En 1994, Raspaud et Sopena ont montré que si un graphe  $G$  non orienté a un nombre chromatique acyclique inférieur ou égal à  $k$  alors toute orientation de ce graphe a un nombre chromatique orienté inférieur ou égal à  $k \times 2^{k-1}$  [55]. En combinant ce théorème et le résultat de Borodin concernant la 5-coloration acyclique des graphes planaires, on obtient que le nombre chromatique orienté de tout graphe planaire est inférieur ou égal à 80. L'amélioration de cette borne constitue un challenge particulièrement intéressant. D'autres résultats

concernant la borne supérieure du nombre chromatique orienté de plusieurs familles de graphes ont été obtenus par Sopena [57].

L'étude de la coloration orientée est bien sûr beaucoup plus récente que l'étude de la coloration de graphes non orientés, mais ce n'est pas la seule raison pour laquelle il existe moins de résultats dans le cas orienté. En effet, les problèmes liés aux colorations orientées semblent être plus difficiles que dans le cas non orienté en raison de la perte de la propriété de "localité". Lors d'une coloration propre d'un graphe non orienté, la validité d'une couleur pour un sommet du graphe peut être décidée en considérant uniquement les voisins coloriés de ce sommet. Cette propriété ne se transpose malheureusement pas dans le cas orienté : la validité d'une couleur du sommet dépend cette fois de l'ensemble des sommets coloriés du graphe.

\* \* \*

Un *homomorphisme* d'un graphe orienté  $G$  vers un graphe orienté  $H$  est une application  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ , telle que si  $uv$  est un arc dans  $A(G)$ , alors  $\phi(u)\phi(v)$  est un arc dans  $A(H)$ , pour tous sommets  $u, v \in V(G)$ . Toute coloration orientée d'un graphe orienté  $G$  peut alors être considérée comme un homomorphisme de  $G$  vers un graphe orienté  $H$ , les sommets de  $H$  étant alors considérés comme des couleurs. On dit que la coloration orientée de  $G$  est une  $H$ -coloration. Ainsi, le nombre chromatique orienté de  $G$  peut être défini de façon équivalente comme l'ordre du plus petit graphe orienté  $H$  tel que  $G$  admette une  $H$ -coloration. La notion d'homomorphisme de graphe non orienté se définit de façon similaire en remplaçant arc par arête. Il est alors facile de vérifier que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G) = k$  si et seulement s'il existe un homomorphisme de  $G$  vers  $K_k$  et il n'existe aucun homomorphisme de  $G$  vers  $K_{k-1}$ .

\* \* \*

Une *incidence* d'un graphe  $G$  est une paire  $(v, e) \in V(G) \times E(G)$  telle que  $v$  et  $e$  sont incidents. Soient  $(v, e)$  et  $(w, f)$  deux incidences de  $G$ ; on dit que  $(v, e)$  et  $(w, f)$  sont *adjacentes* si l'une des conditions suivantes est satisfaite : (i)  $v = w$ , (ii)  $e = f$ , (iii) l'arête  $vw$  est égale à  $e$  ou  $f$ . Une *k-coloration d'incidence* d'un graphe  $G$  est une application de l'ensemble des incidences de  $G$ , dans un ensemble  $C$  de  $k$  couleurs telle que des couleurs distinctes sont affectées aux incidences adjacentes. Le *nombre chromatique d'incidence* de  $G$ , noté  $\chi_i(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une  $k$ -coloration d'incidence.

La notion de coloration d'incidence a été introduite par Brualdi et Massey [18] en 1993. Pour tout graphe  $G$  possédant au moins une arête,  $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + 1$ . Brualdi et Massey ont conjecturé que tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta(G)$  a un nombre chromatique d'incidence majoré par  $\Delta(G) + 2$ , mais Guiduli [37] a montré que cette conjecture est fautive et qu'il existe des graphes  $G$  de nombre chromatique d'incidence au moins  $\Delta(G) + \Omega(\log \Delta(G))$ .

Une forêt d'étoiles orientées est un graphe dont toutes les composantes connexes sont

des étoiles orientées dont tous les arcs sont dirigés hors du centre. Pour un graphe orienté  $D$  (pas nécessairement antisymétrique), l'*étoile-arboricité orientée* de  $D$ , notée  $dst(D)$ , est le plus petit nombre de forêts d'étoiles orientées qui sont nécessaires pour couvrir les arcs de  $D$ .

L'étoile-arboricité orientée a été introduite par Algor et Alon [4] et Guiduli a montré en [37] que le concept de coloration d'incidence correspond à un cas particulier de l'étoile-arboricité orientée. Plus précisément, pour tout graphe  $G$  nous avons  $\chi_i(G) = dst(S(G))$ , où  $S(G)$  est le graphe orienté symétrique obtenu à partir de  $G$  en remplaçant chaque arête de  $G$  par deux arcs opposés. En effet, en associant à chaque incidence de  $G$  de la forme  $(u, uv)$  l'arc  $\vec{uv}$  de  $S(G)$ , on observe facilement que toute coloration d'incidence de  $G$  correspond à une arête-coloration forte de  $S(G)$ , et inversement (une arête-coloration est forte si tout chemin de longueur 3 utilise 3 couleurs distinctes).

\* \* \*

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser essentiellement aux colorations d'incidences et aux colorations orientées de graphes.

Dans un premier chapitre, nous allons rappeler quelques éléments de Théorie de Graphes qui nous seront nécessaires dans la suite. Nous préciserons les définitions, les notations et les résultats que nous utiliserons tout au long du mémoire.

Le deuxième chapitre s'intéresse aux colorations d'incidences de certaines familles de graphes : les graphes  $k$ -dégénérés, les graphes sans mineur  $K_4$ , les graphes planaires et les graphes de degré moyen maximum borné. Nous montrons en particulier que tout graphe  $k$ -dégénéré  $G$  a un nombre chromatique d'incidence majoré par  $\Delta(G) + 2k - 1$ . Nous déterminons le nombre chromatique d'incidence de la famille de graphes sans mineur  $K_4$ . Ensuite, nous améliorons le résultat général obtenu pour les graphes  $k$ -dégénérés dans le cas des graphes planaires et des graphes 3-dégénérés. Dans la dernière section de ce chapitre, nous déterminons des bornes supérieures pour le nombre chromatique d'incidence des graphes de degré moyen maximum borné.

Nous nous intéressons dans le troisième chapitre aux colorations orientées des graphes d'excès  $k$ , des graphes planaires 2-externes sans triangle et des graphes de Halin. Nous déterminons tout d'abord le nombre chromatique des graphes non orientés d'excès  $k$ . Nous montrons que le nombre chromatique orienté de tout graphe d'excès  $k$  est au plus  $k + 3$ , à l'exception des graphes orientés d'excès 1 contenant un circuit à cinq sommets dont le nombre chromatique orienté est 5. De plus cette borne est optimale pour le nombre chromatique orienté des graphes d'excès au plus 4. Nous donnons également une borne inférieure générale pour le nombre chromatique orienté de cette famille de graphes. Nous considérons ensuite la coloration orientée des graphes planaires externes sans triangle et des graphes planaires 2-externes sans triangle. Nous donnons une borne supérieure et une borne inférieure pour le nombre chromatique orienté de chacune de ces familles de graphes. Nous considérons dans la dernière section de ce chapitre le nombre chromatique orienté

des graphes de Halin.

Dans le quatrième chapitre nous nous intéressons à différentes colorations des graphes distances. Les graphes distances ont été introduits et étudiés par Eggleton, Erdős et Skilton [26]. Le graphe distance  $G(D)$ ,  $D \subset \mathbb{N}$ , est défini comme un graphe ayant pour ensemble de sommets  $\mathbb{Z}$  et tel que deux sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents si et seulement si  $|u - v| \in D$ . Nous considérons tout d'abord la coloration d'incidence de cette famille de graphes. Nous montrons que toute coloration d'incidence du graphe distance  $G(D)$  est périodique. Nous déterminons des bornes inférieures et supérieures pour le nombre chromatique d'incidence des graphes distances  $G(D)$  et déterminons le nombre chromatique exact de certaines classes particulières de graphes distances.

Nous nous intéressons ensuite au lien entre le nombre chromatique d'incidence d'un graphe  $G$  et le nombre chromatique du graphe carré  $G^2$  de  $G$ . Nous montrons que  $\chi(G^2) \leq k$  si et seulement si  $G$  admet une  $(k, 1)$ -coloration d'incidence (c'est à dire une  $k$ -coloration d'incidence telle que pour tout sommet  $v$ , toutes les incidence de la forme  $(w, wv)$  sont de la même couleur) et en utilisant ce résultat nous obtenons d'autres résultats pour certaines familles de graphes (graphes de degré moyen maximum borné, graphes planaires extérieurs et graphes distances).

Dans la dernière section de ce chapitre, nous nous intéressons aux colorations propres, acycliques et orientées des graphes distances. Nous donnons une borne supérieure générale de nombre chromatique des graphes distances  $G(D)$  qui améliore dans certains cas des bornes existantes. Nous donnons également une borne supérieure pour le nombre chromatique acyclique de cette famille de graphes et en utilisant ce résultat et le résultat de Raspaud et Sopena nous obtenons une borne pour le nombre chromatique orienté de cette famille de graphes. Nous améliorons cette borne pour le cas où  $|D| = 2$  et en particulier pour  $D = \{x, 2x\}$ . Finalement, nous considérons le graphe distance orienté  $\vec{G}(D)$  avec ensemble de distance  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , ayant pour ensemble de sommets  $\mathbb{Z}$  et pour ensemble d'arcs  $A(\vec{G}(D)) = \{ij \mid j - i \in D\}$ . Nous montrons que le nombre chromatique orienté de  $\vec{G}(D)$  est d'au plus  $2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1$ .



# Chapitre 1

## Éléments de théorie des graphes

Nous introduisons dans ce chapitre les notions de théorie des graphes qui nous seront nécessaires dans ce mémoire.

### 1.1 Graphes et homomorphismes

Un *graphe non orienté* (simple, sans boucle) est un couple  $G = (V(G), E(G))$  où  $V(G)$  est un ensemble d'éléments, appelés *sommets*, et  $E(G)$  un ensemble de paires d'éléments distincts de  $V(G)$ , appelées *arêtes*.

Un *graphe orienté* (simple, sans boucle) est un couple  $G = (V(G), A(G))$  où  $A(G)$  est un ensemble de couples d'éléments distincts de  $V(G)$ , appelés *arcs*.

On note habituellement une arête  $\{u, v\}$  (ou un arc  $(u, v)$ ) par  $uv$ .

Nous dirons simplement *graphe* au lieu de *graphe orienté* ou *graphe non orienté* lorsque le graphe concerné sera clairement déterminé par le contexte.

Le nombre de sommets du graphe  $G$ , noté  $|G|$ , est appelé l'*ordre* de  $G$ . Un graphe peut être *fini* ou *infini* en fonction de son ordre. Un graphe d'ordre 0 ou 1 est appelé *trivial*.

**Exemple 1.1.1** La Figure 1.1(a) représente un graphe non orienté  $H$ , et la Figure 1.1(b) représente un graphe orienté  $G$ , tous deux d'ordre 5.

Un graphe orienté  $G$  est *symétrique* si et seulement si, pour tous sommets  $u$  et  $v$  de  $V(G)$ , on a :

$$uv \in A(G) \implies vu \in A(G).$$

Un graphe orienté  $G$  est *antisymétrique* si et seulement si, pour tous sommets  $u$  et  $v$  de  $V(G)$ , on a :

$$uv \in A(G) \implies vu \notin A(G).$$

Ainsi, un graphe orienté antisymétrique  $G$  peut être considéré comme une *orientation* d'un graphe non orienté  $H$ , obtenue en donnant à chaque arête l'une des deux orientations

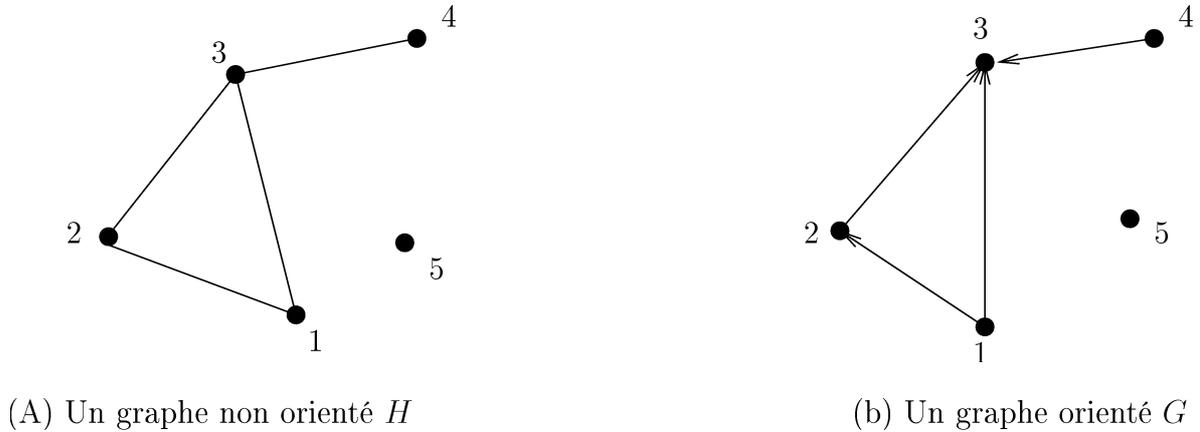


FIG. 1.1 – Exemples de graphes

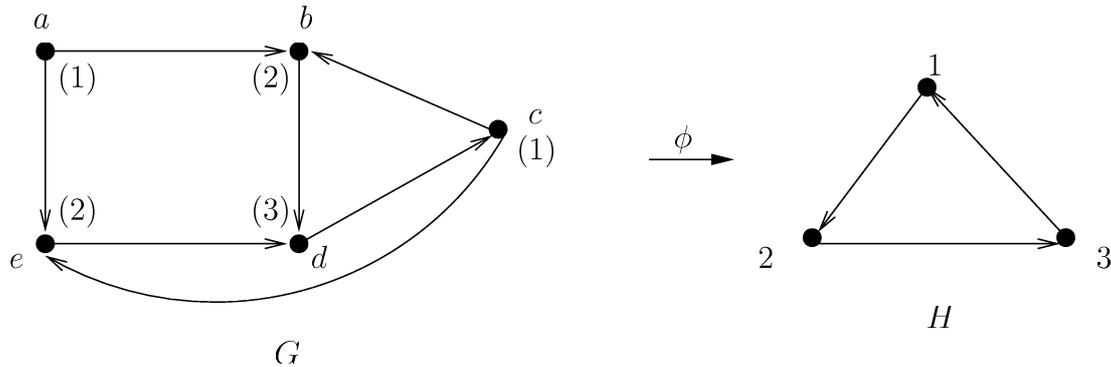


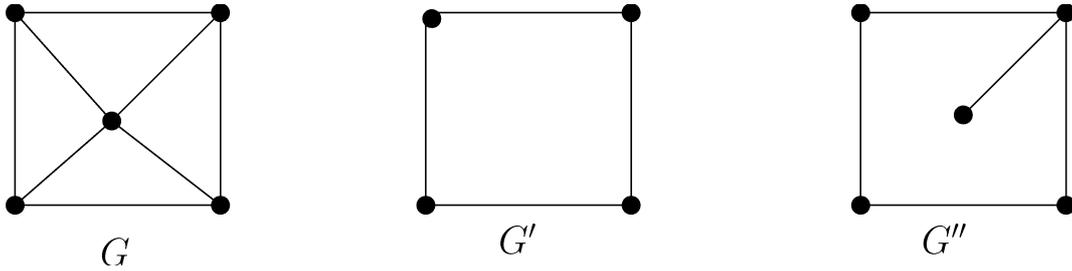
FIG. 1.2 – Exemple d'homomorphisme

possibles. Le graphe  $H$  est le graphe non orienté *sous-jacent* au graphe  $G$ . Dans la Figure 1.1 le graphe  $G$  est une orientation du graphe  $H$ ; ainsi,  $H$  est le graphe non orienté sous-jacent au graphe  $G$ .

Nous allons maintenant donner un certain nombre de définitions de base concernant les graphes orientés. Ces définitions s'étendent pour la plupart de façon naturelle au cas des graphes non orientés.

Un *homomorphisme* d'un graphe orienté  $G$  vers un graphe orienté  $H$  est une application  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ , telle que si  $uv$  est un arc dans  $A(G)$ , alors  $\phi(u)\phi(v)$  est un arc dans  $A(H)$ , pour tous sommets  $u, v \in V(G)$ . Nous notons  $G \rightarrow H$  le fait qu'il existe un homomorphisme de  $G$  vers  $H$ .

**Exemple 1.1.2** Considérons les deux graphes  $G$  et  $H$  décrits par la Figure 1.2, et l'application  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  définie par  $\phi(a) = 1$ ,  $\phi(b) = 2$ ,  $\phi(c) = 1$ ,  $\phi(d) = 3$  et  $\phi(e) = 2$ ;  $\phi$  est un homomorphisme de  $G$  vers  $H$ .

FIG. 1.3 – Un graphe  $G$  et deux sous-graphes  $G'$  et  $G''$  de  $G$ 

Un *isomorphisme* de  $G$  vers  $H$  est une bijection  $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ , telle que  $uv$  est un arc dans  $A(G)$  si et seulement si  $\phi(u)\phi(v)$  est un arc dans  $A(H)$ , pour tous sommets  $u, v \in V(G)$ . On dit que les graphes  $G$  et  $H$  sont isomorphes et on note  $G \simeq H$ , s'il existe un isomorphisme entre eux.

Si  $\phi$  est un isomorphisme de  $G$  vers  $H$  et  $G = H$ ,  $\phi$  est appelé un *automorphisme*. Normalement, nous ne distinguerons plus les graphes isomorphes. Nous noterons donc  $G = H$  au lieu de  $G \simeq H$ .

Pour deux graphes  $G$  et  $G'$  on définit  $G \cup G' := (V(G) \cup V(G'), A(G) \cup A(G'))$  et  $G \cap G' := (V(G) \cap V(G'), A(G) \cap A(G'))$ . Si  $G \cap G' = \emptyset$  alors  $G$  et  $G'$  sont *disjoints*. Si  $V(G') \subseteq V(G)$  et  $A(G') \subseteq A(G)$  alors  $G'$  est un *sous-graphe* (partiel) de  $G$  et on note  $G' \subseteq G$ .

Si  $W$  est un sous-ensemble non vide de  $V(G)$ , le *sous-graphe induit* par  $W$  dans  $G$ , noté  $G[W]$ , est le graphe défini par  $V(G[W]) = W$  et  $E(G[W]) = \{uv \mid u, v \in W \text{ et } uv \in A(G)\}$ . Si  $H$  est un sous-graphe, non nécessairement induit, de  $G$  on note  $G[V(H)]$  par  $G[H]$ . Finalement,  $H \subseteq G$  est un sous-graphe *couvrant* de  $G$  si  $G[H] = G$ , i.e.  $V(H) = V(G)$ .

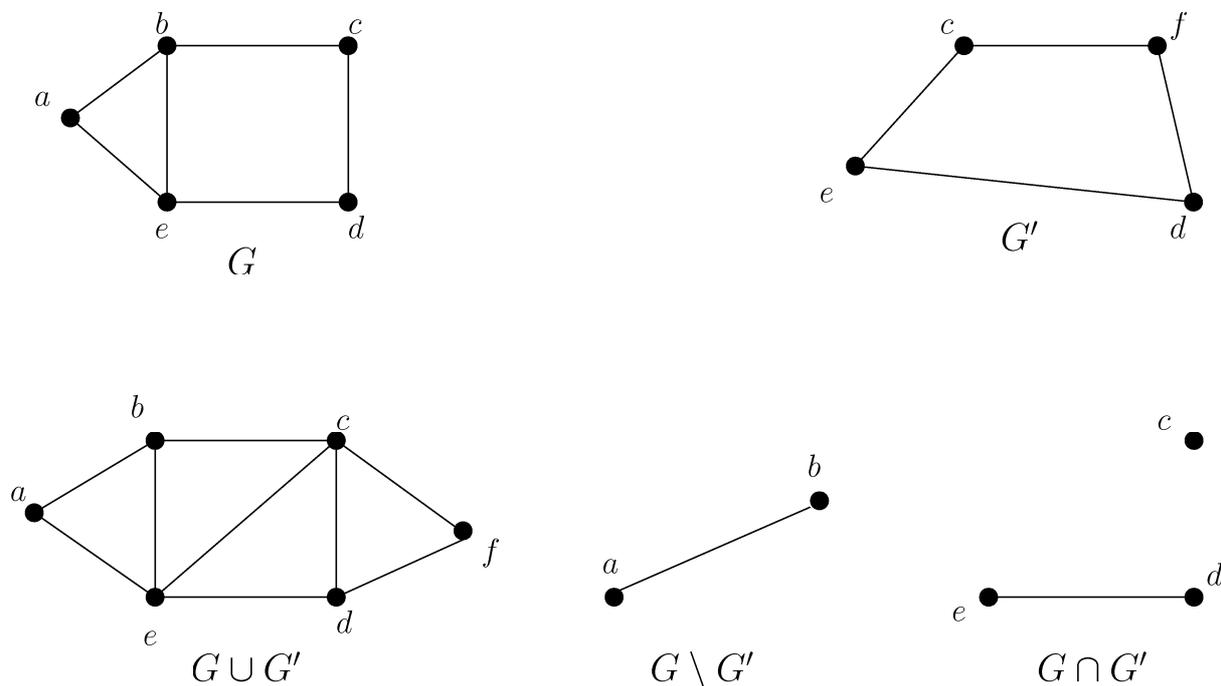
**Exemple 1.1.3** La Figure 1.3 représente un graphe  $G$  et deux sous-graphes  $G'$  et  $G''$  de  $G$ ;  $G'$  est un sous-graphe induit de  $G$ , mais  $G''$  ne l'est pas.

Si  $U$  est un ensemble de sommets (normalement de  $V(G)$ ), on note  $G \setminus U$  le graphe  $G[V(G) \setminus U]$ . En d'autres termes,  $G \setminus U$  est le graphe obtenu à partir de  $G$  en enlevant tous les sommets de  $V(G) \cap U$ . Si  $U = \{v\}$ , on note  $G \setminus v$  plutôt que  $G \setminus \{v\}$ . Au lieu de  $G \setminus V(G')$  nous noterons simplement  $G \setminus G'$ . Pour  $F \subseteq V(G) \times V(G)$ , on définit  $G \setminus F := (V(G), A(G) \setminus F)$ ,  $G + F := (V(G), A(G) \cup F)$  et comme précédemment on notera simplement  $G \setminus e$  et  $G + e$  les graphes  $G \setminus \{e\}$  et  $G + \{e\}$ .

**Exemple 1.1.4** La Figure 1.4 décrit deux graphes  $G$ ,  $G'$  ainsi que les graphes  $G \cup G'$ ,  $G \setminus G'$ , et  $G \cap G'$ .

Le complément d'un graphe  $G$  est le graphe  $\bar{G} := (V(G), E(\bar{G}))$  avec  $E(\bar{G}) = \{uv \mid uv \notin E(G)\}$ .

**Exemple 1.1.5** La Figure 1.5 représente un graphe  $G$  et son complément  $\bar{G}$ . Notons qu'ici

FIG. 1.4 – Deux graphes  $G$ ,  $G'$  avec leur union, différence et intersection

les graphes  $G$  et  $\bar{G}$  sont isomorphes.

## 1.2 Relation d'adjacence et degrés

Si  $uv$  est un arc de  $G$ , le sommet  $u$  est son *extrémité initiale* et le sommet  $v$  son *extrémité terminale*. Les sommets  $u$  et  $v$  sont *adjacents* (ou voisins). Ainsi, l'arc  $uv$  est *incident* à ces deux sommets.

Si  $uv$  est un arc de  $G$ , on dit que le sommet  $v$  est un *successeur* de  $u$  et le sommet  $u$  est un *prédécesseur* de  $v$ . L'ensemble des successeurs de  $u$  se note  $N_G^+(u)$  et l'ensemble des prédécesseurs de  $u$  se note  $N_G^-(u)$ . L'ensemble des sommets voisins de  $u$  se note  $N_G(u) = N_G^+(u) \cup N_G^-(u)$ . Si pour un sommet  $v$ ,  $N_G(v) = \emptyset$ ,  $v$  est un sommet *isolé*.

Le nombre de successeurs d'un sommet  $u$ , noté  $d_G^+(u)$ , est appelé le *degré sortant* de  $u$ , le nombre de prédécesseurs de  $u$ , noté  $d_G^-(u)$ , est appelé le *degré entrant* de  $u$  et le nombre de voisins de  $u$ , noté  $d_G(u)$ , est appelé le *degré* de  $u$ . On note *k-sommet* un sommet de degré  $k$ .

On note  $\Delta^+(G)$  (resp.  $\Delta^-(G)$ ,  $\Delta(G)$ ) le *degré sortant maximum* (resp. *degré entrant maximum*, *degré maximum*) d'un graphe  $G$ , pris sur l'ensemble de ses sommets. On note  $\delta^+(G)$  (resp.  $\delta^-(G)$ ,  $\delta(G)$ ) le *degré sortant minimum* (resp. *degré entrant minimum*, *degré minimum*) d'un graphe  $G$ , pris sur l'ensemble de ses sommets.

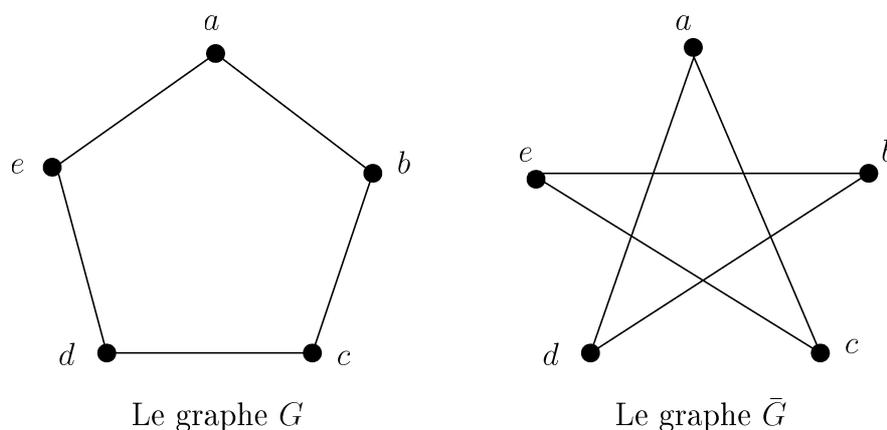
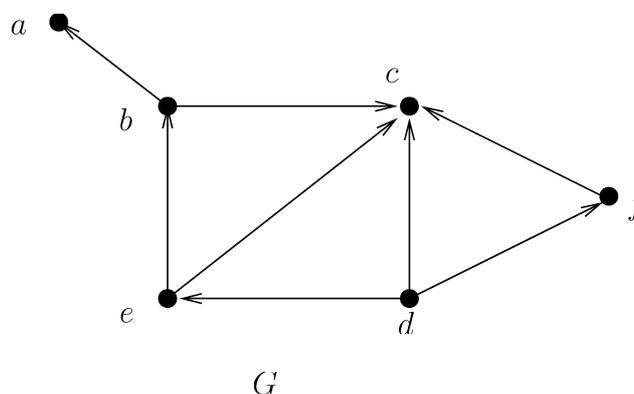
FIG. 1.5 – Un graphe  $G$  isomorphe à son complément  $\bar{G}$ 

FIG. 1.6 – Exemple de graphe

**Exemple 1.2.1** Pour le graphe  $G$  représenté par la Figure 1.6 nous avons :

1.  $d_G^-(a) = d_G(a) = \delta(G) = 1$ ,  $d_G^+(a) = 0$ ,
2.  $d_G^-(c) = d_G(c) = \Delta^-(G) = \Delta(G) = 4$ ,  $d_G^+(c) = 0$ ,
3.  $d_G^+(d) = d_G(d) = \Delta^+(G) = 3$ ,  $d_G^-(d) = 0$ ,
4.  $\delta^-(G) = \delta^+(G) = 0$ .

Si dans un graphe tous les sommets ont même degré  $k$ , le graphe est appelé  $k$ -régulier. Un graphe 3-régulier est appelé *cubique*.

Le nombre

$$dm(G) := \frac{1}{|V(G)|} \cdot \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$$

est le degré *moyen* de  $G$ . Clairement,  $\delta(G) \leq dm(G) \leq \Delta(G)$  pour tout graphe  $G$ .

Le degré moyen d'un graphe  $G$  et le nombre de ses arêtes sont étroitement liés. En fait, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 1.2.2**

$$|E(G)| = \frac{1}{2} \cdot \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \frac{|V(G)| \cdot dm(G)}{2}.$$

**Définition 1.2.3** Soit  $G$  un graphe, le *degré moyen maximum* de  $G$ , noté  $dmm(G)$ , est défini comme le maximum des degrés moyens  $dm(H) = 2 \cdot |E(H)|/|V(H)|$  pris sur tous les sous-graphes  $H$  de  $G$ .

Un graphe est dit *pair* si tous ses sommets sont de degré pair. Concernant le nombre des sommets de degré impair d'un graphe nous avons la proposition suivante :

**Proposition 1.2.4** *Pour tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est toujours pair.*

## 1.3 Chemins et cycles

Un *chemin orienté* (resp. *une chaîne orientée*) de longueur  $k$  reliant un sommet  $u_0$  à un sommet  $u_k$ , est une suite de sommets  $u_0 u_1 \dots u_k$  tels que pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ ,  $u_i u_{i+1}$  est un arc (resp.  $u_i u_{i-1}$  ou  $u_i u_{i+1}$  est un arc). Un *circuit* (resp. un *cycle*) est un chemin (resp. une chaîne) reliant un sommet à lui-même. Un chemin (resp. une chaîne) est *simple* si tous ses sommets, à l'exception éventuellement de ses extrémités, sont distincts. Dans le cas non orienté, la distinction entre chemin et chaîne, ainsi qu'entre circuit et cycle, étant inutile, on parle simplement de chemin ou de cycle.

On note  $P_k$  le chemin de longueur  $k$  (en particulier  $P_0 = K_1$ ). Le cycle de longueur  $k$ , noté  $C_k$ , est appelé un *k-cycle*.

La longueur minimum d'un cycle dans un graphe  $G$ , notée  $g(G)$ , est la *maille* de  $G$ . Une arête qui relie deux sommets d'un cycle mais n'est pas une arête du cycle est appelée une *corde* de ce cycle. Un *cycle induit* est un sous-graphe induit qui est un cycle. Ainsi, un cycle induit est un cycle sans corde (voir Figure 1.7).

Soit  $G$  un graphe et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $V(G)$ , on appelle  $P = u_0, \dots, u_k$  un  $A - B$ -chemin si  $V(G) \cap A = \{u_0\}$  et  $V(G) \cap B = \{u_k\}$ .

## 1.4 Graphes complets et bipartis

Un graphe  $G$  est *complet* si pour tous  $u, v \in V(G)$ , avec  $u \neq v$ ,  $uv \in E(G)$ . Le graphe complet d'ordre  $n$  se dénote  $K_n$  et s'appelle une *n-clique*. Un *tournoi* est une orientation

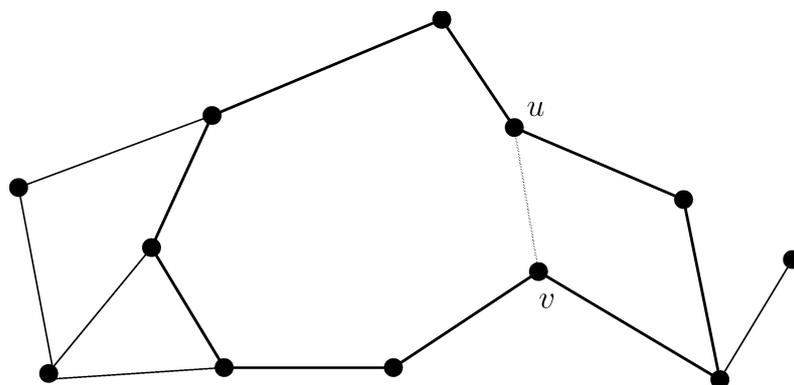
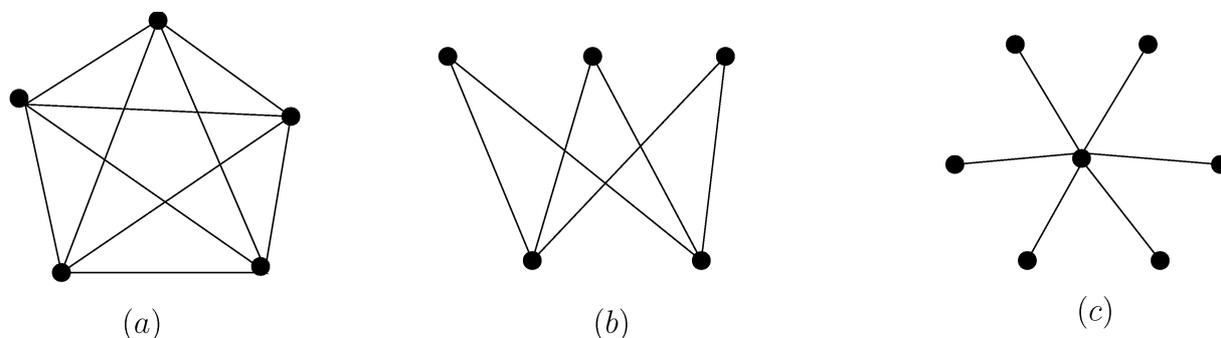
FIG. 1.7 – Un cycle  $C_9$  avec une corde  $uv$ , et deux cycles induits  $C_7$  et  $C_4$ 

FIG. 1.8 – Exemples de graphe complet (a), biparti complet (b) et d'étoile (c)

d'un graphe complet ; en d'autres termes, dans un tournoi, pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$ , il existe un unique arc incident à  $u$  et  $v$ .

Un graphe  $G$  est *biparti* si l'ensemble de ses sommets  $V(G)$  peut être partitionné en deux classes  $X$  et  $Y$  de façon que deux sommets de la même classe ne soient jamais adjacents. On note habituellement un tel graphe biparti  $G = (X, Y, E(G))$ . Si pour tout  $x \in X$  et pour tout  $y \in Y$  on a  $xy \in E(G)$ , le graphe  $G$  est *biparti complet*. Le graphe biparti complet avec  $|X| = m$  et  $|Y| = n$  est noté  $K_{m,n}$ . Les graphes de la forme  $K_{1,n}$  sont appelés des *étoiles*.

**Exemple 1.4.1** La Figure 1.8 représente le graphe complet  $K_5$  (a), le graphe biparti complet  $K_{3,2}$  (b) et l'étoile  $K_{1,6}$  (c).

Clairement, un graphe biparti ne peut pas comporter de *cycle impair* (i.e. de cycle de longueur impaire) ; en fait, les graphes bipartis sont caractérisés par cette propriété :

**Proposition 1.4.2** *Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle impair.*

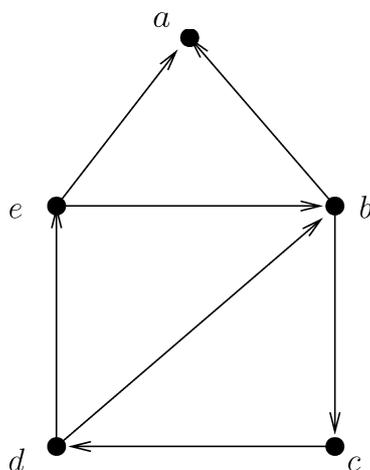
Le graphe  $G$ 

FIG. 1.9 – Exemple de graphe

## 1.5 Connexité

Un graphe orienté  $G$  est *connexe* (resp. *fortement connexe*) si pour toute paire  $u, v$  de sommets distincts, il existe une chaîne (resp. un chemin) reliant  $u$  à  $v$ . Remarquons que si un graphe  $G$  est fortement connexe, alors pour tous sommets  $u$  et  $v$  il existe un circuit passant par  $u$  et  $v$ . Dans le cas non orienté, les notions de connexité et connexité forte sont confondues.

La *distance* d'un sommet  $u$  à un sommet  $v$  dans un graphe  $G$ , notée  $d_G(u, v)$ , est la longueur d'un plus court chemin de  $u$  vers  $v$ . S'il n'existe pas de tel chemin cette distance est infinie. Le maximum des distances  $d_G(u, v)$  pris sur toutes les paires de sommets  $\{u, v\}$  est appelé le *diamètre* du graphe  $G$  et est noté  $diam(G)$ . Ce diamètre est infini si  $G$  n'est pas connexe (dans le cas orienté si  $G$  n'est pas fortement connexe).

**Exemple 1.5.1** Considérons le graphe  $G$  représenté à la Figure 1.9. La suite  $bcd$  est un chemin de longueur 2, la suite  $abde$  est une chaîne de longueur 3, la suite  $bcdeb$  est un circuit de longueur 4. Le graphe  $G$  est connexe mais il n'est pas fortement connexe. Le diamètre de  $G$  est donc infini. Par contre, si nous considérons le graphe non orienté  $H$  sous-jacent au graphe  $G$ , son diamètre est 2.

Une *composante connexe* d'un graphe  $G$  est un sous-graphe maximum de  $G$ ; en d'autres termes, une composante connexe de  $G$  est un sous-graphe connexe induit par un sous-ensemble  $U$  de  $V(G)$  tel que pour tout  $u \notin U$ , le sous-graphe induit  $G[U \cup \{u\}]$  n'est pas connexe. Nous noterons  $ncc(G)$  le nombre de composantes connexes de  $G$ .

**Exemple 1.5.2** La Figure 1.10 représente un graphe ayant trois composantes connexes.

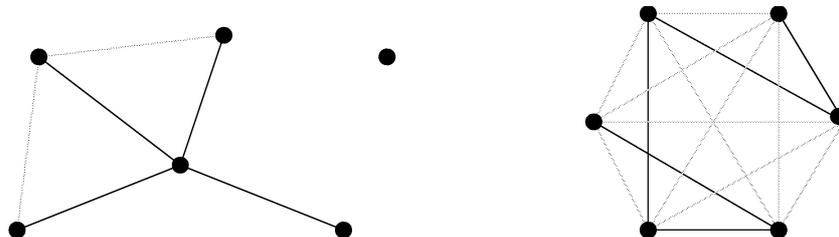


FIG. 1.10 – Un graphe non connexe

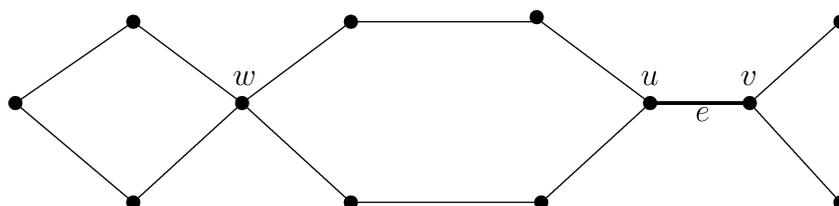


FIG. 1.11 – Exemples de sommets d'articulation et d'isthme

Si  $A, B \subseteq V(G)$  et  $X \subseteq V(G) \cup E(G)$  sont tels que tout  $A - B$ -chemin dans  $G$  contient un sommet ou une arête de  $X$ , on dit que  $X$  sépare les deux ensembles  $A$  et  $B$  dans  $G$ . Ceci indique en particulier que  $A \cap B \subseteq X$ . Plus généralement, on dit que  $X$  sépare  $G$ . Si  $X$  sépare  $G$ ,  $X$  est appelé un *ensemble d'articulation* dans  $G$ . Un sommet qui sépare deux autres sommets dans une même composante connexe est un *sommet d'articulation*, et une arête séparant ses extrémités est un *isthme*. Ainsi, les isthmes d'un graphe sont des arêtes qui n'appartiennent à aucun cycle.

**Exemple 1.5.3** La Figure 1.11 montre un graphe avec les sommets d'articulations  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et un isthme  $e = uv$ .

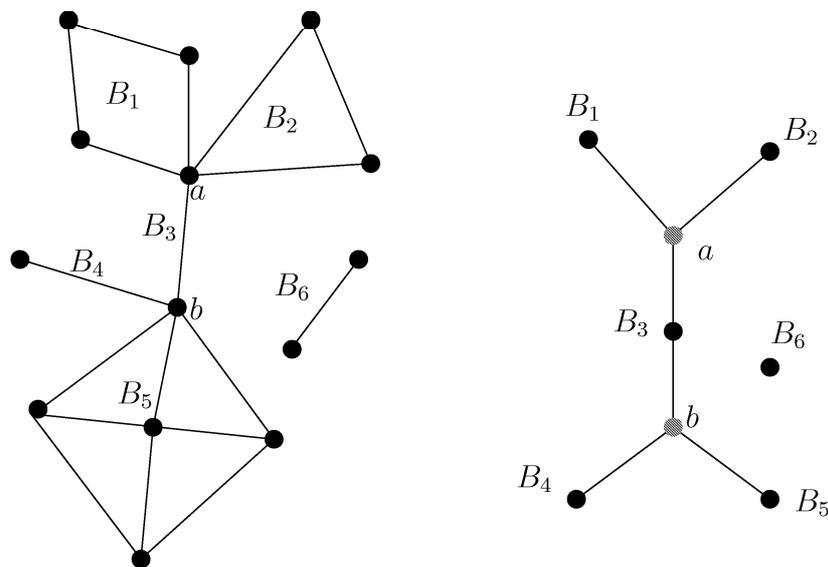
Un graphe  $G$  est  $k$ -connexe (pour  $k \in \mathbb{N}$ ) si  $|G| > k$  et  $G \setminus X$  est connexe pour tout ensemble  $X \subseteq V(G)$  tel que  $|X| < k$ . Tout graphe (non vide) est 0-connexe, et les graphes 1-connexes sont les graphes connexes non triviaux. Le plus grand entier  $k$  tel que  $G$  est  $k$ -connexe, est la *connexité*  $\kappa(G)$  de  $G$ .

Si  $|G| > 1$  et  $G \setminus F$  est connexe pour tout ensemble  $F \subseteq E(G)$ ,  $|F| < \ell$ , alors  $G$  est  $\ell$ -arête-connexe. Le plus grand entier  $\ell$  tel que  $G$  est  $\ell$ -arête-connexe est l'*arête-connexité*  $\lambda(G)$  de  $G$ .

Pour tout graphe non trivial  $G$  nous avons :

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Un sous-graphe 2-connexe maximal de  $G$  est une *composante 2-connexe* ou un *bloc* de  $G$ . Deux blocs de  $G$  ont au plus un sommet en commun qui est un sommet d'articulation de  $G$ . Toute arête de  $G$  appartient donc à un seul bloc.

FIG. 1.12 – Un graphe  $G$  et son graphe-bloc  $B(G)$ 

Un graphe  $G$  est 2-arête-connexe s'il est connexe et si toute suppression d'arête préserve sa connexité. Une composante 2-arête-connexe de  $G$  est un sous-graphe 2-arête-connexe maximal de  $G$ .

Soient  $A$  l'ensemble des sommets d'articulations d'un graphe  $G$  et  $B$  l'ensemble des blocs de  $G$ . Le *graphe-bloc* de  $G$ , noté  $B(G)$ , est le graphe biparti ayant pour ensemble de sommets  $A \cup B$  et pour arêtes les couples  $aX$ ,  $a \in A$ ,  $X \in B$  tels que  $a \in V(X)$  (voir Figure 1.12).

**Proposition 1.5.4** *Le graphe-bloc d'un graphe connexe est un arbre.*

## 1.6 Arbres, forêts et autres propriétés des graphes

Un graphe sans cycle (*acyclique*)  $F$  est appelé une *forêt* et une forêt connexe est appelée un *arbre*. Une forêt est donc un graphe dont les composantes connexes sont des arbres. Dans une forêt, les sommets de degré 1 sont appelés *feuilles*. Tout arbre non trivial possède au moins deux feuilles.

**Exemple 1.6.1** La Figure 1.13 représente un arbre.

**Théorème 1.6.2** *Pour tout graphe  $T$  les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1.  $T$  est un arbre ;
2. toute paire de sommets de  $T$  est reliée par une chaîne unique ;

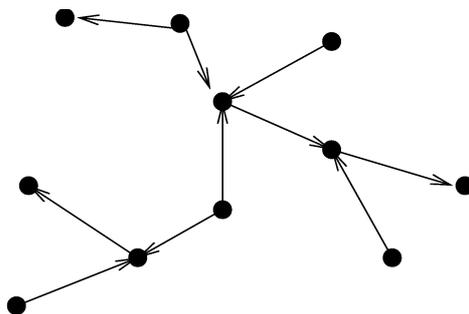


FIG. 1.13 – Exemple d'arbre

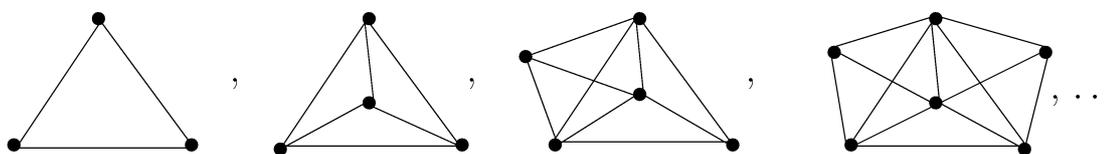


FIG. 1.14 – Construction de 3-arbres

3.  $T$  est connexe et toute arête est un isthme ;
4.  $T$  est acyclique et pour toute paire de sommets non adjacents  $u, v \in T$ ,  $T + uv$  contient un cycle.

D'après le Théorème ci-dessus un graphe connexe  $T$  à  $n$  sommets est un arbre si et seulement s'il a  $n - 1$  arêtes.

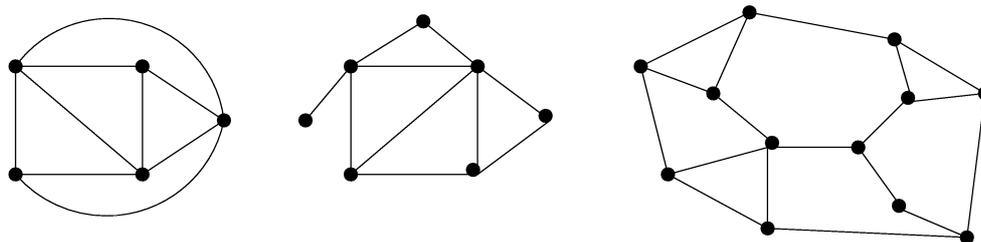
La notion de  $k$ -arbre peut être définie comme suit [3] : le graphe complet à  $k$  sommets est un  $k$ -arbre et si  $G$  est un  $k$ -arbre, le graphe  $H$  obtenu à partir de  $G$  en ajoutant un nouveau sommet  $v$  relié à  $k$  sommets de  $G$  induisant un graphe complet est un  $k$ -arbre. Il n'y a pas d'autres  $k$ -arbres. Un  $k$ -arbre *partiel* est un sous-graphe partiel d'un  $k$ -arbre. Un 1-arbre est un arbre et un 1-arbre partiel est une forêt.

**Exemple 1.6.3** La Figure 1.14 montre une séquence de 3-arbres obtenus en utilisant la construction précédente.

Un graphe  $G$  est  $k$ -dégénéré si et seulement si pour tout sous-graphe  $H$  de  $G$  on a  $\delta(H) \leq k$ . Les forêts sont donc des graphes 1-dégénérés et tout  $k$ -arbre est un graphe  $k$ -dégénéré.

Un graphe  $G$  est *planaire* s'il peut être représenté sur le plan de façon telle que deux arcs ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités. Une *face* de  $G$  est une région du plan délimitée par des arêtes et telle que deux points arbitraires de cette région peuvent toujours être reliés par un trait continu ne rencontrant ni sommets, ni arêtes. L'unique face infinie est la *face extérieure* de  $G$ .

**Théorème 1.6.4** [Formule d'Euler]



(a) Un graphe planaire (b) un graphe planaire extérieur (c) un graphe de Halin

FIG. 1.15 – Autres exemples de graphes

Soit  $G$  un graphe planaire à  $f$  faces. Alors

$$|V(G)| - |E(G)| + f = 2.$$

De la formule d'Euler on conclut que les graphes planaires sont 5-dégénérés. En effet, soit  $G$  un graphe planaire de degré minimum  $\delta(G) \geq 6$ . Comme toute arête de  $G$  appartient à au plus deux faces de  $G$  et chaque face est délimitée par au moins 3 arêtes nous avons :

$$f \leq \frac{2 \cdot |E(G)|}{3}. \quad (1)$$

Comme  $\delta(G) \geq 6$  nous avons d'après la Proposition 1.2.2 :

$$|E(G)| \geq \frac{6 \cdot |V(G)|}{2} = 3|V(G)|. \quad (2)$$

Maintenant, selon la formule d'Euler et les relations (1), (2) nous avons :

$$2 = |V(G)| - |E(G)| + f \leq |V(G)| - 3|V(G)| + \frac{2}{3}(3|V(G)|) = 0,$$

ce qui est une contradiction ; les graphes planaires sont donc bien 5-dégénérés. De la même façon on peut conclure de la formule d'Euler que les graphes planaires sans triangles sont 3-dégénérés.

Un graphe  $G$  est *planaire extérieur* s'il peut être dessiné sur le plan (de façon planaire) de telle manière que tous ses sommets soient sur la face extérieure. Les graphes planaires extérieurs sont des 2-arbres partiels, ils sont donc 2-dégénérés.

Un graphe de *Halin* est un graphe constitué d'un arbre possédant au moins trois feuilles, dont toutes les feuilles sont reliées de façon planaire par un cycle.

**Exemple 1.6.5** La Figure 1.15 représente un graphe planaire (a), un graphe planaire extérieur (b) et un graphe de Halin (c).

La proposition suivante, qui nous sera très utile dans la Section 2.9, montre le lien entre le degré moyen maximum d'un graphe planaire et sa maille :

**Proposition 1.6.6** [15] *Pour tout graphe planaire  $G$  de maille  $g = g(G)$ ,  $dmm(G) < 2g/(g-2)$ .*

**Preuve.** Soit  $G$  un graphe planaire. Comme toute arête de  $G$  appartient à au plus deux faces de  $G$  et chaque face est délimitée par au moins  $g$  arêtes,  $G$  contient au plus  $2 \cdot |E(G)|/g$  faces. En appliquant la formule d'Euler nous avons :

$$2 = |V(G)| - |E(G)| + f \leq |V(G)| - |E(G)| + \frac{2 \cdot |E(G)|}{g}$$

D'où :

$$\frac{(2g + (g-2))|E(G)|}{g} \leq |V(G)| \quad (3)$$

et selon la définition de  $dm(G)$  et la Relation (3) nous avons :

$$dm(G) = \frac{2 \cdot |E(G)|}{|V(G)|} \leq \frac{2g \cdot |E(G)|}{2g + (g-2)|E(G)|} < \frac{2g}{g-2}$$

De même, pour tout sous-graphe  $H$  de  $G$ , nous avons :  $dm(H) < 2g(H)/(g(H)-2)$ .

Comme  $g(H) \geq g > 2$ , nous avons  $2g(H)/(g(H)-2) \leq 2g/(g-2)$  et donc :

$$dmm(G) < \frac{2g}{g-2}.$$

■

## 1.7 Contractions et mineurs

Soit  $e = uv$  une arête d'un graphe  $G$ . On note  $G/e$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en contractant l'arête  $e$  dans un nouveau sommet  $v_e$  qui devient adjacent à tous les anciens voisins de  $u$  et de  $v$ . En d'autres termes,  $G/e$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est

$$V(G/e) := (V(G) \setminus \{u, v\}) \cup \{v_e\}$$

et l'ensemble des arêtes est

$$\begin{aligned} E(G/e) := & \{xy \in E(G) \mid \{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset\} \\ & \cup \{v_e x \mid ux \in E(G) \setminus \{e\} \text{ ou } vx \in E(G) \setminus \{e\}\}. \end{aligned}$$

**Exemple 1.7.1** La Figure 1.16 représente un graphe  $G$  et le graphe  $G/e$  obtenu à partir de  $G$  en contractant l'arête  $e = uv$ .

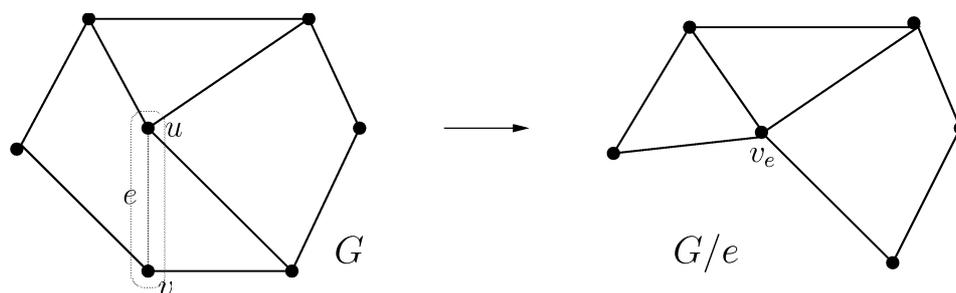
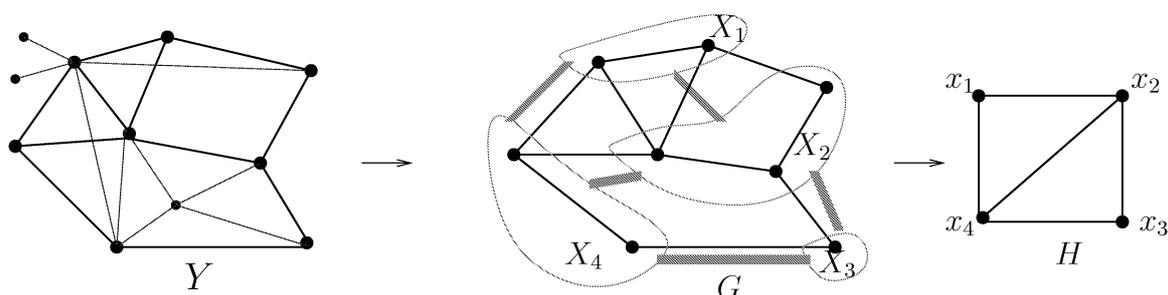
FIG. 1.16 – Contraction de l'arête  $e = uv$ 

FIG. 1.17 – Exemple de mineur

Soient  $H$  et  $G$  deux graphes ;  $H$  est appelé un *mineur* de  $G$ , noté  $H \preceq G$ , si  $H$  peut être obtenu à partir d'un sous-graphe de  $G$  en contractant un certain nombre d'arêtes. Remarquons que tout sous-graphe d'un graphe est aussi son mineur ; en particulier, tout graphe est un mineur de lui-même. Tout mineur d'un graphe peut être obtenu en éliminant certains sommets et arêtes, puis en contractant certaines arêtes supplémentaires. Inversement, tout graphe obtenu à partir d'un graphe  $G$  en répétant des suppressions et des contractions est un mineur de  $G$ . Un graphe  $G$  est *sans mineur*  $H$  s'il ne contient pas  $H$  comme un mineur.

**Exemple 1.7.2** Soient  $Y$ ,  $G$  et  $H$  les graphes représentés par la Figure 1.17.  $G$  est un sous-graphe de  $Y$  et  $H$  est un mineur de  $Y$  et de  $G$  : le graphe  $H$  s'obtient à partir de  $G$  en contractant les arêtes des sous-graphes  $X_i$  de  $G$  en un sommet  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ .

Un graphe  $G$  obtenu à partir d'un graphe  $H$  en remplaçant toute arête de  $H$  par un chemin indépendant reliant ses extrémités, est appelé une *subdivision* de  $H$ .

**Exemple 1.7.3** Soient  $Y$ ,  $G$  et  $H$  les graphes représentés par la Figure 1.18.  $G$  est un sous-graphe de  $Y$ ,  $G$  et  $H$  sont des mineurs de  $Y$ ,  $G$  est une subdivision de  $H$ .

Un graphe  $G$  est un graphe *série-parallèle* si  $G$  peut être obtenu à partir de  $K_2$  en appliquant une séquence d'opérations, où chaque opération peut être le doublage d'une arête (remplacer une arête par deux arêtes parallèles) ou la subdivision d'une arête (remplacer une arête par un chemin de longueur 2). Il est bien connu [19] qu'un graphe  $G$  est planaire

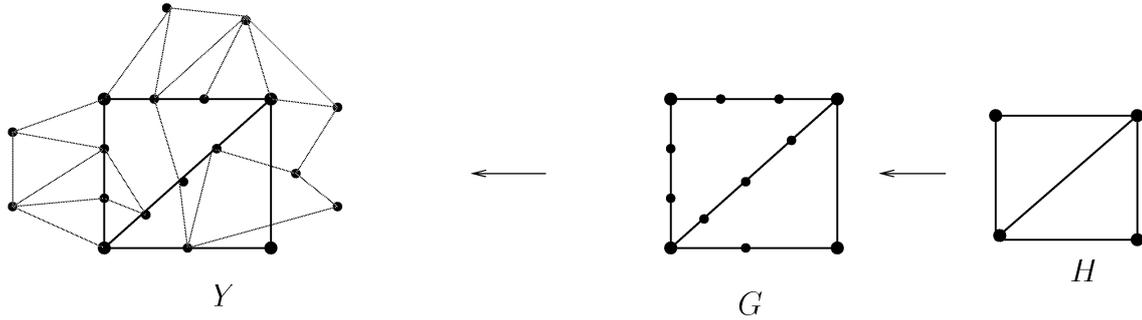


FIG. 1.18 – Exemple de mineur topologique

extérieur si et seulement si  $G$  est sans mineur  $K_4$  et sans mineur  $K_{2,3}$ . Un graphe  $G$  est sans mineur  $K_4$  si et seulement si tout bloc de  $G$  est un graphe série-parallèle. Donc, la famille des graphes sans mineur  $K_4$  est une famille de graphes planaires qui contient les graphes planaires extérieurs et les graphes série-parallèles.

Une famille de graphes est dite *héréditaire* si tout sous-graphe de la famille est également dans la famille. Les familles des graphes planaires, des graphes planaires extérieurs, des  $k$ -arbres partiels, des graphes  $k$ -dégénérés ou des graphes de degré au plus  $k$  sont des exemples de familles de graphes héréditaires.

Si  $\mathcal{F}$  est une famille de graphes, alors la famille

$$\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{F}) := \{G \mid X \not\preceq G \text{ pour tout } X \in \mathcal{F}\}$$

de tous les graphes sans aucun mineur dans  $\mathcal{F}$  est une *propriété* de graphe, i.e. est fermée par isomorphisme. Quand une propriété est décrite ainsi, on dit qu'elle est *caractérisée par mineurs exclus*.

**Proposition 1.7.4** *La relation de mineur  $\preceq$  est une relation d'ordre partiel, en d'autres termes, elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

D'après la Proposition 1.7.4  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{F})$  est fermée par mineur : si  $H \preceq G$  et  $G \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{F})$  alors  $H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{F})$ . Des propriétés qui sont fermées par mineur sont héréditaires. Toute propriété héréditaire peut être exprimée par mineurs exclus :

**Proposition 1.7.5** *Une propriété de graphe peut être exprimée par mineurs exclus si et seulement si elle est héréditaire.*

Un exemple classique illustrant cette situation est la caractérisation des graphes planaires par mineurs exclus :

**Théorème 1.7.6** [Kuratowski 1930; Wagner 1937]

Pour un graphe  $G$  les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $G$  est planaire ;
2.  $G$  ne contient ni  $K_5$  ni  $K_{3,3}$  comme mineur.

Toute propriété héréditaire de graphe peut être caractérisée par un nombre fini de mineurs exclus :

**Théorème 1.7.7** *Toute propriété de graphe qui est fermée par mineur peut être exprimée sous la forme  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{F})$  pour une famille  $\mathcal{F}$  finie.*

Comme cas particulier du Théorème 1.7.7 nous avons notamment :

**Corollaire 1.7.8** *Pour toute surface  $S$  il existe un ensemble fini de graphes  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tels que  $\text{Forb}_{\preceq}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  contient précisément les graphes non représentables sur  $S$ .*

# Chapitre 2

## Coloration d'incidence

Nous allons dans ce chapitre déterminer des bornes supérieures du nombre chromatique d'incidence de certaines familles de graphes. La détermination de telles bornes supérieures a naturellement été l'une des principales questions considérées par les auteurs qui se sont intéressés à la coloration d'incidence. Ceux-ci ont en particulier considéré les cas des graphes complets, des forêts, des graphes bipartis complets [18], des graphes de Halin, des graphes planaires extérieurs [21] ou des graphes cubiques [20].

Nous introduisons dans un premier temps la notion de coloration d'incidence et quelques autres notions qui nous seront utiles. Dans les deux sections suivantes nous nous intéressons respectivement aux liens entre la coloration d'incidence et la coloration forte des arêtes et entre l'étoile-arboricité et la coloration d'incidence. Dans la Section 2.4 nous introduisons la notion nouvelle de  $(k, \ell)$ -coloration d'incidence.

Dans les Sections 2.5, 2.6 et 2.7 nous nous intéressons respectivement à la coloration d'incidence des graphes  $k$ -dégénérés, des graphes sans mineur  $K_4$  et des graphes planaires. Ces résultats font l'objet de la publication [42].

Dans la Section 2.8 nous améliorons la borne supérieure obtenue pour les graphes 3-dégénérés en Section 2.5. Finalement, nous considérons dans la Section 2.9 les graphes de degré moyen maximum borné.

### 2.1 Introduction

Une *incidence* d'un graphe  $G$  est une paire  $(v, e) \in V(G) \times E(G)$  telle que  $v$  et  $e$  sont incidents. On note  $I(G)$  l'ensemble de toutes les incidences de  $G$  :

$$I(G) = \{(v, e) \mid v \in V, e \in E \text{ et } e \text{ est incident à } v \}.$$

Pour un sommet  $v$ , nous notons  $A_v$  l'ensemble des incidences de la forme  $(w, vw)$  et  $I_v$  l'ensemble des incidences de la forme  $(v, vw)$  (voir Figure 2.1).

Soient  $(v, e)$  et  $(w, f)$  deux incidences de  $G$  ; on dit que  $(v, e)$  et  $(w, f)$  sont *adjacentes*

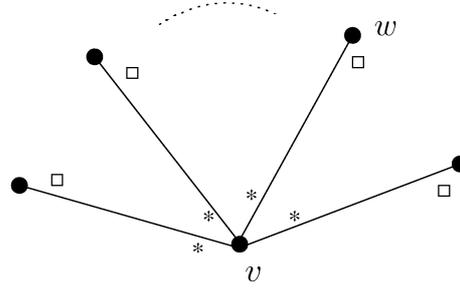


FIG. 2.1 –  $I_v = \{\text{incidences notées } *\}$ ,  $A_v = \{\text{incidences notées } \square\}$

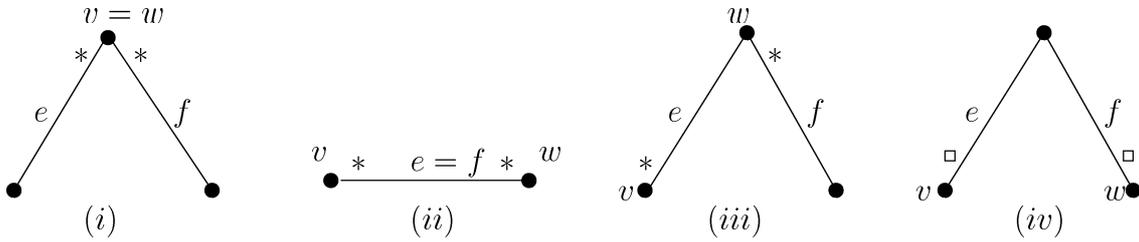


FIG. 2.2 – Les incidences notées  $*$  sont adjacentes (configurations (i), (ii) et (iii)), celles notées  $\square$  sont non adjacentes (configuration (iv))

si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1.  $v = w$ ;
2.  $e = f$ ;
3. l'arête  $vw$  est égale à  $e$  ou  $f$ .

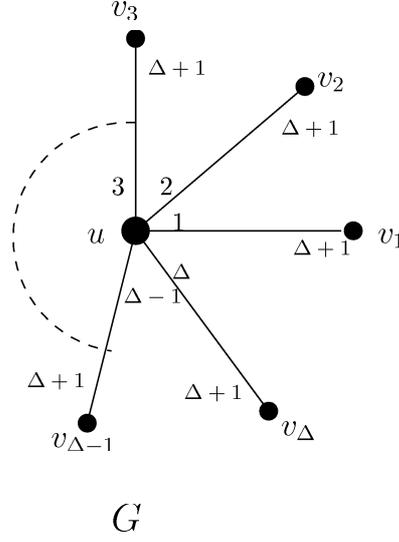
Les configurations correspondant aux conditions (i) – (iii) sont décrites dans la Figure 2.2.

**Définition 2.1.1** Une  $k$ -coloration d'incidence d'un graphe  $G$  est une application de l'ensemble des incidences de  $G$ , dans un ensemble  $C$  de  $k$  couleurs telle que des couleurs distinctes sont affectées aux incidences adjacentes. Le nombre chromatique d'incidence de  $G$ , noté  $\chi_i(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -coloration d'incidence.

La notion de coloration d'incidence a été introduite par Brualdi et Massey [18] en 1993. Il est facile de vérifier la proposition suivante :

**Proposition 2.1.2** Pour tout graphe  $G$  possédant au moins une arête,  $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + 1$ .

**Preuve.** Considérons un graphe  $G$  possédant au moins une arête et soit  $u$  un sommet de degré  $\Delta(G)$  (voir Figure 2.3). On a besoin de  $\Delta(G)$  couleurs distinctes pour colorier les incidences de  $I_u$  et d'au moins une couleur supplémentaire pour colorier les incidences de  $A_u$ . On obtient donc  $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + 1$ . ■

FIG. 2.3 – Un sommet  $u$  de degré  $\Delta(G)$ 

Remarquons que si  $c$  est une coloration d'incidence de  $G$  utilisant  $\Delta(G) + 1$  couleurs, nous avons nécessairement  $|c(A_v)| = 1$  pour tout sommet  $v$  de  $G$  tel que  $d_G(v) = \Delta(G)$ .

**Proposition 2.1.3** *Si  $G$  est un  $n$ -cycle alors  $\chi_i(G) = 3$  si  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , et  $\chi_i(G) = 4$  sinon.*

**Preuve.** Soient  $G$  un  $n$ -cycle et  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$  les incidences de  $G$  (voir Figure 2.4). Nous considérons trois cas :

1.  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .

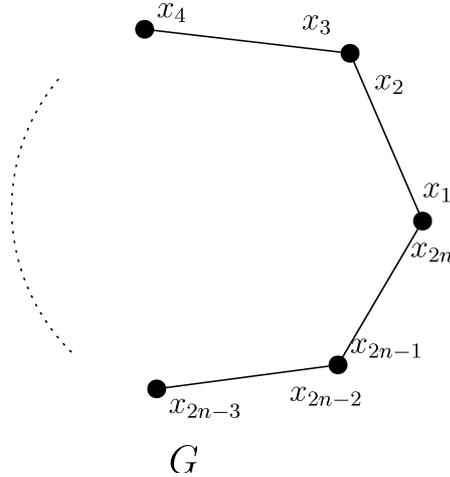
Soit  $\sigma : \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$  l'application définie par :  $\sigma(x_i) = i \pmod{3}$ ,  $\forall i, 1 \leq i \leq 2n$ . L'application  $\sigma$  est clairement une 3-coloration d'incidence de  $G$ . D'après la Proposition 2.1.2 nous avons  $\chi_i(G) \geq 3$ , et donc  $\chi_i(G) = 3$ .

2.  $2n \equiv 1 \pmod{3}$ .

Soit  $\sigma : \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\} \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  l'application définie par :  $\sigma(x_i) = i \pmod{3}$ ,  $\forall i, 1 \leq i \leq 2n - 1$  et  $\sigma(x_{2n}) = 4$ . L'application  $\sigma$  est clairement une 4-coloration d'incidence de  $G$ . Il est facile de vérifier que 4 couleurs sont nécessaires, et donc  $\chi_i(G) = 4$ .

3.  $2n \equiv 2 \pmod{3}$ . Nous avons nécessairement  $2n \geq 8$ .

Soit  $\sigma : \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\} \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  l'application définie par :  $\sigma(x_i) = i \pmod{3}$ ,  $\forall i, 1 \leq i \leq 2n - 5$ ,  $\sigma(x_{2n-4}) = 4$ ,  $\sigma(x_{2n-3}) = 1$ ,  $\sigma(x_{2n-2}) = 2$ ,  $\sigma(x_{2n-1}) = 3$ , et  $\sigma(x_{2n}) = 4$ . L'application  $\sigma$  est clairement une 4-coloration d'incidence de  $G$ . Comme précédemment, nous avons  $\chi_i(G) \geq 4$ , et donc  $\chi_i(G) = 4$ . ■

FIG. 2.4 – Un  $n$ -cycle

**Exemple 2.1.4** La Figure 2.5 décrit une coloration d'incidence du graphe de Petersen  $G_p$  en  $\Delta(G_p) + 2 = 5$  couleurs. On peut vérifier que le nombre chromatique d'incidence du graphe Petersen est 5. En effet, supposons que  $\chi(G_p) \leq 4$  et soit  $\sigma$  une 4-coloration d'incidence de  $G_p$ . Soit  $C$  un 5-cycle de  $G_p$ . Montrons tout d'abord qu'il existe un sommet  $u$  de  $C$  tel que  $|\sigma(A_u)| \geq 2$ . En effet, si  $|\sigma(A_v)| = 1$  pour tout sommet  $v$  de  $C$  alors nous avons la configuration décrite par la Figure 2.6. Dans ce cas, il est facile de vérifier que pour tout  $i, j, 1 \leq i < j \leq 5$ , les deux couleurs  $a_i$  et  $a_j$  doivent être distinctes et c'est une contradiction car  $\sigma$  est une 4-coloration d'incidence de  $G_p$ . Soit donc  $u$  un sommet de  $C$  tel que  $|\sigma(A_u)| = 2$ ; nous avons alors  $|\sigma(I_u) \cup \sigma(A_u)| \geq 5$  car  $|\sigma(I_u)| = 3$  ( $G_p$  est 3-régulier) et c'est encore une contradiction. Nous obtenons ainsi  $\chi_i(G_p) = 5$ .

Brualdi et Massey ont prouvé la borne supérieure générale suivante :

**Théorème 2.1.5** [18] *Pour tout graphe  $G$ ,  $\chi_i(G) \leq 2\Delta(G)$ .*

Comme le nombre chromatique d'incidence d'un cycle pair est 4 ce résultat est optimal. Ils ont aussi conjecturé :

**Conjecture 2.1.6** [18] *Pour tout graphe  $G$ ,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .*

Guiduli en [37] a montré qu'il existe des graphes  $G$  tels que  $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + \Omega(\log \Delta(G))$ , ce qui montre que cette conjecture est fautive. Il a prouvé dans cet article la borne supérieure suivante :

**Théorème 2.1.7** *Pour tout graphe  $G$ ,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + O(\log(\Delta(G)))$ .*

Concernant le nombre chromatique d'incidence de certaines familles de graphes, nous avons les résultats suivants :

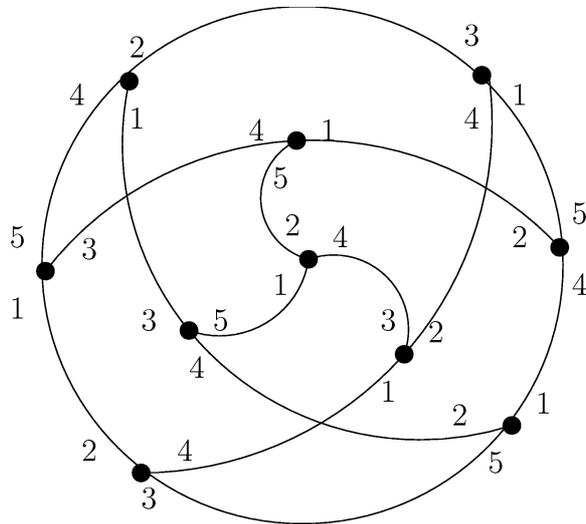


FIG. 2.5 – Une 5-coloration d'incidence du graphe de Petersen

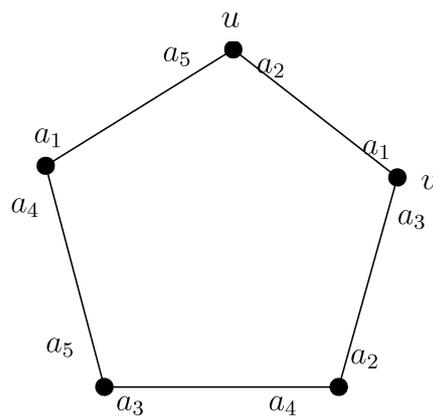


FIG. 2.6 – Un 5-cycle de  $G_p$

**Théorème 2.1.8**

1. Pour tout  $n \geq 2$ ,  $\chi_i(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$  [18].
2. Pour tous  $m \geq n \geq 2$ ,  $\chi_i(K_{m,n}) = m + 2 = \Delta(K_{m,n}) + 2$  [18].
3. Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 2$ ,  $\chi_i(T) = \Delta(T) + 1$  [18].
4. Pour tout graphe de Halin  $G$  avec  $\Delta(G) \geq 5$ ,  $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$  [21].
5. Pour tout graphe planaire extérieur  $G$ ,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$  [54].

En [20], Chen, Lam et Shiu ont conjecturé :

**Conjecture 2.1.9** [20] *Si  $G$  est un graphe cubique, alors  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .*

Ils ont prouvé cette conjecture pour certaines classes de graphes cubiques, en particulier la classe des graphes cubiques Hamiltoniens.

Wang, Chen et Pang en [21] ont publié le théorème suivant :

**Théorème 2.1.10** *Pour tout graphe planaire extérieur  $G$ , de degré maximum  $\Delta(G) \geq 4$ ,  $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ .*

La Proposition 2.1.12 montre qu'il existe des graphes planaires extérieurs de degré maximum 4 et de nombre chromatique d'incidence 6, ce qui prouve que ce théorème est faux pour les graphes planaires extérieurs de degré maximum 4. Dans la Section 4.3 nous obtenons que pour tout graphe planaire extérieur  $G$  de degré maximum  $\Delta(G) \geq 7$ ,  $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ . Ainsi, le Théorème 2.1.10 est vrai pour les graphes planaires extérieurs de degré maximum au moins 7 mais la preuve présentée en [21] est fautive.

En effet cette preuve est basée sur le lemme suivant de Qu [54] :

**Lemme 2.1.11** *Soient  $G$  un graphe planaire extérieur et  $v$  un sommet d'articulation dans  $G$  tel que  $G \setminus v = H_1 \cup H_2$ ,  $G_1 = G[V(H_1) \cup \{v\}]$  et  $G_2 = G[V(H_2) \cup \{v\}]$ . Alors  $\chi_i(G) = \max\{\chi_i(G_1), \chi_i(G_2)\}$ .*

La Figure 2.7 représente un graphe planaire extérieur  $G$  ayant le sommet  $v$  comme sommet d'articulation, les composantes  $H_1, H_2$  de  $G \setminus \{v\}$ , une 3-coloration d'incidence de  $G_1 = G[V(H_1) \cup \{v\}]$  et une 5-coloration d'incidence de  $G_2 = G[V(H_2) \cup \{v\}]$ . Nous verrons que d'après la Proposition 2.1.12,  $\chi_i(G) = 6$ , ce qui montre que le Lemme 2.1.11 est faux.

La question concernant le nombre chromatique d'incidence des graphes planaires extérieurs reste ouverte pour les graphes planaires extérieurs de degré maximum 5 et 6 pour lesquels le nombre chromatique d'incidence peut valoir  $\Delta(G) + 1$  ou  $\Delta(G) + 2$ .

**Proposition 2.1.12** *Il existe des graphes planaires extérieurs de degré maximum 4 et de nombre chromatique d'incidence 6.*

**Preuve.** Le graphe  $G$  représenté Figure 2.8 est un graphe planaire extérieur de degré maximum 4. Nous montrons que  $\chi_i(G) = 6$ . Il suffit de prouver que  $\chi_i(G) > 5$  car pour

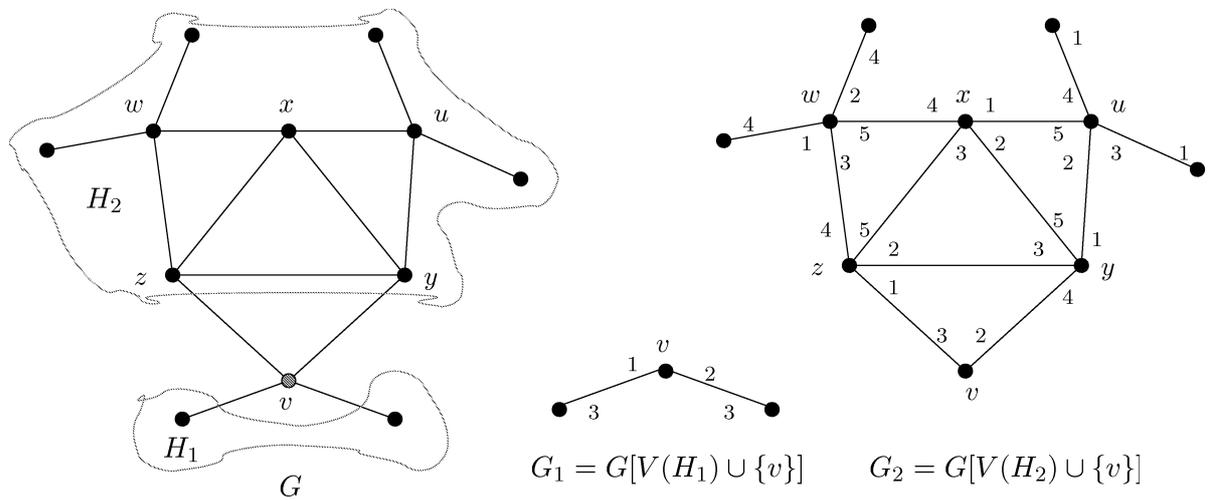


FIG. 2.7 – Contre-exemple pour le Lemme 2.1.11

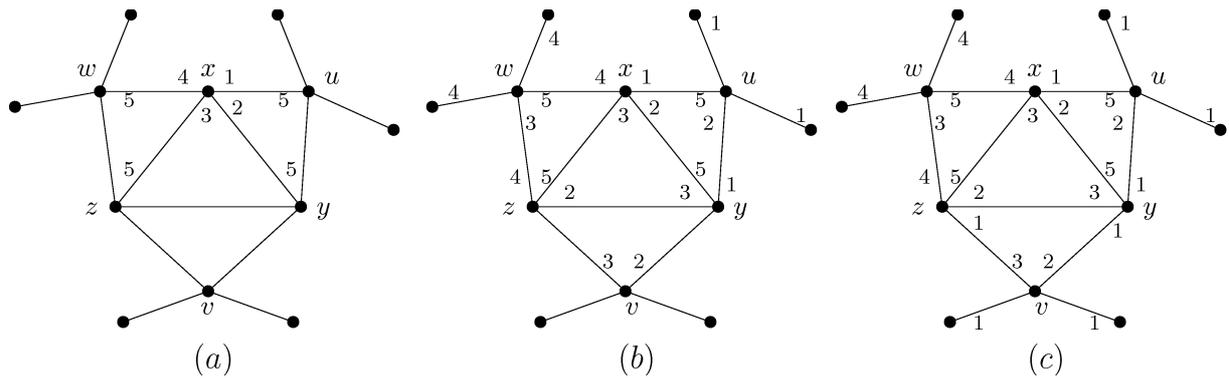


FIG. 2.8 – Un graphe planaire extérieur  $G$  de degré maximum 4 et de nombre chromatique d'incidence 6

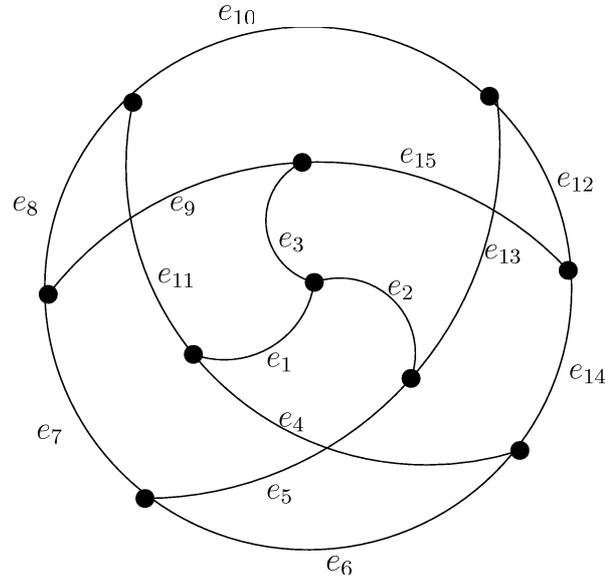


FIG. 2.9 – Couplages dans le graphe de Petersen

tout graphe planaire extérieur  $H$  nous avons  $\chi_i(H) \leq \Delta(H) + 2$ .

Supposons que  $\chi_i(G) = 5$  et soit  $c$  une 5-coloration d'incidence de  $G$ . Alors, pour tout 4-sommet  $\alpha$  de  $G$  nous avons  $|c(A_\alpha)| = 1$ . On peut donc supposer sans perte de généralité que  $c(x, xu) = 1$ ,  $c(x, xy) = 2$ ,  $c(x, xz) = 3$ ,  $c(x, xw) = 4$  et  $c(A_x) = \{5\}$  (voir Figure 2.8(a)). Nous avons alors nécessairement  $c(A_u) = \{1\}$ ,  $c(A_y) = \{2\}$ ,  $c(A_z) = \{3\}$  et  $c(A_w) = \{4\}$  (voir Figure 2.8(b)). Nous devons alors avoir  $c(z, zv) = 1$  et donc  $c(A_v) = \{1\}$  d'où  $c(y, yu) = c(y, yv) = 1$  (voir Figure 2.8(c)), ce qui est une contradiction. Ainsi,  $\chi_i(G) > 5$ . ■

## 2.2 Coloration d'incidence et arête-coloration forte

Soit  $G$  un graphe. Un ensemble  $E_0$  d'arêtes de  $G$  est un *couplage* si toutes les arêtes de  $E_0$  sont non adjacentes. Si  $E_0$  est un couplage, et si  $E_1 \subseteq E_0$ , alors  $E_1$  est aussi un couplage. Un *couplage induit* est un couplage  $E_0$  tel que pour toute arête  $uv \in E(G) \setminus E_0$ , si  $u$  est une extrémité d'une arête de  $E_0$ , alors  $v$  n'est pas l'extrémité d'une arête de  $E_0$ .

**Exemple 2.2.1** Considérons le graphe de Petersen  $G_p$  représenté Figure 2.9. L'ensemble  $E_0 = \{e_1, e_7, e_{12}\}$  est un couplage induit et l'ensemble  $E_1 = \{e_2, e_4, e_9, e_{10}\}$  est un couplage mais il n'est pas un couplage induit ( $e_2$  et  $e_4$  ont deux extrémités reliées par une arête de  $G_p$ ).

Une *k-arête-coloration* d'un graphe  $G$  est une application de l'ensemble des arêtes de  $G$  dans un ensemble  $C$  de  $k$  couleurs telle que des couleurs distinctes sont affectées aux

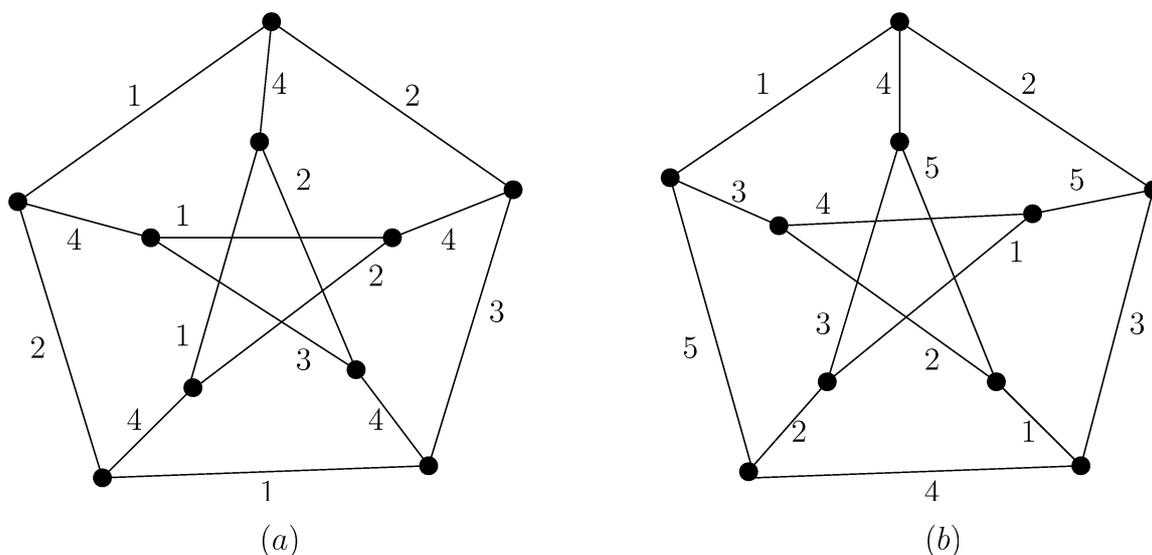


FIG. 2.10 – Une 4-arête-coloration de  $G_p$  (a), et une 5-arête-coloration forte de  $G_p$  (b)

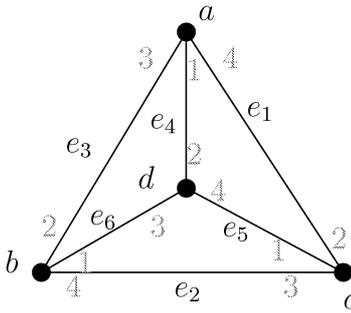
arêtes adjacentes. L'*index chromatique* de  $G$ , noté  $\chi'(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -arête-coloration. Remarquons que dans une arête-coloration d'un graphe  $G$  un ensemble d'arêtes de même couleur est un couplage.

Une  *$k$ -arête-coloration forte* de  $G$  est une  $k$ -arête-coloration de  $G$  telle que les ensembles d'arêtes de même couleur sont des couplages induits. L'*index chromatique fort* de  $G$ , noté  $\chi'_s(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -arête-coloration forte.

**Exemple 2.2.2** La Figure 2.10(a) donne une 4-arête-coloration et la Figure 2.10(b) donne une 5-arête-coloration forte pour le graphe de Petersen  $G_p$ . En fait, nous avons  $\chi'(G_p) = 4$  et  $\chi'_s(G_p) = 5$ .

Soit  $G$  un graphe avec  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  et  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . La *matrice d'incidence* de  $G$  est la  $(0, 1)$ -matrice  $n \times m$   $B[G] = [b_{ij}]$  ou  $b_{ij} = 1$  si et seulement si  $e_j$  est incident à  $v_i$ . Les 1's de la matrice  $B[G]$  correspondent donc aux incidences de  $G$ . Un ensemble de  $k$  incidences de  $G$  non mutuellement adjacentes correspond à une sous-matrice *permutation* de  $B[G]$  d'ordre  $k$  et, inversement, toute sous-matrice permutation de  $B[G]$  d'ordre  $k$  correspond à un ensemble de  $k$  incidences non mutuellement adjacentes de  $G$ . Ainsi, le nombre chromatique d'incidence de  $G$  est égal au plus petit nombre de sous-matrices permutations de  $B[G]$  qui partitionnent ses 1's.

**Exemple 2.2.3** La Figure 2.11 représente la matrice d'incidence  $B[K_4]$ , une coloration d'incidence du graphe  $K_4$  et les sous-matrices permutations  $B_j$ 's,  $1 \leq j \leq 4$ , correspondantes ( $B_j$  correspond aux incidences coloriées  $j$ , les sous-matrices  $B_j$ 's partitionnent les 1's de  $B[K_4]$  et nous avons  $\chi_i(K_4) = |\{B_j\}| = 4$ ).

$$\begin{array}{c}
 e_1 \\
 e_2 \\
 e_3 \\
 e_4 \\
 e_5 \\
 e_6
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 a & b & c & d \\
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 = B[K_4]$$


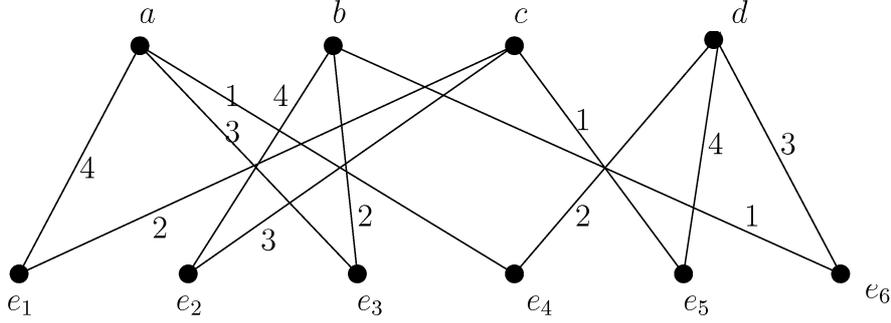
$$\begin{array}{c}
 e_1 \\
 e_2 \\
 e_5
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 a & b & d \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 = B_4$$

$$\begin{array}{c}
 e_1 \\
 e_3 \\
 e_4
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 b & c & d \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 = B_2$$

$$\begin{array}{c}
 e_4 \\
 e_5 \\
 e_6
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 a & b & c \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 = B_1$$

$$\begin{array}{c}
 e_2 \\
 e_3 \\
 e_6
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 a & c & d \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 = B_3$$

FIG. 2.11 – Une coloration d'incidence de  $K_4$ , la matrice d'incidence de  $K_4$  et les sous-matrices permutations correspondantes



$$\chi'_s(H(K_4)) = \chi_i(K_4) = 4$$

FIG. 2.12 – Une coloration forte des arêtes du graphe  $H(K_4)$

Soit  $H(G)$  le graphe biparti d'ordre  $n+m$ , défini par  $V(H(G)) = V(G) \cup E(G)$  et  $v_i$  est adjacent à  $e_j$  si et seulement si  $e_j$  est incident à  $v_i$  dans  $G$ . Soit  $\sigma$  une coloration d'incidence de  $G$ . Il est facile de vérifier que l'application  $\phi$  définie, pour toute arête  $v_i e_j$  dans  $H(G)$ , par  $\phi(v_i e_j) := \sigma(v_i, e_j)$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$ , est une arête-coloration forte de  $H(G)$ . On obtient donc qu'une coloration d'incidence de  $G$  correspond à une arête-coloration forte de  $H(G)$ . Inversement, soit  $\phi$  une arête-coloration forte de  $H(G)$ . Il est facile de vérifier que l'application  $\sigma$  définie, pour toute incidence  $(v_i, e_j)$  de  $G$ , par  $\sigma(v_i, e_j) := \phi(v_i e_j)$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$ , est une coloration d'incidence de  $G$ . On obtient aussi qu'une arête-coloration forte de  $H(G)$  correspond à une coloration d'incidence de  $G$ . Ainsi le nombre chromatique d'incidence de  $G$  est égal à l'index chromatique fort de  $H(G)$  :  $\chi_i(G) = \chi'_s(H(G))$ .

**Exemple 2.2.4** La Figure 2.12 représente  $H(K_4)$  et une arête-coloration forte de  $H(K_4)$ , correspondant à la coloration d'incidence de la Figure 2.11.

Concernant l'index chromatique fort des graphes, Erdős et Nešetřil ont conjecturé en [30] :

**Conjecture 2.2.5** Soit  $G$  un multigraphe, alors :

$$\chi'_s(G) \leq \begin{cases} 5/4(\Delta(G))^2 & \text{si } \Delta(G) \text{ est pair,} \\ 5/4(\Delta(G))^2 - 1/2\Delta(G) + 1/4 & \text{si } \Delta(G) \text{ est impair.} \end{cases}$$

Horák et al. [39] et Andersen [6] ont prouvé cette conjecture pour  $\Delta = 3$ . Faudree et al. [31, 32] ont conjecturé que l'index chromatique fort d'un multigraphe biparti de degré maximum  $\Delta$  est au plus  $\Delta^2$  et ils ont prouvé cette conjecture pour tous les graphes dont les cycles sont tous de longueur multiple de 4. Brualdi et Massey [18] ont conjecturé :

**Conjecture 2.2.6** Soit  $H$  un multigraphe biparti,  $V(H) = X \cup Y$ , tel que pour tout sommet  $x \in X$ ,  $d_H(x) \leq \alpha$  et pour tout sommet  $y \in Y$ ,  $d_H(y) \leq \beta$ . Alors,  $\chi'_s(H) \leq \alpha\beta$ .

Ils ont prouvé cette conjecture pour quelques familles de graphes bipartis, en particulier la famille des graphes bipartis dont tous les cycles sont de longueur multiple de 4.

Remarquons que lorsque  $H = H(G)$  le résultat se déduit du Théorème 2.1.5 : en effet,  $V(H) = V(G) \cup E(G)$ , pour tout sommet  $x \in V(G)$  nous avons  $d_H(x) \leq \Delta(G)$  et pour tout sommet  $y \in E(G)$  nous avons  $d_H(y) = 2$ ; nous obtenons donc  $\chi'_s(H) = \chi_i(G) \leq 2\Delta(G)$ .

## 2.3 Coloration d'incidence et étoile-arboricité

Une forêt d'étoiles est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des étoiles. Une forêt d'étoiles orientées est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des étoiles orientées dont tous les arcs sont dirigés hors du centre. L'*étoile-arboricité* d'un graphe non orienté  $G$ , notée  $st(G)$ , est le plus petit nombre de forêts d'étoiles qui sont nécessaires pour couvrir les arêtes de  $G$ . Pour un graphe orienté  $D$  (pas nécessairement antisymétrique), l'*étoile-arboricité orientée* de  $D$ , notée  $dst(D)$ , est le plus petit nombre de forêts d'étoiles orientées qui sont nécessaires pour couvrir les arcs de  $D$ .

L'étoile-arboricité a été introduite par Akiyama et Kano [2]. L'étoile-arboricité orientée a été introduite par Algor et Alon [4] et B. Guiduli a montré en [37] que le concept de coloration d'incidence correspond à un cas particulier de l'étoile-arboricité orientée. Plus précisément, pour tout graphe  $G$  nous avons  $\chi_i(G) = dst(S(G))$ , où  $S(G)$  est le graphe orienté symétrique obtenu à partir de  $G$  en remplaçant chaque arête de  $G$  par deux arcs opposés. En effet, en associant à chaque incidence de  $G$  de la forme  $(u, uv)$  l'arc  $\vec{uv}$  de  $S(G)$ , on observe facilement que toute coloration d'incidence de  $G$  correspond à une arête-coloration forte de  $S(G)$ , et inversement.

**Exemple 2.3.1** La Figure 2.13 représente  $S(K_4)$  et une famille des forêts d'étoiles orientées,  $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ , couvrant les arcs de  $S(K_4)$ . Cette famille correspond à la coloration d'incidence de  $K_4$  donnée par la Figure 2.11 (chaque étoile  $G_i$  correspond aux incidences coloriées  $i$ ).

## 2.4 $(k, \ell)$ -coloration d'incidence

En référence à la conjecture initiale de Brualdi et Massey, nous avons cherché à déterminer des familles de graphes dont le nombre chromatique d'incidence était majoré par le degré maximum du graphe à une constante près. Nous considérons en particulier la famille des graphes  $k$ -dégénérés (qui contient par exemple la famille des  $k$ -arbres et la famille des graphes représentables sur une surface de genre donné). Plus précisément, nous prouverons dans ce chapitre les résultats suivants :

1. Si  $G$  est un graphe  $k$ -dégénéré, alors  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2k - 1$ .

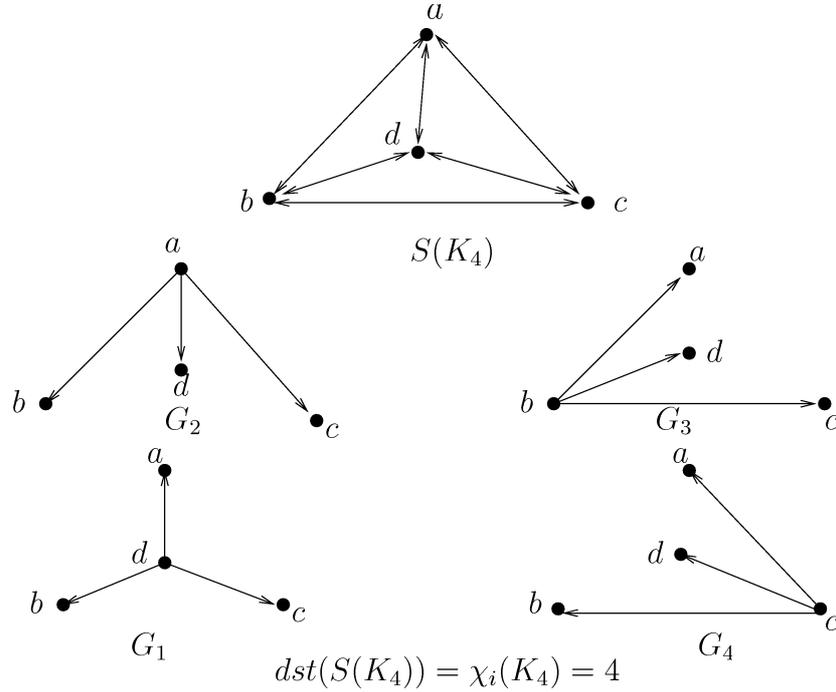


FIG. 2.13 – Le graphe  $S(K_4)$  et une famille couvrante de forêts d'étoiles orientées  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , et  $G_4$

2. Si  $G$  est un graphe sans mineur  $K_4$ , alors  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ , et cette borne est optimale.
3. Si  $G$  est un graphe planaire, alors  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 7$ .
4. Si  $G$  est un graphe 3-dégénéré, alors  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$ .
5. Si  $G$  est un graphe de degré moyen maximum  $dmm(G) < 3$ , alors  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$ .
6. Si  $G$  est un graphe de degré moyen maximum  $dmm(G) < 3$  et de  $\Delta(G) \geq 5$ , alors  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .
7. Si  $G$  est un graphe de degré moyen maximum  $dmm(G) < 22/9$ , alors  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .
8. Si  $G$  est un graphe de degré moyen maximum  $dmm(G) < 16/7$  et de  $\Delta(G) \geq 4$ , alors  $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ .

En fait, nous allons prouver des résultats plus forts : pour chacune de ces familles de graphes, on peut construire une coloration d'incidence telle que pour tout sommet  $v$ , le nombre de couleurs utilisées pour des incidences de la forme  $(w, vw)$  est borné par une constante indépendante du degré maximum du graphe.

Plus précisément, nous introduisons la notion suivante :

**Définition 2.4.1** Une  $(k, \ell)$ -coloration d'incidence d'un graphe  $G$  est une  $k$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  telle que pour tout sommet  $v \in V(G)$ ,  $|\sigma(A_v)| \leq \ell$ .

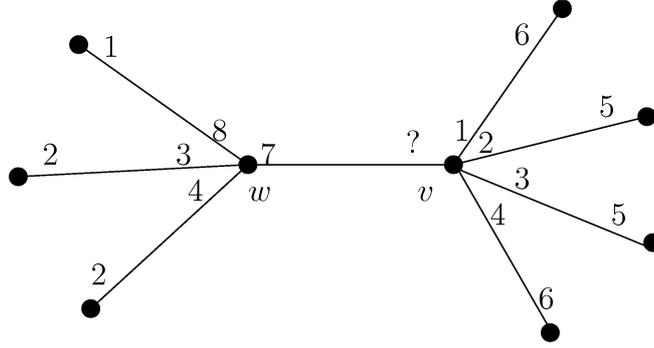


FIG. 2.14 –  $\sigma(A_v) = \{5, 6, 7\}$ ,  $\sigma(I_v) = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\sigma(I_w) = \{3, 4, 7, 8\}$  et  $F_G^\sigma(v, vw) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Nous allons finir cette section en présentant quelques notations que nous utiliserons dans le reste de ce chapitre.

Soit  $G$  un graphe. Si  $v$  est un sommet de  $G$  et  $vw$  une arête de  $G$ , on note  $G \setminus v$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en enlevant le sommet  $v$  et  $G \setminus vw$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en enlevant l'arête  $vw$ . Si  $vx$  n'est pas une arête de  $G$ , on note  $G + vx$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en ajoutant l'arête  $vx$ .

Soit  $G$  un graphe et  $\sigma$  une coloration d'incidence partielle de  $G$ , en d'autres termes une coloration d'incidence qui a été seulement définie pour un sous-ensemble  $I$  de  $I(G)$ . Pour toute incidence non coloriée  $(v, vw) \in I(G) \setminus I$ , on note  $F_G^\sigma(v, vw)$  l'ensemble des couleurs interdites pour l'incidence  $(v, vw)$  :  $F_G^\sigma(v, vw) = \sigma(A_v) \cup \sigma(I_v) \cup \sigma(I_w)$  (voir Figure 2.14).

**Remarque 2.4.2** Soit  $G'$  un sous-graphe de  $G$  et  $\sigma'$  une coloration d'incidence de  $G'$ . Lorsque nous disons que nous étendons la coloration  $\sigma'$  à une coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ , nous supposons que  $\sigma(v, vw) = \sigma'(v, vw)$  pour toute incidence  $(v, vw) \in I(G')$ .

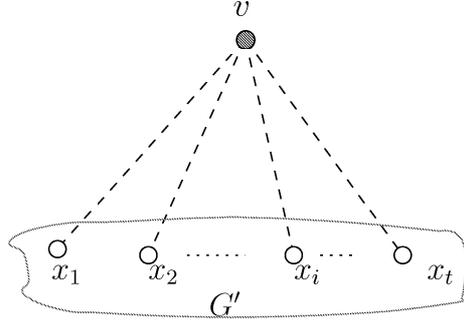
Finalement, nous utiliserons souvent le fait suivant, qui découle des définitions : toute  $(k, \ell)$ -coloration d'incidence peut être considérée comme une  $(k', \ell)$ -coloration d'incidence pour tout  $k' \geq k$ .

## 2.5 Graphes $k$ -dégénérés

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons la convention suivante pour chacune des configurations : le degré des sommets gris ou noirs est complètement spécifié, alors que les sommets blancs sont de degré quelconque.

Dans cette section nous prouvons le théorème général suivant :

**Théorème 2.5.1** *Tout graphe  $k$ -dégénéré  $G$  admet une  $(\Delta(G) + 2k - 1, k)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2k - 1$ .*

FIG. 2.15 – Un sommet  $v$  de degré  $t$  et ses voisins dans  $G$ 

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas des graphes connexes. Supposons que le théorème est faux et soit  $G$  un plus petit contre-exemple. Soit  $v$  un  $t$ -sommet de  $G$ ,  $t \leq k$ , avec  $N_G(v) = \{x_1, \dots, x_t\}$  et  $G' = G \setminus v$  (voir la figure 2.15). D'après la minimalité de  $G$ , il existe une  $(\Delta(G) + 2k - 1, k)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$  de  $G'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2k - 1, k)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ . Nous commençons par prouver le fait ci-dessous :

**Fait 2.5.2** *Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , il existe une couleur  $a_i$  telle que  $a_i \notin F_G^{\sigma'}(v, vx_i) \cup \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$  et  $|\sigma'(A_{x_i}) \cup \{a_i\}| \leq k$ .*

**Preuve.** Considérons tout d'abord  $i = 1$ . Si  $\sigma'(A_{x_1}) \neq \emptyset$  alors  $a_1$  peut être toute couleur de  $\sigma'(A_{x_1})$ , sinon  $d_G(x_1) = 1$ , et  $a_1$  peut être toute couleur. Supposons maintenant que nous avons obtenu  $i-1$  couleurs  $a_1, \dots, a_{i-1}$ ,  $i-1 \leq t$ , en satisfaisant le fait. Si  $|\sigma'(A_{x_i})| = k$  nous prenons une couleur  $a_i \in \sigma'(A_{x_i}) \setminus \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$  (nous avons  $i \leq k$ ). Sinon,  $|F_G^{\sigma'}(v, vx_i) \cup \{a_1, \dots, a_{i-1}\}| \leq d_G(x_i) - 1 + i - 1 \leq \Delta(G) + i - 2 \leq \Delta(G) + k - 2$ . Ainsi, on peut choisir une couleur  $a_i \notin F_G^{\sigma'}(v, vx_i) \cup \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$  et le fait est prouvé. ■

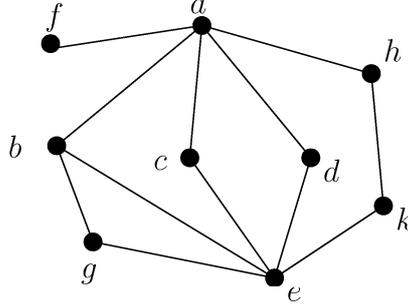
Grâce au fait ci-dessus, on peut poser  $\sigma(v, vx_i) = a_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ .

Maintenant, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , nous avons  $|\sigma'(A_{x_i}) \cup \{a_i\}| \leq k$ . Ainsi, le nombre de couleurs interdites pour l'incidence  $(x_i, x_i v)$  satisfait  $|\sigma'(I_{x_i}) \cup \sigma'(A_{x_i}) \cup \{a_1, \dots, a_t\}| \leq \Delta(G) - 1 + k + t - 1 \leq \Delta + 2k - 2$ . Donc, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , il existe une couleur libre  $b_i \notin F_G^{\sigma'}(x_i, x_i v) \cup \{a_1, \dots, a_t\}$  et on peut poser  $\sigma(x_i, x_i v) = b_i$ .

Bien évidemment, la coloration  $\sigma$  obtenue est une  $(\Delta(G) + 2k - 1, k)$ -coloration d'incidence de  $G$ . Nous arrivons donc à une contradiction et le théorème est prouvé. ■

Puisque un graphe sans mineur  $K_4$  est 2-dégénéré, on en déduit :

**Corollaire 2.5.3** *Tout graphe  $G$  sans mineur  $K_4$  admet une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence.*

FIG. 2.16 – Un graphe  $G$  pour l'exemple 2.6.1

Ce résultat sera amélioré en Section 2.6. De la même façon, puisque tout graphe planaire est 5-dégénéré, on en déduit :

**Corollaire 2.5.4** *Tout graphe planaire  $G$  admet une  $(\Delta(G) + 9, 5)$ -coloration d'incidence.*

Ce résultat sera amélioré en section 2.7. D'après la formule d'Euler, nous savons que tout graphe planaire sans triangle est 3-dégénéré ; on a donc le corollaire suivant :

**Corollaire 2.5.5** *Tout graphe planaire sans triangle  $G$  admet une  $(\Delta(G) + 5, 3)$ -coloration d'incidence.*

Ce résultat sera amélioré en Section 2.8.

## 2.6 Graphes sans mineur $K_4$

Soit  $G$  un graphe et  $v$  un sommet de  $G$ . On note  $D_G(v)$  le cardinal de l'ensemble

$$\{u \in V(G) \mid (d_G(u) \geq 3 \text{ et } uv \in E(G)) \text{ ou } (\exists w \in V(G), d_G(w) = 2, uw, vw \in E(G))\}.$$

**Exemple 2.6.1** Pour le graphe  $G$  représenté par la Figure 2.16 nous avons :

$$D_G(a) = |\{b, e, k\}| = 3$$

Nous avons le théorème structurel suivant, dû à Lih, Wang et Zhu [48] :

**Lemme 2.6.2** [48] *Soit  $G$  un graphe sans mineur  $K_4$ . Alors l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1.  $\delta(G) \leq 1$  ;
2. il existe deux 2-sommets qui sont adjacents ;
3. il existe un sommet  $u$  tel que  $d_G(u) \geq 3$  et  $D_G(u) \leq 2$ .

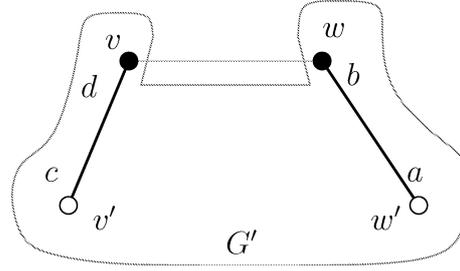


FIG. 2.17 – Configuration pour le cas 2 du Théorème 2.6.3

On peut maintenant prouver le résultat principal de cette section :

**Théorème 2.6.3** *Tout graphe  $G$  sans mineur  $K_4$  admet une  $(\Delta(G)+2, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas des graphes connexes. Supposons que le théorème est faux et soit  $G$  un plus petit contre-exemple. Nous avons nécessairement  $\Delta(G) \geq 3$ . Car, si  $\Delta(G) \leq 2$  alors selon le Théorème 2.1.5 nous avons  $\chi_i(G) \leq 2\Delta(G) \leq \Delta(G) + 2$ . De plus, toute 4-coloration d'incidence de  $G$  est une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence. Selon le Lemme 2.6.2, nous avons trois cas à considérer.

1.  $G$  contient un 1-sommet  $v$ .

Soit  $w$  le seul voisin de  $v$  dans  $G$ . Selon la minimalité de  $G$ , il existe une  $(\Delta(G)+2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$  de  $G' = G \setminus v$ . Puisque  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| = |\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w)| \leq d_G(w) - 1 + 2 \leq \Delta(G) + 1$ , il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, vw)$ . On peut donc étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  en posant  $\sigma(w, vw) = a$  et  $\sigma(v, vw) = b$  pour une couleur  $b \in \sigma'(A_w)$  ( $G'$  a nécessairement une arête car  $\Delta(G) \geq 3$ ).

2.  $\delta(G) > 1$  et  $G$  contient deux 2-sommets adjacents  $v$  et  $w$  (voir Figure 2.17).

Soit  $G' = G \setminus vw$ . Notons  $v'$  le seul voisin de  $v$  et  $w'$  le seul voisin de  $w$  dans  $G'$ . Selon la minimalité de  $G$ , il existe une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$  de  $G'$ . Soient  $a = \sigma'(w', w'w)$ ,  $b = \sigma'(w, ww')$ ,  $c = \sigma'(v', v'v)$  et  $d = \sigma'(v, vv')$ .

Supposons d'abord que  $|\{a, b, c, d\}| = 4$ . On peut étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  en posant  $\sigma(v, vw) = a$  et  $\sigma(w, vw) = c$ .

Maintenant, si  $|\{a, b, c, d\}| \leq 3$ , on peut étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  en posant  $\sigma(v, vw) = e$  et  $\sigma(w, vw) = f$ , avec  $e, f \notin \{a, b, c, d\}$ , car  $\Delta(G) + 2 \geq 5$ .

3. Aucun des deux cas précédents ne se produit.

Dans ce cas-là,  $G$  contient un sommet  $v$  avec  $d_G(v) \geq 3$  et  $D_G(v) \leq 2$ . Nous considérons deux sous-cas en fonction de  $D_G(v)$  :

- (a)  $D_G(v) = 1$ .

Notons par  $x_1, x_2, \dots, x_t$  les voisins de degré 2 de  $v$ . Nous avons évidemment  $t \geq 2$  et tous ces 2-sommets sont reliés à un  $k$ -sommet  $w$ ,  $k \geq 3$  ( $G$  n'a pas

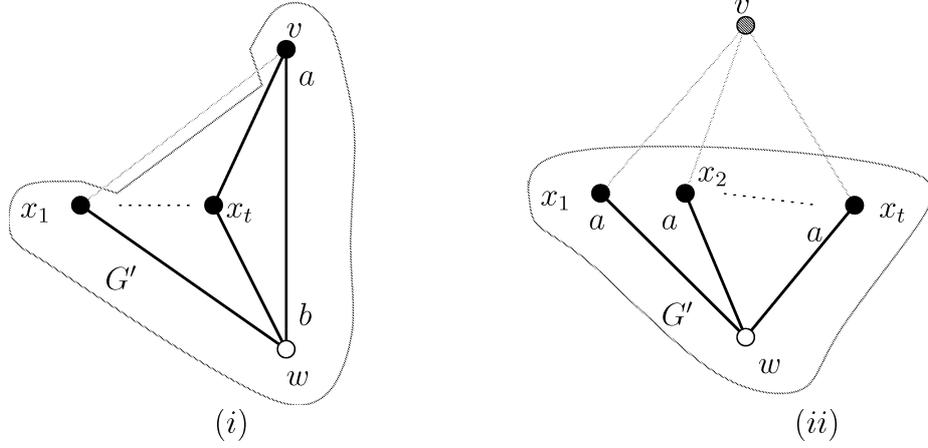


FIG. 2.18 – Configurations pour le cas 3.(a) du Théorème 2.6.3

de 1-sommet ni de paire de 2-sommets adjacents). De plus, si  $t = 2$  alors  $G$  contient nécessairement l'arête  $vw$ , car  $d_G(v) \geq 3$ . Nous avons deux sous-cas à considérer :

i.  $vw \in E(G)$  (voir Figure 2.18.(i)).

Soit  $G' = G \setminus vx_1$  et  $\sigma'$  une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence de  $G'$ . De plus, supposons  $a = \sigma'(v, vw)$  et  $b = \sigma'(w, vw)$ . Remarquons que  $a$  est une couleur légale pour l'incidence  $(x_1, x_1w)$ .

Ainsi, en recoloriant si nécessaire, on peut supposer  $\sigma'(x_1, x_1w) = a$ . On peut étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  comme suit. On pose d'abord  $\sigma(x_1, x_1v) = b$ . Maintenant, puisque  $|F_G^{\sigma'}(v, vx_1)| = |\sigma'(I_v \setminus (v, vx_1)) \cup \sigma'(A_v)| \leq d_G(v) - 1 + 2 \leq \Delta(G) + 1$ , il existe une couleur  $c$  telle que  $c \notin F_G^{\sigma'}(v, vx_1)$  et on pose  $\sigma(v, vx_1) = c$ .

ii.  $vw \notin E(G)$  (voir Figure 2.18.(ii)).

Dans ce cas, nous avons  $t \geq 3$ . Soit  $G' = G \setminus v$  et  $\sigma'$  une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence de  $G'$ . On observe que la couleur  $\sigma'(x_1, x_1w)$  peut être utilisée pour colorier toutes les incidences  $(x_i, x_iw)$ ,  $2 \leq i \leq t$ .

Ainsi, nous pouvons choisir  $\sigma'$  telle que  $\sigma'(x_i, x_iw) = a$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ . Nous pouvons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  comme suit. Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ ,  $F_G^{\sigma'}(x_i, x_iw) = \sigma'(I_w) \cup \{a\}$  et  $d_G(w) \leq \Delta(G)$ . Il existe donc une couleur libre  $b$  pour colorier les incidences de la forme  $(x_i, x_iv)$ .

Nous posons donc  $\sigma(x_i, x_iv) = b$ , pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ . Finalement, seulement deux couleurs  $a$  et  $b$  sont interdites pour colorier les  $t$  incidences de la forme  $(v, vx_i)$ . Ces incidences peuvent donc être coloriées car  $t \leq \Delta(G)$ .

(b)  $D_G(v) = 2$ .

Nous avons quatre sous-cas à considérer, donnés par les quatre configurations de la Figure 2.19 :

- i. Soit  $G' = G \setminus vx_1$  et  $\sigma'$  une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence de  $G'$ . Comme précédemment, on peut choisir  $\sigma'$  de telle manière que  $\sigma'(y_i, y_iw') = a$  et  $\sigma'(y_i, y_iv) = \sigma'(w', w'v) = b$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ . Posons alors  $c = \sigma'(v, vw)$ ,  $d = \sigma'(w, ww)$ ,  $e = \sigma'(x_1, x_1w)$  et  $f = \sigma'(w, wx_1)$ . Nous pouvons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  comme suit. On pose tout d'abord  $\sigma(x_1, x_1w) = c$  et  $\sigma(x_1, x_1v) = d$ . Maintenant, comme  $|F_G^\sigma(v, vx_1)| = |\sigma'(I_v \setminus (v, vx_1)) \cup \sigma'(A_v)| \leq d_G(v) - 1 + 2 \leq \Delta(G) + 1$ , il existe une couleur  $g$  telle que  $g \notin F_G^\sigma(v, vx_1)$  et on pose  $\sigma(v, vx_1) = g$ .
- ii. Ce cas se résout comme le précédent, sans avoir besoin de considérer l'incidence  $(v, vw')$ .
- iii. Soit  $G' = G \setminus v$  et  $\sigma'$  une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence de  $G'$ . On peut choisir  $\sigma'$  de telle manière que  $\sigma'(x_i, x_iw) = a$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ ,  $\sigma'(y_j, y_jw') = b$ , pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq t$  et  $a \neq b$ , car nous avons au moins deux choix pour  $\sigma'(x_i, x_iw)$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$  et  $\sigma'(y_j, y_jw')$ ,  $1 \leq j \leq t$ . Nous pouvons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  comme suit. On pose tout d'abord  $\sigma(v, vx_1) = b$ , et  $\sigma(v, vy_1) = a$ . Comme  $r \leq d_G(v) \leq \Delta(G)$ , il existe une couleur  $c \notin \{a, b\} \cup \{\sigma'(w, wx_i) : 1 \leq i \leq r\}$ . De la même manière, comme  $t < d_G(v) \leq \Delta(G)$ , il existe une couleur  $d \notin \{a, b\} \cup \{\sigma'(w', w'x_i) : 1 \leq j \leq t\}$ . Nous posons alors  $\sigma((x_i, x_iv) = c$ ,  $1 \leq i \leq r$  et  $\sigma(y_j, y_jv) = d$ ,  $1 \leq j \leq t$ . Finalement, nous avons besoin de  $r + t - 2$  couleurs distinctes de  $a, b, c$ , et  $d$  pour colorier les incidences  $(v, vx_i)$ ,  $2 \leq i \leq r$  et  $(v, vy_j)$ ,  $2 \leq j \leq t$ . Ces incidences peuvent donc être coloriées car  $r + t = d_G(v) \leq \Delta(G)$ .
- iv. Nous considérons deux sous-cas, en fonction de  $d_G(v)$ .

A.  $d_G(v) < \Delta(G)$ .

Soit  $G' = G \setminus \{vx_i : 1 \leq i \leq r\}$  et  $\sigma'$  une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence de  $G'$ . Comme dans le cas (a),  $\sigma'$  peut être choisie de telle manière que  $\sigma'(x_i, x_iw) = a$ ,  $1 \leq i \leq r$ . De plus, posons  $b = \sigma'(w', w'v)$  et  $c = \sigma'(v, vw')$ . Nous pouvons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence de  $G$  comme suit. Soit  $F = \bigcup_{i=1}^r F_G^{\sigma'}(x_i, x_iv) = \{a, c\} \cup \{\sigma'(w, wx_i) : 1 \leq i \leq r\}$ ; comme  $r \leq d_G(v) < \Delta(G)$ , nous pouvons poser  $\sigma(x_i, x_iv) = d$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , avec  $d \notin F$ . Finalement, nous avons besoin de  $r$  couleurs distinctes de  $a, b, c$  et  $d$  pour colorier les incidences  $(v, vx_i)$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Ces incidences peuvent être coloriées car  $r \leq d_G(v) - 1 \leq \Delta(G) - 2$ .

B.  $d_G(v) = \Delta(G)$ .

Soit  $G' = G \setminus \{x_i : 1 \leq i \leq r\}$  et  $\sigma'$  une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence de  $G'$ . Soit  $a = \sigma'(w', w'v)$  et  $b = \sigma'(v, vw')$ ,  $b \neq a$ . Si

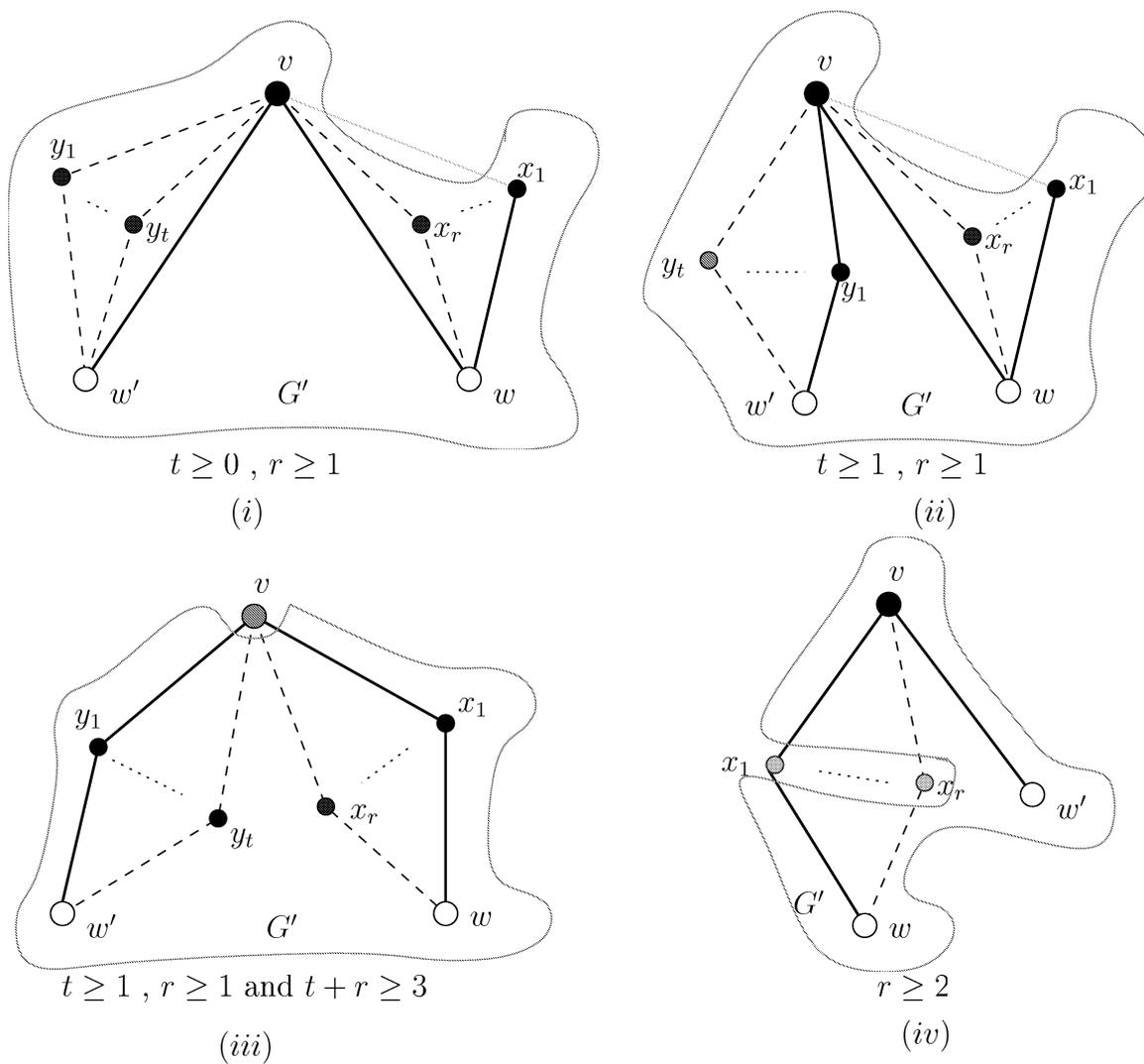


FIG. 2.19 – Configurations pour le cas 3.(b) du Théorème 2.6.3

$d_G(w) = \Delta(G) - 1$ , alors  $D_G(w) = 1$ , qui est un cas déjà couvert. Donc, on peut supposer que  $d_G(w) = \Delta(G)$ .

Soit  $v'$  le seul voisin de  $w$  dans  $G'$ . Supposons  $c = \sigma'(v', v'w)$  et  $d = \sigma'(w, wv')$ ,  $d \neq c$ . Nous posons  $\sigma(x_i, x_iw) = c$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Maintenant, si  $a \neq c$ , nous posons  $\sigma(x_i, x_iv) = a$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$  et si  $a = c$ , nous posons  $\sigma(x_i, x_iv) = z$ ,  $1 \leq i \leq r$ , pour une couleur  $z \notin \{a, b, c, d\}$ . Il est facile de vérifier que dans les deux cas  $|\bigcup_{k=1}^r F_G^\sigma(w, wx_k)| = 3$ . Comme  $r = d_G(w) - 1 = \Delta - 1$ , nous pouvons colorier les incidences  $(w, wx_i)$ ,  $1 \leq i \leq r$ .

Donc, dans tous les cas nous obtenons une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence de  $G$ . Ceci contredit notre hypothèse et le théorème est prouvé. ■

La proposition suivante montre que la borne donnée par Théorème 2.6.3 est optimale.

**Proposition 2.6.4** *Pour tout  $k \geq 1$ , il existe une infinité de graphes sans mineurs  $K_4$  de degré maximum  $k$  et de nombre chromatique d'incidence  $k + 2$ .*

**Preuve.** Soit  $G_k$  le graphe sans mineur  $K_4$  obtenu en reliant deux sommets  $u$  et  $v$  par  $k$  chemins distincts de longueur 2 dont les sommets intérieurs sont notés respectivement par  $w_1, w_2, \dots, w_k$  (voir la figure 2.20). Nous avons clairement  $\Delta(G_k) = k$ . Supposons que  $G_k$  admet une  $(k+1)$ -coloration d'incidence. Comme nous avons besoin de  $k$  couleurs distinctes pour colorier  $I_u$ , toutes les incidences de la forme  $(w_i, w_iu)$  ont la même couleur, disons  $a$ . De la même façon, comme nous avons besoin de  $k$  couleurs distinctes pour colorier  $I_v$ , toutes les incidences de la forme  $(w_i, w_iv)$  ont la même couleur, disons  $b$ . Mais la couleur  $b$  doit être distincte de  $a$  et des  $k$  couleurs affectées à  $I_u$ , ce qui est une contradiction. Ainsi,  $\chi_i(G_k) \geq k + 2$ .

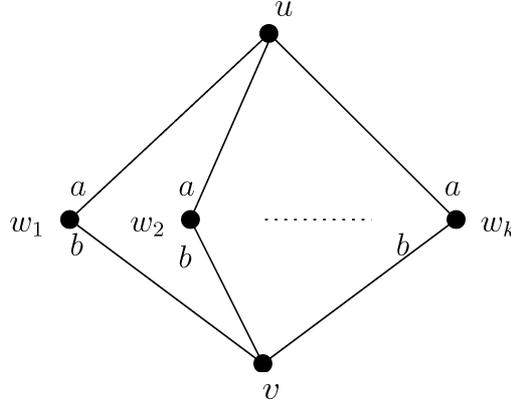
Finalement, tout graphe sans mineur  $K_4$  de degré maximum  $k$  et contenant  $G_k$  comme sous-graphe a pour nombre chromatique d'incidence  $k + 2$ . (De tels graphes peuvent être obtenus par exemple en reliant des chemins distincts de longueur arbitraire aux sommets intermédiaires  $w_1, w_2, \dots, w_k$ ). ■

## 2.7 Graphes planaires

Nous utiliserons le lemme structurel suivant qui découle de la formule d'Euler [12].

**Lemme 2.7.1** *Soit  $G$  un graphe planaire. Alors l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1.  $\delta(G) \leq 2$ ;
2. il existe une arête  $vw$  de  $G$  avec  $d_G(v) = 3$  et  $d_G(w) \leq 10$ ;

FIG. 2.20 – Le graphe  $G_k$ 

3. il existe une arête  $vw$  de  $G$  avec  $d_G(v) = 4$  et  $d_G(w) \leq 8$ ;
4. il existe une arête  $vw$  de  $G$  avec  $d_G(v) = 5$  et  $d_G(w) \leq 6$ .

Nous pouvons maintenant prouver le principal résultat de cette section :

**Théorème 2.7.2** *Tout graphe planaire  $G$  admet une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 7$ .*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas des graphes connexes. Supposons que le théorème est faux et soit  $G$  un plus petit contre-exemple (en nombre d'arêtes). Nous avons nécessairement  $\Delta(G) \geq 8$ . Car, si  $\Delta(G) < 8$ , selon le Théorème 2.1.5 nous avons  $\chi_i(G) \leq 2\Delta(G) \leq \Delta(G) + 7$  et toute  $(\Delta(G) + 7)$ -coloration d'incidence de  $G$  est évidemment une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence.

Selon le Lemme 2.7.1 nous avons cinq cas à considérer (pour tout cas, nous supposons que les précédents ne se produisent pas).

1.  $G$  contient un 1-sommet  $v$ .

Soit  $w$  le seul voisin de  $v$  dans  $G$ . D'après la minimalité de  $G$ , le graphe  $G' = G \setminus v$  admet une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous étendons  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence de  $G$  comme suit. Comme  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| = |\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w)| \leq \Delta(G) - 1 + 7 = \Delta(G) + 6$ , il existe une couleur libre, disons  $a$ , qui peut être affectée à l'incidence  $(w, vw)$  et on pose donc  $\sigma(w, vw) = a$ . Maintenant, il suffit de poser  $\sigma(v, vw) = b$  pour une couleur  $b$  de  $\sigma'(A_w)$ .

2.  $G$  contient un 2-sommet  $v$ .

Soient  $w$  et  $w'$  les deux voisins de  $v$  dans  $G$ . Supposons d'abord que  $ww'$  est une arête de  $G$ . D'après la minimalité de  $G$ , le graphe  $G' = G \setminus v$  admet une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Soient  $a = \sigma'(w, ww')$  et  $b = \sigma'(w', w'w)$ .

Nous étendons  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  comme suit. Nous posons tout d'abord  $\sigma(v, vw) = b$  et  $\sigma(v, vw') = a$ . Comme  $|F_G^\sigma(w, vw)| = |\sigma' d_G(w) -$

$1 + |\sigma(A_w)| \leq \Delta(G) - 1 + 7 = \Delta(G) + 6$ , il existe une couleur  $c \notin F_G^\sigma(w, wv)$ . De la même façon, comme  $|F_G^\sigma(w', w'v)| \leq \Delta(G) + 6$ , il existe une couleur  $d \notin F_G^\sigma(w', w'v)$ . Nous obtenons une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence de  $G$  en posant  $\sigma(w, wv) = c$  et  $\sigma(w', w'v) = d$ .

Supposons maintenant que  $ww'$  n'est pas une arête de  $G$ . Nous considérons le graphe  $G' = (G \setminus v) + ww'$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Soient  $a = \sigma'(w, ww')$  et  $b = \sigma'(w', w'w)$ . Nous étendons  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  comme suit. On pose tout d'abord  $\sigma(w, wv) = a$  et  $\sigma(w', w'v) = b$ . Si  $|\sigma'(A_w)| \geq 2$  il existe alors une couleur  $c \in \sigma'(A_w)$  telle que  $c \neq b$  et on pose  $\sigma(v, vw) = c$ . Si  $\sigma'(A_w) = \{b\}$ , nous avons  $|F_G^\sigma(v, vw)| = |\sigma(I_w) \cup \{b\}| \leq \Delta(G) + 1$ ; il existe donc une couleur  $c \notin F_G^\sigma(v, vw)$  et nous posons  $\sigma(v, vw) = c$ .

Maintenant, si  $|\sigma'(A_{w'})| \geq 3$ , il existe alors une couleur  $d \in \sigma'(A_{w'})$  telle que  $d \notin \{a, c\}$  et nous posons  $\sigma(v, vw') = d$ . Sinon, nous avons  $|F_G^\sigma(v, vw')| = |\sigma(I_{w'}) \cup \{a, c\}| \leq \Delta(G) + 2$ ; il existe donc une couleur  $d \notin F_G^\sigma(v, vw')$  et nous posons  $\sigma(v, vw') = d$ .

3.  $G$  contient une arête  $vw$  telle que  $d_G(v) = 3$  et  $3 \leq d_G(w) \leq 10$ .

D'après la minimalité de  $G$ , le graphe  $G' = G \setminus vw$  admet une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous étendons  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  comme suit. Pour colorier l'incidence  $(w, wv)$  nous considérons les cinq sous-cas suivants.

- (a)  $d_G(w) \leq 7$ .

Comme  $|F_G^{\sigma'}(w, wv)| = |\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_v)| \leq 6 + 6 + 2 = 14$  et  $\Delta(G) + 7 \geq 8 + 7 = 15$ , il existe une couleur  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, wv)$  et nous posons  $\sigma(w, wv) = a$ .

- (b)  $d_G(w) = 8$  et  $(\Delta(G) \geq 10$  ou  $|\sigma'(A_w)| \leq 5)$ .

Comme  $|\sigma'(I_w)| = d_G(w) - 1$ , nous avons  $|F_G^{\sigma'}(w, wv)| = d_G(w) - 1 + |\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_v)|$ . Si  $\Delta(G) \geq 10$ , on obtient  $|F_G^{\sigma'}(w, wv)| \leq 7 + 7 + 2 = 16 \leq \Delta(G) + 6$ . De la même façon, si  $|\sigma'(A_w)| \leq 5$  on obtient  $|F_G^{\sigma'}(w, wv)| \leq \Delta(G) - 1 + 5 + 2 = \Delta(G) + 6$ . Dans les deux cas, il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, wv)$  et on pose  $\sigma(w, wv) = a$ .

- (c)  $d_G(w) = 8$ ,  $\Delta(G) \leq 9$  et  $|\sigma'(A_w)| \geq 6$ .

Soit  $N_G(v) = \{w, x_1, x_2\}$ . Nous allons prouver tout d'abord qu'on peut recolorier les deux incidences  $(v, vx_1)$  et  $(v, vx_2)$  en utilisant deux couleurs  $c_1$  et  $c_2$  telles que  $c_1, c_2 \in \sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)$ .

Supposons qu'il existe un  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $|\sigma'(A_{x_i})| = 7$ . Alors  $|\sigma'(A_{x_i}) \setminus \sigma'(A_v)| \geq 7 - 2 + 1 = 6$  et  $|\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| \geq 6 + 7 = 13$ . Comme le nombre de couleurs est au plus 16,  $|(\sigma'(A_{x_i}) \setminus \sigma'(A_v)) \cap (\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w))| \geq 3$ . Nous avons donc au moins trois possibilités de choix pour  $c_i$ . Si  $|\sigma'(A_{x_i})| \leq 6$ , nous avons alors au moins trois possibilités de choix pour  $c_i$  car  $|\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| \geq 13$  et  $|\sigma'(I_{x_i}) \cup \sigma'(A_v)| \leq 9 + 2 - 1 = 10$ .

En posant  $\sigma(v, vx_1) = c_1$  et  $\sigma(v, vx_2) = c_2$ , nous avons  $|F_G^{\sigma'}(w, wv)| = |\sigma'(A_w) \cup$

$|\sigma'(I_w) \cup \sigma'(I_v)| = |\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| \leq 7 + d_G(w) - 1 = d_G(w) + 6 \leq \Delta(G) + 6$ . Il existe donc une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, vw)$  et on peut poser  $\sigma(w, vw) = a$ .

(d)  $9 \leq d_G(w) \leq 10$  et ( $\Delta(G) \geq 12$  ou  $|\sigma'(A_w)| \leq 5$ ).

Comme  $|\sigma'(I_w)| = d_G(w) - 1$ , nous avons  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| = d_G(w) - 1 + |\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_v)|$ . Si  $\Delta(G) \geq 12$ , on obtient  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| \leq 9 + 7 + 2 = 18 \leq \Delta(G) + 6$ . De la même façon, si  $|\sigma'(A_w)| \leq 5$  on obtient  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| \leq \Delta(G) - 1 + 5 + 2 = \Delta(G) + 6$ . Dans les deux cas, il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, vw)$  et on pose  $\sigma(w, vw) = a$ .

(e)  $9 \leq d_G(w) \leq 10$ ,  $\Delta(G) \leq 11$  et  $|\sigma'(A_w)| \geq 6$ .

Soit  $N_G(v) = \{w, x_1, x_2\}$ . Nous allons prouver tout d'abord qu'on peut recolorier les deux incidences  $(v, vx_1)$  et  $(v, vx_2)$  en utilisant deux couleurs  $c_1$  et  $c_2$  telles que  $c_1, c_2 \in \sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)$ .

Supposons qu'il existe un  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $|\sigma'(A_{x_i})| = 7$ . Alors  $|\sigma'(A_{x_i}) \setminus \sigma'(A_v)| \geq 7 - 2 + 1 = 6$  et  $|\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| \geq 6 + 8 = 14$ . Comme le nombre de couleurs est au plus 18,  $|(\sigma'(A_{x_i}) \setminus \sigma'(A_v)) \cap (\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w))| \geq 2$ . Nous avons donc au moins deux choix possibles pour  $c_i$ . Si  $|\sigma'(A_{x_i})| \leq 6$  nous avons alors au moins deux possibilités de choix pour  $c_i$  car  $|\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| \geq 6 + d_G(w) - 1 \geq 14$  et  $|\sigma'(I_{x_i}) \cup \sigma'(A_v)| \leq 11 + 2 - 1 = 12$ . En posant  $\sigma(v, vx_1) = c_1$  et  $\sigma(v, vx_2) = c_2$ , nous obtenons  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| = |\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w) \cup \sigma'(I_v)| = |\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| \leq 7 + d_G(w) - 1 = d_G(w) + 6 \leq \Delta(G) + 6$ . Il existe donc une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, vw)$  et nous pouvons poser  $\sigma(w, vw) = a$ .

Il reste maintenant à colorier l'incidence  $(v, vw)$ . Si  $|\sigma(A_w)| \leq 6$  il existe une couleur  $d$  telle que  $d \notin F_G^\sigma(v, vw)$  car dans ce cas,  $|F_G^\sigma(v, vw)| = |\sigma(I_v) \cup \sigma(A_v) \cup \sigma(I_w)| \leq 2 + 3 + d_G(w) - 1 = d_G(w) + 4 \leq \Delta(G) + 4$ . Nous posons alors  $\sigma(v, vw) = d$ . Sinon,  $|\sigma(A_w)| = 7$  et il existe une couleur  $e$  telle que  $e \in \sigma(A_w) \setminus (\sigma(A_v) \cup \sigma(I_v))$  car  $|\sigma(A_v) \cup \sigma(I_v)| \leq 5$ . Nous posons alors  $\sigma(v, vw) = e$ .

4.  $G$  contient une arête  $vw$  telle que  $d_G(v) = 4$  et  $4 \leq d_G(w) \leq 8$ .

Rappelons que nous avons  $\Delta(G) \geq 8$  et donc au moins 15 couleurs. D'après la minimalité de  $G$ , le graphe  $G' = G \setminus vw$  admet une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous étendons  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  comme suit.

Si  $d_G(w) \leq 6$ , nous avons  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| = |\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_v)| \leq 5 + 5 + 3 = 13$  et  $|F_G^{\sigma'}(v, vw)| = |\sigma'(I_v) \cup \sigma'(A_v) \cup \sigma'(I_w)| \leq 3 + 3 + 5 = 11$ . Comme nous avons au moins 15 couleurs, on peut choisir deux couleurs  $a$  et  $b$  telles que  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, vw)$ ,  $b \notin F_G^{\sigma'}(v, vw)$  et  $a \neq b$ . Nous posons alors  $\sigma(w, vw) = a$  et  $\sigma(v, vw) = b$ .

Supposons maintenant que  $7 \leq d_G(w) \leq 8$ . Nous colorierons tout d'abord l'incidence  $(w, vw)$ . Soit  $N_G(v) = \{w, x_1, x_2, x_3\}$ . Nous considérons sept sous-cas, en fonction de  $d_G(w)$ ,  $\Delta(G)$  et  $|\sigma'(A_w)|$  :

(a)  $\Delta(G) \geq 11$ .

Nous avons  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| = |\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_v)| \leq 7 + 7 + 3 = 17$ . Comme nous avons au moins 18 couleurs, il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, vw)$  et nous posons  $\sigma(w, vw) = a$ .

(b)  $|\sigma'(A_w)| \leq 6$  et  $|\sigma'(A_w)| + 4 \leq \Delta(G) \leq 10$ .

Comme  $|F_G^{\sigma'}(w, wv)| = |\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_v)| \leq 7 + |\sigma'(A_w)| + 3 = |\sigma'(A_w)| + 10 \leq \Delta(G) + 6$ , il existe une couleur  $a$  telle  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, wv)$  et nous posons  $\sigma(w, wv) = a$ .

(c)  $\Delta(G) = 8$  et  $|\sigma'(A_w)| = 5$ .

Dans ce cas nous avons  $11 \leq |\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| \leq 12$  et 15 possibilités de couleurs. Nous prouvons tout d'abord qu'on peut recolorier les trois incidences  $(v, vx_1)$ ,  $(v, vx_2)$  et  $(v, vx_3)$  en utilisant trois couleurs  $c_1, c_2, c_3$  telles que  $c_1 \in [\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)]$ .

Si  $|\sigma'(A_{x_1})| = 7$  alors  $[\sigma'(A_{x_1}) \setminus \sigma'(A_v)] \cap [\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w)] \neq \emptyset$ , car  $|\sigma'(A_{x_1}) \setminus \sigma'(A_v)| \geq 7 - 3 + 1 = 5$ . Il existe donc une couleur  $c_1 \in [\sigma'(A_{x_1}) \setminus \sigma'(A_v)] \cap [\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w)]$ . Sinon,  $|\sigma'(A_{x_1})| \leq 6$  et alors  $|\sigma'(I_{x_1}) \cup \sigma'(A_v)| \leq 8 + 3 - 1 = 10$ ; il existe donc une couleur  $c_1 \in [\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)] \setminus [\sigma'(I_{x_1}) \cup \sigma'(A_v)]$ . Nous avons encore deux couleurs distinctes  $c_2$  et  $c_3$ , différentes de  $c_1$  à trouver, qui peuvent être affectées respectivement aux incidences  $(v, vx_2)$  et  $(v, vx_3)$ . Ceci peut être fait, car pour tout  $i, i \in \{2, 3\}$ , si  $|\sigma'(A_{x_i})| = 7$  alors le nombre de choix possibles est  $|\sigma'(A_{x_i}) \setminus (\sigma'(A_v) \cup \{c_1\})| \geq 7 - 3 + 1 - 1 = 4$  et si  $|\sigma'(A_{x_i})| \leq 6$  le nombre de couleurs interdites est  $|\sigma'(I_{x_i}) \cup \sigma'(A_v) \cup \{c_1\}| \leq 8 + 3 - 1 + 1 = 11$ .

Donc, on peut poser  $\sigma(v, vx_1) = c_1$ ,  $\sigma(v, vx_2) = c_2$  et  $\sigma(v, vx_3) = c_3$ . Maintenant, comme nous avons  $|F_G^{\sigma}(w, wv)| = |\sigma(A_w) \cup \sigma(I_w) \cup \sigma(I_v)| \leq 12 + 2 = 14 = \Delta(G) + 6$ , il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma}(w, wv)$  et on pose  $\sigma(w, wv) = a$ .

(d)  $d_G(w) = 7$ ,  $\Delta(G) = 8$  et  $|\sigma'(A_w)| = 6$ .

Dans ce cas nous avons  $|\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| = 12$  et 15 couleurs possibles. En utilisant le même argument que dans le cas précédent, on peut recolorier les trois incidences  $(v, vx_1)$ ,  $(v, vx_2)$  et  $(v, vx_3)$  en utilisant trois couleurs distinctes  $c_1, c_2, c_3$  telles que  $c_1 \in [\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)]$ . Donc, il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma}(w, wv)$  et on pose  $\sigma(w, wv) = a$ .

(e)  $d_G(w) = 8$ ,  $\Delta(G) = 8$  et  $|\sigma'(A_w)| \geq 6$ .

Dans ce cas nous avons  $13 \leq |\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| \leq 14$  et 15 couleurs possibles. Pour tout  $i, 1 \leq i \leq 3$ , si  $|\sigma'(A_{x_i})| = 7$  alors  $|\sigma'(A_{x_i}) \setminus \sigma'(A_v) \cap [\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)]| \geq 3$  car  $|\sigma'(A_{x_i}) \setminus \sigma'(A_v)| \geq 7 - 3 + 1 = 5$ . Sinon,  $|\sigma'(A_{x_i})| \leq 6$  et alors  $|\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w) \setminus [\sigma'(I_{x_i}) \cup \sigma'(A_v)]| \geq 13 - 8 - 3 + 1 = 3$ . Nous pouvons donc trouver trois couleurs distinctes  $c_1, c_2, c_3 \in \sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)$  telles que  $c_1 \notin [\sigma'(I_{x_1}) \cup \sigma'(A_v)]$ ,  $|\sigma'(A_{x_1}) \cup \{c_1\}| \leq 7$ ,  $c_2 \notin [\sigma'(I_{x_2}) \cup \sigma'(A_v)]$ ,  $|\sigma'(A_{x_2}) \cup \{c_2\}| \leq 7$ ,  $c_3 \notin [\sigma'(I_{x_3}) \cup \sigma'(A_v)]$  et  $|\sigma'(A_{x_3}) \cup \{c_3\}| \leq 7$ . Nous posons alors  $\sigma(v, vx_1) = c_1$ ,  $\sigma(v, vx_2) = c_2$  et  $\sigma(v, vx_3) = c_3$ . Maintenant, nous avons  $|F_G^{\sigma}(w, wv)| \leq 14 = \Delta(G) + 6$ ; il existe donc une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma}(w, wv)$  et nous posons  $\sigma(w, wv) = a$ .

(f)  $\Delta(G) = 9$  et  $|\sigma'(A_w)| \geq 6$ .

Considérons tout d'abord le cas  $d_G(w) = 7$ . Nous avons alors  $|F_G^{\sigma'}(w, wv)| = |\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_v)| \leq 6 + 6 + 3 = 15 \leq \Delta(G) + 6$ ; il existe donc une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, wv)$  et nous posons  $\sigma(w, wv) = a$ .

Supposons maintenant  $d_G(w) = 8$ . Dans ce cas nous avons  $13 \leq |\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| \leq 14$  et 16 couleurs possibles. Nous allons prouver d'abord qu'on peut recolorier les trois incidences  $(v, vx_1)$ ,  $(v, vx_2)$  et  $(v, vx_3)$  en utilisant trois couleurs distinctes  $c_1, c_2, c_3$  telles que  $c_1, c_2 \in [\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)]$ . Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , si  $|\sigma'(A_{x_i})| = 7$  alors le nombre de choix possibles pour  $c_i$  est  $||\sigma'(A_{x_i}) \setminus \sigma'(A_v)|| \cap [\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)]| \geq 2$  car  $|\sigma'(A_{x_i}) \setminus \sigma'(A_v)| \geq 7 - 3 + 1 = 5$ ; si  $|\sigma'(A_{x_i})| \leq 6$  alors le nombre de choix possibles pour  $c_i$  est  $||\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w) \setminus [\sigma'(I_{x_i}) \cup \sigma'(A_v)]|| \geq 13 - 9 - 3 + 1 = 2$ . Maintenant, si  $|\sigma'(A_{x_3})| = 7$  alors le nombre de choix possibles pour  $c_3$  est  $|\sigma'(A_{x_3}) \setminus (\sigma'(A_v) \cup \{c_1, c_2\})| \geq 7 - 3 + 1 - 2 = 3$ , et si  $|\sigma'(A_{x_3})| \leq 6$  alors le nombre de couleurs interdites pour  $c_3$  est  $|\sigma'(I_{x_3}) \cup \sigma'(A_v) \cup \{c_1, c_2\}| \leq 9 + 3 - 1 + 2 = 13$ . Donc, on peut trouver les trois couleurs exigées  $c_1, c_2$  et  $c_3$  et on pose  $\sigma(v, vx_1) = c_1$ ,  $\sigma(v, vx_2) = c_2$  et  $\sigma(v, vx_3) = c_3$ .

Maintenant, comme nous avons  $|F_G^\sigma(w, wv)| \leq 14 + 1 = 15 \leq \Delta(G) + 6$ , il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^\sigma(w, wv)$  et nous posons  $\sigma(w, wv) = a$ .

(g)  $\Delta(G) = 10$  et  $|\sigma'(A_w)| = 7$ .

Ce cas est similaire au cas (c), nous le prouvons afin d'avoir une preuve complète.

Dans ce cas nous avons  $13 \leq |\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)| \leq 14$  et 17 couleurs possibles. Nous prouvons d'abord qu'on peut recolorier les trois incidences  $(v, vx_1)$ ,  $(v, vx_2)$  et  $(v, vx_3)$  en utilisant trois couleurs  $c_1, c_2, c_3$  distinctes telles que  $c_1 \in [\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)]$ .

Si  $|\sigma'(A_{x_1})| = 7$  alors  $[\sigma'(A_{x_1}) \setminus \sigma'(A_v)] \cap [\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w)] \neq \emptyset$ , car  $|\sigma'(A_{x_1}) \setminus \sigma'(A_v)| \geq 7 - 3 + 1 = 5$ . Donc, il existe une couleur  $c_1 \in [\sigma'(A_{x_1}) \setminus \sigma'(A_v)] \cap [\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w)]$ . Sinon,  $|\sigma'(A_{x_1})| \leq 6$  et alors  $|\sigma'(I_{x_1}) \cup \sigma'(A_v)| \leq 10 + 3 - 1 = 12$ ; donc il existe une couleur  $c_1 \in [\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w)] \setminus [\sigma'(I_{x_1}) \cup \sigma'(A_v)]$ .

Nous avons encore deux couleurs distinctes  $c_2$  et  $c_3$  à trouver, toutes les deux distinctes de  $c_1$ , qui peuvent être affectées respectivement aux incidences  $(v, vx_2)$  et  $(v, vx_3)$ . Ces incidences peuvent être coloriées car pour tout  $i, i \in \{2, 3\}$ , si  $|\sigma'(A_{x_i})| = 7$  le nombre de choix possibles pour  $c_i$  est  $|\sigma'(A_{x_i}) \setminus (\sigma'(A_v) \cup \{c_1\})| \geq 7 - 3 + 1 - 1 = 4$  et si  $|\sigma'(A_{x_i})| \leq 6$ , le nombre de couleurs interdites pour  $c_i$  est  $|\sigma'(I_{x_i}) \cup \sigma'(A_v) \cup \{c_1\}| \leq 10 + 3 - 1 + 1 = 13$ .

Donc, nous pouvons poser  $\sigma(v, vx_1) = c_1$ ,  $\sigma(v, vx_2) = c_2$  et  $\sigma(v, vx_3) = c_3$ . Maintenant, comme nous avons  $|F_G^\sigma(w, wv)| \leq 14 + 2 = 16 = \Delta(G) + 6$ , il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^\sigma(w, wv)$  et nous pouvons poser  $\sigma(w, wv) = a$ .

Il reste maintenant à colorier l'incidence  $(v, vw)$ . Si  $|\sigma(A_w)| = 7$  alors il existe une couleur  $b$  telle que  $b \in \sigma(A_w) \setminus [\sigma(A_v) \cup \sigma(I_v)]$  car  $|\sigma(A_v) \cup \sigma(I_v)| \leq 6$  et nous posons  $\sigma(v, vw) = b$ . Sinon,  $|\sigma(A_w)| \leq 6$  et il existe une couleur  $b$  telle que  $b \notin F_G^\sigma(v, vw)$  car  $|F_G^\sigma(v, vw)| = |\sigma(A_v) \cup \sigma(I_v) \cup \sigma(I_w)| \leq 3 + 3 + 8 = 14 \leq \Delta(G) + 6$ . Nous posons donc  $\sigma(v, vw) = b$ .

5.  $G$  contient une arête  $vw$  telle que  $d_G(v) = 5$  et  $5 \leq d_G(w) \leq 6$ .

Rappelons d'abord que  $\Delta(G) \geq 8$ . D'après la minimalité de  $G$ , le graphe  $G' = G \setminus vw$  admet une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous étendons  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  comme suit.

Comme  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| = |\sigma'(A_w) \cup \sigma'(I_w) \cup \sigma'(I_v)| \leq 5 + 5 + 4 = 14 \leq \Delta(G) + 6$ , il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, vw)$  et nous posons  $\sigma(w, vw) = a$ .

Maintenant, comme  $|F_G^{\sigma}(v, vw)| = |\sigma'(A_v) \cup \sigma'(I_v) \cup \sigma'(I_w) \cup \{a\}| \leq 4 + 4 + 5 + 1 = 14 \leq \Delta(G) + 6$ , il existe une couleur  $b$  telle que  $b \notin F_G^{\sigma}(v, vw)$  et nous posons  $\sigma(v, vw) = b$ .

Il est facile de vérifier que dans tous les cas, nous avons obtenu une  $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence de  $G$ . Ceci contredit notre hypothèse, et le théorème est prouvé.

■

## 2.8 Graphes 3-dégénérés

Nous prouvons dans cette section le résultat suivant :

**Théorème 2.8.1** *Tout graphe 3-dégénéré  $G$  admet une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$ .*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas des graphes connexes. Soit  $G$  un graphe 3-dégénéré et connexe. Si  $\Delta(G) \leq 3$ , alors d'après le Théorème 2.1.5  $\chi_i(G) \leq 2\Delta(G) < \Delta(G) + 4 = 7$  et naturellement toute  $(\Delta(G) + 4)$ -coloration d'incidence de  $G$  est une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence.

Supposons désormais  $\Delta(G) \geq 4$ . Raisonnons par récurrence sur le nombre de sommets de  $G$ . Le résultat est immédiat si  $G$  a au plus 5 sommets : dans ce cas,  $G \subseteq K_5$  et d'après le Théorème 1 nous avons  $\chi_i(G) \leq \chi_i(K_5) = \Delta(K_5) + 1 = 5$ , et naturellement toute 5-coloration d'incidence de  $G$  est une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence. Supposons que  $G$  a  $n + 1$  sommets,  $n \geq 5$ , et que le résultat est vrai pour tout graphe 3-dégénéré et d'au plus  $n$  sommets.

Soit  $v$  un sommet de  $G$  de degré minimal. Comme  $G$  est 3-dégénéré, nous avons alors  $d_G(v) \leq 3$ . Nous avons donc trois cas à considérer en fonction du degré de  $v$  :

1.  $v$  est de degré 1.

Soit  $w$  le seul voisin de  $v$  dans  $G$  (voir Figure 2.21.(1)). Par hypothèse de récurrence, le graphe  $G' = G \setminus v$  admet une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous avons  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| = |\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w)| \leq \Delta(G) - 1 + 3 = \Delta(G) + 2$ . Il existe donc une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^{\sigma'}(w, vw)$ . En posant  $\sigma(w, vw) = a$  et  $\sigma(v, vw) = b$ , pour une couleur  $b \in \sigma'(A_w)$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

2.  $v$  est de degré 2.

Soit  $u, w$  les deux voisins de  $v$  dans  $G$  (voir Figure 2.21.(2)). Par hypothèse de récurrence, le graphe  $G' = G \setminus v$  admet une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ .

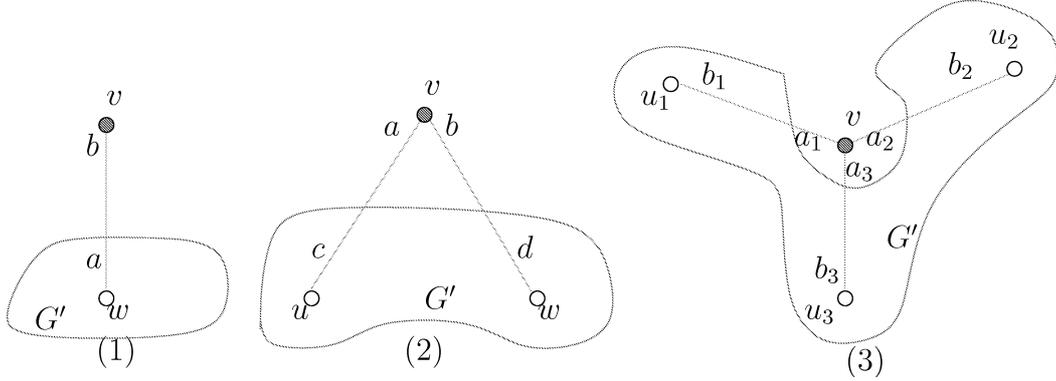


FIG. 2.21 – Configurations pour la preuve du Théorème 2.8.1

Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  comme suit. Nous posons tout d'abord  $\sigma(v, vu) = a$  pour une couleur  $a \in \sigma(A_u)$  (si  $d_G(u) = 1$ , nous avons alors le cas 1). Maintenant, si  $|\sigma'(A_w)| \geq 2$ , il existe alors une couleur  $b \in \sigma'(A_w) \setminus \{a\}$ . Sinon, comme  $|F_G^{\sigma'}(v, vw)| = |\sigma'(I_w) \cup \{a\}| \leq \Delta(G) - 1 + 1 = \Delta(G)$ , il existe une couleur  $b$  distincte de  $a$  telle que  $b \notin F_G^{\sigma'}(v, vw)$ . Nous posons alors  $\sigma(v, vw) = b$ .

Pour colorier les deux incidences  $(u, uv)$  et  $(w, vw)$ , comme  $a \in \sigma'(A_u)$ ,  $|F_G^{\sigma'}(u, uv)| = |\sigma'(I_u) \cup \sigma'(A_u) \cup \{a, b\}| \leq \Delta(G) - 1 + 3 + 2 - 1 = \Delta(G) + 3$ . Il existe une couleur  $c$  telle que  $c \notin F_G^{\sigma'}(u, uv)$ . De la même façon, comme  $b \in \sigma(A_w)$  nous avons  $|F_G^{\sigma'}(w, vw)| \leq \Delta(G) + 3$  et il existe une couleur  $d$  telle que  $d \notin F_G^{\sigma'}(w, vw)$ . En posant  $\sigma(u, uv) = c$  et  $\sigma(w, vw) = d$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

### 3. $v$ est de degré 3.

Soit  $u_1, u_2$  et  $u_3$  les trois voisins de  $v$  dans  $G$  (voir Figure 2.21.(3)). Par hypothèse de récurrence, le graphe  $G' = G \setminus v$  admet une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Pour étudier ce cas nous avons besoin de définir quelques notations :

- $\forall i$  et  $j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3, B_{i,j} := (\sigma'(I_{u_i}) \cup \sigma'(A_{u_i})) \cap \sigma'(A_{u_j})$
- $B := \bigcup_{1 \leq i, j \leq 3} B_{i,j}, i \neq j.$

Remarquons que comme  $|F_G^{\sigma'}(v, vu_i)| \leq \Delta(G) - 1$  et comme nous avons  $\Delta(G) + 4$  couleurs, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $|\sigma'(A_{u_i})| = 3$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq 3$ . Nous considérons maintenant quatre sous-cas en fonction des degrés des  $u_i$ 's,  $1 \leq i \leq 3$  :

- (a)  $\forall i, 1 \leq i \leq 3, d_G(u_i) < \Delta(G)$ .

Dans ce cas comme nous avons  $|\sigma'(A_{u_i})| = 3$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq 3$ , il existe 3 couleurs au choix pour colorier les incidences  $(v, vu_i)$ . Nous pouvons donc trouver 3 couleurs distinctes  $a_1, a_2, a_3$  telles que  $a_i \notin F_G^{\sigma'}(v, vu_i)$  et  $a_i \in \sigma'(A_{u_i})$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq 3$ . Nous posons  $\sigma(v, vu_i) = a_i$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq 3$ .

Pour colorier les trois incidences de la forme  $(u_i, u_iv)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , comme  $a_i \in \sigma'(A_{u_i})$ , nous avons  $|F_G^\sigma(u_i, u_iv)| = |\sigma(I_{u_i}) \cup \sigma(A_{u_i}) \cup \{a_1, a_2, a_3\}| \leq \Delta(G) - 2 + 3 + 3 - 1 = \Delta(G) + 3$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Il existe donc trois couleurs  $b_1, b_2, b_3$  (non nécessairement distinctes) telles que  $b_i \notin F_G^\sigma(u_i, u_iv)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . En posant  $\sigma(u_i, u_iv) = b_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

(b) Un seul des sommets  $u_i$  est de degré  $\Delta(G)$ .

Sans perte de généralité on peut supposer  $d_G(u_1) < \Delta(G)$ ,  $d_G(u_2) < \Delta(G)$  et  $d_G(u_3) = \Delta(G)$ .

Comme  $|\sigma'(I_{u_3}) \cup \sigma'(A_{u_3})| = \Delta(G) - 1 + 3 = \Delta(G) + 2$  et  $|\sigma'(A_{u_1})| = 3$ , on obtient  $B_{3,1} \neq \emptyset$ . Soit  $a_1 \in B_{3,1}$ . Comme  $|\sigma'(A_{u_i})| = 3$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , il existe deux couleurs distinctes  $a_2$  et  $a_3$  différentes de  $a_1$  telles que  $a_2 \in \sigma'(A_{u_2})$  et  $a_3 \in \sigma'(A_{u_3})$ . Nous posons  $\sigma(v, vu_i) = a_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

Maintenant, il reste à colorier les trois incidences de la forme  $(u_i, u_iv)$ . Comme  $a_1 \in B_{3,2}$  et  $a_3 \in \sigma'(A_{u_3})$  nous avons :

$$\begin{aligned} |F_G^\sigma(u_3, u_3v)| &= |\sigma'(I_{u_3}) \cup \sigma(A_{u_3}) \cup \{a_1, a_2, a_3\}| \\ &\leq \Delta(G) - 1 + 3 + 3 - 1 - 1 = \Delta + 3 \end{aligned}$$

et comme  $a_i \in \sigma'(A_{u_i})$  pour  $i = 1, 2$  nous avons :

$$\begin{aligned} |F_G^{\sigma'}(u_i, u_iv)| &= |\sigma'(I_{u_i}) \cup \sigma'(A_{u_i}) \cup \{a_1, a_2, a_3\}| \\ &\leq \Delta(G) - 2 + 3 + 3 - 1 = \Delta + 3. \end{aligned}$$

Il existe donc trois couleurs  $b_1, b_2, b_3$  telles que  $b_i \notin F_G^{\sigma'}(u_i, u_iv) \cup \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . En posant  $\sigma(u_i, u_iv) = b_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

(c) Un seul sommet parmi les  $u_i$  est de degré inférieur à  $\Delta(G)$ .

Sans perte de généralité on peut supposer  $d_G(u_1) < \Delta(G)$  et  $d_G(u_2) = d_G(u_3) = \Delta(G)$ .

Comme dans le cas précédent, comme  $|\sigma'(I_{u_2}) \cup \sigma'(A_{u_2})| = \Delta(G) - 1 + 3 = \Delta(G) + 2$ ,  $|\sigma'(A_{u_1})| = 3$  et comme nous avons  $\Delta(G) + 4$  couleurs, nous obtenons  $B_{2,1} \neq \emptyset$ . De la même façon, nous obtenons  $B_{3,2} \neq \emptyset$ .

i. Supposons d'abord que  $B_{2,1} \neq B_{3,2}$ .

Soient  $a_1 \in B_{2,1}$ ,  $a_2 \in B_{3,2} \setminus \{a_1\}$  et  $a_3 \in \sigma'(A_{u_3}) \setminus \{a_1, a_2\}$ . Nous posons  $\sigma(v, vu_i) = a_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

Pour colorier les trois incidences  $(u_i, u_iv)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , comme  $a_1 \in \sigma'(A_{u_1})$  nous avons :

$$\begin{aligned} |F_G^\sigma(u_1, u_1v)| &= |\sigma'(I_{u_1}) \cup \sigma(A_{u_1}) \cup \{a_1, a_2, a_3\}| \\ &\leq \Delta(G) - 2 + 3 + 3 - 1 = \Delta(G) + 3 \end{aligned}$$

et comme  $a_i \in B_{i+1,i}$  pour  $i = 1, 2$  et  $a_j \in \sigma'(A_{u_j})$  pour  $j = 2, 3$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |F_G^\sigma(u_i, u_i v)| &= |\sigma'(I_{u_i}) \cup \sigma(A_{u_i}) \cup \{a_1, a_2, a_3\}| \\ &\leq \Delta(G) - 1 + 3 + 3 - 1 - 1 = \Delta(G) + 3. \end{aligned}$$

Il existe donc trois couleurs  $b_1, b_2, b_3$  telles que  $b_i \notin F_G^\sigma(u_i, u_i v)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . En posant  $\sigma(u_i, u_i v) = b_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

ii. Supposons maintenant que  $B_{2,1} = B_{3,2}$ .

Soient  $a_1 \in B_{2,1} = B_{3,2}$ ,  $a_2 \in \sigma'(A_{u_2}) \setminus \{a_1\}$  et  $a_3 \in \sigma'(A_{u_3}) \setminus \{a_1, a_2\}$ . Nous posons  $\sigma(v, v u_i) = a_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

Pour colorier les trois incidences  $(u_i, u_i v)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , comme  $a_1 \in \sigma'(A_{u_1})$  nous avons :

$$\begin{aligned} |F_G^\sigma(u_1, u_1 v)| &= |\sigma'(I_{u_1}) \cup \sigma(A_{u_1}) \cup \{a_1, a_2, a_3\}| \\ &\leq \Delta(G) - 2 + 3 + 3 - 1 = \Delta(G) + 3 \end{aligned}$$

et comme  $a_1 \in B_{2,1} = B_{3,2}$  et  $a_j \in \sigma'(A_{u_j})$  pour  $j = 2, 3$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |F_G^\sigma(u_i, u_i v)| &= |\sigma'(I_{u_i}) \cup \sigma(A_{u_i}) \cup \{a_1, a_2, a_3\}| \\ &\leq \Delta(G) - 1 + 3 + 3 - 1 - 1 = \Delta(G) + 3. \end{aligned}$$

Il existe donc trois couleurs  $b_1, b_2, b_3$  telles que  $b_i \notin F_G^\sigma(u_i, u_i v)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . En posant  $\sigma(u_i, u_i v) = b_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

(d)  $d_G(u_1) = d_G(u_2) = d_G(u_3) = \Delta(G)$ .

Nous prouvons tout d'abord que dans ce cas  $|B| \geq 2$ . De la même façon que dans les cas (b) et (c) nous obtenons  $B_{i,j} \neq \emptyset$  pour tous  $i$  et  $j$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$  et donc  $|B| \geq 1$ . Supposons maintenant  $|B| = |\{x\}| = 1$ . En d'autres termes,  $(\sigma'(I_{u_i}) \cup A'_{u_i}) \cap A'_{u_j} = \{x\}$  pour tous  $i$  et  $j$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ . Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} |\sigma'(A_{u_1}) \cup \sigma'(I_{u_1}) \cup \sigma'(A_{u_2}) \cup \sigma'(A_{u_3})| &= \Delta(G) - 1 + 3 + 3 + 3 - 1 - 1 \\ &= \Delta(G) + 6. \end{aligned} \tag{4}$$

Mais la relation (4) est en contradiction avec le fait que  $\sigma'$  est une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence, et nous obtenons donc  $|B| \geq 2$ .

Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux couleurs distinctes de  $B$ . Sans perte de généralité on peut supposer  $a_1 \in B_{2,1}$  et  $a_2 \in B_{3,2}$ .

i. Supposons d'abord que  $B_{1,3} \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$ .

Soit  $a_3$  une couleur de  $B_{1,3} \setminus \{a_1, a_2\}$ . Nous posons  $\sigma(v, v u_i) = a_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

Comme  $a_i \in B_{j,i} = (\sigma'(I_{u_j}) \cup \sigma'(A_{u_j})) \cap \sigma'(A_{u_i})$ , ( $j = i + 1 \pmod{3}$ ) et  $a_i \in \sigma'(A_{u_i})$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |F_G^\sigma(u_i, u_i v)| &= |\sigma'(I_{u_i}) \cup \sigma'(A_{u_i}) \cup \{a_1, a_2, a_3\}| \\ &\leq \Delta(G) - 1 + 3 + 3 - 1 - 1 = \Delta(G) + 3. \end{aligned}$$

Il existe donc trois couleurs  $b_1, b_2, b_3$  telles que  $b_i \notin F_G^\sigma(u_i, u_i v)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . En posant  $\sigma(u_i, u_i v) = b_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

ii. Supposons maintenant que  $B_{1,3} \setminus \{a_1, a_2\} = \emptyset$ .

Comme  $B_{1,3} \neq \emptyset$  on peut supposer sans perte de généralité  $a_2 \in B_{1,3}$ . Soit  $a_3 \in \sigma'(A_{u_3}) \setminus \{a_1, a_2\}$ . Nous posons  $\sigma(v, vu_i) = a_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Comme  $a_i \in B_{j,i} = (\sigma'(I_{u_j}) \cup \sigma'(A_{u_j})) \cap \sigma'(A_{u_i})$ , ( $j = i + 1 \pmod{3}$ ) et  $a_i \in \sigma'(A_{u_i})$  pour  $i = 1, 2$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |F_G^\sigma(u_i, u_i v)| &= |\sigma'(I_{u_i}) \cup \sigma'(A_{u_i}) \cup \{a_1, a_2, a_3\}| \\ &\leq \Delta(G) - 1 + 3 + 3 - 1 - 1 = \Delta(G) + 3 \end{aligned}$$

et comme  $a_2 \in \sigma'(I_{u_1}) \cup \sigma'(A_{u_1})$  et  $a_1 \in \sigma'(A - u_1)$  nous avons :

$$\begin{aligned} |F_G^\sigma(u_1, u_1 v)| &= |\sigma'(I_{u_1}) \cup \sigma'(A_{u_1}) \cup \{a_1, a_2, a_3\}| \\ &\leq \Delta(G) - 1 + 3 + 3 - 1 - 1 = \Delta(G) + 3. \end{aligned}$$

Il existe donc trois couleurs  $b_1, b_2, b_3$  telles que  $b_i \notin F_G^\sigma(u_i, u_i v)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . En posant  $\sigma(u_i, u_i v) = b_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Il est facile de vérifier que dans tous les cas, nous avons obtenu une  $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidence de  $G$  et le théorème est prouvé.  $\blacksquare$

Comme la famille des graphes planaires sans triangles est 3-dégénérée, en appliquant le Théorème 2.8.1, on obtient :

**Corollaire 2.8.2** *Pour tout graphe planaire sans triangle  $G$ ,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$ .*

## 2.9 Graphes de degré moyen maximum borné

Dans cette section nous allons étudier les graphes de degré moyen maximum borné.

Rappelons tout d'abord que pour un graphe  $G$ , le degré moyen maximum de  $G$ , noté  $dmm(G)$ , est le maximum des degrés moyens  $dm(H) = 2 \cdot |E(H)|/|V(H)|$  pris sur tous les sous-graphes  $H$  de  $G$ .

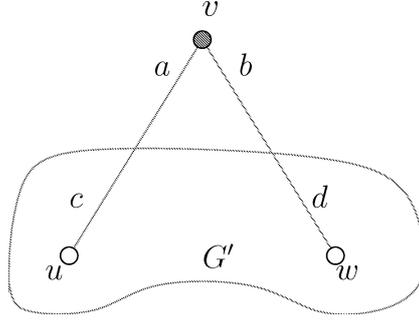


FIG. 2.22 – Configuration pour la preuve du Théorème 2.9.1

**Théorème 2.9.1** *Tout graphe  $G$  avec  $dmm(G) < 3$  admet une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$ .*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas des graphes connexes. Supposons que le théorème est faux et soit  $G$  un plus petit contre-exemple. Il est facile de vérifier que  $\Delta(G) \geq 3$  : supposons en effet que  $\Delta(G) \leq 2$  ; nous avons d'après le Théorème 2.1.5  $\chi_i(G) \leq 2\Delta(G) \leq \Delta(G) + 2$  et toute  $(\Delta(G) + 2)$ -coloration d'incidence de  $G$  est naturellement une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence.

Soit  $v$  un sommet de degré minimal dans  $G$  ; comme  $dmm(G) < 3$  alors  $d_G(v) \leq 2$ . Nous avons donc deux cas à considérer en fonction du degré de  $v$  :

1.  $v$  est de degré 1.

Soit  $u$  le seul voisin de  $v$  dans  $G$  et  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Comme  $|F_G^\sigma(u, uv)| = |\sigma'(I_u) \cup \sigma'(A_u)| \leq \Delta(G) - 1 + 2 = \Delta(G) + 1$ , il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^\sigma(u, uv)$ . En posant  $\sigma(u, uv) = a$  et  $\sigma(v, vu) = b$ , pour une couleur  $b \in \sigma'(A_u)$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

2.  $v$  est de degré 2.

Soient  $u$  et  $w$  les deux voisins de  $v$  dans  $G$  (voir Figure 2.22) et  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Comme  $\sigma'(A_u) \neq \emptyset$ , il existe une couleur  $a \in \sigma'(A_u)$  et nous posons  $\sigma(v, vu) = a$ . Si  $|\sigma'(A_w)| = 2$ , il existe alors une couleur  $b \in \sigma'(A_w) \setminus \{a\}$  ; sinon, comme  $|F_G^\sigma(v, vw)| = |\sigma'(I_w) \cup \{a\}| \leq \Delta(G) - 1 + 1 = \Delta(G)$ , il existe une couleur  $b$  telle que  $b \notin F_G^\sigma(v, vw) \cup \{a\}$ . Nous posons  $\sigma(v, vw) = b$ .

Maintenant, comme  $a \in \sigma'(A_u)$  nous avons  $|F_G^\sigma(u, uv)| = |\sigma'(I_u) \cup \sigma'(A_u) \cup \{a, b\}| \leq \Delta(G) - 1 + 2 + 2 - 1 = \Delta(G) + 2$  ; il existe donc une couleur  $c$  telle que  $c \notin F_G^\sigma(u, uv)$ . De la même façon il existe une couleur  $d$  telle que  $d \notin F_G^\sigma(w, vw)$ . En posant  $\sigma(u, uv) = c$  et  $\sigma(w, vw) = d$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

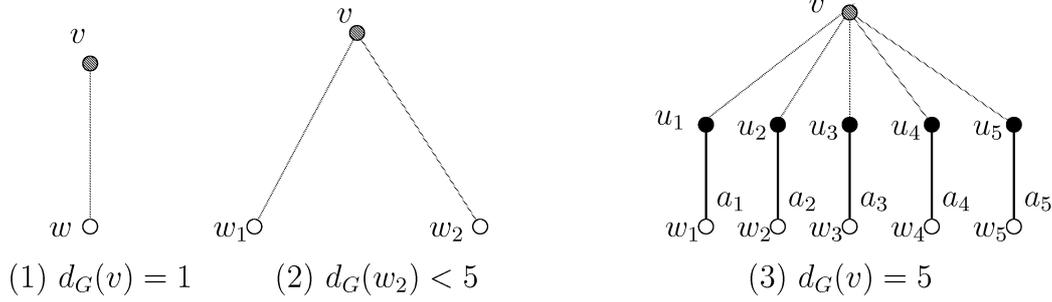


FIG. 2.23 – Configurations interdites pour le Théorème 2.9.3

Donc, dans les deux cas nous obtenons une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence de  $G$ . Ceci contredit notre hypothèse et le théorème est prouvé. ■

Dans le cas des graphes planaires, nous obtenons :

**Corollaire 2.9.2** *Tout graphe planaire  $G$  de maille  $g \geq 6$  admet une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$ .*

**Preuve.** D'après la Proposition 1.6.6 nous avons  $dmm(G) < 2g/(g-2) \leq (2 \times 6)/(6-2) = 3$  et nous obtenons le résultat grâce au Théorème 2.9.1. ■

Dans le cas où le graphe est de degré maximal au moins 5, le résultat précédent peut être amélioré :

**Théorème 2.9.3** *Tout graphe  $G$  avec  $dmm(G) < 3$  et  $\Delta(G) \geq 5$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas des graphes connexes. Supposons que le théorème est faux et soit  $G$  un plus petit contre-exemple. Nous montrons d'abord que  $G$  ne peut contenir aucune des configurations représentées par la Figure 2.23 comme sous-graphe induit :

1. Configuration (1).

Soit  $w$  le seul voisin de  $v$  dans  $G$  et  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Comme  $|F_G^\sigma(w, vw)| = |\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w)| \leq \Delta(G) - 1 + 2 = \Delta(G) + 1$ , il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^\sigma(w, vw)$ . En posant  $\sigma(w, vw) = a$  et  $\sigma(v, vw) = b$ , pour une couleur  $b \in \sigma'(A_w)$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

2. Configuration (2).

Soient  $w_1, w_2$  les deux voisins de  $v$  dans  $G$  et  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une

$(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Comme  $|F_G^\sigma(w_1, w_1v)| = |\sigma'(I_{w_1}) \cup \sigma'(A_{w_1})| \leq \Delta(G) - 1 + 2 = \Delta(G) + 1$  et comme nous avons  $\Delta(G) + 2$  couleurs possibles, il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^\sigma(w_1, w_1v)$ . Nous posons  $\sigma(w_1, w_1v) = a$ . Si  $|\sigma'(A_{w_2}) \setminus \{a\}| \geq 1$  il existe alors une couleur  $b \in \sigma'(A_{w_2}) \setminus \{a\}$ , sinon, comme  $|F_G^\sigma(v, vw_2)| = |\sigma'(I_{w_2}) \cup \{a\}| \leq 3 + 1 = 4 \leq \Delta(G) - 1$ , il existe une couleur  $b$  telle que  $b \notin F_G^\sigma(v, vw_2)$ . Nous posons  $\sigma(v, vw_2) = b$ .

Maintenant, si  $|\sigma'(A_{w_1}) \setminus \{b\}| \geq 1$  il existe alors une couleur  $c \in \sigma'(A_{w_1}) \setminus \{b\}$ , sinon, comme  $|F_G^\sigma(v, vw_1)| = |\sigma(I_{w_1}) \cup \{b\}| \leq \Delta(G) + 1$ , il existe une couleur  $c$  telle que  $c \notin F_G^\sigma(v, vw_1)$ . Nous posons  $\sigma(v, vw_1) = c$ .

Comme  $|F_G^\sigma(w_2, w_2v)| = |\sigma'(I_{w_2}) \cup \sigma(A_{w_2}) \cup \{c\}| \leq 3 + 2 + 1 = 6 \leq \Delta(G) + 1$ , il existe une couleur  $d$  telle que  $d \notin F_G^\sigma(w_2, w_2v)$ . En posant  $\sigma(w_2, w_2v) = d$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

### 3. Configuration (3).

Soient  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , les cinq voisins de  $v$  et  $w_i$  l'autre voisin de  $u_i$  dans  $G$  (voir Figure 2.23.(3)). Soit  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Soient  $a_i = \sigma'(w_i, w_iu_i)$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . Comme nous avons  $\Delta(G) + 2 \geq 7$  couleurs, il existe une couleur  $x$  distincte de  $a_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ .

Comme  $|F_G^{\sigma'}(u_i, u_iw_i)| = |\sigma'(I_{w_i})| \leq \Delta(G)$  nous avons deux choix de couleurs pour colorier l'incidence  $(u_i, u_iw_i)$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . On peut donc supposer que  $\sigma'(u_i, u_iw_i) \neq x$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . Nous posons  $\sigma(u_i, u_iv) = x$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ .

Comme  $F_G^\sigma(v, vu_i) = \{x, \sigma'(u_i, u_iw_i)\}$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , et nous avons au moins 7 couleurs, il existe 5 couleurs distinctes  $c_1, c_2, \dots, c_5$  telles que  $c_i \notin \{x, \sigma'(u_i, u_iw_i)\}$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . En posant  $\sigma(v, vu_i) = c_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Donc, dans tous les cas nous obtenons une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence de  $G$ , ce qui contredit notre hypothèse.

Nous allons montrer maintenant qu'un graphe ne contenant aucune des configurations de la Figure 2.23 a nécessairement un degré moyen maximum au moins 3, contrairement à notre hypothèse.

Nous utilisons la procédure de déchargement suivante :

(R) tout sommet de degré au moins 5 donne  $1/2$  à chacun de ses 2-voisins.

Nous allons maintenant vérifier que le nouveau degré  $d^*$  de tout sommet de  $G$  est au moins 3 ce qui contredit l'hypothèse  $dmm(G) < 3$ . Soit  $v$  un sommet dans  $G$ , nous considérons tous les cas possibles selon le degré  $d_G(v)$  de  $v$  (comme  $G$  ne contient pas la configuration 2.23(1), nous avons  $d_G(v) \geq 2$ ) :

1.  $d_G(v) = 2$ .

Comme  $G$  ne contient pas la configuration 2.23(2) les deux voisins de  $v$  sont de degré au moins 5. Il reçoit  $1/2$  de chacun de ses voisins et nous avons donc  $d^*(v) = 2 + 1/2 + 1/2 = 3$ .

2.  $3 \leq d_G(v) \leq 4$ .

Dans ce cas nous avons  $d^*(v) = d_G(v) \geq 3$ .

3.  $d_G(v) = 5$ .

Comme  $G$  ne contient pas la Configuration 2.23(3) au moins l'un des voisins de  $v$  est de degré au moins 3 et  $v$  donne au plus  $4 \times 1/2 = 2$ . Nous avons donc  $d^*(v) \geq 5 - 2 = 3$ .

4.  $d_G(v) = k \geq 6$ .

Dans ce cas,  $v$  donne au plus  $k \cdot (1/2)$  et donc  $d^*(v) \geq k - k/2 = k/2 \geq 6/2 = 3$ .

Donc, tout sommet dans  $G$  prend un nouveau degré au moins 3 et le théorème est prouvé. ■

**Remarque 2.9.4** Le résultat précédent ne peut pas être étendu aux graphes de degré maximal 2 : en effet, le nombre chromatique d'incidence des cycles est 4 (voir Proposition 2.1.3). La question est ouverte pour les graphes de degré maximal 3 et 4.

Comme précédemment, nous obtenons dans le cas des graphes planaires :

**Corollaire 2.9.5** *Tout graphe planaire  $G$  de maille  $g \geq 6$  avec  $\Delta(G) \geq 5$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .*

Pour les graphes de degré moyen maximum strictement inférieur à  $22/9$ , nous obtenons :

**Théorème 2.9.6** *Tout graphe  $G$  avec  $dmm(G) < 22/9$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas des graphes connexes. Il suffit aussi de considérer le cas des graphes de degré maximum au plus 4, car pour des graphes de degré maximum strictement supérieur à 4 le résultat découle du Théorème 2.9.3. Supposons que le théorème est faux et soit  $G$  un plus petit contre-exemple. Il est facile de vérifier que  $\Delta(G) \geq 3$  : supposons en effet que  $\Delta(G) \leq 2$  ; nous avons d'après le Théorème 2.1.5  $\chi_i(G) \leq 2\Delta(G) \leq \Delta(G) + 2$  et toute  $(\Delta(G) + 2)$ -coloration d'incidence de  $G$  est naturellement une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence. Nous avons donc  $3 \leq \Delta(G) \leq 4$ .

Nous montrons d'abord que  $G$  ne peut contenir aucune des configurations représentées par la Figure 2.24 comme sous-graphe induit :

1. Configuration (1).

Soit  $u$  le seul voisin de  $v$  dans  $G$  et  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

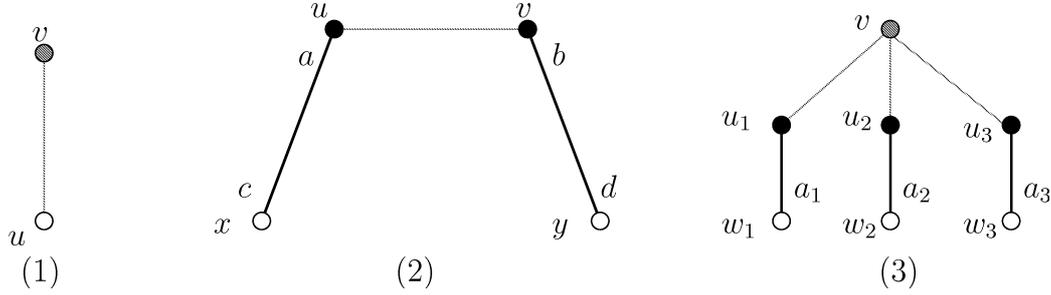


FIG. 2.24 – Configurations pour la preuve du Théorème 2.9.6

Comme  $|F_G^\sigma(u, uv)| = |\sigma'(I_u) \cup \sigma'(A_u)| \leq \Delta(G) - 1 + 2 = \Delta(G) + 1$ , il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^\sigma(u, uv)$ . En posant  $\sigma(u, uv) = a$  et  $\sigma(v, vu) = b$ , pour une couleur  $b \in \sigma'(A_u)$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

## 2. Configuration (2).

Soient  $x$  l'autre voisin de  $u$  et  $y$  l'autre voisin de  $v$  dans  $G$  et soit  $G' = G \setminus uv$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Soient  $\sigma'(u, ux) = a$ ,  $\sigma'(v, vy) = b$ ,  $\sigma'(x, xu) = c$  et  $\sigma'(y, yv) = d$ .

Supposons d'abord que  $|\{a, b, c, d\}| = 4$ . En posant  $\sigma(u, uv) = d$  et  $\sigma(v, vu) = c$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Supposons maintenant que  $|\{a, b, c, d\}| \leq 3$ . Comme  $\Delta(G) + 2 \geq 5$ , on peut étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  en posant  $\sigma(u, uv) = e$  et  $\sigma(v, vu) = f$  pour deux couleurs  $e, f \notin \{a, b, c, d\}$ .

## 3. Configuration (3).

Soient  $u_1, u_2$  et  $u_3$  les trois voisins de  $v$  et soit  $w_i$  l'autre voisin de  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , dans  $G$ . Soit  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendons  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Soit  $a_i = \sigma'(w_i, w_i u_i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Comme nous avons  $\Delta(G) + 2 \geq 5$  couleurs, il existe une couleur  $x$  distincte de  $a_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

Comme  $|F_G^{\sigma'}(u_i, u_i w_i)| = |\sigma'(I_{w_i})| \leq \Delta(G)$  nous avons au moins deux choix de couleurs pour colorier l'incidence  $(u_i, u_i w_i)$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . On peut donc supposer  $\sigma'(u_i, u_i w_i) \neq x$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Nous posons alors  $\sigma(u_i, u_i v) = x$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

Comme  $F_G^\sigma(v, vu_i) = \{x, \sigma'(u_i, u_i w_i)\}$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , et nous avons au moins 5 couleurs, il existe 3 couleurs distinctes  $c_1, c_2$  et  $c_3$  telles que  $c_i \notin \{x, \sigma'(u_i, u_i w_i)\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . En posant  $\sigma(v, vu_i) = c_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Donc, dans tous les cas nous obtenons une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence de  $G$ , ce qui contredit notre hypothèse.

Nous allons montrer maintenant qu'un graphe ne contenant aucune des configurations de la Figure 2.24 a nécessairement un degré moyen maximum supérieur ou égal à  $22/9$ , contrairement à notre hypothèse.

Nous utilisons la procédure de déchargement suivante :

(R) tout sommet de degré au moins 3 donne  $2/9$  à chacun de ses 2-voisins.

Nous allons vérifier que le nouveau degré  $d^*$  de tout sommet de  $G$  est au moins  $22/9$  ce qui contredit l'hypothèse  $dmm(G) < 22/9$ . Soit  $v$  un sommet de  $G$ , nous considérons tous les cas possibles selon le degré  $d_G(v)$  de  $v$  (comme  $G$  ne contient pas la configuration 2.24(1), nous avons  $d_G(v) \geq 2$ ) :

1.  $d_G(v) = 2$ .

Comme  $G$  ne contient ni la configuration 2.24(1) ni la configuration 2.24(2) les deux voisins de  $v$  sont de degré au moins 3. Il reçoit donc  $2/9$  de chacun de ses voisins et nous avons  $d^*(v) = 2 + 2/9 + 2/9 = 22/9$ .

2.  $d_G(v) = 3$ .

Comme  $G$  ne contient pas la configuration 2.24(3),  $v$  est adjacent à au plus deux 2-sommets, il donne donc au plus  $2 \times 2/9 = 4/9$  et nous avons  $d^*(v) \geq 3 - 4/9 = 23/9 \geq 22/9$ .

3.  $d_G(v) = 4$ .

Dan ce cas,  $v$  donne au plus  $4 \times 2/9 = 8/9$  et nous avons donc  $d^*(v) \geq 4 - 8/9 = 28/9 \geq 22/9$ .

Donc, tout sommet dans  $G$  prend un nouveau degré au moins  $22/9$  et le théorème est prouvé. ■

Comme précédemment, nous obtenons dans le cas des graphes planaires :

**Corollaire 2.9.7** *Tout graphe planaire  $G$  de maille  $g \geq 11$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .*

Finalement, pour les graphes de degré moyen maximum inférieur à  $16/7$ , nous obtenons :

**Théorème 2.9.8** *Tout graphe  $G$  avec  $dmm(G) < 16/7$  et  $\Delta(G) \geq 4$  admet une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ .*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas des graphes connexes. Comme pour tout graphe  $G$ ,  $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + 1$  (Proposition 2.1.2) il suffit de prouver que  $G$  admet une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence. Supposons que le théorème est faux et soit  $G$  un plus petit contre-exemple. Nous montrons d'abord que  $G$  ne peut contenir aucune des configurations représentées par la Figure 2.25 comme sous-graphe induit :

1. Configuration (1).

Soit  $w$  le seul voisin de  $v$  dans  $G$  et  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

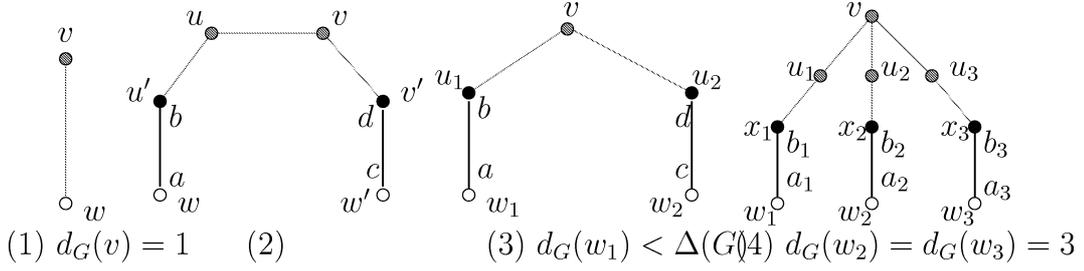


FIG. 2.25 – Configurations interdites pour le Théorème 2.9.8

Comme  $|F_G^\sigma(w, vw)| = |\sigma'(I_w) \cup \sigma'(A_w)| \leq \Delta(G) - 1 + 1 = \Delta(G)$ , il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin F_G^\sigma(w, vw)$ . En posant  $\sigma(w, vw) = a$  et  $\sigma(v, vw) = b$ , pour la seule couleur  $b \in \sigma'(A_w)$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  à  $G$ .

## 2. Configuration (2).

Soient  $u'$  l'autre voisin de  $u$  et  $v'$  l'autre voisin de  $v$  dans  $G$  et soit  $G' = G \setminus \{u, v\}$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Soient  $\sigma'(w, wu') = a$ ,  $\sigma'(u', u'w) = b$ ,  $\sigma'(w', w'v') = c$  et  $\sigma'(v', v'w') = d$ . Nous posons tout d'abord  $\sigma(u, uu') = a$  et  $\sigma(v, vv') = c$ .

Maintenant, comme  $F_G^\sigma(u', u'u) \cup F_G^\sigma(v, vu) = \{a, b, c\}$  et  $F_G^\sigma(u, uv) \cup F_G^\sigma(v', v'v) = \{a, c, d\}$  et comme nous avons au moins  $\Delta(G) + 1 \geq 5$  couleurs possibles, il existe deux couleurs distinctes  $x, y$  telles que  $x \notin \{a, b, c\}$  et  $y \notin \{a, c, d\}$ . En posant  $\sigma(u', u'u) = \sigma(v, vu) = x$  et  $\sigma(v', v'v) = \sigma(u, uv) = y$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

## 3. Configuration (3).

Soient  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , les deux voisins de  $v$  et  $w_i$  l'autre voisin de  $u_i$  dans  $G$ . Soit  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Soient  $\sigma'(w_1, w_1u_1) = a$ ,  $\sigma'(u_1, u_1w_1) = b$ ,  $\sigma'(w_2, w_2u_2) = c$  et  $\sigma'(u_2, u_2w_2) = d$ . Comme  $|F_{G'}^{\sigma'}(w_1, w_1u_1) \cup \{c\}| = |\sigma'(I_{w_1}) \setminus \{a\} \cup \sigma'(A_{w_1}) \cup \{c\}| \leq \Delta(G) - 2 + 1 + 1 = \Delta(G)$ , on peut donc supposer que  $a \neq c$ . Nous posons  $\sigma(v, vu_1) = a$  et  $\sigma(v, vu_2) = c$ . Comme  $F_G^\sigma(u_1, u_1v) \cup F_G^\sigma(u_2, u_2v) = \{a, b, c, d\}$  et comme nous avons au moins  $\Delta(G) + 1 \geq 5$  couleurs possibles, il existe une couleur  $x$  telle que  $x \notin \{a, b, c, d\}$ . En posant  $\sigma(u_1, u_1v) = \sigma(u_2, u_2v) = x$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

## 4. Configuration (4).

Soient  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  les trois voisins de  $v$ ,  $x_i$  l'autre voisin de  $u_i$  et  $w_i$  l'autre voisin de  $x_i$  dans  $G$ . Soit  $G' = G \setminus \{v, u_1, u_2, u_3\}$ . D'après la minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma'$ . Nous allons étendre  $\sigma'$  à une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Soient  $\sigma'(w_i, w_i x_i) = a_i$  et  $\sigma'(x_i, x_i w_i) = b_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Comme pour  $i = 2, 3$ ,  $|F_G^{\sigma'}(w_i, w_i x_i) \cup \{b_1\}| = |\sigma'(I_{w_i}) \setminus \{a_i\} \cup \{b_i, b_1\}| \leq 2 + 2 = 4$ , et comme nous avons au moins  $\Delta(G) + 1 \geq 5$  couleurs possibles, on peut supposer que  $a_2 \neq b_1 \neq a_3$ . Nous posons alors  $\sigma(u_i, u_i x_i) = a_i$  et  $\sigma(u_i, u_i v) = b_1$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

Comme pour  $j = 2, 3$ ,  $F_G^\sigma(v, v u_j) \cup F_G^\sigma(x_j, x_j u_j) = \{b_1, b_j, a_j\}$ , il existe deux couleurs distinctes  $c_2$  et  $c_3$  telles que  $c_j \notin \{b_1, b_j, a_j\}$ ,  $j = 2, 3$ . Nous posons  $\sigma(v, v u_j) = \sigma(x_j, x_j u_j) = c_j$ ,  $j = 2, 3$ .

Maintenant, comme  $F_G^{\sigma'}(v, v u_1) \cup F_G^{\sigma'}(x_1, x_1 u_1) = \{a_1, b_1, c_2, c_3\}$  et comme nous avons au moins 5 couleurs possibles, il existe une couleur  $c_1$  telle que  $c_1 \notin \{a_1, b_1, c_2, c_3\}$ . En posant  $\sigma(v, v u_1) = \sigma(x_1, x_1 u_1) = c_1$ ,  $\sigma'$  est étendue à une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$ .

Donc, dans tous les cas nous obtenons une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence de  $G$ , ce qui contredit notre hypothèse.

Nous allons montrer maintenant qu'un graphe ne contenant aucune des configurations de la Figure 2.25 a nécessairement un degré moyen maximum au moins  $16/7$ , contrairement à notre hypothèse.

Nous utilisons la procédure de déchargement suivante :

- (R1) tout sommet de degré 3 donne  $2/7$  à chaque 2-voisin qui lui-même a un 2-voisin adjacent à un 3-sommet et  $1/7$  aux autres 2-voisins ;
- (R2) tout sommet de degré au moins 4 donne  $2/7$  à chacun de ses 2-voisins et  $1/7$  à tout 2-sommet qui est adjacent à l'un de ses 2-voisins.

Nous allons vérifier que le nouveau degré  $d^*$  de tout sommet de  $G$  est au moins  $16/7$  ce qui contredit l'hypothèse  $dmm(G) < 16/7$ . Soit  $v$  un sommet de  $G$ , nous considérons tous les cas possibles selon le degré  $d_G(v)$  de  $v$  (comme  $G$  ne contient pas la configuration 2.25(1), nous avons  $d_G(v) \geq 2$ ) :

1.  $d_G(v) = 2$ .

Dans ce cas nous avons quatre sous-cas à considérer :

- (a)  $v$  a deux 2-voisins, disons  $z_1$  et  $z_2$ . Soit  $y_i$  l'autre voisin de  $z_i$ ,  $i = 1, 2$ , dans  $G$ . Comme  $G$  ne contient pas la configuration 2.25(3),  $y_i$  est de degré  $\Delta(G) \geq 4$  pour tout  $i = 1, 2$ . Chacun des  $y_i$ ,  $i = 1, 2$ , donne  $1/7$  à  $v$  et nous avons  $d^*(v) = 2 + 1/7 + 1/7 = 16/7$ .
- (b)  $v$  est adjacent à un 3-sommet  $z_1$  et un 2-sommet qui lui-même est adjacent à un 3-sommet. Dans ce cas  $v$  reçoit  $2/7$  de  $z_1$  et nous avons  $d^*(v) = 2 + 2/7 = 16/7$ .
- (c)  $v$  est adjacent à un 3-sommet  $z_1$  et un 2-sommet qui lui-même est adjacent à un sommet  $z_2$  de degré au moins 4. Dans ce cas  $v$  reçoit  $1/7$  de  $z_1$ ,  $1/7$  de  $z_2$  et nous avons  $d^*(v) = 2 + 1/7 + 1/7 = 16/7$ .
- (d)  $v$  est adjacent à deux 3-sommetts dont chacun donne  $1/7$  à  $v$  et nous avons  $d^*(v) = 2 + 1/7 + 1/7 = 16/7$ .

(e) L'un de deux voisins de  $v$  est de degré au moins 4. Dans ce cas  $v$  reçoit au moins  $2/7$  et nous avons  $d^*(v) \geq 2 + 2/7 = 16/7$ .

2.  $d_G(v) = 3$ .

Soient  $u_1, u_2$  et  $u_3$  les trois voisins de  $v$ . Nous considérons 3 sous-cas en fonction du degré de  $u_i$ .

(a) L'un des  $u_i$ 's est de degré au moins 3, disons  $u_1$ . Dans ce cas  $v$  donne au plus  $2/7$  à  $u_2$ ,  $2/7$  à  $u_3$  et nous avons  $d^*(v) \geq 3 - 2/7 - 2/7 = 17/7 \geq 16/7$ .

(b) Tous les  $u_i$ 's sont de degré 2. Soit  $x_i$  l'autre voisin de  $u_i$  dans  $G$ .

i. L'un des  $x_i$ 's est de degré au moins 3, disons  $x_1$ . Dans ce cas  $v$  donne  $1/7$  à  $u_1$ , au plus  $2/7$  à  $u_2$  et au plus  $2/7$  à  $u_3$ . Nous avons donc  $d^*(v) \geq 3 - 1/7 - 2/7 - 2/7 = 16/7$ .

ii. Tous les  $x_i$ 's sont donc de degré 2. Soit  $w_i$  l'autre voisin de  $x_i$  dans  $G$ . Comme  $G$  ne contient pas la Configuration 2.25(3) nous avons  $d_G(w_i) \geq 3$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , et comme  $G$  ne contient pas la Configuration 2.25(4), au plus l'un de  $w_i$ 's,  $1 \leq i \leq 3$ , peut être de degré 3. On peut donc supposer sans perte de généralité que  $d_G(w_1)$  et  $d_G(w_2)$  sont supérieurs ou égaux à 4. Dans ce cas  $v$  donne  $1/7$  à  $w_1$ ,  $1/7$  à  $w_2$  et au plus  $2/7$  à  $w_3$ . Nous avons  $d^*(v) \geq 3 - 1/7 - 1/7 - 2/7 = 17/7 \geq 16/7$ .

3.  $d_G(v) = k \geq 4$ .

Dans ce cas,  $v$  donne au plus  $k \cdot (2/7 + 1/7) = 3k/7$  et nous avons  $d^*(v) \geq k - 3k/7 = 4k/7 \geq 16/7$ .

Donc, tout sommet dans  $G$  prend un nouveau degré au moins  $16/7$  et le théorème est prouvé. ■

**Remarque 2.9.9** Le résultat précédent ne peut pas être étendu aux graphes de degré maximal 2 : en effet, le nombre chromatique d'incidence des cycles est 4 (voir Proposition 2.1.3). La question est ouverte pour les graphes de degré maximal 3.

Comme précédemment, nous obtenons dans le cas des graphes planaires :

**Corollaire 2.9.10** *Tout graphe planaire  $G$  de maille  $g \geq 16$  et avec  $\Delta(G) \geq 4$  admet une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ .*

Le tableau 2.1 résume les résultats obtenus dans ce chapitre.

Graphe $G$	Nombre chromatique d'incidence
$k$ -dégénéré	$\Delta(G) + 2k - 1$
3-dégénéré	$\Delta(G) + 4$
sans mineur $K_4$	$\Delta(G) + 2$ (optimal)
$dmm(G) < 3$	$\Delta(G) + 3$
$dmm(G) < 3$ et $\Delta(G) \geq 5$	$\Delta(G) + 2$
$dmm(G) < 22/9$	$\Delta(G) + 2$
$dmm(G) < 16/7$ et $\Delta(G) \geq 4$	$\Delta(G) + 1$ (optimal)
planaire	$\Delta(G) + 7$
planaire et $g(G) \geq 6$	$\Delta(G) + 3$
planaire, $g(G) \geq 6$ et $\Delta(G) \geq 5$	$\Delta(G) + 2$
planaire, $g(G) \geq 11$	$\Delta(G) + 2$
planaire, $g(G) \geq 16$ et $\Delta(G) \geq 4$	$\Delta(G) + 1$ (optimal)

TAB. 2.1 – Résumé des résultats du chapitre



# Chapitre 3

## Coloration orientée

Nous allons dans ce chapitre déterminer des bornes supérieures du nombre chromatique orienté de certaines familles de graphes. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la détermination de telles bornes supérieures pour différentes familles de graphes. Il ont en particulier considéré le cas des graphes planaires [15, 14, 52, 55], des graphes planaires extérieurs [57], des grilles [33], des graphes de degré borné [47, 57, 59] ou des graphes de Halin [61].

Nous présentons dans la première section différents types de coloration et certains résultats connus du domaine. Nous considérons dans les sections suivantes les graphes d'excès  $k \geq 0$  et les graphes planaires 2-externes sans triangle. Les résultats de la Section 3.2 font l'objet de la publication [41] et ceux de la Section 3.3 font l'objet de la publication [40].

En [61], Vignal a prouvé que le nombre chromatique orienté de tout graphe de Halin était au plus 11. Nous nous intéressons dans la section 3.4 à l'étude de la famille des graphes de Halin et nous montrons que cette borne peut être ramenée à 9.

### 3.1 Introduction

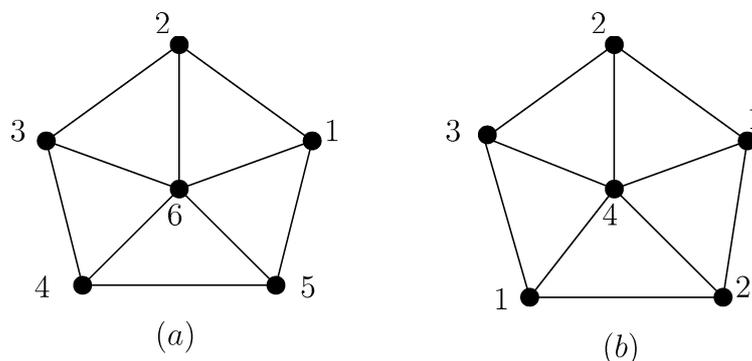
Dans cette section nous présentons différents types de coloration et certains résultats connus du domaine.

#### 3.1.1 Colorations propres

**Définition 3.1.1** Soit  $G$  un graphe non orienté; une  $k$ -coloration (*propre*) de  $G$  est une application  $c$  de  $V(G)$  dans un ensemble  $C$  de  $k$  couleurs satisfaisant :

$$\forall uv \in E(G), c(u) \neq c(v).$$

Une  $k$ -coloration de  $G$  est ainsi un homomorphisme de  $G$  vers un graphe non orienté d'ordre  $k$  (ou, plus simplement, vers le graphe complet  $K_k$ ). Un graphe est  $k$ -coloriable s'il

FIG. 3.1 – Colorations d'un graphe  $G$ 

admet une  $k$ -coloration. Le plus petit  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -coloration est le *nombre chromatique* du graphe  $G$ , noté  $\chi(G)$ . De façon équivalente, le nombre chromatique de  $G$  peut être vu comme l'ordre minimum d'un graphe non orienté  $H$  tel qu'il existe un homomorphisme de  $G$  vers  $H$ . Le nombre chromatique d'une famille de graphes est défini comme le nombre chromatique maximal des graphes qui appartiennent à cette famille.

**Exemple 3.1.2** La Figure 3.1(a) représente une 6-coloration d'un graphe  $G$ . Remarquons que le nombre de couleurs utilisées n'est pas minimal. La Figure 3.1(b) représente une coloration utilisant un nombre minimal de couleurs. En fait, le nombre chromatique de ce graphe est  $\chi(G) = 4$ .

Nous présentons maintenant quelques résultats concernant les colorations propres de graphes non orientés. Le premier résultat concerne les graphes planaires. C'est certainement le résultat le plus célèbre du domaine, obtenu en 1977 par Appel, Haken et Koch :

**Théorème 3.1.3** [Appel, Haken et Koch [7, 8]]

*Tout graphe planaire est 4-coloriable.*

Un résultat de Brooks, obtenu en 1941, donne une relation précise entre le nombre chromatique d'un graphe non orienté et son degré maximum :

**Théorème 3.1.4** [Brooks [17]]

*Pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ . De plus,  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  si et seulement si  $\Delta(G) \neq 2$  et l'une des composantes connexes de  $G$  est un graphe complet d'ordre  $\Delta(G) + 1$ , ou  $\Delta(G) = 2$  et l'une des composantes connexes de  $G$  est un cycle impair.*

### 3.1.2 Colorations acycliques

La notion de coloration propre acyclique a été introduite par Grünbaum en 1973.

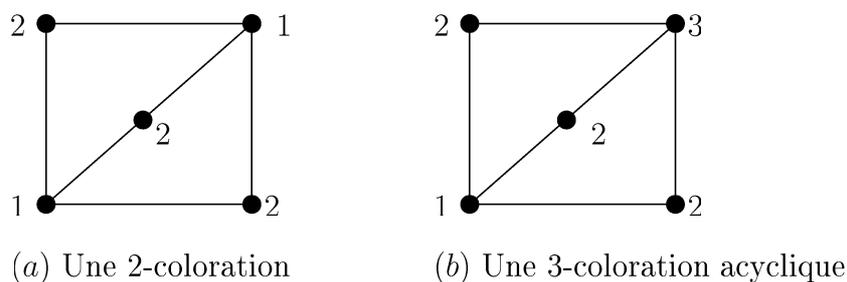


FIG. 3.2 – Une coloration et une coloration acyclique d'un même graphe

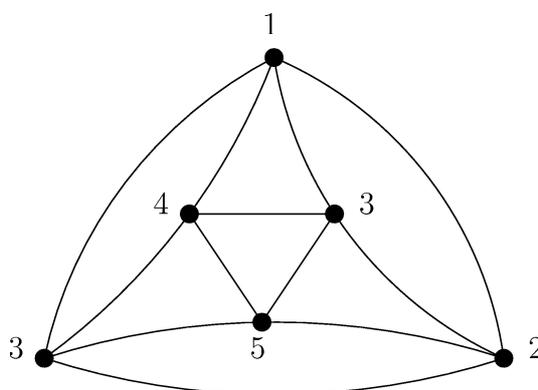


FIG. 3.3 – Un graphe planaire de nombre chromatique acyclique 5

**Définition 3.1.5** Une coloration propre d'un graphe non orienté  $G$  est *acyclique* si et seulement si aucun sous-graphe de  $G$  induit par les sommets coloriés de deux couleurs quelconques différentes ne contient de cycle.

Le plus petit  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -coloration acyclique est le *nombre chromatique acyclique* de  $G$ , noté  $\chi_a(G)$ .

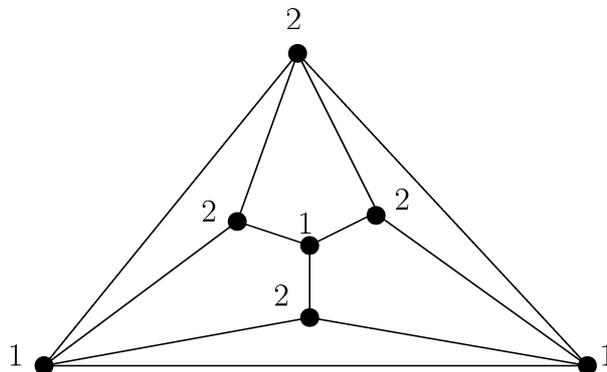
**Exemple 3.1.6** La Figure 3.2(a) montre un graphe de nombre chromatique 2 et de nombre chromatique acyclique 3.

Grünbaum en [36] a conjecturé que tout graphe planaire pouvait être acycliquement colorié en cinq couleurs. Borodin a prouvé cette conjecture en 1979 :

**Théorème 3.1.7** [Borodin [11]]

*Tout graphe planaire est coloriable de façon acyclique en 5 couleurs.*

Ce résultat est optimal, comme le montre le graphe planaire de la Figure 3.3 qui ne peut être acycliquement colorié en moins de cinq couleurs.

FIG. 3.4 –  $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ -coloration impropre d'un graphe  $G$ 

### 3.1.3 Colorations impropres

On parle de coloration impropre lorsqu'on relâche la contrainte consistant à colorier de façon différente les sommets adjacents. Dans ce cas, les contraintes de coloration s'expriment généralement sous forme de contraintes sur les graphes induits par les sommets coloriés d'une même couleur. En utilisant la notation introduite par Borowiecki et Mihók [16], nous dirons plus précisément :

**Définition 3.1.8** Soient  $G$  un graphe non orienté et  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k$ ,  $k$  familles de graphes non orientés. Une  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k)$ -coloration de  $G$  est une application de  $V(G)$  vers un ensemble de couleurs  $C = \{1, 2, \dots, k\}$  telle que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets coloriés  $i$  appartient à la famille  $\mathcal{F}_i$ .

On note  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \circ \dots \circ \mathcal{F}_k$  la famille des graphes admettant une  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k)$ -coloration. Les familles  $\mathcal{F}_i$  de graphes considérées dans les définitions de colorations impropres sont généralement des familles héréditaires [16] (rappelons qu'une famille de graphes est dite héréditaire si tout sous-graphe d'un graphe de la famille est également dans la famille).

Nous notons  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{D}_k$  et  $\mathcal{T}_k$  respectivement les familles de graphes planaires, de graphes planaires extérieurs, de graphes de degré au plus  $k$  et de  $k$ -arbres partiels.

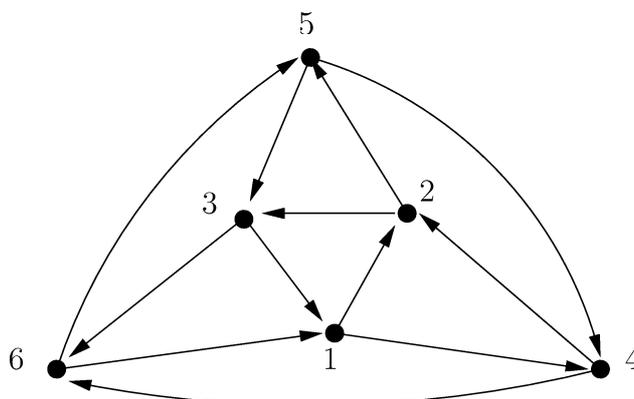
**Exemple 3.1.9** La Figure 3.4 représente une  $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ -coloration impropre d'un graphe  $G$ .

Les principaux résultats concernant les colorations impropres portent sur les colorations utilisant des graphes de degré borné, des chemins ou des forêts :

**Théorème 3.1.10** [Lovász [49]]

$$\text{Pour } p, q \geq 0, \mathcal{D}_{p+q+1} \subseteq \mathcal{D}_p \circ \mathcal{D}_q.$$

Si  $\mathcal{T}'_1$  est la famille des forêts dont chaque composante connexe est réduite à un chemin, nous avons :

FIG. 3.5 – Coloration d'un graphe orienté  $G$ 

**Théorème 3.1.11** [Goddart [34]]

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}'_1 \circ \mathcal{T}'_1 \circ \mathcal{T}'_1.$$

**Théorème 3.1.12** [Akiyama, Era, Gervacio et Watanabe [3]]

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}'_1 \circ \mathcal{T}'_1.$$

### 3.1.4 Colorations orientées

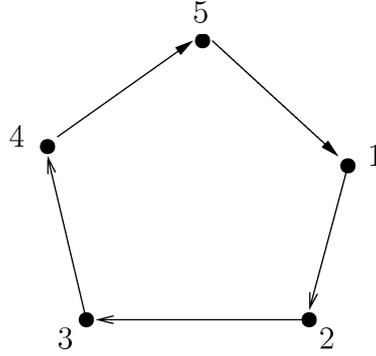
Rappelons tout d'abord que par graphes orientés, nous entendons graphes orientés antisymétriques. La notion de coloration orientée a été introduite par Courcelle [23] puis développée et étudiée par Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud, Sopena et Zhu (voir par exemple [15, 14, 47, 52, 57]).

Une coloration orientée d'un graphe orienté est une coloration propre du graphe non orienté sous-jacent sur laquelle on impose une contrainte supplémentaire liée à l'orientation. Plus précisément, nous avons :

**Définition 3.1.13** Soit  $G$  un graphe orienté. Une  $k$ -coloration orientée de  $G$  est une application  $c$  de  $V(G)$  dans un ensemble  $C$  de  $k$  couleurs satisfaisant :

1.  $\forall uv \in A(G), c(u) \neq c(v)$
2.  $\forall uv, xy \in A(G); c(u) = c(y) \implies c(v) \neq c(x)$ .

De façon intuitive, la connaissance des couleurs et des relations entre les couleurs permet "d'oublier" l'orientation du graphe : si  $uv$  est un arc, si  $u$  est colorié 1 et  $v$  est colorié 2, alors pour tous sommets adjacents coloriés 1 et 2, l'arc qui les relie est dirigé du sommet colorié 1 vers le sommet colorié 2. En d'autres termes, une coloration orientée d'un graphe orienté  $G$  est en fait un homomorphisme de  $G$  vers un graphe orienté  $H$  (les sommets de  $H$  sont considérés comme des couleurs).

FIG. 3.6 – Coloration du circuit à 5 sommets  $\vec{C}_5$ 

Le *nombre chromatique orienté* d'un graphe orienté  $G$ , noté  $\vec{\chi}(G)$ , est le plus petit  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -coloration orientée. De façon équivalente,  $\vec{\chi}(G)$  est l'ordre minimal d'un graphe orienté  $H$  tel qu'il existe un homomorphisme de  $G$  vers  $H$ .

**Exemple 3.1.14** La Figure 3.5 représente une coloration orientée pour une orientation du graphe  $G$  décrit dans l'exemple 3.1.6. Nous avons en fait pour ce graphe  $\vec{\chi}(G) = 6$ .

**Remarque 3.1.15** Les conditions de la Définition 3.1.13 signifient notamment que si deux sommets sont reliés par un chemin de longueur au plus deux, ces deux sommets doivent avoir des couleurs distinctes. En particulier, toute coloration orientée du circuit à cinq sommets  $\vec{C}_5$  doit utiliser cinq couleurs (voir Figure 3.6).

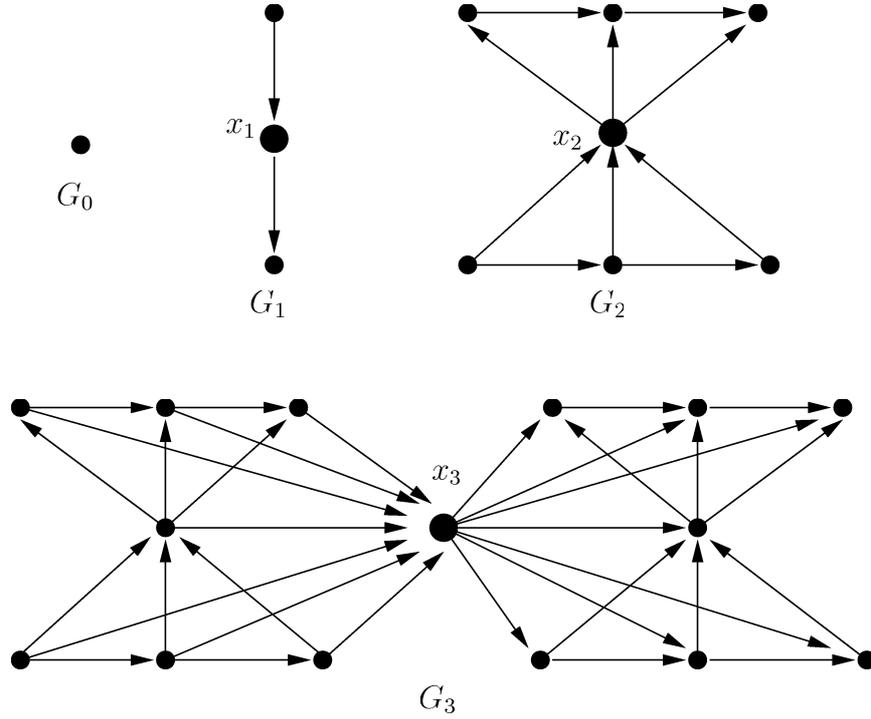
On définit également le nombre chromatique orienté d'un graphe non orienté comme le maximum des nombres chromatiques orientés de ses orientations. De même, le nombre chromatique orienté d'une famille de graphes (orientés ou non orientés) est défini comme le maximum des nombres chromatiques orientés des graphes de la famille.

Lorsqu'on rajoute un sommet à un graphe, dans le cas non orienté le nombre chromatique augmente d'au plus un, mais dans le cas orienté cette augmentation peut être beaucoup plus importante. Nous avons en effet :

**Proposition 3.1.16** [61] *Pour tout graphe orienté  $G$ ,  $\vec{\chi}(G + x) \leq 2 \cdot \vec{\chi}(G) + 1$  et cette borne est optimale.*

**Preuve.** Soit  $G$  un graphe orienté de nombre chromatique orienté  $k$  et  $H$  un graphe orienté à  $k$  sommets tel qu'il existe un homomorphisme  $\phi$  de  $G$  vers  $H$ . Soit  $V(H) = \{1, 2, \dots, k\}$ . Notons  $G + x$  un graphe obtenu à partir de  $G$  en ajoutant un sommet  $x$  relié à certains sommets de  $G$ . Les sommets de  $G$  peuvent être partitionnés en trois classes : les prédécesseurs de  $x$ ,  $N^-(x)$ , les successeurs de  $x$ ,  $N^+(x)$ , et les sommets non reliés à  $x$ ,  $O(x)$ .

Nous allons construire un graphe orienté  $H'$  à  $2k + 1$  sommets tel que  $G + x$  est  $H'$ -coloriable. Le graphe  $H'$  s'obtient de la façon suivante :

FIG. 3.7 – Les graphes orientés  $G_0, G_1, G_2, G_3$ 

- $V(H') = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \cup \{\alpha\}$ ,
- $a_i a_j \in A(H') \iff a_i b_j \in A(H') \iff b_i b_j \in A(H') \iff b_i a_j \in A(H') \iff ij \in A(H)$ ,
- $\forall i, 1 \leq i \leq k, a_i \alpha \in A(H')$  et  $\alpha b_i \in A(H')$ .

Un homomorphisme  $\phi'$  de  $G + x$  vers  $H'$  peut être obtenu de la façon suivante :

- $\phi'(x) = \alpha$ ,
- $\forall y \in N^-(x) \cup O(x), \phi'(y) = a_{\phi(y)}$ ,
- $\forall y \in N^+(x), \phi'(y) = b_{\phi(y)}$ .

Il est facile de vérifier que  $\phi'$  est un homomorphisme et donc  $\vec{\chi}(G + x) \leq 2 \cdot \vec{\chi}(G) + 1$ .

Pour montrer que cette borne est optimale, considérons la suite de graphes orientés suivante : soit  $G_0$  le graphe réduit à un sommet. Le graphe orienté  $G_i, i \geq 1$ , s'obtient en prenant deux copies disjointes de  $G_{i-1}$  et en ajoutant un sommet  $x_i$  successeur de tous les sommets de la première copie et prédécesseur de tous les sommets de la seconde copie. La Figure 3.7 décrit les premiers graphes de cette suite. Il est facile de vérifier que dans  $G_i$ , deux sommets quelconques sont toujours reliés par un chemin de longueur au plus deux. Ainsi, pour tout  $i, i \geq 1, \vec{\chi}(G_i) = 2^{i+1} - 1$  et  $\vec{\chi}(G_i - x_i) = \vec{\chi}(G_{i-1}) = 2^i - 1$ .

■

En 1994, Raspaud et Sopena ont montré qu'il existait un lien entre le nombre chromatique acyclique d'un graphe  $G$  et son nombre chromatique orienté :

**Théorème 3.1.17** [Raspaud et Sopena [55]]

*Pour tout graphe non orienté  $G$ , si  $\chi_a(G) \leq k$  alors  $\vec{\chi}(G) \leq k \times 2^{k-1}$ .*

En 1997, Kostochka, Sopena et Zhu ont montré un résultat réciproque :

**Théorème 3.1.18** [Kostochka, Sopena et Zhu [47]]

*Pour tout graphe non orienté  $G$ , si  $\vec{\chi}(G) \leq k$  alors  $\chi_a(G) \leq k^{\lceil \log(|\log k| + k/2) \rceil + 1}$ .*

Remarquons que pour tout  $k$ , il existe des graphes orientés de nombre chromatique orienté  $2^k - 1$  et dont le graphe non orienté sous-jacent est de nombre chromatique acyclique  $k$ . Il suffit en effet de considérer les graphes  $G'_i$  introduits dans la preuve de la Proposition 3.1.16 (voir Figure 3.7). Le nombre chromatique acyclique du graphe non orienté  $G'_i$  sous-jacent à  $G_i$  est  $i + 1$ . Nous avons  $\chi_a(G'_0) = 1$ . Supposons maintenant pour tout  $j$ ,  $0 \leq j \leq i - 1$ ,  $\chi_a(G'_j) = j + 1$ . Comme  $G'_i \setminus x_i$  est composé de deux copies distinctes de  $G'_{i-1}$ , nous avons  $\chi_a(G'_i \setminus x_i) = \chi_a(G'_{i-1}) = i$ . En associant une  $(i + 1)$ -ième couleur à  $x_i$  toute  $i$ -coloration acyclique de  $G'_i \setminus x_i$  peut être étendue à  $G'_i$ , et donc pour tout  $i$ ,  $\chi_a(G'_i) \leq i + 1$ . Comme pour tout  $i$ ,  $G'_i$  contient le graphe complet  $K_{i+1}$  comme sous-graphe nous avons  $i + 1 \leq \chi(G'_i) \leq \chi_a(G'_i)$ . Ainsi,  $\chi_a(G'_i) = i + 1$  et d'après la preuve de la Proposition 3.1.16,  $\vec{\chi}(G_i) = 2^{i+1} - 1$ .

Le théorème 3.1.17 a été généralisé au cas des colorations impropres acycliques.

Soit  $G$  un graphe non orienté et  $c$  une coloration (propre ou impropre) de  $G$  utilisant un ensemble  $C$  de couleurs. Appelons *arête de type  $(i, j)$*  une arête reliant un sommet de couleur  $i$  à un sommet de couleur  $j$ . Un cycle de  $G$  est dit *bicolore alterné* s'il existe deux couleurs  $i, j \in C$ ,  $i \neq j$ , telles que toutes ses arêtes sont de type  $(i, j)$ .

Soient  $G$  un graphe non orienté et  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k$   $k$  familles de graphes non orientés. Une  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k)$ -coloration de  $G$  est *acyclique* si  $G$  ne contient aucun cycle bicolore alterné. Nous notons  $\mathcal{F}_1 \odot \mathcal{F}_2 \odot \dots \odot \mathcal{F}_k$  la famille des graphes admettant une  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k)$ -coloration acyclique.

Nous avons alors :

**Théorème 3.1.19** [Boiron, Sopena et Vignal [10]]

*Soient  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k$   $k$  familles de graphes non orientés telles que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $\vec{\chi}(\mathcal{F}_i) \leq \alpha_i$ . Nous avons alors :*

$$\vec{\chi}(\mathcal{F}_1 \odot \mathcal{F}_2 \odot \dots \odot \mathcal{F}_k) \leq 2^{k-1} \times \sum_{i=1}^k \alpha_i.$$

Le Théorème 3.1.17 correspond au cas particulier où tous les  $\mathcal{F}_i$  sont la famille des graphes sans arêtes (nous avons alors  $\alpha_i = 1$  pour tout  $i$ ).

Dans le cas des graphes planaires, le résultat de Raspaud et Sopena (Théorème 3.1.17), combiné au résultat de Borodin (Théorème 3.1.7), montre que le nombre chromatique orienté de tout graphe planaire est au plus 80. En [58] Sopena a exhibé un graphe planaire orienté nécessitant 16 couleurs. L'amélioration de ces bornes constitue un challenge particulièrement intéressant.

Des améliorations significatives de la borne supérieure ont été obtenues dans le cas des graphes planaires de grande maille. Soit  $\mathcal{P}_g$  la famille des graphes planaires de maille au moins  $g$  :

**Théorème 3.1.20** [Nešetřil, Raspaud et Sopena [52]]

- Pour tout  $g$ ,  $\vec{\chi}(\mathcal{P}_g) \geq 5$ ,
- $\vec{\chi}(\mathcal{P}_7) > 5$ ,
- $\vec{\chi}(\mathcal{P}_{16}) = 5$ ,
- $\vec{\chi}(\mathcal{P}_{11}) \leq 7$ ,
- $\vec{\chi}(\mathcal{P}_7) \leq 12$ ,
- $\vec{\chi}(\mathcal{P}_6) \leq 32$ .

Certains de ces résultats ont été par la suite améliorés :

**Théorème 3.1.21** [Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud et Sopena [15]]

- $\vec{\chi}(\mathcal{P}_{14}) \leq 5$ ,
- $\vec{\chi}(\mathcal{P}_8) \leq 7$ ,
- $\vec{\chi}(\mathcal{P}_6) \leq 11$ ,
- $\vec{\chi}(\mathcal{P}_5) \leq 19$ .

D'autres résultats concernant des bornes supérieures du nombre chromatique orienté de certaines familles de graphes ont été obtenus. En particulier :

**Théorème 3.1.22** [Sopena [57]]

- $\vec{\chi}(\mathcal{D}_2) = 5$ ,  $\vec{\chi}(\mathcal{D}_3) \leq 16$ ,
- $\vec{\chi}(\mathcal{T}_1) = 3$ ,  $\vec{\chi}(\mathcal{T}_2) = 7$ ,  $\vec{\chi}(\mathcal{T}_3) \leq 16$ ,
- pour  $k \geq 4$ ,  $\vec{\chi}(\mathcal{T}_k) \leq (k + 1) \times 2^k$ ,
- $\vec{\chi}(\mathcal{O}) = 7$ .

Le résultat concernant les graphes de degré au plus trois a été amélioré par Sopena et Vignal :

**Théorème 3.1.23** [Sopena et Vignal [59]]

- $\vec{\chi}(\mathcal{D}_3) \leq 11$ .

La borne supérieure du nombre chromatique orienté des  $k$ -arbres se déduit directement du Théorème 3.1.17 grâce à l'observation suivante :

**Observation 3.1.24**  $\chi_a(\mathcal{T}_k) = k + 1$ .

**Preuve.** Remarquons qu'il suffit de prouver que pour tout  $k$ -arbre  $T$ ,  $\chi_a(T) \leq k + 1$ , car pour tout  $k$ -arbre partiel  $G$ , il existe un  $k$ -arbre  $G'$  contenant  $G$  comme sous-graphe tel que  $V(G') = V(G)$  et le graphe complet à  $k + 1$  sommets  $K_{k+1}$  est un  $k$ -arbre qui vérifie  $\chi_a(K_{k+1}) = \chi(K_{k+1}) = k + 1$ .

Supposons maintenant l'observation fautive et soit  $T$  un plus petit contre-exemple. Il est clair que  $|V(T)| \geq k + 2$ . D'après la définition d'un  $k$ -arbre, il existe un sommet  $v$  dans  $T$  tel que  $d_T(v) = k$  et le sous-graphe de  $T$  induit par les voisins de  $v$  est une  $k$ -clique.

Il est clair que  $T \setminus v$  est un  $k$ -arbre. D'après la minimalité de  $T$ ,  $\chi_a(T \setminus v) \leq k + 1$ . Comme le sous-graphe de  $T$  induit par les voisins de  $v$  est une  $k$ -clique, toute  $(k + 1)$ -coloration acyclique de  $T \setminus v$  affecte  $k$  couleurs distinctes aux voisins de  $v$ . En associant une  $(k + 1)$ -ième couleur à  $v$ , distincte de celles de ses voisins, toute  $(k + 1)$ -coloration acyclique de  $T \setminus v$  peut être étendue à  $T$ , une contradiction. ■

Dans [57], Sopena montre également que pour tout  $k$ , il existe des  $k$ -arbres de nombre chromatique orienté  $2^{k+1} - 1$ . Il suffit en effet de considérer les graphes  $G_i$  introduits dans la preuve de la Proposition 3.1.16 (voir Figure 3.7) : chaque graphe  $G_i$  est un  $i$ -arbre partiel de nombre chromatique orienté  $2^{i+1} - 1$ .

Dans le cas des graphes de degré au plus  $k$ , avec  $k \geq 4$ , nous avons le résultat suivant :

**Théorème 3.1.25** [Kostochka, Sopena et Zhu [47]]

Pour  $k \geq 4$ ,  $\vec{\chi}(\mathcal{D}_k) \leq 2k^2 2^k$ .

En [47], par des méthodes probabilistes, ils montrent également que pour  $k > 1$ , il existe des graphes de degré au plus  $k$  et de nombre chromatique orienté au moins  $2^{k/2}$ .

Concernant les graphes de degré au plus trois, Sopena [57] a conjecturé que le nombre chromatique orienté de tout graphe connexe de degré au plus trois était majoré par 7, conjecture toujours ouverte à ce jour. La Figure 3.8 représente un graphe orienté connexe de degré maximal 3 tel que toute paire de sommets est reliée par un chemin de longueur au plus deux. Toute coloration orientée de ce graphe nécessite donc 7 couleurs.

Nous terminons cette section en remarquant que les problèmes de colorations orientées semblent être plus difficiles que les problèmes de colorations (propres) de graphes non orientés. L'une des raisons est certainement la perte de la propriété de *localité* : dans le cas des colorations de graphes non orientés, la validité d'une couleur pour un sommet donné peut être décidée en regardant uniquement les couleurs des voisins de ce sommet. Il est ainsi facile de colorier par exemple en  $k + 1$  couleurs un graphe  $k$ -dégénéré. Cette propriété de localité n'est malheureusement plus valide dans le cas des colorations orientées : la validité d'une couleur pour un sommet dépend cette fois de l'ensemble des sommets du graphe déjà

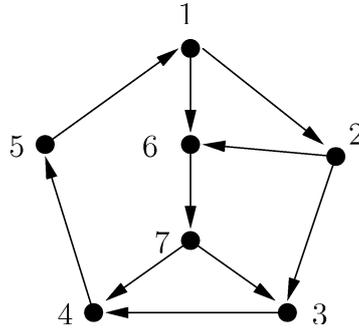


FIG. 3.8 – Un graphe de degré maximum 3 et de nombre chromatique orienté 7

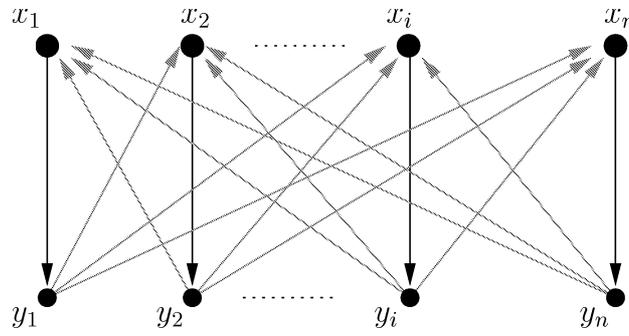


FIG. 3.9 – Une orientation du graphe biparti complet  $K_{n,n}$

coloriés.

La différence entre les colorations orientées et non orientées peut être arbitrairement grande. Considérons le cas des graphes bipartis. Les graphes bipartis sont bien évidemment 2-coloriables dans le cas non orienté. Dans le cas orienté, il est facile de constater que le nombre chromatique orienté des graphes bipartis est non majoré. En effet, il suffit de considérer l'orientation  $\vec{K}_{n,n}$  suivante du graphe biparti complet  $K_{n,n} : V(K_{n,n}) = V_1 \cup V_2$ , avec  $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et  $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  et pour tout  $i, j, 1 \leq i, j \leq n$ ,  $x_i y_j$  est un arc de  $A(\vec{K}_{n,n})$  si  $i = j$ ,  $y_j x_i$  est un arc de  $A(\vec{K}_{n,n})$  sinon (voir Figure 3.9). Il est facile de vérifier que tout paire de sommets de  $V(\vec{K}_{n,n})$  est alors reliée par un chemin de longueur 1 ou 2. Ainsi, le nombre chromatique orienté de  $\vec{K}_{n,n}$  est  $2n$ .

Ce phénomène peut également être constaté dans le cas des graphes  $k$ -dégénérés. Tout graphe non orienté  $k$ -dégénéré est naturellement  $(k + 1)$ -coloriable. Il est en revanche possible de construire des graphes orientés 2-dégénérés dont le nombre chromatique orienté est arbitrairement grand : considérons le graphe orienté  $G_n$  obtenu à partir d'un tournoi quelconque  $T_n$  à  $n$  sommets en remplaçant chaque arc par un chemin de longueur 2 utilisant un nouveau sommet intermédiaire. On vérifie aisément que  $G_n$  ainsi obtenu est bien 2-dégénéré (il est également biparti) et que toute paire de sommets "originaux" de  $T_n$  doit

recevoir des couleurs distinctes. Ainsi, le nombre chromatique orienté de  $G_n$  est au moins égal à  $n$ .

## 3.2 Coloration des graphes d'excès $k$

Dans cette section nous allons présenter dans un premier temps la notion d'excès. Ensuite, nous déterminons une borne supérieure pour le nombre chromatique des graphes non orientés d'excès  $k$ . Dans la sous-section 3.2.3 nous déterminons le nombre chromatique orienté des graphes d'excès au plus 2 et dans la sous-section 3.2.4 nous donnons une borne supérieure et une borne inférieure du nombre chromatique orienté des graphes d'excès  $k \geq 2$ .

### 3.2.1 Introduction

Dans cette sous-section nous présentons la notion d'excès et certaines notations que nous utiliserons par la suite.

**Définition 3.2.1** Soit  $G$  un graphe. L'excès de  $G$ , noté  $ex(G)$ , est défini comme le nombre minimal d'arêtes de  $G$  qui doivent être enlevées pour obtenir une forêt ; en d'autres termes,  $ex(G) = |E(G)| - |V(G)| + ncc(G)$ , où  $ncc(G)$  est le nombre de composantes connexes de  $G$ .

Dans la littérature la notion d'excès est parfois appelée le *nombre cyclomatique* [9] ou le *nombre de Betti* de  $G$ .

Nous notons  $\xi_k$  la famille des graphes d'excès  $k$ . Ainsi,  $\xi_0$  correspond à la famille des forêts et  $\xi_1$  correspond à la famille des graphes contenant exactement un cycle. Comme tout graphe d'excès  $k - 1$  est un sous-graphe d'un graphe d'excès  $k$ , nous avons clairement  $\bar{\chi}(\xi_k) \geq \bar{\chi}(\xi_{k-1})$  pour tout  $k > 0$ .

En [13] les auteurs ont prouvé qu'il existe des graphes orientés tels qu'en rajoutant un arc le nombre chromatique orienté augmente de 2 ; plus précisément, ils ont prouvé que pour tout  $p$ , il existe un graphe orienté  $H_p$  dont le nombre chromatique orienté est diminué de 2 par la suppression de n'importe quel arc, et de  $p$  par celle de n'importe quel sommet. Clairement, l'ajout d'un arc augmente le nombre chromatique orienté d'au plus deux : il suffit de colorier les extrémités de cet arc avec 2 nouvelles couleurs. Donc, comme la famille des forêts est de nombre chromatique orienté 3 [57], nous obtenons  $\bar{\chi}(\xi_k) \leq 2k + 3$  pour tout  $k \geq 0$ .

Notre résultat principal montre que cette borne peut être ramenée à  $k + 3$ , à l'exception des graphes orientés d'excès 1 contenant un circuit à cinq sommets dont le nombre chromatique orienté est 5.

### 3.2.2 Nombre chromatique des graphes d'excès $k$

Dans cette sous-section nous déterminons le nombre chromatique des graphes non orientés d'excès  $k$ .

**Théorème 3.2.2** *Pour tout graphe non orienté  $G$  d'excès  $k \geq 0$ ,  $\chi(G) \leq \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}) \rfloor$ . De plus, cette borne est optimale.*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas des graphes connexes. Comme  $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}) - 1 < \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}) \rfloor \leq \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k})$ , il suffit de prouver que pour tout graphe  $G$  d'excès  $k \geq 0$ ,  $\chi(G) \leq \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k})$ . Supposons maintenant que le théorème est faux et soit  $G$  un plus petit contre exemple d'excès  $k$  tel que  $\chi(G) > \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k})$ . Nous avons clairement :

$$|V(G)| > \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}). \quad (5)$$

Nous considérons deux cas :

1.  $G$  contient un sommet  $u$  tel que  $d_G(u) \leq \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}) - 1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8k})$ .  
 Dans ce cas, d'après la minimalité de  $G$ , le graphe  $G \setminus u$  admet une  $\ell$ -coloration  $c$ ,  $\ell \leq \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k})$ . Comme  $d_G(u) \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8k})$ , le nombre de couleurs interdites pour  $u$  est d'au plus  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8k})$ . Il existe donc au moins une couleur libre  $a$ . En posant  $c(u) = a$  nous obtenons une coloration de  $G$  qui utilise au plus  $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k})$  couleurs, ce qui contredit notre hypothèse.
2. Pour tout  $u \in V(G)$ ,  $d_G(u) > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8k})$ .  
 Dans ce cas nous avons :

$$\begin{aligned} k &= ex(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1 \\ &= \frac{1}{2} \times dm(G) \times |V(G)| - |V(G)| + 1 \\ &> \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8k}) \right) \times |V(G)| - |V(G)| + 1 \\ &= 1 + \frac{1}{4}(\sqrt{1 + 8k} - 3) \times |V(G)| \end{aligned}$$

et d'après la relation (5) nous avons :

$$\begin{aligned} k &> 1 + \frac{1}{4}(\sqrt{1 + 8k} - 3) \times \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}) \\ &= 1 + \frac{1}{8}(1 + 8k - 9) = k. \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction et nous obtenons que pour tout graphe non orienté  $G$  d'excès  $k$ ,  $\chi(G) \leq \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k})$ .

Nous montrons maintenant que cette borne est optimale. Considérons le graphe complet  $K_n$ ,  $n = \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}) \rfloor$ . Nous avons bien évidemment  $\chi(K_n) = n = \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}) \rfloor$  et :

$$\begin{aligned} ex(K_n) &= \frac{1}{2}n(n-1) - n + 1 = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2) \\ &= \frac{1}{2}(\lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}) \rfloor)^2 - 3\lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}) \rfloor + 2) \\ &\leq \frac{1}{8}(3 + \sqrt{1 + 8k})^2 - \frac{3}{4}(3 + \sqrt{1 + 8k}) + 1 \\ &= \frac{1}{8}(9 + 1 + 8k + 6\sqrt{1 + 8k}) - \frac{9}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{1 + 8k} + 1 \\ &= \frac{10}{8} + k + \frac{6}{8}\sqrt{1 + 8k} - \frac{9}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{1 + 8k} + 1 = k. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

### 3.2.3 Nombre chromatique orienté des graphes d'excès $k \leq 2$

Dans cette sous-section nous déterminons le nombre chromatique orienté des graphes d'excès 0, 1 et 2.

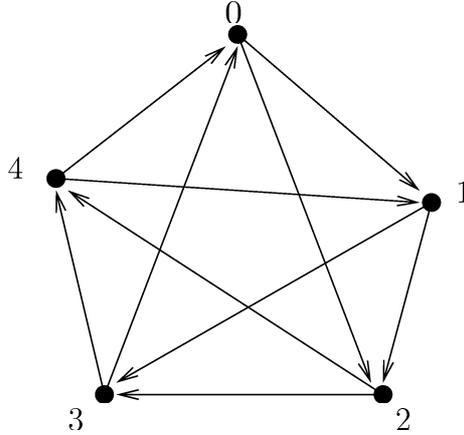
Pour un graphe  $G$ , nous définissons le graphe *taillé* de  $G$ , noté  $P(G)$ , comme le graphe obtenu à partir de  $G$  en éliminant récursivement les sommets isolés et les sommets de degré 1 jusqu'à ce que le graphe obtenu soit un sommet isolé ou un graphe de degré minimum 2. Le graphe taillé d'un graphe orienté est défini de la même façon. Notons que les deux graphes, taillé et initial, sont de même excès.

Un graphe orienté  $G$  est *bien orienté* s'il ne contient ni source ni puits; en d'autres termes, pour tout sommet  $u \in V(G)$ ,  $d_G^+(u) \geq 1$  et  $d_G^-(u) \geq 1$ . L'observation suivante nous sera très utile dans la suite :

**Observation 3.2.3** *Soit  $G$  un graphe orienté. Si  $H$  est un graphe bien orienté tel que  $P(G) \longrightarrow H$ , alors  $G \longrightarrow H$ .*

**Preuve.** Soient  $v_1, v_2, \dots, v_\ell$  la suite des sommets enlevés de  $G$  pour obtenir  $P(G)$  et  $\phi$  un homomorphisme de  $P(G)$  vers  $H$ . On peut étendre  $\phi$  à un homomorphisme de  $G$  vers  $H$  en envoyant des sommet  $v_\ell, v_{\ell-1}, \dots, v_1$  (dans cet ordre) vers des sommets de  $H$  comme suit : un sommet isolé peut être envoyé vers un sommet arbitraire de  $H$  et un sommet de degré 1 peut être envoyé vers un sommet de  $H$  en fonction de l'image de son unique voisin, ce qui est toujours possible car  $H$  est un graphe bien orienté. ■

Un graphe d'excès 0 est clairement une forêt et son graphe taillé est un sommet isolé. Comme le plus petit graphe bien orienté est le circuit à trois sommets  $\vec{C}_3$  et comme un chemin de longueur 2 a pour nombre chromatique orienté 3, on obtient :

FIG. 3.10 – Le tournoi  $T_5$ 

**Théorème 3.2.4** [57]  $\vec{\chi}(\xi_0) = 3$ . De plus, tout graphe d'excès 0 admet un homomorphisme vers  $\vec{C}_3$ .

Un graphe orienté  $G$  est arc transitif si pour tous arcs  $uv$  et  $xy$  il existe un automorphisme  $\phi$  de  $G$  tel que  $\phi(u) = \phi(x)$  et  $\phi(v) = \phi(y)$ . Considérons le graphe orienté circulant  $T_5$  (voir Figure 3.10) qui est défini de la façon suivante :  $V(T_5) = \{0, 1, \dots, 4\}$  et  $ij \in A(T_5)$  si et seulement si  $j - i = 1$  ou  $2 \pmod{5}$ . Le tournoi  $T_5$  est clairement arc transitif et il a les propriétés suivantes :

**Observation 3.2.5** [15]

1. Pour tous sommets  $u$  et  $v \in V(T_5)$  (non nécessairement distincts), il existe une chaîne de longueur 4 reliant  $u$  à  $v$  pour chacune des 16 orientations possibles.
2. Pour tout sommet  $u \in V(T_5)$ , il existe un cycle de longueur 3 contenant  $u$  pour chacune des 8 orientations possibles.

La proposition suivante a été prouvée en [57] :

**Proposition 3.2.6** Tout cycle orienté admet un homomorphisme vers  $T_5$ .

Ce résultat peut être renforcé comme suit :

**Proposition 3.2.7** Tout cycle orienté sauf le circuit à cinq sommets  $\vec{C}_5$  admet une 4-coloration orientée.

**Preuve.** Soient  $u_1, u_2, \dots, u_n$  les sommets d'un cycle orienté  $C$  à  $n$  sommets.

Supposons d'abord que  $C$  n'est pas un circuit. On peut sans perte de généralité supposer que  $u_1u_2$  et  $u_1u_n$  sont deux arcs dans  $C$ . D'après le Théorème 3.2.4, nous savons que la chaîne  $u_2u_3 \dots u_n$  admet un homomorphisme vers  $\vec{C}_3$ . En associant une quatrième couleur à  $u_1$ , nous obtenons un homomorphisme de  $C$  vers un graphe orienté à 4 sommets.

Supposons maintenant que  $C$  est un circuit à  $n \neq 5$  sommets. Le résultat est évident pour  $n \leq 4$ . Pour  $n \geq 6$ , On peut partitionner  $C$  en chemins de longueur 3 ou 4, car tout entier  $n \geq 6$  peut être exprimé comme une somme de 3 et de 4. En coloriant 1, 2, 3 les chemins de longueur 3 et 1, 2, 3, 4 les chemins de longueur 4 on obtient un homomorphisme de  $C$  vers le graphe orienté à 4 sommets  $\{1, 2, 3, 4\}$  avec les arcs 12, 23, 34, 31 et 41. Ainsi, le nombre chromatique orienté de  $C$  est d'au plus 4. ■

Un graphe d'excès 1 est un graphe dont le graphe taillé est un cycle. Il est facile de vérifier que dans la preuve de la Proposition 3.2.7 on peut obtenir dans tous les cas un homomorphisme vers un tournoi bien orienté à 4 sommets. En effet, dans tous les cas, le graphe cible est composé du circuit  $\vec{C}_3$  à 3 sommets et d'un quatrième sommet de degré 2. On peut donc rajouter un arc de façon à ce que ce graphe cible soit bien orienté. Ainsi, comme le circuit  $\vec{C}_5$  à 5 sommets a pour nombre chromatique orienté 5, nous obtenons :

**Théorème 3.2.8**  $\vec{\chi}(\xi_1) = 5$ . *De plus, tout graphe orienté d'excès 1 admet une  $T_5$ -coloration et tout graphe d'excès 1 ne contenant pas  $\vec{C}_5$  comme sous-graphe a un nombre chromatique orienté d'au plus 4 et admet un homomorphisme vers un tournoi bien orienté à 4 sommets.*

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons la convention suivante pour chacune des configurations : le degré des sommets gris ou noirs est complètement spécifié, alors que les sommets blancs sont de degré quelconque.

Nous considérons maintenant le cas des graphes d'excès 2 et nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 3.2.9**  $\vec{\chi}(\xi_2) = 5$ . *De plus, tout graphe orienté d'excès 2 admet un homomorphisme vers un tournoi bien orienté à 5 sommets.*

**Preuve.** Soient  $G$  un graphe d'excès 2 et  $\vec{G}$  une orientation de  $G$ . D'après l'Observation 3.2.3 on peut supposer que  $G = P(G)$ . Nous considérons trois cas :

1.  $\vec{G}$  se compose de deux composantes connexes dont chacune est un cycle.  
Dans ce cas, d'après la Proposition 3.2.6, les cycles sont  $T_5$ -coloriables et donc  $\vec{G}$  est  $T_5$ -coloriable.
2.  $\vec{G}$  est connexe et se compose de deux cycles  $C_1$  et  $C_2$  reliés par une chaîne de longueur  $\ell \geq 0$  (voir Figure 3.11).  
Soit  $u$  le sommet de  $C_2$  appartenant à cette chaîne. Les graphes  $\vec{G} - C_2 + u$  et  $C_2$  sont d'excès 1 et d'après le Théorème 3.2.8 sont  $T_5$ -coloriables. Soit  $f$  un homomorphisme de  $\vec{G} - C_2 + u$  vers  $T_5$  et  $g$  un homomorphisme de  $C_2$  vers  $T_5$  (d'après la Proposition 3.2.6 un tel homomorphisme existe). Comme  $T_5$  est transitif, l'homomorphisme  $g$  peut être choisi tel que  $f(u) = g(u)$ . En combinant  $f$  et  $g$  on obtient un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers  $T_5$ .
3.  $\vec{G}$  est connexe et se compose de deux cycles  $C_1$  et  $C_2$  ayant  $t$  arcs en commun,  $t \geq 1$  (voir Figure 3.12).

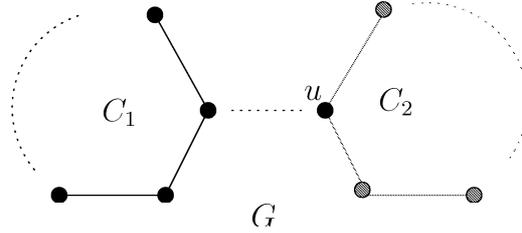


FIG. 3.11 – Configuration pour le cas 2 du Théorème 3.2.9

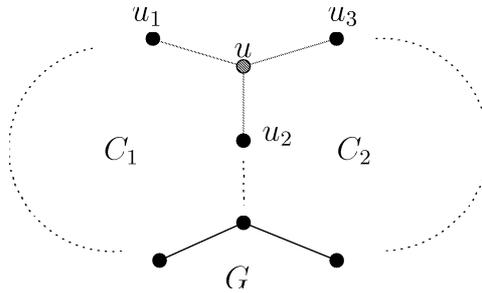


FIG. 3.12 – Configuration pour le cas 3 du Théorème 3.2.9

Soit  $u$  l'un de deux sommets de degré 3 dans  $\vec{G}$ . Le graphe  $\vec{G} \setminus u$  est un arbre et d'après le Théorème 3.2.4, il existe un homomorphisme  $f$  de  $\vec{G} \setminus u$  vers  $\vec{C}_3$ . Soient  $u_1, u_2$  et  $u_3$  les trois voisins de  $u$  dans  $\vec{G}$ . Si  $d_{\vec{G}}^+(u) = 0$  ou  $d_{\vec{G}}^-(u) = 0$ , en associant une quatrième couleur à  $u$ ,  $f$  est étendu à un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un graphe orienté à 4 sommets. Sinon, en posant  $f(u) = 4$  et  $f(u_i) = 5$ , où  $u_i$  est le seul prédécesseur (ou le seul successeur) de  $u$ , nous obtenons un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un graphe orienté à 5 sommets.

Dans les deux cas, on peut compléter les graphes cibles pour obtenir des graphes bien orientés.

Il existe donc dans tous les cas un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un graphe bien orienté ayant au plus 5 sommets. ■

### 3.2.4 Nombre chromatique orienté des graphes d'excès $k \geq 3$

Dans cette sous-section nous donnons une borne supérieure du nombre chromatique orienté des graphes d'excès  $k, k \geq 3$ .

Dans la preuve du résultat principal de cette sous-section nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

**Lemme 3.2.10** *Soit  $G$  un graphe 2-arête-connexe d'excès  $k$ . Pour tout sommet  $u \in V(G)$ ,  $ex(G \setminus u) \leq k - \lceil d_G(u)/2 \rceil$ .*

**Preuve.** Soient  $d = d_G(u)$  et  $N_G(u) = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$  l'ensemble des voisins de  $u$  dans  $G$ . Comme  $G$  est 2-arête-connexe, pour tout  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , il existe au moins un sommet  $x_j \in N_G(u) \setminus x_i$  tel que  $x_i$  et  $x_j$  appartiennent à la même composante connexe de  $G \setminus u$ . Ainsi,  $G \setminus u$  contient au plus  $\lfloor d/2 \rfloor$  composantes connexes. Alors :

$$\begin{aligned} ex(G \setminus u) &= |E(G \setminus u)| - |V(G \setminus u)| + ncc(G \setminus u) \\ &\leq |E(G)| - d - (|V(G)| - 1) + \lfloor d/2 \rfloor \\ &= |E(G)| - |V(G)| + 1 - (d - \lfloor d/2 \rfloor) = k - \lfloor d/2 \rfloor. \end{aligned}$$

■

Dans la suite, nous noterons  $k$ -sommet (respectivement  $(\geq k)$ -sommet,  $(\leq k)$ -sommet) un sommet de degré  $k$  (respectivement au moins  $k$ , au plus  $k$ ).

**Lemme 3.2.11** *Soit  $G$  un graphe 2-arête-connexe d'excès  $ex(G) > 1$ .*

(a) *S'il existe un cycle dans  $G$  contenant exactement un  $(\geq 3)$ -sommet et si tout autre cycle de  $G$  contient au moins deux  $(\geq 3)$ -sommets, alors  $G$  contient un  $(\geq 3)$ -sommet  $u$  tel que  $G \setminus u$  est connexe.*

(b) *Si tout cycle de  $G$  contient au moins deux  $(\geq 3)$ -sommets, alors  $G$  contient deux  $(\geq 3)$ -sommets distincts  $u_1$  et  $u_2$  tels que  $G \setminus u_1$  et  $G \setminus u_2$  sont connexes.*

**Preuve.** Soit  $G$  un graphe satisfaisant aux conditions du lemme. Comme  $ex(G) > 1$ ,  $G$  contient au moins deux  $(\geq 3)$ -sommets. Si  $G$  est 2-connexe, alors pour tout sommet  $u$  dans  $G$ ,  $G \setminus u$  est connexe et le résultat est obtenu.

Supposons maintenant que  $G$  n'est pas 2-connexe. Considérons le graphe-bloc  $B(G)$ ; d'après la Proposition 1.5.4  $B(G)$  est un arbre. Comme  $G$  est 2-arête-connexe, toute feuille de  $B(G)$  contient un cycle. Comme  $G$  n'est pas 2-connexe,  $B(G)$  contient au moins deux feuilles.

Dans le cas (a), il existe au moins une feuille dans  $B(G)$ , disons  $B_0$ , contenant un cycle ayant au moins deux  $(\geq 3)$ -sommets. Soit  $b$  l'unique sommet de  $B_0$  appartenant aux autres blocs. Nous pouvons donc choisir un  $(\geq 3)$ -sommet  $u$ ,  $u \neq b$ , tel que  $G \setminus u$  est connexe.

Dans le cas (b), toute feuille dans  $B(G)$  possède la même propriété que  $B_0$ . Comme  $B(G)$  contient au moins deux feuilles, nous pouvons alors trouver deux  $(\geq 3)$ -sommets distincts  $u_1$ ,  $u_2$  tels que  $G \setminus u_1$  et  $G \setminus u_2$  sont connexes. ■

Nous pouvons maintenant prouver le résultat principal :

**Théorème 3.2.12** *Pour tout  $k \geq 2$ ,  $\bar{\chi}(\xi_k) \leq k + 3$ . De plus, tout graphe orienté d'excès  $k$  admet un homomorphisme vers un tournoi bien orienté à  $k + 3$  sommets.*

**Preuve.** Nous raisonnons par récurrence sur  $k$ . D'après le Théorème 3.2.9, le résultat est vérifié pour  $k = 2$ . Supposons maintenant que le résultat est correct pour tout  $\ell$ ,

$2 \leq \ell \leq k - 1$ , et que  $G$  est un graphe d'excès  $k$ . D'après l'Observation 3.2.3 il suffit de considérer le cas où  $G = P(G)$ .

Soit  $\vec{G}$  une orientation de  $G$ . Nous considérons cinq cas (pour chaque cas, nous considérons qu'aucun des cas précédents ne se produit) :

1.  $\vec{G}$  contient un 2-sommet  $u$  appartenant à un cycle tel que  $d_{\vec{G}}^+(u) = 0$  ou  $d_{\vec{G}}^-(u) = 0$ .

Nous avons clairement  $ex(\vec{G} \setminus u) = k - 1$ . Par hypothèse de récurrence, il existe un homomorphisme  $\phi$  de  $\vec{G} \setminus u$  vers un tournoi bien orienté à  $k + 2$  sommets. En associant une  $(k + 3)$ -ième couleur à  $u$ , nous pouvons étendre  $\phi$  à un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un tournoi bien orienté à  $k + 3$  sommets.

2.  $\vec{G}$  contient un 2-sommet  $u$  tel que  $d_{\vec{G}}^+(u) = d_{\vec{G}}^-(u) = 1$ . De plus, les deux voisins de  $u$  dans  $\vec{G}$ , notés  $v$  et  $w$ , sont reliés par un chemin de longueur 1 ou 2.

Nous avons encore  $ex(\vec{G} \setminus u) = k - 1$ . Par hypothèse de récurrence, il existe un homomorphisme  $\phi$  de  $\vec{G} \setminus u$  vers un tournoi bien orienté à  $k + 2$  sommets. Comme les deux sommets  $v$  et  $w$  sont reliés par un chemin de longueur 1 ou 2, nous avons  $\phi(v) \neq \phi(w)$ . En associant une  $(k + 3)$ -ième couleur à  $u$ , nous pouvons étendre  $\phi$  à un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un tournoi bien orienté à  $k + 3$  sommets.

3.  $\vec{G}$  contient un chemin induit  $uu_1u_2u_3v$  de longueur 4 appartenant à un cycle.

Soit  $\vec{G}' = \vec{G} \setminus \{u_1, u_2, u_3\}$ . Nous avons clairement  $ex(\vec{G}') = k - 1$  et, par hypothèse de récurrence, il existe un homomorphisme  $\phi$  de  $\vec{G}'$  vers un tournoi bien orienté  $\vec{H}$  à  $k + 2$  sommets. Soient  $\phi(u) = x$  et  $\phi(v) = y$ . Nous considérons trois sous-cas en fonction des couleurs  $x$  et  $y$ . Dans chaque cas nous étendons  $\phi$  à un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un tournoi orienté à  $k + 3$  sommets en utilisant une  $(k + 3)$ -ième couleur  $a$ .

- (a)  $x = y$ .

Dans ce cas  $\phi$  peut être étendu, en posant  $\phi(u_1) = z$ ,  $\phi(u_2) = a$  et  $\phi(u_3) = z'$  où  $xz$  et  $z'x \in A(\vec{H})$ .

- (b)  $x \neq y$  et  $xy \in A(\vec{H})$ .

Dans ce cas,  $\phi$  peut être étendu en posant  $\phi(u_1) = y$ ,  $\phi(u_2) = z$  et  $\phi(u_3) = a$  où  $yz \in A(\vec{H})$ .

- (c)  $x \neq y$  et  $yx \in A(\vec{H})$ .

Dans ce cas, comme  $\vec{H}$  est un tournoi bien orienté, il existe un sommet  $z$  dans  $\vec{H}$  tel que  $xz \in A(\vec{H})$ . Maintenant, s'il existe un sommet  $w$  distinct de  $y$  dans  $\vec{H}$  tel que  $zw \in A(\vec{H})$ , alors  $\phi$  peut être étendu en posant  $\phi(u_1) = z$ ,  $\phi(u_2) = w$  et  $\phi(u_3) = a$ . Sinon,  $N_{\vec{H}}^+(z) = \{y\}$ ; comme  $\vec{H}$  est un tournoi bien orienté à au moins 4 sommets, il existe une couleur  $w'$  dans  $A(\vec{H})$  telle que  $w' \in N_{\vec{H}}^-(z) \setminus \{x, y, z\}$ . Alors  $\phi$  peut être étendu en posant  $\phi(u_1) = a$ ,  $\phi(u_2) = w'$  et  $\phi(u_3) = z$ .

Dans les trois sous-cas,  $\phi$  est un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un tournoi qui peut clairement être complété pour former un tournoi bien orienté à  $k + 3$  sommets.

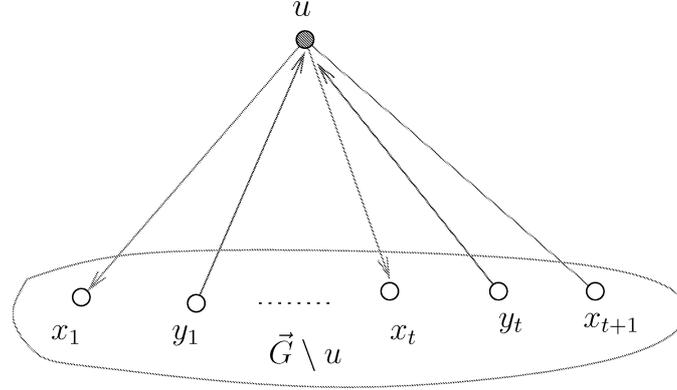


FIG. 3.13 – Configuration pour le cas 4(a) du Théorème 3.2.12

4.  $\vec{G}$  contient un sommet  $u$  de degré  $d_{\vec{G}}(u) = 2t + 1$  tel que tout arc incident à  $u$  appartient à un cycle. Nous considérons deux sous-cas :

- (a)  $ex(\vec{G} \setminus u) \neq 1$  ou  $\vec{G} \setminus u$  ne contient pas le circuit  $\vec{C}_5$  comme sous-graphe induit. D'après le Lemme 3.2.10 nous avons  $ex(\vec{G} \setminus u) \leq k - t - 1$  et, par hypothèse de récurrence,  $\chi(\vec{G} \setminus u) \leq k + 2 - t$ . Soit  $\phi$  un homomorphisme de  $\vec{G} \setminus u$  vers un tournoi bien orienté à  $k + 2 - t$  sommets. Remarquons que pour étendre  $\phi$  à un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un tournoi bien orienté à  $k + 3$  sommets nous avons  $k + 3 - (k + 2 - t) = t + 1$  couleurs libres.

Il est facile de vérifier que la Figure 3.13 représente le cas où nous avons besoin d'un nombre maximum de couleurs (l'arête  $ux_{t+1}$  peut être orientée dans un sens ou dans l'autre). Dans cette configuration, nous avons pour tout  $i, 1 \leq i \leq t$ ,  $\phi(x_i) = \phi(y_i)$  et pour tous  $i, j, 1 \leq i < j \leq t + 1$ ,  $\phi(x_i) \neq \phi(x_j)$ .

Dans ce cas,  $\phi$  peut être étendu en recoloriant les  $t$  sommets  $y_1, y_2, \dots, y_t$  avec  $t$  nouvelles couleurs distinctes et en associant une  $(t + 1)$ -ième nouvelle couleur à  $u$ . Le graphe orienté obtenu peut clairement être complété pour obtenir un graphe bien orienté à  $k + 3$  sommets.

- (b)  $ex(\vec{G} \setminus u) = 1$  et  $\vec{G} \setminus u$  contient  $\vec{C}_5$  comme un sous-graphe induit.

Nous considérons deux sous-cas en fonction du degré de  $u$  :

- i.  $d_{\vec{G}}(u) = 3$ .

Dans ce cas, seulement l'une des configurations représentées par la Figure 3.14 est possible (une arête non orientée indique une chaîne), les autres possibilités ont été considérées dans les cas précédents.

#### A. Configurations (a) et (b).

Considérons le graphe  $\vec{G} \setminus v_1$  et soit  $w$  le troisième voisin de  $v_1$  dans  $\vec{G}$  (on peut avoir  $w = u$ ). Nous avons  $ex(\vec{G} \setminus v_1) = 1$  et, par la proposition 3.2.8, il existe un homomorphisme  $\phi$  de  $\vec{G} \setminus v_1$  vers le tournoi  $T_5$ . Comme

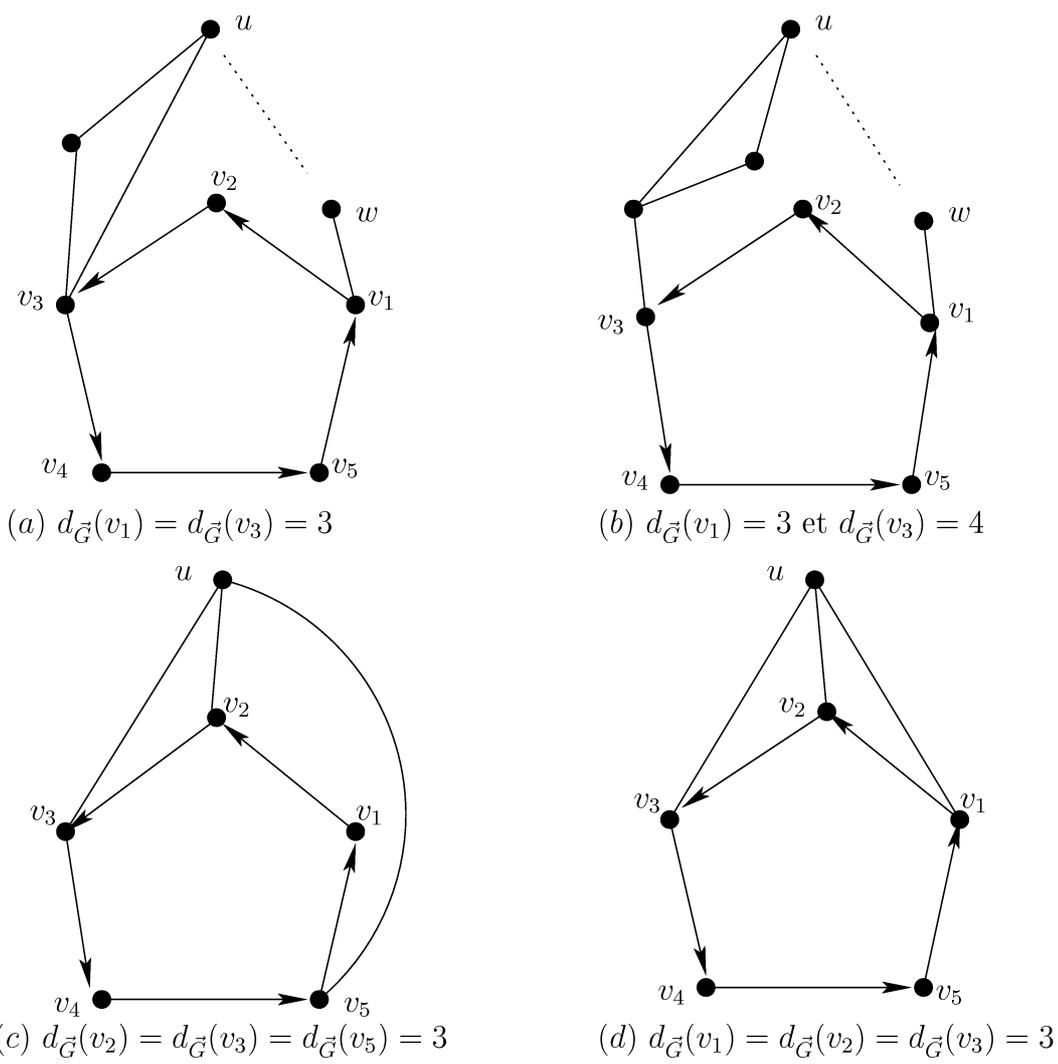


FIG. 3.14 – Configurations pour le cas 4.(b).i du Théorème 3.2.12

les sommets  $v_2$  et  $v_5$  sont de degré 1 dans  $\vec{G} \setminus v_1$  et tout sommet de  $T_5$  possède deux prédécesseurs et deux successeurs,  $\phi$  peut être choisi tel que  $\phi(v_2) \neq \phi(v_5) \neq \phi(w)$  si  $v_1w$  est un arc dans  $\vec{G}$ , ou  $\phi(v_5) \neq \phi(v_2) \neq \phi(w)$  si  $wv_1$  est un arc dans  $\vec{G}$ . En associant une 6-ième couleur à  $v_1$ ,  $\phi$  peut être étendu à un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un graphe bien orienté à 6 sommets.

B. Configurations (c) et (b).

Dans ce cas,  $\vec{G}$  contient trois cycles qui ne peuvent pas tous simultanément être des circuits. Il existe donc au moins un sommet  $v_i$  de degré 3 tel que  $\vec{G} \setminus v_i$  ne contient pas le circuit  $\vec{C}_5$  comme sous-graphe induit. En choisissant  $v_i$  au lieu de  $u$  nous nous ramenons au cas 4.(a).

ii.  $d_{\vec{G}}(u) \geq 5$ .

Dans ce cas,  $ex(\vec{G}) \geq 4$ . Si  $\vec{G} \setminus u$  est connexe, alors nous avons  $ex(\vec{G} \setminus u) = k - d_{\vec{G}}(u) + 1$  et comme, d'après le Théorème 3.2.8,  $\vec{G} \setminus u$  est  $T_5$ -coloriable nous avons au moins  $k + 3 - 5 = k - 2 = d_{\vec{G}}(u) - 2 \geq \lceil d_{\vec{G}}(u)/2 \rceil$  couleurs libres. On peut étendre toute  $T_5$ -coloration de  $\vec{G} \setminus u$  à un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un graphe bien orienté à  $k + 3$  sommets comme dans le cas 4.(a). Sinon, il existe un sommet  $v$  dans  $\vec{G} \setminus u$  appartenant à  $\vec{C}_5$  tel que  $d_{\vec{G}}(v) \geq 3$ ,  $\vec{G} \setminus v$  est connexe et  $ex(\vec{G} \setminus v) \geq 2$ . En choisissant  $v$  au lieu de  $u$  nous nous ramenons encore au cas 4.(a).

5. Supposons maintenant qu'aucun des cas précédents ne se produit. Comme  $\vec{G}$  n'est pas une forêt,  $\vec{G}$  contient une composante 2-arête-connexe  $G^*$  telle que  $G^*$  et  $\vec{G} - G^*$  sont reliés au plus par une arête. Si  $G^*$  est une composante connexe de  $\vec{G}$  ou si  $\vec{G}$  lui-même est 2-arête-connexe (dans ce cas  $\vec{G}^* = \vec{G}$ ), alors il n'existe aucune arête reliant  $G^*$  et  $\vec{G} - G^*$ . Sinon, nous notons  $w$  le seul sommet de  $G^*$  adjacent à un sommet de  $\vec{G} - G^*$ .

Le graphe  $G^*$  satisfait les faits suivants :

**Fait 3.2.13**  $ex(G^*) > 1$ .

**Preuve.** Supposons que  $ex(G^*) = 1$ ; en d'autres termes,  $G^*$  est un cycle (rappelons que  $\vec{G} = P(\vec{G})$ ). Comme le cas 1 ne se produit pas  $G^*$  doit être un circuit. Comme le cas 2 ne se produit pas  $G^*$  doit être un circuit de longueur au moins 5; mais dans ce cas, nous avons le cas 3 et ceci contredit notre hypothèse. Donc,  $ex(G^*) > 1$ . ■

**Fait 3.2.14** *Le graphe  $G^*$  est pair (un graphe est dit pair si tous ses sommets sont de degré pair).*

**Preuve.** Comme le cas 4 ne se produit pas, le seul sommet de  $G^*$  qui peut être de degré impair dans  $\vec{G}$  est le sommet  $w$ . Comme le nombre des sommets de degré impair dans un graphe est pair, on obtient que le degré de  $w$  dans  $G^*$  est nécessairement pair, donc  $G^*$  est pair. ■

**Fait 3.2.15** *Si le sommet  $w$  existe et  $d_{G^*}(w) = 2$ , alors tout cycle de  $G^*$  contient au moins deux ( $\geq 4$ )-sommets à l'exception éventuelle d'un seul cycle  $C$  contenant  $w$ ; dans ce cas,  $C$  contient un ( $\geq 4$ )-sommets.*

**Preuve.** Imaginons le contraire; en d'autres termes, supposons que  $G^*$  contient un cycle de longueur  $\ell$  contenant  $\ell - 1$  2-sommets (distincts de  $w$  s'il existe un tel sommet). Comme ci-dessus, ce cycle doit être un circuit dans  $G^*$  de longueur au moins  $\ell \geq 5$  car les cas 1 et 2 ne se produisent pas. Comme le cas 3 ne se produit pas nous avons  $\ell \leq 3$  et c'est une contradiction. Nous obtenons donc que tout cycle dans  $G^*$  contient au moins deux ( $\geq 4$ )-sommets, sauf éventuellement le cycle contenant le sommet  $w$ . ■

Maintenant, en appliquant le Lemme 3.2.11 à  $G^*$ , nous obtenons que  $G^*$  contient au moins un ( $\geq 4$ )-sommets  $u$ ,  $u \neq w$  si  $w$  existe, tel que  $G^* \setminus u$  est connexe. Clairement,  $ncc(\vec{G}) = ncc(\vec{G} \setminus u)$  et donc :

$$\begin{aligned} ex(\vec{G} \setminus u) &= |A(\vec{G} \setminus u)| - |V(\vec{G} \setminus u)| + ncc(\vec{G} \setminus u) \\ &= |A(\vec{G})| - d_{\vec{G}}(u) - |V(\vec{G})| + 1 + ncc(\vec{G}) = ex(\vec{G}) - d_{\vec{G}}(u) + 1. \end{aligned}$$

Nous avons maintenant deux sous-cas à considérer :

(a)  $ex(\vec{G} \setminus u) \neq 1$  ou  $\vec{G}$  ne contient pas le circuit  $\vec{C}_5$  comme un sous-graphe induit.

Par hypothèse de récurrence nous avons  $\vec{\chi}(\vec{G} \setminus u) \leq k - d_{\vec{G}}(u) + 4$ . Dans ce cas, tout homomorphisme de  $(\vec{G} \setminus u)$  vers un tournoi bien orienté peut être étendu à un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un tournoi bien orienté à  $k + 3$  sommets en utilisant la même technique que dans le cas 4.(a), car nous avons au moins  $d_{\vec{G}}(u) - 1 > \lceil d_{\vec{G}}(u)/2 \rceil$  couleurs libres.

(b)  $ex(\vec{G} \setminus u) = 1$  et  $\vec{G} \setminus u$  contient le circuit  $\vec{C}_5$  comme un sous-graphe induit.

Nous considérons encore deux sous-cas :

i.  $d_{\vec{G}}(u) = 4$ .

Dans ce cas,  $ex(\vec{G}) = 4$ . Il est facile de vérifier que soit le sommet  $u$  peut être choisi parmi les sommets de  $\vec{C}_5$  de telle façon que l'on n'arrive pas à cette situation, soit  $\vec{G}$  est de la forme représentée par la Figure 3.15 (une arête non orientée peut avoir l'une des deux orientations possibles).

Dans ce cas, d'après le Théorème 3.2.8, il existe un homomorphisme  $\phi$  de  $\vec{G} \setminus u$  vers le tournoi bien orienté  $T_5$ . Nous avons donc deux couleurs libres, disons  $x$  et  $y$ . Soient  $\phi(v) = a$  et  $\phi(w) = b$ ; on peut étendre  $\phi$  à un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un tournoi bien orienté à 7 sommets en posant  $\phi(u) = c$  pour une couleur  $c \in V(T_5)$ , distincte de  $a$  et de  $b$ , et  $\phi(u_i) = x$  (respectivement  $\phi(u_i) = y$ ),  $1 \leq i \leq 4$ , si  $uu_i \in A(\vec{G})$  (respectivement si  $u_iu \in A(\vec{G})$ ). Notons que  $uv$  et  $uw$  sont deux chemins et que les sommets  $v'$ ,  $w'$  peuvent être recoloriés avec deux couleurs dans  $V(T_5)$  distinctes de

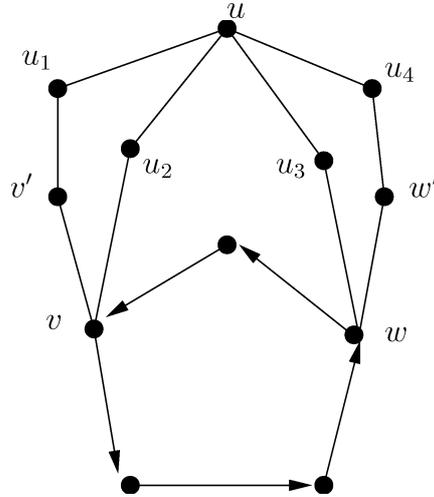


FIG. 3.15 – Configuration pour le cas 5.(b).i du Théorème 3.2.12

$c$ , car d'après la définition de  $T_5$ , il existe deux choix de couleurs possibles pour colorier chacun de ces sommets avec une couleur dans  $V(T_5)$ .

ii.  $d_{\vec{G}}(u) \geq 6$ .

Nous avons alors  $ex(\vec{G}) \geq 6$ . Dans ce cas, tout homomorphisme de  $\vec{G} \setminus u$  vers  $T_5$  peut être étendu à un homomorphisme de  $\vec{G}$  vers un tournoi bien orienté à  $k+3$  sommet en utilisant la même technique que dans le cas 4.(a), car nous avons au moins  $d_{\vec{G}}(u) - 2 > \lceil d_{\vec{G}}(u)/2 \rceil$  couleurs libres. ■

Nous avons donné dans les Théorèmes 3.2.4, 3.2.8 et 3.2.9 une borne optimale pour le nombre chromatique orienté des graphes d'excès 0, 1 et 2. Nous prouvons tout d'abord que la borne donnée par le Théorème 3.2.12 est optimale pour les graphes d'excès 3 et 4, ensuite nous donnons une borne inférieure générale pour les graphes d'excès  $k$ .

**Proposition 3.2.16** *Il existe des graphes d'excès 3 (respectivement 4) et de nombre chromatique orienté 6 (respectivement 7).*

**Preuve.** Des exemples de tels graphes sont représentés par la Figure 3.16. Dans les deux cas, toute paire de sommets est reliée par un chemin de longueur au plus 2; le nombre chromatique orienté de ces graphes est donc égal au nombre de leurs sommets. ■

Concernant la borne inférieure générale pour les graphes d'excès  $k$ , nous avons le théorème suivant :

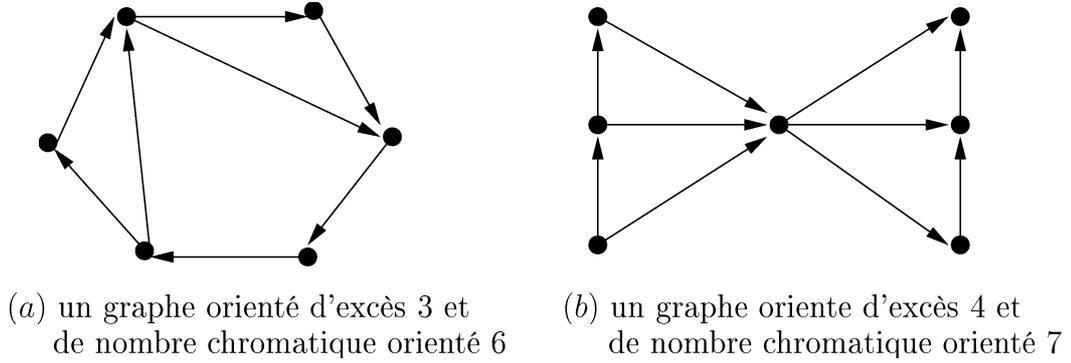


FIG. 3.16 – Configurations pour la Proposition 3.2.16

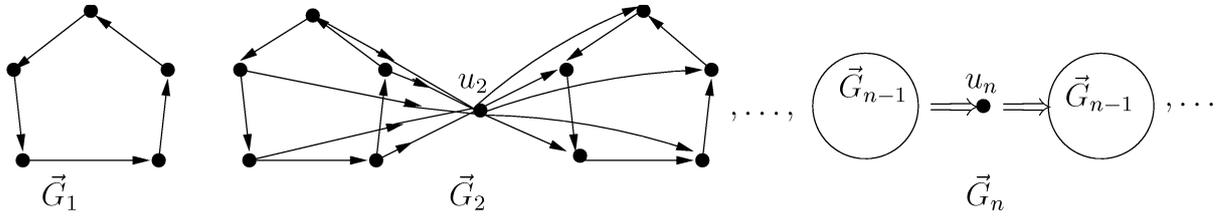


FIG. 3.17 – Famille de graphes pour la preuve du Théorème 3.2.17

**Théorème 3.2.17** *Pour tout  $n \geq 1$  et tout  $k$ ,  $k \geq 3 \times 2^{n-1}(2n-3) + 4$ ,  $\vec{\chi}(\xi_k) \geq 3 \times 2^n - 1$ .*

**Preuve.** Soient  $\vec{G}_1 = \vec{C}_5$  et  $\vec{G}_n$ ,  $n \geq 2$ , le graphe orienté obtenu à partir de deux copies distinctes de  $\vec{G}_{n-1}$  et d'un nouveau sommet  $u_n$  relié par des arcs dirigés de  $u_n$  vers tous les sommets de la première copie et de tous les sommets de la deuxième copie vers  $u_n$  (voir Figure 3.17).

Cette suite de graphes orientés satisfait :

$$\begin{cases} ex(\vec{G}_1) = 1 \text{ et } \vec{\chi}(\vec{G}_1) = 5 \\ \forall n \geq 2, ex(\vec{G}_n) = 2(ex(\vec{G}_{n-1}) + \vec{\chi}(\vec{G}_{n-1}) - 1) \text{ et } \vec{\chi}(\vec{G}_n) = 2\vec{\chi}(\vec{G}_{n-1}) + 1 \end{cases}$$

En résolvant ce système d'équations nous obtenons :

$$ex(\vec{G}_n) = 3 \times 2^{n-1}(2n-3) + 4, \quad n \geq 1, \text{ et } \vec{\chi}(\vec{G}_n) = 3 \times 2^n - 1.$$

Nous avons donc :

$$\forall k \geq 3 \times 2^{n-1}(2n-3) + 4, \quad \vec{\chi}(\vec{G}_n) \geq 3 \times 2^n - 1.$$

■

### 3.3 Graphes planaires 2-extérieurs sans triangle

Nous allons dans cette section déterminer une borne supérieure et une borne inférieure du nombre chromatique orienté de la famille des graphes planaires 2-extérieurs sans triangle.

Nous savons que le nombre chromatique orienté de la famille des graphes planaires est au plus 80 [55] et que le nombre chromatique orienté de la famille des graphes planaires extérieurs est égal à 7 [57]. Concernant la famille des graphes planaires sans triangle, Ochem en [53] a montré que le nombre chromatique orienté de cette famille de graphes est au plus 59. Mais aucune borne satisfaisante n'est connue pour les graphes planaires  $k$ -extérieurs,  $k > 1$ , qui sont une généralisation des graphes planaires extérieurs. Nous nous sommes intéressé à l'étude du nombre chromatique orienté de la famille des graphes planaires 2-extérieurs, mais ceci étant difficile, nous avons commencé par l'étude du nombre chromatique orienté de la famille des graphes planaires  $k$ -extérieurs sans triangle pour  $k = 1, 2$ .

Nous introduisons dans un premier temps les graphes planaires  $k$ -extérieurs. Ensuite, nous présentons le graphe cible  $QR_{27}$  et nous déterminons une borne supérieure du nombre chromatique orienté de la famille des graphes planaires 2-extérieurs sans triangle. Finalement, nous terminons cette section en déterminant une borne inférieure du nombre chromatique orienté de cette famille de graphes.

Un graphe *planaire 1-extérieur* est un graphe planaire extérieur. Un graphe *planaire 2-extérieur*  $G$  est un graphe planaire tel que le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en enlevant les sommets appartenant à la face extérieure de  $G$  est 1-extérieur. De même, un graphe *planaire  $k$ -extérieur* est un graphe planaire tel que le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en enlevant les sommets appartenant à la face extérieure de  $G$  est  $(k - 1)$ -extérieur.

Soit  $\mathcal{P}^k$ ,  $k \geq 1$ , la famille des graphes planaires  $k$ -extérieurs; il est clair que pour tout  $i$  et  $j$ ,  $1 \leq i < j$ ,  $\mathcal{P}^i \subset \mathcal{P}^j$ .

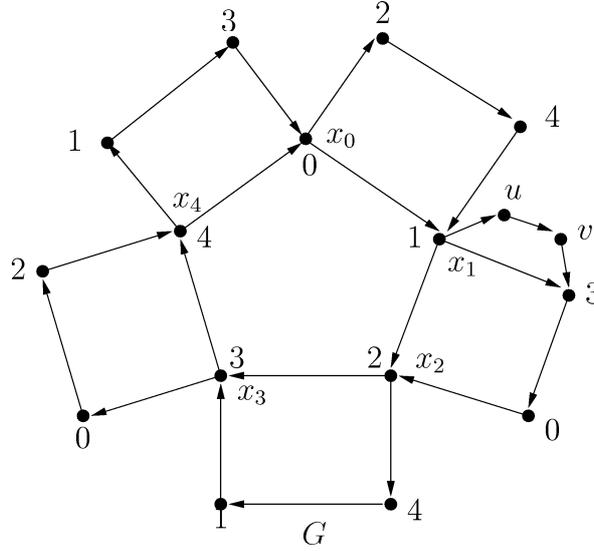
Concernant les graphes planaires extérieurs sans triangle, clairement le nombre chromatique orienté de cette famille de graphes est au plus 7. En ce qui concerne la borne inférieure du nombre chromatique orienté de cette famille de graphes, nous allons montrer que cette borne est au moins 6.

**Proposition 3.3.1** *Il existe des graphes planaires extérieurs sans triangle de nombre chromatique orienté au moins 6.*

**Preuve.** Considérons le graphe  $G$  représenté par la Figure 3.18. Le graphe  $G$  est clairement planaire extérieur sans triangle. Nous allons montrer que  $\vec{\chi}(G) \geq 6$ .

Comme  $G$  contient le circuit à 5 sommets  $\vec{C}_5$  comme sous-graphe induit (sous-graphe induit par les sommets  $x_0, x_1, \dots, x_4$ ), nous avons  $\vec{\chi}(G) \geq 5$ . Soit  $c$  un homomorphisme de  $G$  vers un tournoi  $T$ ; montrons que  $|T| \geq 6$ .

Supposons que  $|T| = 5$  et soit  $G' = G \setminus \{u, v\}$ . Il est clair que pour tout  $i$ ,  $0 \leq$

FIG. 3.18 – Un graphe planaire extérieur sans triangle  $G$  avec  $\vec{\chi}(G) \geq 6$ 

$i \leq 4$ , le sommet  $x_i$  possède deux successeurs et deux prédécesseurs qui doivent avoir des couleurs distinctes. Donc, tout sommet du tournoi  $T$  doit avoir deux successeurs et deux prédécesseurs, et le seul tournoi ayant cette propriété est le tournoi  $T_5$  (voir Figure 3.10). Ainsi,  $c$  est une  $T_5$ -coloration de  $G$ . Comme  $G'$  contient un circuit  $\vec{C}_5$ , il existe une seule  $T_5$ -coloration de  $G'$ , à isomorphisme près. On peut supposer sans perte de généralité que la  $T_5$ -coloration de  $G'$  représentée par la Figure 3.18 est la coloration induite par  $c$ .

Dans ce cas, nous devons avoir  $c(u) = 2$  et l'hypothèse  $c(v) \in V(T_5)$  nous mène à une contradiction. Donc,  $|T| \geq 6$ ; ainsi,  $\vec{\chi}(G) \geq 6$ . ■

Soit  $G$  un graphe; pour tout sommet  $u$  nous notons  $N_G^1(u)$  l'ensemble des voisins de degré 1 de  $u$  dans  $G$  :  $N_G^1(u) := \{x \in N_G(u) \mid d_G(x) = 1\}$ .

Nous utiliserons le lemme suivant dans la preuve du théorème principal de cette section :

**Lemme 3.3.2** *Soit  $G$  un graphe planaire extérieur sans triangle non trivial.  $G$  satisfait une des conditions suivantes :*

1.  $G$  contient un  $(\geq 2)$ -sommet  $u$  tel que  $|N_G^1(u)| \geq d_G(u) - 1$ ;
2.  $G$  contient un  $(\geq 3)$ -sommet  $u$  appartenant à un cycle tel que  $|N_G^1(u)| \geq d_G(u) - 2$ ;
3.  $G$  contient deux 2-sommets adjacents  $u$  et  $v$  qui appartiennent à un cycle.

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas où  $G$  est connexe. Nous supposons que  $G$  ne satisfait pas les conditions 1 et 2. Nous prouvons qu'il satisfait alors la condition 3. Comme  $G$  ne satisfait ni la condition 1 et ni la condition 2,  $G$  contient

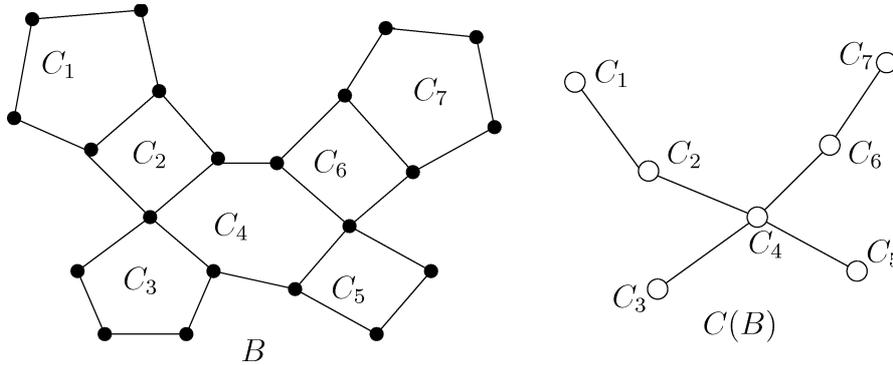


FIG. 3.19 – Un graphe planaire extérieur 2-connexe  $B$  avec  $C(B)$

au moins un cycle et tout  $(\geq 2)$ -sommet  $v$  de  $G$  vérifie : soit  $d_G(v) - |N_G^1(v)| \geq 3$ , soit  $d_G(v) - |N_G^1(v)| = 2$  et  $v$  n'appartient à aucun cycle de  $G$ .

Soit  $G'$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant les sommets de degré 1. Comme  $G$  ne satisfait pas la condition 3, tout 2-sommet appartenant à un cycle de  $G'$  est un 2-sommet de  $G$ . On peut donc supposer sans perte de généralité que  $G$  ne contient aucun sommet de degré 1.

Considérons le graphe-bloc  $B(G)$  de  $G$ . Comme  $G$  est connexe, d'après la Proposition 1.5.4,  $B(G)$  est un arbre.

Soit  $B$  un sommet dans  $B(G)$  tel que  $d_{B(G)}(B) \leq 1$ . Comme  $\delta(G) \geq 2$ ,  $B$  est un bloc contenant au moins un cycle.

Maintenant, nous considérons deux cas :

1.  $B$  est un cycle.

Comme  $g(G) \geq 4$ ,  $B$  est de longueur au moins 4. Ainsi,  $B$  contient au moins deux sommets adjacents  $u$  et  $v$  tels que  $d_G(u) = d_G(v) = 2$ .

2.  $B$  contient au moins deux cycles.

Dans ce cas, nous considérons le graphe  $C(B)$  avec :

- $V(C(B)) := \{C_i \mid C_i \text{ est un cycle induit sans corde dans } B\}$  ;
- $E(C(B)) := \{C_i C_j \mid |E(C_i) \cap E(C_j)| = 1\}$  (voir par exemple la Figure 3.19).

Remarquons que comme  $G$  est planaire extérieur,  $|E(C_i) \cap E(C_j)| \leq 1$  pour tout  $i \neq j$ .

Comme  $G$  est un graphe planaire extérieur connexe,  $C(G)$  est un arbre. Comme  $B$  contient au moins deux cycles,  $C(B)$  contient au moins deux feuilles.

Soit  $C$  une feuille dans  $C(B)$  ne contenant aucun point d'articulation de  $G$ . Comme  $g(G) \geq 4$ ,  $C$  est un cycle de longueur au moins 4. Ainsi,  $C$  contient au moins deux sommets adjacents  $u$  et  $v$  tels que  $d_G(u) = d_G(v) = 2$ .

■

Nous allons maintenant présenter le graphe cible  $QR_{27}$ .

Soit  $p$  un entier premier,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ; le tournoi  $QR_p$ , construit à partir des résidus quadratiques non nuls de  $p$ , se définit ainsi :

- $V(QR_p) = \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,
- $A(QR_p) = \{ij \mid j - i \text{ est un résidu quadratique non nul de } p \pmod{p}\}$ .

Soit  $G$  un graphe orienté; un *sous-graphe  $k$ -clique* de  $G$  est une séquence de  $k$  sommets distincts  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  de  $G$  telle que le sous-graphe induit par ces sommets est un tournoi.

**Définition 3.3.3** Un *vecteur orienté* de taille  $n$  est une séquence  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  dans  $\{0, 1\}^n$ ; soit  $G$  un graphe orienté et  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  une séquence de sommets distincts dans  $G$ . Un sommet  $y$  de  $G$  est un  $\alpha$ -*successeur* de  $X$  si nous avons  $\alpha_i = 1 \implies x_i y \in A(G)$  et  $\alpha_i = 0 \implies y x_i \in A(G)$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Définition 3.3.4** Nous disons qu'un graphe orienté  $H$  satisfait la propriété  $P_{k,n}$  pour  $k, n > 0$  si pour tout sous-graphe  $m$ -clique  $H[x_1, x_2, \dots, x_m]$ ,  $1 \leq m \leq k$ , dans  $H$  et tout vecteur orienté  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  de taille  $m$ , il existe au moins  $n$  sommets disjoints  $y_1, y_2, \dots, y_n$  dans  $H$  qui sont des  $\alpha$ -successeurs de  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

La propriété  $P_k$  introduite par Sopena [57] correspond à la propriété que nous notons  $P_{k,1}$ . Il a prouvé dans cet article que si  $G$  est un graphe orienté satisfaisant la propriété  $P_k$ , alors tout  $k$ -arbre partiel orienté est  $G$ -coloriable. Pour tout  $k > 0$ , il a construit par une méthode combinatoire un graphe à  $(k+1) \times 2^k$  sommets satisfaisant la propriété  $P_k$ . Ainsi, pour tout  $k$ , le nombre chromatique orienté de la famille de  $k$ -arbres partiels est au plus  $(k+1) \times 2^k$ .

Notons que tout graphe orienté satisfaisant la propriété  $P_{k,n}$  satisfait aussi la propriété  $P_{k',n}$  pour tout  $k' < k$ . Par convention, on suppose que tout graphe à au moins un sommet satisfait la propriété  $P_{0,n}$  et que le graphe vide (d'ordre 0) ne la satisfait pas.

Rappelons que pour une puissance  $q = p^n \equiv 3 \pmod{4}$  d'un nombre premier  $p$ ,  $GF(q)$  désigne le *champs de Galois* à  $q$  éléments. Le graphe orienté  $QR_q$  ayant pour sommets les éléments de  $GF(q)$  et pour arcs les couples  $ij$  tels que  $j - i$  est un résidu quadratique non nul de  $GF(q)$ , est un tournoi à  $q$  sommets [35]. En particulier, dans le cas où  $q = 3^3$  le Tableau 3.1 représente les sommets de  $QR_{27}$  et les éléments de  $GF(27)$  correspondant à ces sommets et nous avons :

**Lemme 3.3.5** *Le tournoi  $QR_{27}$  possède la propriété  $P_{3,2}$ .*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord que l'ordre des sommets dans une 3-clique  $(s_1, s_2, s_3)$  est sans importance. De plus, comme tout cycle à trois sommets contient un chemin orienté de longueur 2, il suffit de considérer les séquences  $(s_1, s_2, s_3)$  telles que  $s_1 s_2$  et  $s_2 s_3$  sont des arcs dans  $QR_{27}$ , c'est-à-dire pour  $v \in \{02, 05, 06, 07, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22\}$ .

No	element	(mod 3, $x^3 - x + 1$ )	No	element	(mod 3, $x^3 - x + 1$ )
0	0	0	14	$x^{14}$	$-x$
01	$x^1$	$x$	15	$x^{15}$	$-x^2$
02	$x^2$	$x^2$	16	$x^{16}$	$1 - x$
03	$x^3$	$-1 + x$	17	$x^{17}$	$x - x^2$
04	$x^4$	$-x + x^2$	18	$x^{18}$	$1 - x + x^2$
05	$x^5$	$-1 + x - x^2$	19	$x^{19}$	$-1 - x - x^2$
06	$x^6$	$1 + x + x^2$	20	$x^{20}$	$1 + x - x^2$
07	$x^7$	$-1 - x + x^2$	21	$x^{21}$	$1 + x^2$
08	$x^8$	$-1 - x^2$	22	$x^{22}$	$-1 - x$
09	$x^9$	$1 + x$	23	$x^{23}$	$-x - x^2$
10	$x^{10}$	$x + x^2$	24	$x^{24}$	$1 - x - x^2$
11	$x^{11}$	$-1 + x + x^2$	25	$x^{25}$	$1 - x^2$
12	$x^{12}$	$-1 + x^2$	26	$x^{26} = x^0$	1
13	$x^{13}$	$-1$			

TAB. 3.1 – Tableau des sommets de  $QR_{27}$  et des polynômes correspondants dans  $GF(27)$ 

Pour tout arc  $ij$  dans  $QR_{27}$ , l'application  $x \rightarrow \frac{x-i}{j-i}$  est un automorphisme de  $QR_{27}$  qui envoie  $ij$  sur  $(0)(26)$ . Il suffit donc de vérifier la propriété  $P_{3,2}$  sur les séquences de la forme  $(0, 26, v)$  telles que  $01 \leq v \leq 25$  et  $v - 26$  est un résidu quadratique de  $GF(27)$ .

Nous notons  $[v_1, v_2, v_3]$  si et seulement si  $v_1 \neq v_2$  et il existe des automorphismes de  $QR_{27}$  envoyant  $(0, 26, v_1)$  sur  $(v_2, 0, 26)$  et  $(26, v_3, 0)$ . On peut facilement vérifier que si  $[v_1, v_2, v_3]$  et si  $(0, 1, v_1)$  satisfait la propriété  $P_{3,2}$ , alors  $(0, 26, v_2)$  et  $(0, 26, v_3)$  satisfont la propriété  $P_{3,2}$ . Pour le tournoi  $QR_{27}$  nous avons [05, 19, 15] et [07, 21, 11]. Pour toutes les séquences de la forme  $(0, 26, v)$  avec  $v \in \{02, 05, 06, 07, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22\} \setminus \{11, 15, 19, 21\}$  et pour tout vecteur orienté, deux  $\alpha$ -successeurs sont donnés dans le Tableau 3.2. ■

Nous définissons un ordre partiel  $\prec$  sur l'ensemble des graphes comme suit :

- Si  $G_1$  est un sous-graphe strict de  $G_2$ , alors  $G_1 \prec G_2$ ;
- si  $n_3(G_1) < n_3(G_2)$ , alors  $G_1 \prec G_2$  (où  $n_3(G)$  est le nombre de  $(\geq 3)$ -sommets dans  $G$ ).

Remarquons que cet ordre partiel est bien défini : si  $G_1$  est un sous-graphe strict de  $G_2$ , alors  $n_3(G_1) \leq n_3(G_2)$ . Donc  $\prec$  est une extension linéaire partielle de l'ordre partiel "sous-graphe" sur l'ensemble des graphes.

**Théorème 3.3.6** *Pour tout graphe planaire 2-extérieur orienté sans triangle  $G$ ,  $G \rightarrow QR_{27}$  et donc  $\vec{\chi}(G) \leq 27$ .*

**Preuve.** Supposons le théorème faux et soit  $G$  un plus petit contre-exemple selon  $\prec$ . Nous

$(0,26,v)$	$\{0,0,0\}$	$\{0,0,1\}$	$\{0,1,0\}$	$\{0,1,1\}$	$\{1,0,0\}$	$\{1,0,1\}$	$\{1,1,0\}$	$\{1,1,1\}$
$(0,26,02)$	01 03	09 17	05 11	07 13	10 12	04 08	06 14	16 18
$(0,26,05)$	01 23	03 09	07 11	13 15	10 12	04 08	16 18	02 06
$(0,26,06)$	03 09	01 17	05 07	11 13	04 10	08 12	14 16	02 22
$(0,26,07)$	03 09	01 17	13 21	05 11	12 20	04 08	02 14	06 16
$(0,26,13)$	01 03	17 23	05 15	07 11	08 20	04 10	02 06	14 16
$(0,26,14)$	17 23	01 03	05 11	07 19	08 12	04 10	18 22	02 06
$(0,26,16)$	17 25	01 03	07 13	05 11	10 20	04 08	02 14	06 18
$(0,26,18)$	01 09	03 23	15 19	05 07	04 12	08 10	02 16	06 14
$(0,26,22)$	23 25	01 03	05 13	07 11	04 08	10 12	06 16	02 14

TAB. 3.2 – Tableau des  $\alpha$ -successeurs des séquences de la forme  $(0, 26, v)$ 

allons prouver plusieurs Faits pour montrer qu'un tel graphe ne peut pas exister.

**Fait 3.3.7**  *$G$  ne peut contenir aucune des configurations représentées par la Figure 3.20 comme sous-graphe induit.*

**Preuve.**

1. Configuration (1).

Soit  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ , il existe un homomorphisme  $h$  de  $G'$  vers  $QR_{27}$ . Grâce au Lemme 3.3.5  $h$  peut facilement être étendu à  $G$ .

2. Configuration (2).

Soit  $G' = G \setminus v$ . D'après la minimalité de  $G$ , il existe un homomorphisme  $h$  de  $G'$  vers  $QR_{27}$ . On peut supposer grâce au Lemme 3.3.5 que  $h(w) \neq h(w')$  et  $h$  peut être étendu à  $G$ .

3. Configuration (3).

Comme  $G$  ne contient pas les configurations 3.20(1) et 3.20(2),  $u_i$  est de degré au moins 3 pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

Soient  $K$  un graphe orienté et  $K^R$  le graphe défini par  $V(K^R) = V(K)$  et  $A(K^R) = \{xy \mid yx \in A(K)\}$ . Comme l'application  $f : V(QR_p) \rightarrow V(QR_p^R)$  définie pour tout  $x$  par  $f(x) = -x \pmod{27}$ , est un isomorphisme,  $QR_p$  et  $QR_p^R$  sont isomorphes. Donc,  $G^R$  est aussi un contre-exemple pour le théorème. On peut donc supposer sans perte de généralité que  $d_G^+(v) < d_G^-(v)$ .

Supposons d'abord  $d_G^+(v) = 0$ . Soit  $G' = G \setminus v$ ; d'après la minimalité de  $G$ , il existe un homomorphisme  $h$  de  $G'$  vers  $QR_{27}$  et  $h$  peut être étendu à  $G$  grâce au Lemme 3.3.5.

Supposons maintenant  $d_G^+(v) = 1$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $N_G^+(v) = \{u_1\}$  et  $N_G^-(v) = \{u_2, u_3\}$ . Soit  $G'$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en enlevant le sommet  $v$  et en reliant  $u_1$  à  $u_2$  et  $u_1$  à  $u_3$  par un chemin de longueur 2. Il est facile de vérifier que  $G'$  est encore un graphe planaire 2-extérieur sans triangle.

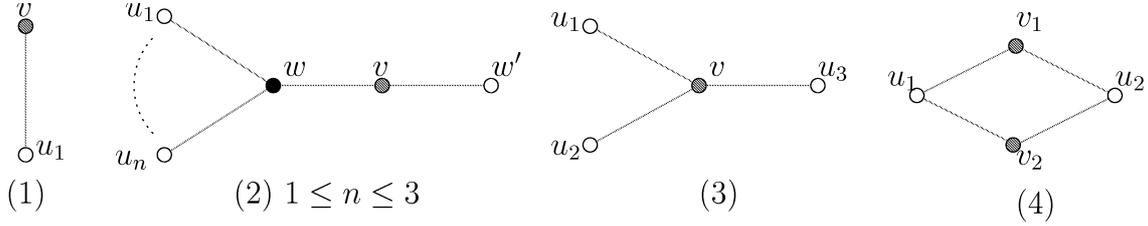


FIG. 3.20 – Configuration pour le Fait 3.3.7

Comme  $n_3(G') = n_3(G) - 1$ ,  $G' \prec G$ . D'après la minimalité de  $G$ , il existe un homomorphisme  $h$  de  $G'$  vers  $QR_{27}$ . Comme  $u_1$  et  $u_2$  (respectivement  $u_1$  et  $u_3$ ) sont reliés par un chemin de longueur 2,  $h(u_2) \neq h(u_1) \neq h(u_3)$ . Donc,  $h$  peut être étendu à  $G$  grâce au Lemme 3.3.5.

#### 4. Configuration (4).

Dans le cas où une seule des chaînes  $u_1v_1u_2$  ou  $u_1v_2u_2$  est un chemin, nous supposons sans perte de généralité que  $u_1v_2u_2$  est un chemin.

Soit  $G' \setminus v_1$ . D'après la minimalité de  $G$ , il existe un homomorphisme  $h$  de  $G'$  vers  $QR_{27}$ . Grâce au Lemme 3.3.5,  $h$  peut être étendu à  $G$ . ■

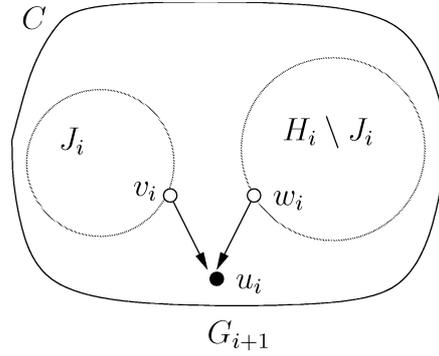
**Fait 3.3.8**  $G$  est 2-connexe et tout ensemble d'articulation d'ordre 2 de  $G$  consiste en deux sommets non adjacents.

**Preuve.** Comme le tournoi  $QR_{27}$  est transitif, alors  $G$  ne peut avoir de sommet d'articulation et donc  $G$  est 2-connexe; supposons en effet que  $v$  est un sommet d'articulation de  $G$ . Soient  $G_1, \dots, G_k$  les composantes connexes de  $G \setminus v$  et  $G'_i$  le sous-graphe de  $G$  induit par  $V(G_i) \cup \{v\}$ ,  $1 \leq i \leq k$ . D'après la minimalité de  $G$ , il existe un homomorphisme  $h_i$  de  $G'_i$  vers  $QR_{27}$ . Comme  $QR_{27}$  est transitif, on peut supposer que  $h_i(v) = h_j(v)$  pour tout  $i$  et  $j$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ . En combinant  $h_1, \dots, h_k$  on obtient un homomorphisme de  $G$  vers  $QR_{27}$ .

De même, comme  $QR_{27}$  est arc-transitif, alors  $G$  ne peut contenir un ensemble d'articulation consistant en deux sommets adjacents; supposons en effet qu'il existe un arc  $uv$  dans  $G$  tel que  $G \setminus \{u, v\}$  est non connexe. Soient  $G_1, \dots, G_r$  les composantes connexes de  $G \setminus \{u, v\}$  et  $G'_i$  le sous-graphe de  $G$  induit par  $V(G_i) \cup \{u, v\}$ ,  $1 \leq i \leq r$ . D'après la minimalité de  $G$ , il existe un homomorphisme  $h_i$  de  $G'_i$  vers  $QR_{27}$ . Comme  $QR_{27}$  est arc-transitif, on peut supposer que  $h_i(u) = h_j(u)$  et  $h_i(v) = h_j(v)$  pour tout  $i$  et  $j$ ,  $1 \leq i, j \leq r$ . En combinant  $h_1, \dots, h_r$  on obtient un homomorphisme de  $G$  vers  $QR_{27}$ . ■

Considérons désormais une représentation fixe de  $G$  sur le plan. On peut supposer grâce au Fait 3.3.8 que les sommets appartenant à la face extérieure de  $G$  induisent un cycle sans corde  $C$ .

Soit  $H = G \setminus C$ . Il est clair que  $H$  est un graphe planaire extérieur sans triangle. Dans

FIG. 3.21 – Construction du graphe  $G_{i+1}$  à partir du graphe  $G_i$ 

la suite, nous considérons que les représentations sur le plan de  $C$  et  $H$  sont induites par celle de  $G$ .

À partir de  $G$ , nous construisons le graphe planaire 2-extérieur sans triangle  $G^*$  de la façon suivante :

- si  $H$  est connexe,  $G^* = G$ ,
- sinon,  $H$  contient  $k$  composantes connexes,  $k \geq 2$ . Considérons la suite  $G_0, \dots, G_{k-1}$  avec  $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{k-1}$ , construite de la façon suivante :
  - $G_0 = G$ ,
  - Soient  $H_i = G_i \setminus C$ ,  $i \leq k-2$ , et  $J_i$  une composante connexe de  $H_i$ . Comme  $C$  est un cycle sans corde, il existe un sommet  $v_i$  de  $J_i$  et un sommet  $w_i$  de  $H_i \setminus J_i$  tel que le graphe  $G_{i+1}$ , obtenu en rajoutant un sommet  $u_i$  et 2 arcs  $v_i u_i$  et  $w_i u_i$  est planaire 2-extérieur sans triangle (voir Figure 3.21). Le graphe  $G_{i+1}$  ainsi obtenu est tel que  $H_{i+1} = G_{i+1} \setminus C$  possède une composante connexe de moins que  $H_i$ .

Ainsi, le graphe  $G_{k-1}$  est tel que  $H_{k-1} = G_{k-1} \setminus C$  est connexe; nous posons alors  $G^* = G_{k-1}$  et  $H^* = H_{k-1}$ .

Nous considérons la représentation sur le plan de  $G^*$  induite par celle de  $G$  et nous notons  $C^*$  la face extérieure de  $G^*$ . Nous avons clairement :

- $H^*$  est un graphe planaire extérieur sans triangle,
- aucun  $u_i$  n'appartient à un cycle dans  $H^*$ ,
- pour tout  $x \in V(C)$ ,  $d_G(x) = d_{G^*}(x)$ .

Nous disons qu'un sommet  $v$  est *spécial* si  $d_{H^*}(v) = 1$  ou  $v \in V(C)$ .

En considérant  $G^*$  nous allons montrer que  $G$  contient l'une des configurations représentées par la Figure 3.20, ce qui contredit le Fait 3.3.7. Nous commençons par les deux faits suivants que nous utiliserons dans le reste de la preuve :

**Fait 3.3.9** *Pour tout sommet  $v$  dans  $H^*$  avec  $d_{H^*}(v) = 1$  nous avons  $d_H(v) = 1$  et  $d_{G^*}(v) = d_G(v) = 2$ .*

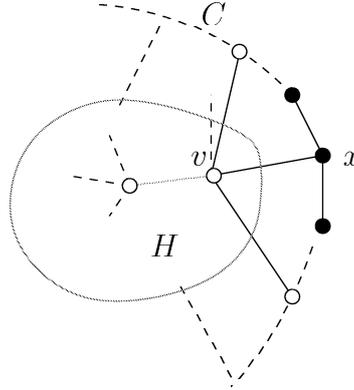


FIG. 3.22 – Configuration pour le Fait 3.3.9

**Preuve.** Comme pour tout sommet  $u \in V(G^*) \setminus V(G)$ ,  $d_{H^*}(u) = 2$ , nous avons  $v \in V(H)$  et  $d_H(v) \leq 1$ . Nous montrons tout d'abord que  $d_H(v) = 1$ . Supposons en effet que  $d_H(v) = 0$ . Comme  $G$  ne contient pas de sommet isolé ni de sommet de degré 1, nous avons  $d_G(v) = d_C(v) \geq 2$ , et comme  $G$  ne contient ni triangle ni la Configuration 3.20(4), nous avons  $d_G(v) = d_C(v) \geq 3$ . Dans ce cas, il est facile de vérifier qu'il existe un sommet  $x \in N_G(v) \cap V(C)$  tel que  $d_G(x) = 3$  (voir Figure 3.22), contrairement au Fait 3.3.7 (configuration 3.20(3)). On obtient donc  $d_H(v) = 1$  et  $d_{G^*}(v) = d_G(v)$ .

Nous montrons maintenant que  $d_G(v) = 2$ . D'après le Fait 3.3.7 (configuration 3.20(3))  $d_G(v) \neq 3$ . Supposons maintenant  $d_G(v) \geq 4$ ; dans ce cas  $|N_G(v) \cap V(C)| \geq 3$ . Comme précédemment, il existe un sommet  $x \in N_G(v) \cap V(C)$  tel que  $d_G(x) = d_C(x) + |N_G(x) \cap V(H)| = 2 + 1 = 3$  (voir Figure 3.22), ce qui contredit le Fait 3.3.7 (configuration 3.20(3)). Nous obtenons donc  $d_G(v) = 2$ . ■

**Fait 3.3.10** Soient  $v \in V(H)$  et  $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$  ( $k \geq 3$ ) les voisins de  $v$  ordonnés selon la représentation plane de  $G$ . Alors pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ , les sommets  $v_i, v_{i+1}$  et  $v_{i+2}$  (l'addition est considérée modulo  $k$ ) ne sont pas tous les trois des sommets spéciaux.

**Preuve.** Sans perte de généralité supposons que  $v_0, v_1$  et  $v_2$  sont des sommets spéciaux. Nous considérons les sommets  $w_0, w_1$  et  $w_2$  tels que :  $w_i = v_i$  si  $v_i \in C$ , et  $w_i$  est l'unique voisin de  $v_i$  dans  $C$  si  $d_H(v_i) = 1$  ( $w_i$  est unique par le Fait 3.3.9). Comme  $G$  ne contient ni un triangle, ni la configuration 3.20(4), nous avons  $w_0 \neq w_1 \neq w_2 \neq w_0$ . On obtient alors  $d_G(w_1) = 3$ , ce qui contredit le Fait 3.3.7 (configuration 3.20(3)). ■

Comme  $H^*$  est un graphe plane extérieur sans triangle et connexe, d'après le Lemme 3.3.2 nous avons quatre cas à considérer :

1.  $H^* = H$  est un sommet isolé.

Soit  $v$  le seul sommet de  $H$ . Comme pour tout sommet  $x$  dans  $C$  nous avons  $d_C(x) = 2$ , alors pour tout sommet  $u \in N_G(v)$ ,  $d_G(u) = 3$  et donc  $G$  contient la

configuration 3.20(3).

2.  $H^*$  contient un sommet  $u$  tel que  $|N_{H^*}^1(u)| \geq d_{H^*}(u) - 1 \geq 1$ .

Soit  $v$  un sommet dans  $N_{H^*}^1(u)$ . Comme  $d_{H^*}(v) = 1$ , d'après le Fait 3.3.9,  $d_H(v) = 1$ ,  $u \in H$  et  $d_G(v) = 2$ . Nous considérons maintenant deux sous-cas en fonction du degré  $d_G(u)$  de  $u$  :

- (a)  $d_G(u) \leq 4$ . Alors  $G$  contient un sommet de degré 2,  $v$ , adjacent à un sommet de degré au plus 4,  $u$ , ce qui correspond à la configuration 3.20(2).
- (b)  $d_G(u) \geq 5$ . Alors  $u$  est adjacent à au moins 4 sommets spéciaux consécutifs, ce qui contredit le Fait 3.3.10.

3.  $H^*$  contient un sommet  $u$  appartenant à un cycle de  $H^*$  tel que  $|N_{H^*}^1(u)| \geq d_{H^*}(u) - 2 \geq 1$ .

Dans ce cas, comme aucun sommet de  $H^* \setminus H$  n'appartient à un cycle dans  $H^*$ , nous avons  $u \in H$  et la preuve est similaire à celle du cas 2 (dans le cas où  $d_G(u) \geq 5$ ,  $u$  est adjacent à au moins 3 sommets spéciaux).

4.  $H^*$  contient deux 2-sommets adjacents  $u$  et  $v$  appartenant à un cycle de  $H^*$ .

Comme précédemment, aucun sommet de  $H^* \setminus H$  n'appartient à un cycle dans  $H^*$ , et donc  $u \in H$  et  $v \in H$ .

Dans ce cas, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $d_G(u) \leq d_G(v)$ . Nous considérons quatre sous-cas en fonction des degrés de  $u$  et de  $v$  dans  $G$  :

- (a)  $d_G(v) \geq 5$ ; alors  $v$  est adjacent à au moins 3 sommets spéciaux consécutifs, ce qui contredit le Fait 3.3.10.
- (b)  $d_G(v) \leq 4$  et  $d_G(u) = 2$ ; alors  $G$  contient la Configuration 3.20(2).
- (c)  $d_G(u) = 3$ , alors  $G$  contient la Configuration 3.20(3).
- (d)  $d_G(v) = d_G(u) = 4$ ; il existe alors un sommet  $x \in N_G(u) \cap V(C)$  tel que  $d_G(x) = 3$ , ce qui correspond à la Configuration 3.20(3) (voir Figure 3.23). ■

Nous allons maintenant déterminer une borne inférieure pour le nombre chromatique orienté des graphes planaires 2-extérieurs sans triangle.

**Proposition 3.3.11** *Il existe des graphes planaires 2-extérieurs sans triangle de nombre chromatique orienté au moins 11.*

**Preuve.** Considérons le graphe  $G$  représenté par la Figure 3.24. Nous allons prouver que  $\vec{\chi}(G) \geq 11$ . Le graphe  $G$  est clairement planaire sans triangle. Il est planaire 2-extérieur car  $G \setminus \{x, y, v\}$  est une forêt. Soit  $c$  un homomorphisme de  $G$  vers un graphe orienté  $H$ ; montrons que  $|H| \geq 11$ .

Comme deux sommets quelconques  $z_1$  et  $z_2$  appartenant à  $\{x, y, x_1, x_2, \dots, x_8\}$  sont reliés par un chemin de longueur au plus deux, nous avons  $c(z_1) \neq c(z_2)$ . On peut donc

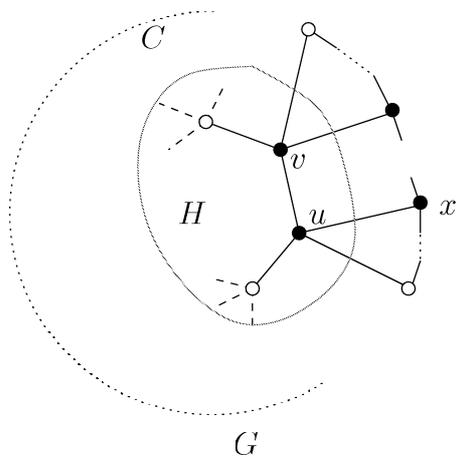


FIG. 3.23 – Configuration pour le cas 4( $d$ )

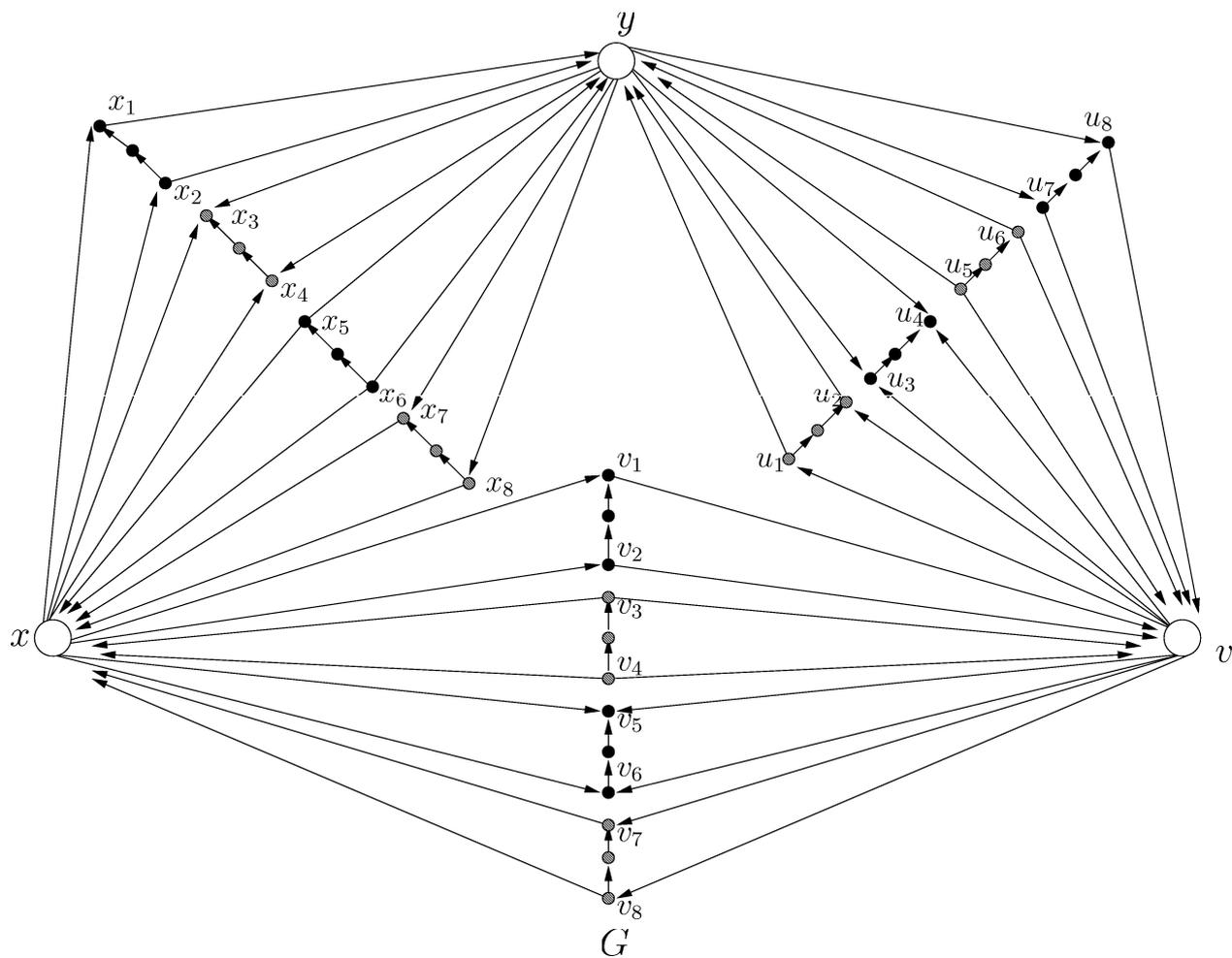
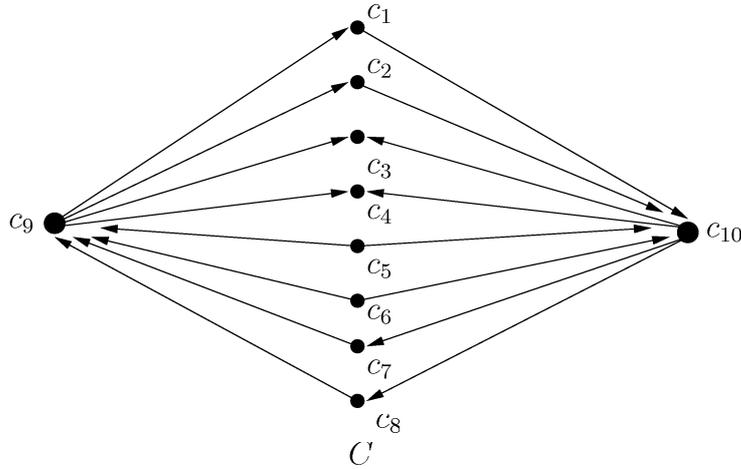


FIG. 3.24 – Un graphe planaire 2-extérieur sans triangle  $G$  avec  $\vec{\chi}(G) \geq 11$

FIG. 3.25 – Graphe des relations entre les couleurs  $c_1, c_2, \dots, c_{10}$ 

supposer sans perte de généralité que :

$$c(x_1) = c_1, c(x_2) = c_2, \dots, c(x_8) = c_8, c(x) = c_9 \text{ et } c(y) = c_{10}.$$

Supposons maintenant que  $|H| = 10$  et que  $c(v) = a$ . Comme  $yv_1v$  et  $vu_1x$  sont deux chemins de longueur deux,  $a \neq c_9$  et  $a \neq c_{10}$ . Donc,  $a \in \{c_1, c_2, \dots, c_8\}$ .

La figure 3.25 représente les relations entre les couleurs  $c_1, \dots, c_{10}$  dues à la coloration des sommets  $\{x_1, \dots, x_8, x, y\}$ . Dans la suite de la preuve, nous allons obtenir des contradictions uniquement basées sur ces relations.

Clairement le graphe  $C$  admet des automorphismes envoyant la couleur  $c_1$  sur les couleurs  $c_2, c_7$  ou  $c_8$ . De même, il admet des automorphismes envoyant la couleur  $c_3$  sur les couleurs  $c_4, c_5$  ou  $c_6$ . Ainsi, nous avons seulement deux cas à considérer :  $a = c_1$  ou  $a = c_3$ .

1.  $a = c_1$ .

Dans ce cas, on a  $c_{10} \in \{c(v_5), c(v_6)\}$  et  $c_9 \in \{c(u_5), c(u_6)\}$ . En effet les sommets  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq 8$ , doivent avoir des couleurs distinctes prises dans  $\{c_2, \dots, c_8, c_{10}\}$ . Comme seules  $c_2, c_3$  et  $c_4$  sont successeurs de  $c_9$ , la couleur  $c_{10}$  doit être utilisée sur  $\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ . Par ailleurs, comme la couleur  $c_{10}$  est successeur de la couleur  $c_1$ , la couleur  $c_{10}$  ne peut être utilisée que sur  $\{v_5, v_6\}$ . Le raisonnement pour  $c_9$  est identique.

Remarquons que pour tout  $i$  et  $j$ ,  $1 \leq i, j \leq 8$ ,  $v_i$  et  $v_j$  (respectivement  $u_i$  et  $u_j$ ) sont reliés par un chemin de longueur deux. Nous avons donc  $c(v_i) \neq c(v_j)$  (respectivement  $c(u_i) \neq c(u_j)$ ). En considérant l'orientation de  $G$  et les sommets déjà coloriés, nous

avons :

$$\begin{cases} \{c(v_1), c(v_2), c(v_5), c(v_6)\} = \{c_2, c_3, c_4, c_{10}\}, \\ \{c(v_3), c(v_4), c(v_7), c(v_8)\} = \{c_5, c_6, c_7, c_8\}, \\ \{c(u_1), c(u_2), c(u_5), c(u_6)\} = \{c_2, c_5, c_6, c_9\}, \\ \{c(u_3), c(u_4), c(u_7), c(u_8)\} = \{c_3, c_4, c_7, c_8\}. \end{cases} \quad (6)$$

Nous considérons trois cas en fonction des couleurs  $c(u_3)$  et  $c(u_4)$  :

(a)  $\{c(u_3), c(u_4)\} = \{c_3, c_4\}$ .

Dans ce cas,  $\{c(v_5), c(v_6)\} = \{c_3, c_4\}$  et  $c_{10} \in \{c(v_5), c(v_6)\}$ ; alors  $\{c(v_5), c(v_6)\} = \{c_3, c_4, c_{10}\}$ , ce qui est une contradiction.

(b)  $\{c(u_3), c(u_4)\} = \{c_7, c_8\}$ .

Alors :

$$\begin{aligned} \{c(v_7), c(v_8)\} = \{c_7, c_8\} &\implies \{c(v_3), c(v_4)\} = \{c_5, c_6\} \\ &\implies \{c(u_5), c(u_6)\} = \{c_5, c_6\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Comme  $c_9 \in \{c(u_5), c(u_6)\}$ , en considérant la relation (7) nous obtenons  $\{c(u_5), c(u_6)\} = \{c_5, c_6, c_9\}$ , ce qui est une contradiction.

(c)  $\{c(v_3), c(v_4)\} = \{c_3, c_7\}, \{c_3, c_8\}, \{c_4, c_7\}$  ou  $\{c_4, c_8\}$ .

Sans perte de généralité supposons que  $\{c(v_3), c(v_4)\} = \{c_3, c_7\}$ . Alors :

$$\begin{cases} c_7 \in \{c(v_7), c(v_8)\} \\ c_3 \in \{c(v_5), c(v_6)\}. \end{cases} \quad (8)$$

Comme  $c_{10} \in \{c(v_5), c(v_6)\}$ , en considérant la relation (8) nous obtenons  $\{c(v_5), c(v_6)\} = \{c_3, c_{10}\}$ . Alors :

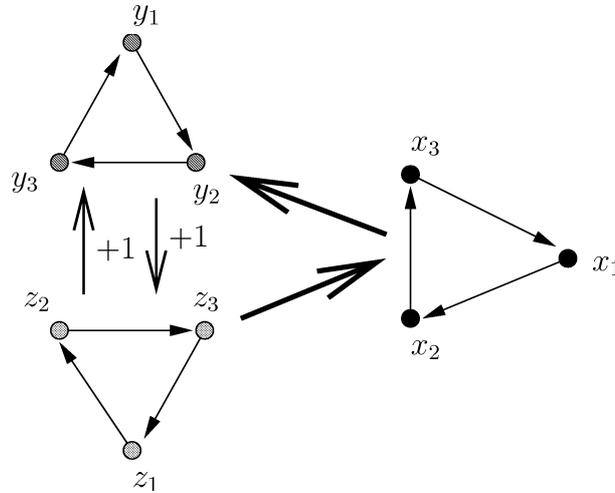
$$c_2 \in \{c(v_1), c(v_2)\} \implies c_2 \in \{c(u_5), c(u_6)\}. \quad (9)$$

Comme  $c_9 \in \{c(u_5), c(u_6)\}$ , en considérant la relation (9) on obtient  $\{c(u_5), c(u_6)\} = \{c_2, c_9\}$  et par conséquent  $\{c(u_1), c(u_2)\} = \{c_5, c_6\}$ . On obtient alors  $\{c(v_7), c(v_8)\} = \{c_5, c_6\}$ . En considérant ceci et la relation (9) on obtient  $\{c(v_7), c(v_8)\} = \{c_5, c_6, c_7\}$ , ce qui est encore une contradiction.

## 2. $a = c_3$ .

Le même raisonnement que dans le cas 1 ( $a = c_1$ ) nous permet de conclure que  $c_{10} \in \{c(v_5), c(v_6)\}$  et  $c_9 \in \{c(u_7), c(u_8)\}$ , ce qui est une contradiction car dans ce cas  $c_9c_{10}$  et  $c_{10}c_9$  sont des arcs de  $H$ .

Dans tous les cas l'hypothèse  $|H| \leq 10$  nous mène à une contradiction. Ainsi,  $\vec{\chi}(G) \geq 11$ . ■

FIG. 3.26 – Le graphe  $G_9$ 

### 3.4 Les graphes de Halin

Un graphe de Halin  $H$  est un graphe planaire constitué d'un arbre  $T(H)$  ayant au moins trois feuilles et d'un cycle  $C(H)$  reliant de façon planaire l'ensemble des feuilles de  $T(H)$ ; nous appellerons *sommet interne* un sommet de  $H$  n'appartient pas à  $C(H)$ .

En [61], Vignal a prouvé que tout graphe de Halin a un nombre chromatique orienté majoré par 11. Elle conjecture que le nombre chromatique orienté de la famille des graphes de Halin,  $\mathcal{H}$ , est égal à 8 et elle montre que cette conjecture est vraie pour une sous-classe de  $\mathcal{H}$ , notée  $\mathcal{H}'$ . Un graphe de Halin  $H$  appartient à  $\mathcal{H}'$  si tout sommet interne de  $T(H)$  est tel que tous ses fils sont des sommets internes de  $T(H)$  ou bien tous ses fils sont des feuilles de  $T(H)$ . La conjecture de Vignal reste à ce jour encore ouverte mais nous allons montrer que le nombre chromatique orienté de tout graphe de Halin est au plus 9, ce qui améliore la borne de 11 obtenue par Vignal.

Nous allons pour cela utiliser le tournoi construit à partir des résidus quadratiques non nuls de 7, noté  $QR_7$ , et le graphe orienté  $G_9$  construit comme suit. Soient  $C_x$ ,  $C_y$  et  $C_z$  trois circuits à 3 sommets ayant respectivement pour ensembles de sommets  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $\{y_1, y_2, y_3\}$ ,  $\{z_1, z_2, z_3\}$  et pour ensembles d'arcs  $\{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\}$ ,  $\{y_1y_2, y_2y_3, y_3y_1\}$ ,  $\{z_1z_2, z_2z_3, z_3z_1\}$ . Le graphe orienté  $G_9$  s'obtient à partir de  $C_x$ ,  $C_y$  et  $C_z$  en rajoutant tous les arcs dirigés de tout sommet de  $C_x$  vers tout sommet de  $C_y$ , tous les arcs dirigés de tout sommet de  $C_z$  vers tout sommet de  $C_x$ , de l'arc  $x_iy_{i+1} \pmod{3}$  et de l'arc  $y_ix_{i+1} \pmod{3}$  pour tout  $i = 1, 2, 3$  (voir Figure 3.26).

Le tournoi  $QR_7$  possède la propriété suivante :

**Observation 3.4.1** [15] *Le tournoi  $QR_7$  satisfait la propriété  $P_2$ .*

**Théorème 3.4.2** *Pour tout graphe de Halin  $H$ ,  $\vec{\chi}(H) \leq 9$ .*

**Preuve.** Soit  $H$  un graphe de Halin. Notons  $f_1$  une feuille de  $C(H)$ . On choisit un sens de rotation sur le cycle  $C(H)$  de longueur  $n$ ,  $n \geq 3$ , et on note  $f_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , la  $i$ -ième feuille rencontrée à partir de  $f_1$ . Notons  $p_i$  le père de la feuille  $f_i$ .

Notons  $T$  l'arbre sous-graphe de  $H$  induit par les sommets internes de  $H$ . D'après le Théorème 3.2.4,  $T$  est  $C_x$ -coloriable. Soit  $h'$  un homomorphisme de  $T$  vers  $C_x$ . Nous allons étendre  $h'$  à un homomorphisme  $h$  de  $H$  vers un graphe orienté  $G$  à au plus 9 sommets, contenant  $C_x$  comme sous-graphe induit.

Nous considérons d'abord deux cas en fonction de  $n$  :

1.  $n \leq 6$ .

Soit  $G$  le graphe orienté obtenu à partir de  $C_x$  défini par  $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \dots, y_n\}$  et  $A(G) = A(C_x) \cup \{y_i y_j \mid f_i f_j \in A(H), 1 \leq i, j \leq n\} \cup \{h'(p_i) y_i \mid p_i f_i \in A(H)\} \cup \{y_j h'(p_j) \mid f_j p_j \in A(H)\}$ .

Il est facile de vérifier que l'application  $h$  de  $H$  vers  $G$  définie par

$$\begin{cases} h(x) = h'(x) & \text{si } x \in V(T), \\ h(f_i) = y_i & \text{pour tout } i, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

est un homomorphisme. Ainsi,  $\vec{\chi}(H) \leq |G| \leq 9$ .

2.  $n \geq 7$ .

Nous considérons quatre sous-cas :

(a) Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $p_i f_i \in A(H)$  ou bien pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_i p_i \in A(H)$ .

D'après la Proposition 3.2.6 le cycle  $C(H)$  est  $T_5$ -coloriable (le tournoi  $T_5$  est représenté Figure 3.10). Soit  $g$  un homomorphisme de  $C(H)$  vers  $T_5$ . Nous considérons l'application  $h$  de  $H$  vers  $G$  définie pour  $x \in V(H)$  par

$$h(x) = \begin{cases} h'(x) & \text{si } x \in V(T), \\ g(x) & \text{si } x \in V(C(H)) \end{cases}$$

où  $G$  est le graphe obtenu à partir de  $C_x$  et  $T_5$  en rajoutant tous les arcs possibles dirigés de tout sommet de  $C_x$  vers tout sommet de  $T_5$  si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $p_i f_i \in A(H)$  et tous les arcs possibles dirigés de tout sommet de  $T_5$  vers tout sommet de  $C_x$  si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_i p_i \in A(H)$ .

Il est facile de vérifier que dans les deux cas  $h$  est un homomorphisme de  $H$  vers  $G$ , nous avons donc  $\vec{\chi}(H) \leq |G| = 8$ .

(b)  $H$  contient l'une des configurations représentées par la Figure 3.27 (dans les configuration 3.27(3) et 3.27(4) l'arête  $p_i f_i$  peut être orientée dans un sens ou dans l'autre) :

Comme  $C(H) \setminus f_i$  est une chaîne, d'après le Théorème 3.2.4 il existe un homomorphisme  $g$  de  $C(H) \setminus f_i$  vers le circuit à trois sommets  $\vec{C}_3$  ayant pour sommets

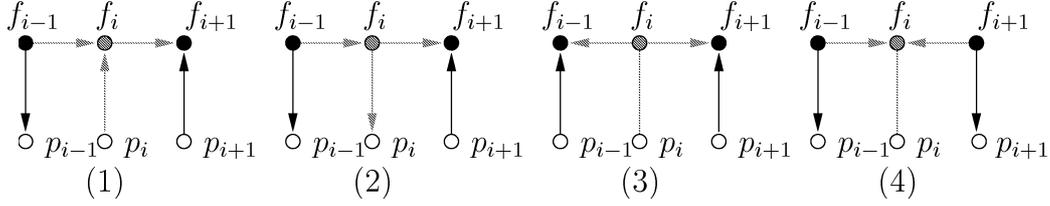


FIG. 3.27 – Configuration pour le cas 2.(b) du Théorème 3.4.2

1, 2, 3 et pour arcs 12,23,31. Nous considérons l’application  $h$  de  $H \setminus f_i$  vers  $G_9$  définie par

$$\begin{cases} h(x) = h'(x) & \text{si } x \in V(T), \\ h(f_j) = y_g(f_j) & \text{si } j \neq i \text{ et } p_j f_j \in A(H), \\ h(f_j) = z_g(f_j) & \text{si } j \neq i \text{ et } f_j p_j \in A(H). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que  $h$  est un homomorphisme de  $H \setminus f_i$  vers  $G_9$ . Soient  $x_i$  et  $x'_i$  respectivement le successeur et le prédécesseur de  $h'(p_i)$  dans  $C_x$ . En posant  $h(f_i) = x_i$  (respectivement  $h(f_i) = x'_i$ ) si  $p_i f_i \in A(H)$  (respectivement si  $f_i p_i \in A(H)$ ),  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9$ .

- (c) Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n/2$ ,  $p_{2i-1}f_{2i-1}, f_{2i}p_{2i} \in A(H)$  (les arcs incidents à  $C(H)$  sont alternativement entrants et sortants).

Deux sous-cas se présentent :

- i. Il existe un  $i$  tel que  $f_{i-1}f_i, f_{i+1}f_i \in A(H)$  ou  $f_i f_{i-1}, f_i f_{i+1} \in A(H)$ .

On peut supposer sans perte de généralité que  $p_i f_i \in A(H)$ .

Comme  $C(H) \setminus f_i$  est une chaîne, il existe un homomorphisme  $g$  de  $C(H) \setminus f_i$  vers  $\vec{C}_3$  tel que  $g(f_{i+1}) = 1$ . Nous considérons l’application  $h$  de  $H \setminus f_i$  vers  $G_9$  définie par

$$\begin{cases} h(x) = h'(x) & \text{si } x \in V(T), \\ h(f_j) = y_g(f_j) & \text{si } j \neq i \text{ et } p_j f_j \in A(H), \\ h(f_j) = z_g(f_j) & \text{si } j \neq i \text{ et } f_j p_j \in A(H). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que  $h$  est un homomorphisme de  $H \setminus f_i$  vers  $G_9$ .

Supposons d’abord que  $f_{i-1}f_i, f_{i+1}f_i \in A(H)$ . Soit  $x_i$  le successeur de  $h'(p_i)$  dans  $C_x$ ; en posant  $h(f_i) = x_i$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9$ .

Supposons maintenant que  $f_i f_{i-1}, f_i f_{i+1} \in A(H)$ . Dans ce cas, comme  $h(f_{i+1}) = z_1$ , nous avons  $h(f_{i-1}) \in \{z_1, z_2, z_3\}$ .

Si  $h(f_{i-1}) = z_1$ , en posant  $h(f_i) = y_3$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9$ . Si  $h(f_{i-1}) = z_2$ , en posant  $h(f_i) = y_1$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + y_1 z_1$ . Si  $h(f_{i-1}) = z_3$ , en posant  $h(f_i) = y_3$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + y_3 z_3$ .

ii.  $C(H)$  est un circuit.

Supposons  $f_i f_{i+1} \in A(H)$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Nous considérons trois sous-cas en fonction de  $|C(H)| = n$  :

A.  $n \equiv 0 \pmod{3}$ . Il est clair que l'application  $g$  définie pour tout  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , par  $g(f_i) = i \pmod{3}$  est un homomorphisme de  $C(H)$  vers  $\vec{C}_3$  et on vérifie facilement que l'application  $h$  défini par

$$\begin{cases} h(x) = h'(x) & \text{si } x \in V(T), \\ h(f_i) = y_{g(f_i)} & \text{si } p_i f_i \in A(H), \\ h(f_i) = z_{g(f_i)} & \text{si } f_i p_i \in A(H). \end{cases}$$

est un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9$ .

B.  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . Dans ce cas, l'application  $g$  définie pour tout  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , par  $g(f_i) = i \pmod{3}$  est un homomorphisme de  $C(H) \setminus f_n$  vers  $\vec{C}_3$  et on vérifie facilement que l'application  $h$  défini par

$$\begin{cases} h(x) = h'(x) & \text{si } x \in V(T), \\ h(f_j) = y_{g(f_j)} & \text{si } j \neq n \text{ et } p_j f_j \in A(H), \\ h(f_j) = z_{g(f_j)} & \text{si } j \neq n \text{ et } f_j p_j \in A(H). \end{cases}$$

est un homomorphisme de  $H \setminus f_n$  vers  $G_9$  tel que  $h(f_1) = y_1$  et  $h(f_{n-1}) = y_3$ . En posant  $h(f_n) = z_1$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + z_1 y_1$ .

C.  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Dans ce cas, l'application  $g$  définie pour tout  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq n-5$ , par  $g(f_i) = i \pmod{3}$  est un homomorphisme de  $C(H) \setminus \{f_{n-4}, f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}, f_n\}$  vers  $\vec{C}_3$  et on vérifie facilement que l'application  $h$  défini par

$$\begin{cases} h(x) = h'(x) & \text{si } x \in V(T), \\ h(f_j) = y_{g(f_j)} & \text{si } p_j f_j \in A(H) \text{ et } 1 \leq j \leq n-5, \\ h(f_j) = z_{g(f_j)} & \text{si } f_j p_j \in A(H) \text{ et } 1 \leq j \leq n-5. \end{cases}$$

est un homomorphisme de  $H \setminus \{f_{n-4}, f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}, f_n\}$  vers  $G_9$  tel que  $h(f_1) = y_1$  et  $h(f_{n-5}) = y_3$ . En posant  $h(f_{n-4}) = z_1$ ,  $h(f_{n-3}) = y_1$ ,  $h(f_{n-2}) = z_2$ ,  $h(f_{n-1}) = y_2$  et  $h(f_n) = z_3$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + \{z_1 y_1, z_2 y_2\}$ .

(d) Il existe un  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que  $f_{i-1} p_{i-1}$ ,  $p_i f_i$ ,  $p_{i+1} f_{i+1} \in A(H)$  ou  $p_{i-1} f_i - 1$ ,  $f_i p_i$ ,  $f_{i+1} p_{i+1} \in A(H)$ .

On peut supposer sans perte de généralité qu'il existe un  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que  $f_{i-1} p_{i-1}$ ,  $p_i f_i$ ,  $p_{i+1} f_{i+1} \in A(H)$  et que  $i = 1$ . Supposons donc  $f_n p_n$ ,  $p_1 f_1$ ,  $p_2 f_2 \in A(H)$ .

Comme  $C(H) \setminus f_1$  est une chaîne, il existe un homomorphisme  $g$  de  $C(H) \setminus f_1$  vers  $\vec{C}_3$  tel que  $g(f_2) = 1$ . Nous considérons l'application  $h$  de  $H \setminus f_1$  vers  $G_9$  définie par

$$\begin{cases} h(x) = h'(x) & \text{si } x \in V(T), \\ h(f_j) = y_{g(f_j)} & \text{si } j \neq 1 \text{ et } p_j f_j \in A(H), \\ h(f_j) = z_{g(f_j)} & \text{si } j \neq 1 \text{ et } f_j p_j \in A(H). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que  $h$  est un homomorphisme de  $H \setminus f_1$  vers  $G_9$  tel que  $h(f_2) = y_1$ . Comme  $f_n p_n \in A(H)$ , nous avons  $h(f_n) \in V(C_2)$ .

Nous avons quatre cas à considérer en fonction de l'orientation des arêtes  $f_n f_1$  et  $f_1 f_2$  :

i.  $f_n f_1, f_1 f_2 \in A(H)$ .

Dans ce cas  $H$  contient la Configuration 3.27(1).

ii.  $f_1 f_n, f_2 f_1 \in A(H)$ .

Si  $h(f_n) = z_3$ , en posant  $h(f_1) = y_2$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9$ .

Si  $h(f_n) = z_2$ , en posant  $h(f_1) = y_2$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + y_2 z_2$ .

Supposons que  $h(f_n) = z_1$ . Soit  $j$ ,  $2 \leq j \leq n-1$ , le plus grand entier tel que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq j$ ,  $p_i f_i \in A(H)$ . Dans ce cas on peut supposer que pour tout  $i$ ,  $2 \leq i \leq j$ ,  $f_i f_{i-1} \in A(H)$  (sinon  $H$  contient la configuration 3.27(3)). Nous considérons maintenant l'arête  $f_j f_{j+1}$  : si  $f_{j+1} f_j \in A(H)$ , en posant  $f_i = f_j$ ,  $f_{i+1} = f_{j-1}$ ,  $f_{i_1} = f_{j+1}$ , nous nous ramenons à la configuration 3.27(1). Supposons que  $f_j f_{j+1} \in A(H)$ . Soit  $h(f_j) = y_k$  ; en posant  $h(f_{j+1}) = z_k$  et  $h(f_m) = y_{g(f_m)-1}$  (respectivement  $h(f_m) = z_{g(f_m)-1}$ ) si  $p_m f_m \in A(H)$  (respectivement si  $f_m p_m \in A(H)$ ),  $j+2 \leq m \leq n$ , nous obtenons  $h(f_n) = z_3$ . En posant  $h(f_1) = y_2$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + y_k z_k$ .

iii.  $f_1 f_n, f_1 f_2 \in A(H)$ .

Si  $h(f_n) = z_1$ , en posant  $h(f_1) = y_3$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9$ .

Si  $h(f_n) = z_3$ , en posant  $h(f_1) = y_3$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + y_3 z_3$ .

Supposons que  $h(f_n) = z_2$ . Soit  $j$ ,  $2 \leq j \leq n-1$ , le plus grand entier tel que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq j$ ,  $p_i f_i \in A(H)$ . Nous considérons deux sous-cas :

A. Il existe un  $r$ ,  $3 \leq r \leq j$ , tel que  $f_r f_{r-1} \in A(H)$ .

Dans ce cas, nous avons  $f_i f_{i-1} \in A(H)$  pour tout  $i$ ,  $r+1 \leq i \leq j$  (sinon  $H$  contient la configuration 3.27(3)). Nous considérons maintenant l'arête  $f_j f_{j+1}$  : si  $f_{j+1} f_j \in A(H)$ , en posant  $f_i = f_j$ ,  $f_{i+1} = f_{j-1}$ ,  $f_{i-1} = f_{j+1}$ , nous nous ramenons à la configuration 3.27(1). Considérons maintenant le cas où  $f_j f_{j+1} \in A(H)$  et supposons  $h(f_j) = y_k$  ; en posant  $h(f_{j+1}) = z_k$  et  $h(f_m) = y_{g(f_m)-1}$  (respectivement  $h(f_m) = z_{g(f_m)-1}$ ) si  $p_m f_m \in A(H)$  (respectivement, si  $f_m p_m \in A(H)$ ),  $j+2 \leq m \leq n$ , nous

obtenons  $h(f_n) = z_1$ . En posant  $h(f_1) = y_3$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + y_k z_k$ .

B. Pour tout  $r$ ,  $2 \leq r \leq j$ ,  $f_{r-1}f_r \in A(H)$ .

Nous considérons maintenant l'arête  $f_j f_{j+1}$ . Supposons que  $f_j f_{j+1} \in A(H)$  et  $h(f_j) = y_k$ ; en posant  $h(f_{j+1}) = z_k$  et  $h(f_m) = y_{g(f_m)-1}$  (respectivement  $h(f_m) = z_{g(f_m)-1}$ ) si  $p_m f_m \in A(H)$  (respectivement, si  $f_m p_m \in A(H)$ ),  $j+2 \leq m \leq n$ , nous obtenons  $h(f_n) = z_1$ . En posant  $h(f_1) = y_3$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + y_k z_k$ .

Si  $f_{j+1}f_j \in A(H)$  nous considérons deux sous-cas :

– Il existe un  $s$ ,  $j+2 \leq s \leq n-1$  tel que  $f_{s-1}p_s, p_s f_s \in A(H)$ .

Comme  $f_{s-1}p_s \in A(H)$ ,  $h(f_{s-1}) \in V(C_z)$ . Supposons que  $h(f_{s-1}) = z_k$ , et posons  $h(f_s) = y_k$ . Nous considérons maintenant l'arête  $f_{s-1}f_s$  : si  $f_{s-1}f_s \in A(H)$ , en posant  $h(f_m) = y_{g(f_m)-1}$  (respectivement  $h(f_m) = z_{g(f_m)-1}$ ) si  $p_m f_m \in A(H)$  (respectivement, si  $f_m p_m \in A(H)$ ),  $s+1 \leq m \leq n$  nous obtenons  $h(f_n) = z_1$ . En posant  $h(f_1) = y_3$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + \{z_k y_k\}$ . Considérons maintenant le cas où  $f_s f_{s-1} \in A(H)$ ; en posant  $h(f_m) = y_{g(f_m)+1}$  (respectivement  $h(f_m) = z_{g(f_m)+1}$ ) si  $p_m f_m \in A(H)$  (respectivement, si  $f_m p_m \in A(H)$ ),  $s+1 \leq m \leq n$  nous obtenons  $h(f_n) = z_3$ . En posant  $h(f_1) = y_3$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + \{y_k z_k, y_3 z_3\}$ .

– Pour tout  $s$ ,  $j+1 \leq s \leq n$ ,  $f_s p_s \in A(H)$ .

Nous considérons l'arête  $f_{j+1}f_{j+2}$  : supposons d'abord que  $f_{j+2}f_{j+1} \in A(H)$ ; en posant  $f_i = f_{j+1}, f_{i-1} = f_{j+2}, f_{i+1} = f_j$  nous nous ramenons à la configuration 3.27(2). Supposons maintenant que  $f_{j+1}f_{j+2} \in A(H)$ ; nous avons  $f_m f_{m+1} \in A(H)$  pour tout  $m$ ,  $j+1 \leq m \leq n-1$  (sinon  $H$  contient la configuration 3.27(4)). Nous avons en fait, dans ce dernier cas : pour  $i = 1, 2, \dots, j$ ,  $p_i f_i \in A(H)$ , pour  $i = j+1, \dots, n$ ,  $f_i p_i \in A(H)$ , pour  $i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus j$ ,  $f_i f_{i+1} \in A(H)$  et  $f_{j+1}f_j, f_1 f_n \in A(H)$  (voir Figure 3.28).

Nous montrons tout d'abord que le graphe  $H' = H \setminus f_j$  est  $QR_7$ -coloriable. Comme le tournoi  $QR_7$  contient le circuit  $C_x$  comme sous-graphe, l'arbre  $T + f_n p_n$  est  $QR_7$ -coloriable. Soit  $h$  un homomorphisme de  $T + f_n p_n$  vers  $QR_7$ . Comme tout sommet de  $QR_7$  possède trois prédécesseurs et trois successeurs, on peut supposer que  $h(f_n) \neq h(p_1)$ . Comme  $h(f_n) \neq h(p_1)$ , d'après l'Observation 3.4.1, il existe une couleur dans  $QR_7$  pour  $f_1$ . Pour colorier les sommets  $f_2, \dots, f_j$ , on parcourt ces sommets à partir de  $f_1$  en respectant le sens de rotation choisi sur  $C(H)$ . Chaque sommet  $f_i$  rencontré,  $2 \leq i \leq j$ , possède deux voisins,  $f_{i-1}$  et  $p_i$ , déjà  $QR_7$ -coloriés (ils peuvent avoir la même

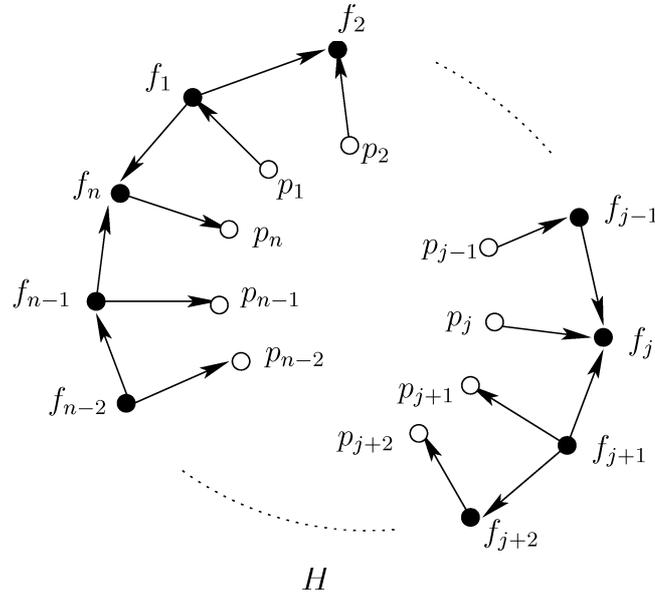


FIG. 3.28 – Configuration pour le cas 2.(d).iii.B du Théorème 3.4.2

couleur). Comme  $f_{i-1}f_i$  et  $p_i f_i \in A(H)$ , d'après l'Observation 3.4.1, il existe toujours une couleur dans  $QR_7$  pour  $f_i$ . De même, pour colorier les sommets  $f_{n-1}, \dots, f_{j+2}$ , on parcourt ces sommets à partir de  $f_n$  en sens inverse du sens de rotation choisi sur  $C(H)$ . Chaque sommet  $f_i$  rencontré,  $j+2 \leq i \leq n-3$ , possède deux voisins,  $f_{i+1}$  et  $p_i$ , déjà  $QR_7$ -coloriés (ils peuvent avoir la même couleur). Comme  $f_i f_{i+1}$  et  $f_i p_i \in A(H)$ , d'après l'Observation 3.4.1, il existe toujours une couleur dans  $QR_7$  pour  $f_i$ .

Il existe donc une  $QR_7$ -coloration  $h$  de  $H'$ . Comme les trois arcs  $p_j f_j$ ,  $f_{j-1} f_j$  et  $f_{j+1} f_j$  sont dans le même sens, en posant  $h(f_{j+1}) = c_8$  pour une couleur supplémentaire, nous obtenons  $\bar{\chi}(H) \leq 9$ .

iv.  $f_1 f_n, f_2 f_1 \in A(H)$ .

Si  $h(f_n) = z_3$ , en posant  $h(f_1) = y_2$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9$ .

Si  $h(f_n) = z_2$ , en posant  $h(f_1) = y_2$ ,  $h$  peut être étendu à un homomorphisme de  $H$  vers  $G_9 + y_2 z_2$ .

Supposons que  $h(f_n) = z_1$ . Soit  $j$ ,  $2 \leq j \leq n-1$ , le plus grand entier tel que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq j$ ,  $p_i f_i \in A(H)$ . Dans ce cas, on peut supposer que  $f_i f_{i-1} \in A(H)$  pour tout  $i$ ,  $2 \leq i \leq j$  (sinon  $H$  contient la configuration 3.27(3)). Nous considérons maintenant l'arête  $f_j f_{j+1}$  : en posant  $f_1 = f_j, f_2 = f_{j-1}, f_n = f_{j+1}$  nous nous ramenons à la configuration 3.27(1) si  $f_{j+1} f_j \in A(H)$  et nous nous ramenons au cas 2(d)iii si  $f_j f_{j+1} \in A(H)$ .

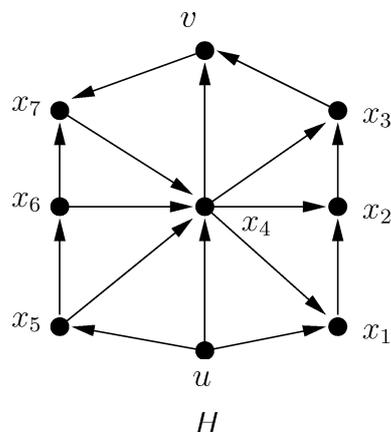


FIG. 3.29 – Un graphe de Halin de nombre chromatique orienté 8

Nous avons donc dans tous les cas un homomorphisme de  $H$  vers un graphe orienté à au plus 9 sommets. Ainsi,  $\vec{\chi}(H) \leq 9$ . ■

Concernant la borne inférieure du nombre chromatique orienté de la famille des graphes de Halin, nous avons :

**Proposition 3.4.3** *Il existe des graphes de Halin de nombre chromatique orienté 8.*

**Preuve.** Considérons le graphe  $H$  représenté par la Figure 3.29 et montrons que  $\vec{\chi}(H) = 8$ .

Soit  $c$  une  $k$ -coloration orientée de  $H$ . Remarquons tout d'abord que pour tout  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq 7$ , les deux sommets  $x_i$  et  $x_j$  sont reliés par un chemin de longueur au plus 2. Ainsi, pour tout  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq 7$ , les  $x_i$  et  $x_j$  doivent être de couleurs distinctes. Nous avons donc  $k \geq 7$ . Soit  $i = c(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$ . Si  $k = 7$ , On vérifie facilement que la seule couleur possible pour  $u$  (respectivement  $v$ ) est la couleur 7 (respectivement la couleur 1). On peut supposer sans perte de généralité que  $c(u) = 7$ . Dans ce cas, l'hypothèse  $c(v) = 1$  nous mène à une contradiction car dans ce cas nous avons un arc dirigé d'un sommet colorié 1,  $v$ , vers un sommet colorié 7,  $x_7$ , et un arc dirigé d'un sommet colorié 7,  $u$ , vers un sommet colorié 1,  $x_1$ . Ainsi,  $k \geq 8$ .

La coloration  $c$  définie par  $c(x_1) = 1, c(x_2) = 2, \dots, c(x_7) = 7, c(u) = 7$  et  $c(v) = 8$  est une 8-coloration orientée de  $H$ , nous avons donc  $\vec{\chi}(H) = 8$ . ■

# Chapitre 4

## Coloration des graphes distances

Soit  $D$  un sous-ensemble fini de nombres entiers positifs; le graphe distance  $G(D)$  est le graphe ayant pour ensemble de sommets  $\mathbb{Z}$ , et tel que  $uv$  est une arête de  $G(D)$  si  $|u - v| \in D$ . Les graphes distances ont été introduits et étudiés par Eggleton, Erdős et Skilton [26]. Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude de différents types de coloration, en particulier la coloration d'incidence, de cette famille de graphes.

Nous allons dans un premier temps présenter les graphes distances et ensuite nous nous intéressons à la coloration d'incidence de cette famille de graphes. Nous déterminons une borne supérieure générale pour le nombre chromatique d'incidence du graphe distance  $G(D)$  avec ensemble de distance  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , et déterminons le nombre chromatique d'incidence de ce graphe pour certains cas particuliers d'ensembles de distance  $D$ .

Dans la Section 4.3 nous nous intéressons au lien entre le nombre chromatique d'incidence d'un graphe  $G$  et le nombre chromatique du graphe carré  $G^2$  de  $G$ . Dans la Section 4.4 nous nous intéressons aux colorations propres et acycliques des graphes distances et déterminons des bornes supérieures pour le nombre chromatique et le nombre chromatique acyclique de cette famille de graphes. Dans la Section 4.5 nous nous intéressons aux colorations orientées des graphes distances et déterminons des bornes supérieures et inférieures pour le nombre chromatique orienté de cette famille de graphes. Par ailleurs, nous introduisons le graphe distance orienté  $\vec{G}(D)$  avec ensemble de distance  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Nous déterminons une borne supérieure générale du nombre chromatique orienté de  $\vec{G}(D)$  et montrons que ce résultat est optimal pour certains cas particuliers d'ensembles de distance  $D$ .

### 4.1 Introduction

Soit  $D \subseteq \mathbb{N}$  où  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des nombres entiers positifs. Le *graphe distance (entier)*  $G(D) = G(\mathbb{Z}, D)$ , avec *ensemble de distance*  $D$ , est le graphe ayant pour ensemble de sommets  $\mathbb{Z}$ , l'ensemble des nombres entiers, et tel que deux sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents

si et seulement si  $|u - v| \in D$ . Pour un ensemble de distance  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , ( $d_i < d_j$  si  $i < j$ ), nous notons parfois  $G(D) = G(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

Les graphes distances ont été introduits et étudiés par Eggleton, Erdős et Skilton [26]. Ils ont été motivés par le problème bien connu de la coloration du plan Euclidien : quel est le plus petit nombre de couleurs qui peut être utilisé pour colorier tous les points du plan Euclidien de façon telle que les points distants de 1 sont coloriés avec des couleurs distinctes. Moser et Moser [51] ont montré que quatre couleurs sont nécessaires, et Hadwiger, Debrunner et Klee [38] ont montré que sept couleurs sont suffisantes. Essentiellement aucun progrès supplémentaire n'a été accompli sur ce problème. Le problème de la coloration du plan a naturellement été généralisé à des espaces de dimension supérieure. La différence entre la borne inférieure et la borne supérieure du nombre chromatique correspondant augmente autant que la dimension de l'espace [24]. D'autre part, le problème correspondant pour l'espace de dimension 1, la ligne des nombres réels, est évident : il est facile de vérifier que ce problème est équivalent au problème consistant à trouver le nombre chromatique du graphe distance  $G(D)$  pour  $|D| = 1$ . Clairement  $\chi(G(D)) = 2$  si  $|D| = 1$ .

Différents types de colorations (coloration propre, arête-coloration, coloration totale, liste-coloration) des graphes distances ont été étudiés par plusieurs auteurs, notamment Kemnitz et Kolberg [44], Deuber et Zhu [25], Chen [22] et Kemnitz et Marangio [46]. Nous citons ci-dessous quelques résultats connus.

Nous avons la borne générale suivante pour le nombre chromatique des graphes distances :

**Théorème 4.1.1** [Walther [63]]

*Pour tout graphe distance  $G(D)$ ,  $\chi(G(D)) \leq |D| + 1$ .*

Dans le cas particulier où  $D = \{1, 2, \dots, n\}$  nous avons :

**Théorème 4.1.2** [Eggleton, Erdős et Skilton [26]]

*Pour tout entier positif  $n$ ,  $\chi(G(1, 2, \dots, n)) = n + 1$ .*

**Théorème 4.1.3** [Voigt [62]]

*Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\chi(G(nd_1, nd_2, \dots, nd_k)) = \chi(G(d_1, d_2, \dots, d_k))$ .*

Plus généralement, si  $m$  est un diviseur arbitraire d'éléments  $d_1, d_2, \dots, d_n$  de  $D$  alors il est facile de vérifier que le graphe distance  $G(D)$  est isomorphe à  $m$  copies disjointes du graphe distance  $G(\frac{d_1}{m}, \frac{d_2}{m}, \dots, \frac{d_n}{m})$ .

Lorsque  $D \subseteq P$  ( $P$  est l'ensemble des nombres premiers), le nombre chromatique du graphe  $G(D)$  a été caractérisé par Eggleton, Erdős et Skilton :

**Théorème 4.1.4** [Eggleton, Erdős et Skilton [26]]

*Soit  $D \subseteq P$  avec  $|D| \geq 2$ . Nous avons alors :*

*1. si  $2 \notin D$ , alors  $\chi(G(D)) = 2$ ; sinon,  $\chi(G(D)) = 3$  ou  $4$ ,*

2. si  $2 \in D$  et  $3 \notin D$ , alors  $\chi(G(D)) = 3$ ,
3. si  $\{2, 3\} \subseteq D \subseteq \{p \in P \mid p \equiv \pm 2 \pmod{5}\}$  alors  $\chi(G(D)) = 3$ ,
4. si  $\{2, 3\} \subseteq D \subseteq \{p \in P \mid p \equiv \pm 2, \pm 3, 7 \pmod{14}\}$  alors  $\chi(G(D)) = 3$ ,
5.  $\{2, 3, 5\} \subseteq D$  ou  $\{2, 3, 11, 13\} \subseteq D$ , alors  $\chi(G(D)) = 4$ .

Chen, Chang et Huang en [22] ont considéré les graphes distances  $G(D)$  avec  $|D| = 3$ . Comme  $\chi(G(D)) \leq |D| + 1$  pour tout ensemble de distance  $D$ , nous avons  $\chi(G(D)) \leq 4$  si  $|D| = 3$ . Ils ont prouvé le résultat suivant :

**Théorème 4.1.5** [Chen, Chang et Huang [22]]

Si  $D = \{a, b, a + b\}$ ,  $1 \leq a < b$  et  $\text{pgcd}\{a, b\} = 1$ , alors  $\chi(G(D)) = 2$  si et seulement si les trois entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont impairs, et

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \equiv b \pmod{3}, \\ 4 & \text{si } a \not\equiv b \pmod{3}. \end{cases}$$

Ils ont conjecturé que pour  $D = \{a, b, c\}$ , où  $0 < a < b < c$ ,  $\text{pgcd}\{a, b, c\} = 1$  et  $a, b, c$  ne sont pas tous impairs,  $\chi(G(D)) = 4$  si et seulement si  $c = a + b$  et  $a \not\equiv b \pmod{3}$  ou  $a = 1$ ,  $b = 2$ , et  $c \equiv 0 \pmod{3}$ .

Deubner et Zhu en [25] ont également étudié le nombre chromatique du graphe  $G(D)$  avec  $|D| = 3$ . En particulier, ils ont montré que la conjecture de Chen, Chang et Huang est vraie si  $b$  est multiple de  $a$ .

Kemnitz et Kolberg ont étudié le nombre chromatique du graphe distance  $G(D)$ , avec ensemble de distance  $D$ , lorsque  $D$  est constitué de 4 éléments spéciaux. Ils ont prouvé le théorème suivant :

**Théorème 4.1.6** [Kemnitz et Kolberg [44]]

Si  $D = \{1, 2, \dots, r - 1, z\}$ ,  $z \geq r$ , alors

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} r & \text{si } z \not\equiv 0 \pmod{r} \\ r + 1 & \text{si } z \equiv 0 \pmod{r}. \end{cases}$$

Kemnitz et Marangio [45] ont étudié le nombre chromatique et le nombre chromatique de liste du graphe distance  $G(x, 2x, \dots, nx, y)$ . Ils ont prouvé les résultats suivants :

**Théorème 4.1.7** [Kemnitz et Marangio [45]]

Si  $D\{x, 2x, \dots, nx, y\}$ ,  $x > 1$ ,  $n \geq 2$  et  $\text{pgcd}(x, y) = 1$  alors  $\chi(G(D)) = |D|$ .

**Théorème 4.1.8** [Kemnitz et Marangio [45]]

Soient  $x$  et  $y$  tels que  $\text{pgcd}(x, y) = 1$ . Si  $x > 1$  ou  $x = 1$  et  $y \geq \frac{1}{2}(n + 1)(n + 1)!$  alors  $\chi_l(G(x, 2x, \dots, nx, y)) = |D| + 1$  (où  $\chi_l(G)$  est le nombre chromatique de liste de  $G$ ).

## 4.2 Coloration d'incidence

Dans cette section nous allons prouver que si un graphe distance  $G(D)$  admet une  $k$ -coloration d'incidence, il admet une  $k$ -coloration d'incidence périodique. Nous allons donner ensuite une borne supérieure générale de  $\chi_i(G(D))$  et déterminer  $\chi_i(G(D))$  pour certains cas particuliers d'ensembles de distance  $D$ . Nous commençons par quelques résultats élémentaires.

Rappelons tout d'abord qu'une incidence d'un graphe  $G$  est une paire  $(v, e) \in V(G) \times E(G)$  telle que  $v$  et  $e$  sont incidents. On note  $I(G)$  l'ensemble de toutes les incidences de  $G$ .

Pour un sommet  $v$ , nous notons  $A_v$  l'ensemble des incidences de la forme  $(w, vw)$  et  $I_v$  l'ensemble des incidences de la forme  $(v, vw)$ .

Soient  $(v, e)$  et  $(w, f)$  deux incidences de  $G$ ; on dit que  $(v, e)$  et  $(w, f)$  sont adjacentes si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1.  $v = w$ ;
2.  $e = f$ ;
3. l'arête  $vw$  est égale à  $e$  ou  $f$ .

Une  $k$ -coloration d'incidence d'un graphe  $G$  est une application de l'ensemble des incidences de  $G$ , dans un ensemble  $C$  de  $k$  couleurs telle que des couleurs distinctes sont affectées aux incidences adjacentes. Le nombre chromatique d'incidence  $\chi_i(G)$  de  $G$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -coloration d'incidence.

Une  $(k, \ell)$ -coloration d'incidence d'un graphe  $G$  est une  $k$ -coloration d'incidence  $\sigma$  de  $G$  telle que pour tout sommet  $v \in V(G)$ ,  $|\sigma(A_v)| \leq \ell$ .

Pour le graphe distance  $G(D)$ , avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  tel que  $d_i < d_j$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ , nous notons  $d'_1 = d_1, d'_2 = d_2 - d_1, \dots, d'_n = d_n - d_{n-1}$  et  $d = \min\{d'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ .

**Observation 4.2.1** *Pour tout entier positif  $d_1$ ,  $\chi_i(G(d_1)) = 3$ .*

**Preuve.** Il est facile de vérifier que  $G(d_1)$  se compose de  $d_1$  composantes connexes dont chacune est un chemin de longueur infinie. Comme le nombre chromatique d'incidence de tout chemin est égal à 3, nous obtenons le résultat. ■

**Observation 4.2.2** *Si  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$  alors  $\chi_i(G) \leq \chi_i(G_1) + \chi_i(G_2) + \dots + \chi_i(G_n)$ .*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de prouver que  $\chi_i(G_1 \cup G_2) \leq \chi_i(G_1) + \chi_i(G_2)$ . Soit  $c_i$  une coloration d'incidence de  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ . Clairement l'application  $c$  définie, pour toute incidence  $(u, uv)$  de  $G_1 \cup G_2$ , par

$$c(u, uv) = \begin{cases} c_1(u, uv) & \text{si } uv \in E(G_1) \\ c_2(u, uv) & \text{si } uv \notin E(G_1) \end{cases}$$

est une coloration d'incidence de  $G_1 \cup G_2$ . Ainsi,  $\chi_i(G_1 \cup G_2) \leq \chi_i(G_1) + \chi_i(G_2)$ . ■

**Proposition 4.2.3** Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\chi_i(G(D)) \leq 3\Delta(G(D))/2 = 3n$ .

**Preuve.** Comme  $G(D) = G(d_1) \cup G(d_2) \cup \dots \cup G(d_n)$ , grâce aux Observations 4.2.1 et 4.2.2 nous avons :

$$\chi_i(G(D)) \leq \chi_i(G(d_1)) + \chi_i(G(d_2)) + \dots + \chi_i(G(d_n)) = 3n.$$

■

**Définition 4.2.4** Soit  $G(D)$  un graphe distance; une coloration d'incidence  $c$  de  $G(D)$  est *périodique* s'il existe un entier positif  $p$  tel que pour tout  $v \in \mathbb{Z}$ ,

$$c(v+p, (v+p)(v+p+d_j)) = c(v, v(v+d_j))$$

et

$$c(v+p, (v+p)(v+p-d_j)) = c(v, v(v-d_j)), \quad \forall j, 1 \leq j \leq n.$$

Un tel plus petit entier  $p$  est défini comme la *période* de  $c$ .

Pour une coloration d'incidence  $c$  de  $G(d_1, \dots, d_n)$  et  $u, v \in \mathbb{Z}$  nous disons que deux sommets  $u$  et  $v$  ont même *spectre*, noté  $\sigma_c(u) = \sigma_c(v)$ , si et seulement si

$$c(u, u-d_j) = c(v, v-d_j) \text{ et } c(u, u+d_j) = c(v, v+d_j), \quad \forall j, 1 \leq j \leq n.$$

De même, deux ensembles  $\{i+1, i+2, \dots, i+r\}$  et  $\{j+1, j+2, \dots, j+r\}$  ont même spectre si  $\sigma_c(i+s) = \sigma_c(j+s)$ , pour tout  $s, 1 \leq s \leq r$ .

Soit  $c$  une coloration d'incidence de  $G(d_1, \dots, d_n)$ ; une coloration d'incidence  $c'$  est obtenue à partir de  $c$  par *décalage* s'il existe un  $k \geq 0$  tel que pour tout  $u \in \mathbb{Z}$ ,  $c'(u, u \pm d_i) = c(u+k, u+k \pm d_i)$ ; en d'autres termes, pour tout  $u \in \mathbb{Z}$ ,  $u$  et  $u+k$  ont même spectre.

**Théorème 4.2.5** [Eggleton, Erdős et Skilton [27]]

*Pour tout ensemble de distance  $D \subseteq P$ , si le graphe distance  $G(D)$  a une  $k$ -coloration, alors il a une  $k$ -coloration périodique.*

Nous allons obtenir le même résultat pour la coloration d'incidence des graphes distances  $G(D)$  avec ensemble de distance  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ .

**Théorème 4.2.6** *Si le graphe distance  $G(D)$  admet une  $k$ -coloration d'incidence, alors il admet une  $k$ -coloration d'incidence périodique.*

**Preuve.** Soit  $c : I(G(D)) \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$  une  $k$ -coloration d'incidence de  $G(D)$ ,  $m = \max\{d \mid d \in D\}$  et  $|D| = n$ . Comme pour tout  $v \in \mathbb{Z}$ ,  $I_v$  peut être colorié d'au plus  $k!/(k-2n)!$  manières différentes, il existe au plus  $(k!/(k-2n)!)^{2m+1}$  ensembles possibles de  $2m+1$

sommets consécutifs qui peuvent être différemment coloriés. Il existe donc nécessairement deux ensembles disjoints de  $2m + 1$  sommets consécutifs qui ont même spectre. Comme la  $k$ -coloration d'incidence  $c$  peut être décalée, on peut supposer sans perte de généralité que l'un de ces ensembles commence à 0 et l'autre commence à  $p$  satisfaisant :  $2m + 1 \leq p \leq (2m + 1)(k!/(k - 2n)!)^{2m+1}$ . Nous avons donc :  $c(p + i, p + i + d_j) = c(i, i + d_j)$  et  $c(p + i, p + i - d_j) = c(i, i - d_j)$  pour tout  $i$ ,  $0 \leq i < 2m + 1$  et pour  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Soit  $c' : I(G(D)) \longrightarrow \{0, 1, \dots, k - 1\}$  l'application définie pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $j \in N(i)$  par  $c'(i, ij) := c([i], [j])$  où  $[i] = i \bmod p$ . Clairement  $c'$  coïncide avec  $c$  sur l'ensemble

$$\{(i, j) \in I(G(D)); 0 \leq i < p + 2m + 1, j \in N(i)\}.$$

Nous prouvons maintenant que  $c'$  est une  $k$ -coloration d'incidence de  $G(D)$ . Remarquons tout d'abord qu'il suffit de prouver que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $j, k \in N(i)$ ,  $c$  satisfait les conditions suivantes :

- (a)  $c'(i, ij) \neq c'(k, ki)$  ( $j$  peut être égal à  $k$ ),
- (b)  $c'(i, ij) \neq c'(i, ik)$ ,  $j \neq k$ .

Ou son équivalent :

- (a)  $c([i], [i][j]) \neq c([k], [k][i])$ ,
- (b)  $c'([i], [i][j]) \neq c'([i], [i][k])$ .

Comme les incidences  $(i, ij)$  et  $(k, ki)$  (respectivement  $(i, ij)$  et  $(i, ik)$ ) sont adjacentes si et seulement si les deux incidences  $([i], [i][j])$  et  $([k], [k][i])$  (respectivement  $([i], [i][j])$  et  $([i], [i][k])$ ) sont adjacentes, nous obtenons le résultat.

Ainsi,  $c'$  est une  $k$ -coloration d'incidence périodique de  $G$ . ■

**Observation 4.2.7** Soient  $G(D) = G(d_1, d_2, \dots, d_n)$  un graphe distance et  $ij, ik$  deux arêtes de  $G(D)$ , alors  $d \leq |j - k| \leq 2d_n$ .

Pour toute paire de nombres réels  $r$  et  $s$ ,  $r \leq s$ , nous avons :  $|s - r| \leq \lfloor s \rfloor - \lfloor r \rfloor \leq \lfloor s - r \rfloor + 1$  et  $\lfloor |s - r| \rfloor \leq \lfloor |s - r| \rfloor$ . Nous utiliserons ces relations dans la preuve du théorème suivant.

**Théorème 4.2.8** Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\chi_i(G(D)) \leq \min\{2\lceil d_n/d \rceil + 1, 3n\}$ .

**Preuve.** Si  $\min\{2\lceil d_n/d \rceil + 1, 3n\} = 3n$  nous avons  $\chi_i(G(D)) \leq 3n$  grâce à la Proposition 4.2.3.

Supposons maintenant que  $2\lceil d_n/d \rceil + 1 < 3n$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $j \in N(i)$  nous définissons l'application  $c : I(G(D)) \longrightarrow \{0, 1, \dots, 2\lceil d_n/d \rceil\}$  par

$$c(j, ji) = \lfloor \lfloor i/d \rfloor \rfloor$$

où  $\lfloor \lfloor i/d \rfloor \rfloor = \lfloor i/d \rfloor \bmod 2\lceil d_n/d \rceil + 1$ . Clairement  $c$  couvre  $I(G(D))$ . Nous allons prouver que  $c$  est une coloration d'incidence de  $G(D)$ . Remarquons tout d'abord qu'il suffit de prouver que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $j, k \in N(i)$ ,  $c$  satisfait les conditions suivantes :

- (a)  $c(i, ij) \neq c(k, ki)$  ( $j$  peut être égal à  $k$ );  
 (b)  $c(i, ij) \neq c(i, ik)$ ,  $j \neq k$ .

– Preuve de (a). Soient  $ij$  et  $ik$  deux arêtes de  $G(D)$  telles que  $c(i, ij) = c(k, ki)$ . Nous avons alors :

$$[[j/d]] = [[i/d]] \implies \lfloor j/d \rfloor \equiv \lfloor i/d \rfloor \pmod{2\lceil d_n/d \rceil + 1}$$

En supposant  $\lfloor j/d \rfloor \geq \lfloor i/d \rfloor$ , nous obtenons :

$$\lfloor j/d \rfloor - \lfloor i/d \rfloor = r(2\lceil d_n/d \rceil + 1) \quad (10)$$

pour un entier non négatif  $r$ , et d'après la définition de  $G(D)$  nous avons :

$$\begin{aligned} d \leq j - i \leq d_n &\implies 1 \leq j/d - i/d \leq d_n/d \\ &\implies 1 \leq \lfloor j/d - i/d \rfloor \leq d_n/d \\ &\implies 1 \leq \lfloor j/d \rfloor - \lfloor i/d \rfloor \leq \lceil d_n/d \rceil + 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Mais les deux relations (10) et (11) se contredisent,  $c$  satisfait donc la condition (a).

– Preuve de (b). Soient  $ij$  et  $ik$  deux arêtes de  $G(D)$  telles que  $j \neq k$  et  $c(i, ij) = c(i, ik)$ . Nous avons alors :

$$[[j/d]] = [[k/d]] \implies \lfloor j/d \rfloor \equiv \lfloor k/d \rfloor \pmod{2\lceil d_n/d \rceil + 1}.$$

Donc :

$$|\lfloor j/d \rfloor - \lfloor k/d \rfloor| = r(2\lceil d_n/d \rceil + 1) \quad (12)$$

pour un entier non négatif  $r$ , et d'après la définition de  $G(D)$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} d \leq |i - j| \leq d_n &\implies 1 \leq |i/d - j/d| \leq d_n/d \\ &\implies 1 \leq \lfloor |i/d - j/d| \rfloor \leq d_n/d \\ &\implies 1 \leq ||i/d - j/d|| \leq d_n/d + 1 \\ &\implies 0 \leq ||i/d - j/d|| \leq d_n/d + 2. \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$0 \leq ||i/d - k/d|| \leq d_n/d + 2.$$

Donc :

$$|\lfloor j/d \rfloor - \lfloor k/d \rfloor| \leq ||i/d - j/d|| + ||i/d - k/d|| \leq 2(d_n/d + 2). \quad (13)$$

D'après les relations (12) et (13), nous obtenons  $r = 0$  ou  $1$ .

Si  $r = 0$  alors :

$$\begin{aligned} \lfloor j/d \rfloor - \lfloor k/d \rfloor = 0 &\implies -d < j - k < d \\ &\implies |j - k| < d. \end{aligned} \quad (14)$$

Mais la relation (14) est en contradiction avec l'Observation 4.2.7.

Si  $r = 1$ , nous pouvons alors supposer sans perte de généralité que  $\lfloor j/d \rfloor \geq \lfloor k/d \rfloor$  et donc :

$$\lfloor j/d \rfloor - \lfloor k/d \rfloor = 2\lceil d_n/d \rceil + 1 \quad (15)$$

et selon la définition de  $\lfloor \cdot \rfloor$  :

$$\begin{aligned} j/d - 1 < \lfloor j/d \rfloor \leq j/d, \quad -k/d \leq -\lfloor k/d \rfloor < -k/d + 1 \\ \implies j/d - k/d - 1 < \lfloor j/d \rfloor - \lfloor k/d \rfloor < j/d - k/d + 1 \\ \implies j/d - k/d - 2 < \lfloor j/d \rfloor - \lfloor k/d \rfloor - 1 < j/d - k/d. \end{aligned} \quad (16)$$

Nous déduisons des relations (15) et (16) :

$$\begin{aligned} 2d_n/d \leq 2\lceil d_n/d \rceil < j/d - k/d \\ \implies 2d_n < j - k. \end{aligned} \quad (17)$$

Mais la relation (8) est en contradiction avec l'Observation 4.2.7. Ainsi,  $c$  satisfait la condition (b), ce qui termine la preuve du théorème. ■

**Corollaire 4.2.9** *Pour tout nombre entier positif  $x$ ,  $\chi_i(G(x, 2x, \dots, nx)) = \Delta + 1 = 2n + 1$ .*

**Preuve.** En posant  $d_n = nx$  et  $d = x$  dans le Théorème 4.2.8 nous obtenons :

$$\chi_i(G(x, 2x, \dots, nx)) \leq 2\lceil nx/x \rceil + 1 = 2n + 1 = \Delta + 1$$

et comme le nombre chromatique d'incidence de tout graphe de degré maximum  $\Delta$  est supérieur ou égal à  $\Delta + 1$  (Proposition 2.1.2), on obtient :

$$\chi_i(G(x, 2x, \dots, nx)) = 2n + 1 = \Delta + 1. \quad \blacksquare$$

**Théorème 4.2.10** *Soient  $y_1 < y_2 < \dots < y_m$  et  $x$  des nombres entiers positifs, alors*

$$\chi_i(G(\{x, 2x, \dots, nx, y_1, y_2, \dots, y_m\})) \leq \Delta(G) + m + 1 = 2n + 3m + 1.$$

**Preuve.** Nous avons  $G(\{x, \dots, nx, y_1, \dots, y_m\}) = G(x, 2x, \dots, nx) \cup G(y_1, y_2, \dots, y_m)$ . D'après l'Observation 4.2.2, nous en déduisons :

$$\chi_i(G(\{x, 2x, \dots, nx, y_1, y_2, \dots, y_m\})) \leq \chi_i(G(x, 2x, \dots, nx)) + \chi_i(G(y_1, y_2, \dots, y_m))$$

et, grâce au Corollaire 4.2.9 et à la Proposition 4.2.3 nous obtenons :

$$\chi_i(G(\{x, 2x, \dots, nx, y_1, y_2, \dots, y_m\})) \leq 2n + 1 + 3m = \Delta + m + 1.$$

■

**Théorème 4.2.11** *Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{1, 3, \dots, 2n - 1\}$ ,  $n \geq 1$ . Alors  $\chi_i(G(D)) = \Delta + 1 = 2n + 1$ .*

**Preuve.** Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $j \in N(i)$  nous définissons l'application  $c : I(G(D)) \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$  par :

$$c(j, ji) = [i]$$

où  $[i] = i \bmod 2n + 1$ . Clairement  $c$  couvre  $I(G(D))$ . Nous allons prouver que  $c$  est une coloration d'incidence de  $G(D)$ . Remarquons tout d'abord qu'il suffit de prouver que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $j, i \in N(i)$ ,  $c$  satisfait les conditions suivantes :

- (a)  $c(i, ij) \neq c(k, ki)$  ( $j$  peut être égal à  $k$ );
- (b)  $c(i, ij) \neq c(i, ik)$ ,  $j \neq k$ .

– Preuve de (a). Soient  $ij, ik$  deux arêtes de  $G(D)$  et  $c(i, j) = c(k, i)$ . Alors :

$$[j] = [i] \implies j \equiv i \pmod{2n + 1}.$$

Nous obtenons alors :

$$|j - i| = r(2n + 1) \tag{18}$$

pour un entier non négatif  $r$ . D'après la définition de  $G(D)$  nous avons :

$$1 \leq |j - i| \leq 2n - 1. \tag{19}$$

Mais les deux relations (18) et (19) se contredisent,  $c$  satisfait donc la condition (a).

– Preuve de (b). Soient  $ij$  et  $ik$  deux arêtes de  $G(D)$  telles que  $j \neq k$  et  $c(i, j) = c(i, k)$ , alors :

$$[j] = [k] \implies j \equiv k \pmod{2n + 1}.$$

Nous obtenons alors :

$$|j - i| = r(2n + 1) \tag{20}$$

pour un entier non négatif  $r$ . D'après la définition de  $G(D)$  nous avons :

$$\begin{aligned} 1 \leq |i - k| \leq 2n - 1 \text{ et } 1 \leq |i - j| \leq 2n - 1 \\ \implies |k - j| \leq |i - k| + |i - j| \leq 2(2n - 1). \end{aligned} \quad (21)$$

D'après les relations (20) et (21), nous obtenons  $m = 0$  ou  $1$ .

Si  $m = 0$ , alors on obtient  $i = j$ , ce qui contredit notre hypothèse  $j \neq k$ .

Si  $m = 1$ , alors  $|k - j| = 2n + 1$  qui est un nombre entier impair. Mais c'est une contradiction car les deux entiers  $j$  et  $k$  sont pairs (respectivement impairs) si  $i$  est impair (respectivement pair). Ainsi,  $c$  satisfait la condition (b), ce qui termine la preuve de théorème. ■

Concernant la borne inférieure du nombre chromatique d'incidence des graphes distances nous montrons la proposition suivante :

**Proposition 4.2.12** *Pour tout entier pair  $k \geq 4$ , il existe des graphes distances de degré maximum  $k$  et de nombre chromatique d'incidence au moins  $k + 2$ .*

**Preuve.** Soit  $k = 2n$ ,  $n \geq 2$ . Considérons le graphe distance  $G(2, 3, \dots, n + 1)$ ; nous avons  $\Delta(G(2, 3, \dots, n + 1)) = 2n$ . Nous montrons que  $\chi_i(G(2, 3, \dots, n + 1)) \geq 2n + 2$ .

Nous avons  $\chi_i(G(2, 3, \dots, n + 1)) \geq 2n + 1$  (rappelons que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + 1$ ). Supposons  $\chi_i(G(2, 3, \dots, n + 1)) = 2n + 1$  et soit  $c$  une  $(2n + 1)$ -coloration d'incidence de  $G(2, 3, \dots, n + 1)$ . Alors,  $c$  est une  $(2n + 1)$ -coloration d'incidence car,  $G(2, 3, \dots, n + 1)$  est un graphe  $2n$ -régulier. Donc, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  nous avons  $|c(A_x)| = 1$ . Soient  $x_1, x_2, \dots, x_{2n+3}$   $2n+3$  entiers consécutifs et  $c(A_{x_i}) = \{y_i\}$ . Comme nous avons  $2n+1$  couleurs, il existe  $i$  et  $j$ ,  $1 \leq i < j \leq 2n+3$ , tels que  $c(A_{x_i}) = y_i = y_j = c(A_{x_j})$ .

Comme on peut décaler  $c$  si nécessaire, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $c(A_0) = c(A_m) = y_i$  où  $1 \leq m = x_j - x_i \leq 2n + 3$ . Mais ceci est une contradiction car, soit  $0m$  est une arête de  $G(2, 3, \dots, n + 1)$  soit  $0$  et  $m$  ont un voisin en commun. Si  $0m$  est une arête de  $G(2, 3, \dots, n + 1)$ , alors les deux incidences  $(0, 0m)$ ,  $(m, m0)$  sont adjacentes et  $c((0, 0m)) = c((m, m0)) = y_i$ . Si  $0$  et  $m$  ont un voisin  $x$  en commun alors les deux incidences  $(x, x0)$ ,  $(x, xm)$  sont adjacentes et  $c((x, x0)) = c((x, xm)) = y_i$ . ■

### 4.3 Nombre chromatique d'incidence d'un graphe et nombre chromatique de son graphe carré

Dans cette section nous allons étudier le lien entre le nombre chromatique d'incidence d'un graphe et le nombre chromatique de son graphe carré. Nous déterminons le nombre chromatique du graphe carré de certaines familles de graphes en utilisant des résultats obtenus au chapitre 2.

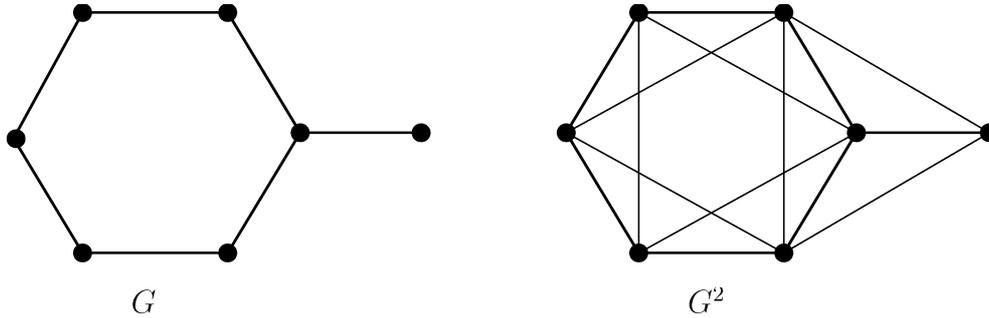


FIG. 4.1 – Un exemple de graphe carré

**Définition 4.3.1** Soit  $G$  un graphe; le *graphe carré* de  $G$ , noté  $G^2$ , est le graphe ayant même ensemble de sommets que  $G$  et tel que deux sommets sont adjacents dans  $G^2$  si et seulement si leur distance dans  $G$  est d'au plus 2.

**Exemple 4.3.2** La Figure 4.1 représente un graphe  $G$  et son graphe carré  $G^2$ .

Il est facile de vérifier que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G^2) \geq \Delta(G) + 1$ . Soit en effet  $u$  un sommet de degré  $\Delta(G)$  de  $G$ . D'après la définition de  $G^2$  le sous-graphe  $H$  de  $G^2$  induit par l'ensemble  $N_G(u) \cup \{u\}$  est une  $(\Delta(G) + 1)$ -clique et donc  $\chi(G^2) \geq \chi(H) = \Delta(G) + 1$ .

Le théorème suivant montre que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G^2)$  est une borne supérieure pour le nombre chromatique d'incidence de  $G$ . Plus précisément, nous avons :

**Théorème 4.3.3** *Pour tout graphe  $G$  ayant au moins une arête,  $\chi(G^2) \leq k$  si et seulement si  $G$  admet une  $(k, 1)$ -coloration d'incidence.*

**Preuve.** Supposons d'abord que  $\chi(G^2) \leq k$  et soit  $c$  une  $k$ -coloration de  $G^2$ . Alors l'application  $c'$  définie pour toute incidence  $(u, uv) \in I(G)$  par  $c'(u, uv) = c(v)$  est une  $(k, 1)$ -coloration d'incidence de  $G$ .

Supposons maintenant que  $\sigma$  est une  $(k, 1)$ -coloration d'incidence de  $G$ . Soit l'application  $\sigma'$  définie pour tout sommet  $u \in V(G^2)$  par  $\sigma'(u) = \sigma(v, vu)$  si il existe un sommet  $v$  tel que  $uv \in E(G)$  (rappelons que d'après la définition d'une  $(k, 1)$ -coloration d'incidence nous avons  $|\sigma(A_u)| = 1$ ), et par  $\sigma'(u) = x$  pour une couleur arbitraire  $x$  dans  $\sigma(I(G))$  si  $u$  est un sommet isolé. L'application  $\sigma'$  est clairement une  $k$ -coloration de  $G^2$ . ■

**Théorème 4.3.4** *Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\chi(G^2(D)) \leq 2\lceil d_n/d \rceil + 1$ .*

**Preuve.** Soit  $c$  la coloration d'incidence définie dans la preuve du Théorème 4.2.8. D'après la définition de  $c$  nous avons  $|c(A_u)| = 1$  pour tout  $u \in \mathbb{Z}$ . Alors  $c$  est une  $(2\lceil d_n/d \rceil + 1, 1)$ -coloration d'incidence de  $G$ . Ainsi, grâce au Théorème 4.3.3 nous obtenons  $\chi(G^2) \leq 2\lceil d_n/d \rceil + 1$ . ■

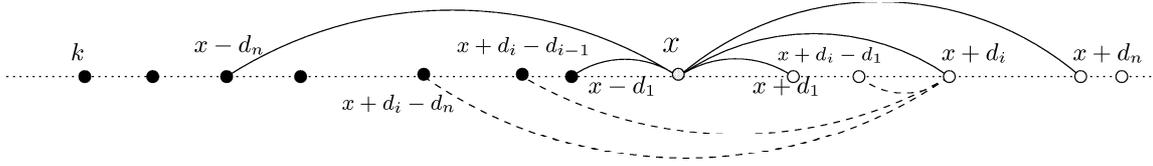


FIG. 4.2 – Configuration pour la preuve du Théorème 4.3.6

**Corollaire 4.3.5** *Pour tout nombre entier positif  $x$ , le nombre chromatique du graphe carré du graphe distance  $G = G(x, 2x, \dots, nx)$  est égal à  $\chi(G^2) = \Delta + 1 = 2n + 1$ .*

**Preuve.** En posant  $d_n = nx$  et  $d = x$  dans le Théorème 4.3.4 nous obtenons :

$$\chi(G^2) \leq 2\lceil nx/x \rceil + 1 = 2n + 1 = \Delta + 1$$

et comme le nombre chromatique de tout graphe de degré maximum  $\Delta$  est supérieur ou égal à  $\Delta + 1$ , on obtient :

$$\chi(G^2) = 2n + 1 = \Delta + 1. \quad \blacksquare$$

Soient  $G$  un graphe et  $c$  une coloration propre de  $G$  telle que pour tout sommet  $u$  de  $G$ ,  $c$  associe des couleurs distinctes aux voisins de  $u$ . Clairement pour tous deux sommets  $u$  et  $v$  de la distance maximum 2 de  $G$ , nous avons  $c(u) \neq c(v)$ . Donc,  $c$  est une coloration propre de  $G^2$ . Inversement, toute coloration  $c$  de  $G^2$  est une coloration propre de  $G$  telle que pour tout sommet  $u$  de  $G$ , elle associe des couleurs distinctes aux voisins de  $u$ . En utilisant cette réalité nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 4.3.6** *Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\chi(G^2(D)) \leq \frac{1}{2}n(n+1) + 1 = \frac{1}{8}((\Delta(G(D)) + 1)^2 + 7)$ .*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer que pour tout  $k > 0$ , le sous-graphe  $H_k$  induit par l'ensemble  $\{-k, -k+1, \dots, 0, 1, \dots\}$  satisfait le résultat. Nous allons définir une  $(\frac{1}{2}n(n+1) + 1)$ -coloration propre  $c$  de  $H_k$  telle que pour tout sommet  $u$  de  $H_k$ ,  $c$  associe des couleurs distinctes aux voisins de  $u$ . Soit  $\{1, 2, \dots, \frac{1}{2}n(n+1) + 1\}$  l'ensemble de  $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$  couleurs. Nous posons tout d'abord  $c(-k) = 1$ . Nous colorions les sommets  $x$ , pour  $x$  variant de  $-k+1$  à  $\infty$ , de gauche à droite, en satisfaisant la condition suivante : pour tout sommet non colorié  $x'$  de  $H_k$ , des couleurs distinctes sont affectées aux voisins déjà coloriés de  $x'$ .

Soient  $N'(x)$  l'ensemble des voisins déjà coloriés de  $x$  et  $N'_{d_i}(x)$  l'ensemble des voisins déjà coloriés de  $x + d_i$ . Il est facile de vérifier que  $|N'(x)| \leq |\{x - d_n, \dots, x - d_1\}| = n$  et  $|N'_{d_i}(x)| \leq |\{x + d_i - d_n, x + d_i - d_{i-1}\}| = n - i$  (voir Figure 4.2). Donc, le nombre de couleurs interdites pour  $x$  est d'au plus

$$|N'(x)| + \sum_{i=1}^n |N'_{d_i}(x)| \leq n + \sum_{i=1}^n (n - i) = n + \frac{1}{2}n(n - 1) = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Comme nous avons  $\frac{1}{2}n(n+1)+1$  couleurs, il existe une couleur  $a$  telle que  $a \notin c(N'(x) \cup (\bigcup_{i=1}^n N'_{d_i}(x)))$ . Nous posons alors  $c(x) = a$ . Clairement  $c$  est une coloration propre de  $G(D)$ .

Nous montrons maintenant que pour tout sommet  $u$  de  $H_k$ , des couleurs distinctes sont affectées aux voisins de  $u$ . D'après la définition de  $c$ , pour tout sommet  $u$  de  $G$  et pour tous  $i, j \in D, i \neq j$ , nous avons  $c(u - d_i) \neq c(u - d_j)$ . Supposons en effet qu'il existe un sommet  $v$  de  $G$  et  $d_i, d_j \in D, i \neq j$ , tels que  $c(v + d_i) = c(v + d_j)$ . Dans ce cas, en posant  $u = v + d_j + d_i$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} c(u - d_i) &= c(v + d_j + d_i - d_i) = c(v + d_j) = c(v + d_i) \\ &= c(v + d_i + d_j - d_j) = c(u - d_j), \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Donc, pour tout  $k < 0$ ,  $\chi(H^2(D)) \leq \frac{1}{2}n(n+1) + 1 = \frac{1}{8}((\Delta(G(D)) + 1)^2 + 7)$ ; ainsi,  $\chi(G^2(D)) \leq \frac{1}{2}n(n+1) + 1 = \frac{1}{8}((\Delta(G(D)) + 1)^2 + 7)$ . ■

En combinant le Théorème 4.3.4 et le Théorème 4.3.6, nous obtenons :

**Corollaire 4.3.7** *Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\chi(G^2(D)) \leq \min\{\frac{1}{2}n(n+1) + 1, 2\lceil d_n/d \rceil + 1\}$ .*

**Théorème 4.3.8** *Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{1, 3, \dots, 2n-1\}$ ,  $n \geq 1$ . Alors  $\chi(G^2(D)) = \Delta + 1 = 2n + 1$ .*

**Preuve.** D'après le Théorème 4.2.11 nous avons  $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1 = 2n + 1$ . Soit  $c$  une  $2n + 1$  coloration d'incidence de  $G$ . Comme pour tout  $u \in \mathbb{Z}$ ,  $d_G(u) = 2n$ , nous avons  $|c(A_u)| = 1$ . Ainsi,  $c$  est une  $(2n + 1, 1)$ -coloration d'incidence de  $G$ . Nous obtenons alors le résultat grâce au Théorème 4.3.3. ■

Agnarsson et Halldórsson en [1] ont caractérisé le nombre chromatique des graphes carré des graphes planaires extérieurs en fonction de leur degré maximum. Ils ont montré le Théorème suivant :

**Théorème 4.3.9** [Agnarsson et Halldórsson [1]]

*Pour tout graphe planaire extérieur  $G$ ,*

$$\chi(G^2) = \begin{cases} \chi(G^2) = \Delta(G) + 3 & \text{si } \Delta(G) = 2, \\ \chi(G^2) = \Delta(G) + 2 & \text{si } \Delta(G) = 3, 4 \text{ ou } 6, \\ \chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2 & \text{si } \Delta(G) = 5, \\ \chi(G^2) = \Delta(G) + 1 & \text{si } \Delta(G) \geq 7. \end{cases}$$

En combinant ce résultat et le Théorème 4.3.3 pour les graphes planaires extérieurs de degré maximum au moins 7, nous obtenons :

**Corollaire 4.3.10** *Tout graphe planaire extérieur  $G$  de degré maximum au moins 7 admet une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ .*

Remarquons que le nombre chromatique d'incidence des graphes planaires extérieurs de degré maximum  $\Delta$  est d'au plus  $\Delta + 2$ . En effet, pour  $\Delta = 2, 3$  ou  $4$  cette borne est atteinte, mais pour  $\Delta = 5$  et  $6$  la question est ouverte.

## 4.4 Colorations propres et acycliques

Nous nous intéressons dans cette section aux colorations propres et acycliques des graphes distances. À notre connaissance, le nombre chromatique acyclique des graphes distances n'a pas été considéré dans la littérature.

Comme précédemment, pour une coloration propre (respectivement acyclique)  $c$  de  $G(d_1, \dots, d_n)$ ,  $c'$  est une coloration propre (respectivement acyclique) obtenue à partir de  $c$  par *décalage* s'il existe un  $k \geq 0$  tel que pour tout  $u \in \mathbb{Z}$ ,  $c'(u) = c(u + k)$ .

**Théorème 4.4.1** *Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\chi(G(D)) \leq \min\{\lceil d_n/d_1 \rceil + 1, n + 1\}$ .*

**Preuve.** Si  $\min\{\lceil d_n/d_1 \rceil + 1, n + 1\} = n + 1$  grâce au Théorème 4.1.1 nous avons  $\chi(G(D)) \leq |D| + 1 = n + 1$ .

Supposons maintenant que  $\lceil d_n/d_1 \rceil + 1 < n + 1$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  nous définissons l'application  $c : G(D) \rightarrow \{0, 1, \dots, \lceil d_n/d_1 \rceil\}$  par :

$$c(i) = \llbracket i/d_1 \rrbracket$$

où  $\llbracket i/d_1 \rrbracket = \lfloor i/d_1 \rfloor \bmod \lceil d_n/d_1 \rceil + 1$ . Nous allons prouver que  $c$  est une  $(\lceil d_n/d_1 \rceil + 1)$ -coloration de  $G(D)$ . Supposons le contraire et soient  $i, j \in \mathbb{Z}$  tels que  $|j - i| \in D$  et  $c(i) = c(j)$ . Comme on peut décaler  $c$  si nécessaire, on peut supposer sans perte de généralité que  $j > i > 0$ . Nous avons alors :

$$\llbracket i/d_1 \rrbracket = \llbracket j/d_1 \rrbracket \implies \lfloor j/d_1 \rfloor - \lfloor i/d_1 \rfloor = r(\lceil d_n/d_1 \rceil + 1) \quad (22)$$

pour un entier  $r$ . Selon la définition du graphe distance  $G(D)$  nous avons  $d_1 \leq j - i \leq d_n$  et nous obtenons :

$$\lfloor j/d_1 \rfloor - \lfloor i/d_1 \rfloor < \lceil d_n/d_1 \rceil + 1. \quad (23)$$

On obtient des relations (22) et (23) que  $r = 0$  et donc  $j - i < d_1$ , ce qui est une contradiction. ■

Lorsque  $\lceil d_n/d_1 \rceil < n$  le Théorème 4.4.1 fournit une meilleure borne que le Théorème 4.1.1. De plus, le Théorème 4.1.2 est un cas particulier du Théorème 4.4.1, en effet il suffit de considérer  $d_1 = x$  et  $d_n = nx$ .

**Théorème 4.4.2** *Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\chi_a(G(D)) \leq \lceil d_n/d \rceil + 1$ .*

**Preuve.** Nous définissons l'application  $c : V(G(D)) \longrightarrow \{0, 1, \dots, \lceil d_n/d \rceil\}$  pour tout  $i$  par

$$c(i) = \lfloor \lfloor i/d \rfloor \rfloor$$

où  $\lfloor \lfloor i/d \rfloor \rfloor = \lfloor i/d \rfloor \bmod \lceil d_n/d \rceil + 1$ . Nous allons montrer que  $c$  est une coloration acyclique de  $G(D)$ . Nous prouvons d'abord que  $c$  est une coloration propre de  $G(D)$ . Supposons en effet qu'il existe  $i, j \in \mathbb{Z}$  tels que  $|j - i| \in D$  et  $c(i) = c(j)$ . Comme on peut décaler  $c$  si nécessaire, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $j > i > 0$ . Nous avons donc :

$$\lfloor \frac{i}{d} \rfloor = \lfloor \frac{j}{d} \rfloor \pmod{\lceil \frac{d_n}{d} \rceil + 1} \implies \lfloor \frac{j}{d} \rfloor - \lfloor \frac{i}{d} \rfloor = r(\lceil \frac{d_n}{d} \rceil + 1) \quad (24)$$

pour un entier  $r$ . D'après la définition du graphe distance  $G(D)$  nous avons :

$$d \leq d_1 \leq j - i \leq d_n \implies 1 \leq \frac{j}{d} - \frac{i}{d} \leq \frac{d_n}{d}.$$

D'où :

$$\lfloor \frac{j}{d} \rfloor - \lfloor \frac{i}{d} \rfloor < \lceil \frac{d_n}{d} \rceil + 1. \quad (25)$$

On obtient des relations (24) et (25) que  $r = 0$  et donc  $j - i < d \leq d_1$ , ce qui est une contradiction.

Nous prouvons maintenant que  $c$  est acyclique. Supposons que  $C = x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$  est un cycle pair de  $G(D)$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $x_1 < x_r$  pour tout  $r$ ,  $2 \leq r \leq 2n$ . D'après la définition de  $c$  il est clair qu'aucun sommet de  $G(D)$  ne peut avoir deux voisins plus grands que lui-même ayant même couleur. Nous avons donc  $c(x_2) \neq c(x_{2n})$  et  $c$  est acyclique. ■

En particulier, dans le cas où  $D = \{x, 2x, \dots, nx\}$ ,  $x > 0$ , nous obtenons :

**Corollaire 4.4.3** *Pour tout entier  $x > 0$ ,  $\chi_a(G(x, 2x, \dots, nx)) = n + 1$ .*

**Preuve.** En posant  $d_n = nx$  et  $d = x$  dans le Théorème 4.4.2 nous obtenons :

$$\chi_a(G(x, 2x, \dots, nx)) \leq \lceil nx/x \rceil + 1 = n + 1.$$

Comme  $G(x, 2x, \dots, nx)$  contient le graphe complet à  $n + 1$  sommets  $K_{n+1}$ , nous avons :

$$n + 1 \leq \chi(G(x, 2x, \dots, nx)) \leq \chi_a(G(x, 2x, \dots, nx)).$$

On obtient donc  $\chi_a(G(x, 2x, \dots, nx)) = n + 1$ . ■

Comme pour tout graphe  $G$ ,  $\chi_a(G) \leq \chi(G^2)$ , d'après le Théorème 4.3.6 nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire 4.4.4** *Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\chi_a(G(D)) \leq \frac{1}{2}n(n + 1) + 1 = \frac{1}{8}((\Delta(G(D)) + 1)^2 + 7)$ .*

En combinant le Théorème 4.4.2 et le Corollaire 4.4.4, nous obtenons :

**Corollaire 4.4.5** *Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\chi_a(G(D)) \leq \min\{\frac{1}{2}n(n+1) + 1, \lceil d_n/d \rceil + 1\}$ .*

## 4.5 Colorations orientées

Nous nous intéressons dans cette section aux colorations orientées des graphes distances. À notre connaissance, le nombre chromatique orienté des graphes distances n'a pas été considéré dans la littérature.

Dans le cas de la coloration orientée, si  $D = \{d_1\}$ , le graphe distance  $G(d_1)$  est composé de  $d_1$  chemins distincts de longueur infinie. Comme tout chemin est  $C_3$ -coloriable, nous avons  $\vec{\chi}(G(d_1)) = 3$ . Dans le cas où  $|D| \geq 2$ , en combinant le Théorème 4.4.2 et le résultat de Raspaud et Sopena (Théorème 3.1.17), nous obtenons la borne supérieure générale suivante :

**Théorème 4.5.1** *Soit  $G(D)$  un graphe distance avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\vec{\chi}(G(D)) \leq (\lceil d_n/d \rceil + 1)2^{\lceil d_n/d \rceil}$ .*

Comme précédemment, si  $D = \{x, 2x, \dots, nx\}$ ,  $x > 0$ , on obtient :

**Corollaire 4.5.2** *Pour tout entier  $x > 0$ ,  $\vec{\chi}(G(x, 2x, \dots, nx)) \leq (n+1)2^n$ .*

**Preuve.** En posant  $d_n = nx$  et  $d = x$  dans le Théorème 4.5.1 nous obtenons le résultat. ■

Comme le graphe distance  $G(D)$ ,  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , est  $2n$ -régulier, en appliquant le résultat de Kostochka, Sopena et Zhu (Théorème 3.1.25) pour cette famille des graphes nous obtenons  $\vec{\chi}(G(D)) \leq 8n^2 2^{2n}$ . Lorsque  $\lceil d_n/d \rceil \leq 2n$  le Théorème 4.5.1 fournit une meilleure borne.

Dans le cas où  $|D| = 2$ , nous allons montrer que  $\vec{\chi}(G(D)) \leq 11$ . Lorsque  $D = \{x, 2x\}$ ,  $x > 0$ , cette borne peut être améliorée. Nous prouvons en effet que  $\vec{\chi}(G(x, 2x)) \leq 7$ .

Pour montrer ces résultats nous avons besoin de rappeler quelques notions.

Un vecteur orienté de taille  $n$  est une séquence  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  dans  $\{0, 1\}^n$ ; soit  $G$  un graphe orienté et  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  une séquence de sommets distincts dans  $G$ . Un sommet  $y$  de  $G$  est un  $\alpha$ -successeur de  $X$  si nous avons  $\alpha_i = 1 \implies x_i y \in A(G)$  et  $\alpha_i = 0 \implies y x_i \in A(G)$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Un graphe orienté  $H$  satisfait la propriété  $P_{k,n}$  pour  $k, n > 0$  si pour tout sous-graphe  $m$ -clique  $H[x_1, x_2, \dots, x_m]$ ,  $1 \leq m \leq k$ , dans  $H$  et tout vecteur orienté  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  de taille  $m$ , il existe au moins  $n$  sommets distincts  $y_1, y_2, \dots, y_n$  dans  $H$  qui sont des  $\alpha$ -successeurs de  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Le tournoi  $QR_p$  ( $p$  est un nombre entier premier de la forme  $4n + 3$ ,  $n \geq 0$ ) est

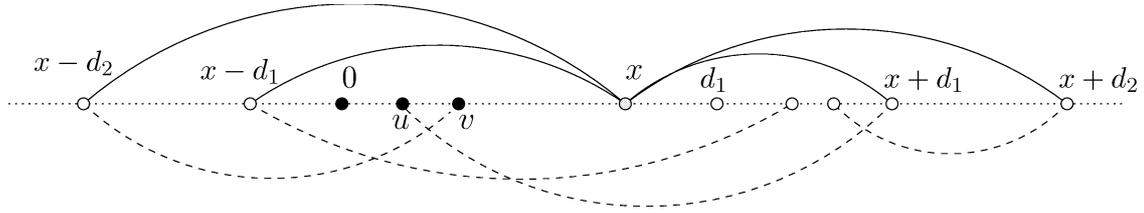


FIG. 4.3 – Configuration pour l'étape 1 du Théorème 4.5.4

le graphe orienté construit à partir des résidus quadratiques non nuls de  $p$ , ayant pour ensemble de sommets  $V(QR_p) = \{0, 1, \dots, p-1\}$  et pour ensemble d'arcs  $A(QR_p) = \{ij \mid j - i \text{ est un résidu quadratique non nul de } p \text{ (modulo } p)\}$ . La propriété suivante du tournoi  $QR_{11}$  nous sera utile par la suite :

**Observation 4.5.3** [59] *Pour tous sommets  $u$  et  $v$  dans  $QR_{11}$ , l'arc  $uv$  possède deux  $\alpha$ -successeurs pour  $\alpha = (0, 0), (0, 1)$  ou  $(1, 1)$  et trois  $\alpha$ -successeurs pour  $\alpha = (1, 0)$ . Ainsi,  $QR_{11}$  satisfait la propriété  $P_{2,2}$ .*

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons la convention suivante pour chacune des configurations : les sommets noirs sont déjà coloriés, alors que les sommets blancs ne sont pas encore coloriés.

**Théorème 4.5.4** *Pour toute orientation  $H$  du graphe distance  $G(d_1, d_2)$ ,  $H \longrightarrow QR_{11}$  et donc  $\vec{\chi}(G(d_1, d_2)) \leq 11$ .*

**Preuve.** Nous allons définir un homomorphisme  $h$  de  $H$  vers  $QR_{11}$ . Nous posons tout d'abord  $h(0) = 0$ . Nous allons colorier les sommets restants de  $H$  en quatre étapes :

1. les sommets  $x$ , pour  $x$  variant de 1 à  $d_1 - 1$ ,
2. les sommets  $x$ , pour  $x$  variant de  $d_1$  à  $d_2 - 1$ ,
3. les sommets  $x$ , pour  $x$  variant de  $d_2$  à  $+\infty$ ,
4. les sommets  $x$ , pour  $x$  variant de  $-1$  à  $-\infty$ .

À chaque étape nous allons associer une couleur dans  $QR_{11}$  à  $x$  telle que pour tout sommet non colorié  $x'$  de  $H$ , des couleurs distinctes sont affectées aux voisins déjà coloriés de  $x'$ . Notons qu'on colorie les sommets dans les étapes 1, 2, 3 de gauche à droite et dans l'étape 4 de droite à gauche.

– Étape 1.

Soit  $N'(x)$  l'ensemble des sommets adjacents aux voisins non coloriés de  $x$  qui ont déjà été  $QR_{11}$ -coloriés (par  $h$ ). Il est facile de vérifier que  $|N'(x)| \leq |\{u, v\}| = 2$  (voir Figure 4.3). Dans ce cas, Nous posons  $h(x) = a$  pour une couleur  $a \in V(QR_{11}) \setminus \{h(u), h(v)\}$ .

– Étape 2.

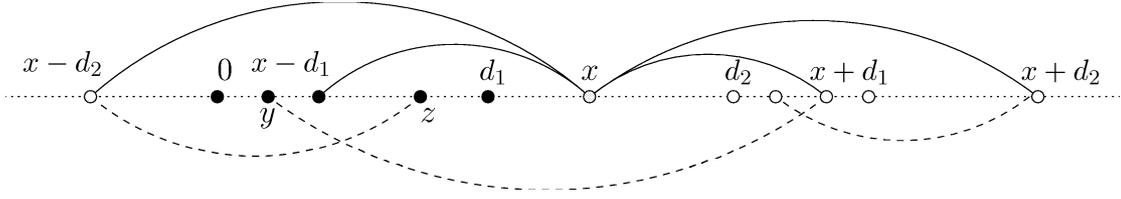


FIG. 4.4 – Configuration pour l'étape 2 du Théorème 4.5.4

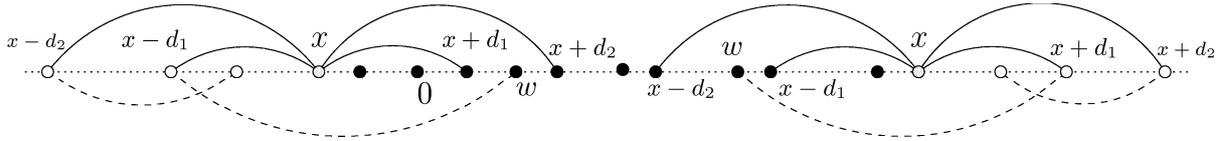


FIG. 4.5 – Configuration pour les étapes 3 et 4 du Théorème 4.5.4

Comme dans le cas précédent nous obtenons  $|N'(x)| \leq |\{y, z\}| = 2$  (voir Figure 4.4). Comme tout sommet dans  $QR_{11}$  possède 5 successeurs et 5 prédécesseurs, en fonction de l'orientation de l'arc  $x(x-d_1)$  on peut poser  $h(x) = b$  pour une couleur  $b$  distincte de  $h(y)$  et de  $h(z)$ .

– Étapes 3 et 4.

Dans ce cas, il est clair que dans l'étape 3 (respectivement dans l'étape 4)  $x$  possède deux voisins déjà  $QR_{11}$ -coloriés  $x-d_1$ ,  $x-d_2$  (respectivement  $x+d_1$  et  $x+d_2$ ) et deux voisins non coloriés. D'après les cas 1, 2 et la condition sur les sommets déjà coloriés, nous avons  $h(x-d_1) \neq h(x-d_2)$  (respectivement  $h(x+d_1) \neq h(x+d_2)$ ). Il est facile de vérifier que dans ce cas nous avons  $|N'(x)| = 1$  (voir Figure 4.5). Soit  $N'(x) = \{w\}$ . Comme  $h(x-d_1) \neq h(x-d_2)$  (respectivement  $h(x+d_1) \neq h(x+d_2)$ ), d'après l'Observation 4.5.3 nous avons au moins deux couleurs  $c$  et  $d$  dans  $QR_{11}$  pour  $x$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $c \neq h(w)$ . Nous posons alors  $h(x) = c$ .

Nous obtenons donc un homomorphisme  $h$  de  $H$  vers  $QR_{11}$ . Ainsi,  $\vec{\chi}(G(d_1, d_2)) \leq 11$ .

■

Dans la preuve du théorème suivant nous utiliserons l'Observation 3.4.1 qui dit que le tournoi  $QR_7$  possède la propriété  $P_{2,1}$ .

**Théorème 4.5.5** *Pour toute orientation  $H$  du graphe distance  $G(x, 2x)$ ,  $H \rightarrow QR_7$  et donc  $\vec{\chi}(G(x, 2x)) \leq 7$ .*

**Preuve.** Comme le graphe distance  $G(x, 2x)$  est isomorphe à  $x$  copies disjointes du graphe distance  $G(1, 2)$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $H$  est une orientation de  $G(1, 2)$ . Nous allons définir un homomorphisme de  $H$  vers  $QR_7$ .

Nous posons tout d'abord  $h(0) = 0$  et  $h(1) = a$  où  $a$  est un successeur (respectivement

prédécesseur) de 0 dans  $QR_7$  si 01 (respectivement 10) est un arc dans  $H$ . Comme  $h(0) \neq h(1)$ , grâce à l'observation 3.4.1, il existe une couleur dans  $QR_7$  pour le sommet -1.

Supposons maintenant que pour tout  $i \in \{-k+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k-1\}$  nous avons défini  $h(i)$ . Comme  $h(k-1) \neq h(k-2)$  (respectivement  $h(-k+1) \neq h(-k+2)$ ), grâce à l'Observation 3.4.1, il existe toujours une couleur pour le sommet  $k$  (respectivement pour le sommet  $-k$ ).

Nous obtenons donc un homomorphisme de  $H$  vers  $QR_7$ . Ainsi,  $\vec{\chi}(G(x, 2x)) \leq 7$ . ■

Concernant la borne inférieure du nombre chromatique orienté de la famille des graphes distances  $G(D)$ ,  $|D| = n$ , on peut dire que le nombre chromatique orienté de cette famille de graphes est d'au moins  $2^{\frac{n}{2}}$ . Pour montrer ceci nous avons besoin de la définition suivante :

**Définition 4.5.6** Un tournoi  $T_N$  est  $n$ -universel ( $n \leq N$ ) si tout tournoi à  $n$  sommets  $T_n$  est isomorphe à un *sous-tournoi* (un sous-graphe induit) de  $T_N$ .

Pour tout nombre entier positif  $n$ , soit  $\lambda(n)$  le plus petit entier  $N$  tel qu'il existe un tournoi  $n$ -universel  $T_N$ . Clairement  $\lambda(n)$  est fini car tout tournoi qui contient des copies disjointes de tous les tournois différents (non isomorphes) à  $n$  sommets est  $n$ -universel.

Nous avons le résultat suivant (voir [50], p. 49) :

**Théorème 4.5.7**  $2^{\frac{1}{2}(n-1)} \leq \lambda(n)$ .

**Preuve.** Il existe au moins  $2^{\binom{n}{2}}/n!$  tournois différents à  $n$  sommets. Donc, pour un tournoi  $n$ -universel  $T_N$ , nous devons avoir :

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leq \binom{N}{n} \leq \frac{N^n}{n!}. \quad (26)$$

Comme les différents tournois à  $n$  sommets doivent être isomorphes aux différents sous-tournois à  $n$  sommets de  $T_N$ , le résultat se déduit immédiatement de l'inégalité (26). ■

La proposition suivante montre que le nombre chromatique orienté de la famille des graphes distances avec ensemble de distance  $D$  d'ordre  $n$  est au moins  $2^{\frac{n}{2}}$  :

**Proposition 4.5.8** *Il existe des graphes distances  $G(D)$  avec  $|D| = n$  de nombre chromatique orienté au moins  $2^{\frac{n}{2}}$ .*

**Preuve.** Considérons le graphe distance  $G(D)$  avec  $D = \{1, 2, \dots, n\}$ . Il est clair que  $G(D)$  contient une infinité de copies du graphe complet  $K_{n+1}$ . Donc, il peut avoir une orientation  $\vec{H}$  contenant tous les tournois non isomorphes à  $n+1$  sommets et, grâce au Théorème 4.5.7, nous obtenons :

$$2^{\frac{1}{2}(n+1-1)} = 2^{\frac{n}{2}} \leq \vec{\chi}(\vec{H}) \leq \vec{\chi}(G(D)).$$

■

Notons que la borne donnée par la Proposition 4.5.8 pour le nombre chromatique orienté des graphes distances  $G(D)$  avec  $|D| = n$  n'est pas intéressante pour  $n < 10$ . En effet, nous verrons que d'après le Corollaire 4.5.12,  $\vec{\chi}(G(1, 2, \dots, n)) = 2n+1$  et nous avons  $2n+1 > 2^{\frac{n}{2}}$  pour  $n < 9$ .

Considérons maintenant le graphe distance orienté  $\vec{G}(D)$ , avec ensemble de distance  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , ayant pour ensemble de sommets  $\mathbb{Z}$  et pour ensemble d'arcs  $A(\vec{G}(D)) = \{ij \mid j - i \in D\}$ . Ainsi, les arcs sont toujours orientés du plus petit sommet vers le plus grand. Pour étudier le nombre chromatique orienté de ce graphe nous allons présenter une propriété plus faible que la propriété  $P_{k,1}$ .

Soient  $T_n$  un tournoi à  $n$  sommets et  $u, v$  deux sommets de  $T_n$ ; on dit que  $u$  domine  $v$  si  $uv$  est un arc dans  $T_n$ . Soit  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  un sous-ensemble de  $k$  sommets de  $T_n$ . On dit que le sommet  $u$  domine  $X$ , s'il domine tout sommet de  $X$ ; en d'autres termes,  $u$  est un  $\alpha$ -successeur de  $X$ , pour le vecteur orienté  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$  de taille  $k$ .

**Définition 4.5.9** Un graphe orienté  $H$  satisfait la propriété  $P'_k$ ,  $k > 0$ , si pour tout sous-graphe  $k$ -clique  $H[x_1, x_2, \dots, x_k]$  dans  $H$ , il existe au moins un sommet  $u$  dans  $H$  qui est  $\alpha$ -successeur de  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , pour  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ .

Remarquons que tout graphe orienté satisfaisant la propriété  $P_{k,1}$  satisfait également la propriété  $P'_k$ .

**Théorème 4.5.10** Si  $C$  est un tournoi satisfaisant la propriété  $P'_n$ , alors  $\vec{G}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  est  $C$ -coloriable.

**Preuve.** Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer que pour tout  $k > 0$  il existe un homomorphisme  $h_k$  du sous-graphe  $H_k$  induit par l'ensemble  $\{\dots, -1, 0, 1, \dots, k\}$  vers  $C$ . Nous posons dans un premier temps  $h_k(k) = \dots = h_k(k - d_1 + 1) = a$  pour une couleur  $a$  dans  $C$ . Soit  $b$  un prédécesseur de  $a$  dans  $C$ . Comme  $(k - d_1)k$  est un arc de  $H_k$ , on peut poser  $h_k(k - d_1) = b$ .

Soit maintenant  $m$  un entier,  $m < k - d_1$ , et supposons que pour tout  $i$ ,  $m - 1 \leq i \leq k$  nous avons défini  $h_k(i)$ . Clairement le sommet  $m$  possède au plus  $n$  voisins déjà  $C$ -coloriés qui sont tous successeurs de  $m$ . Comme  $C$  satisfait la propriété  $P'_n$ , il existe toujours une couleur  $c$  dans  $C$  pour  $m$ , et nous posons  $h_k(m) = c$ .

Nous obtenons donc un homomorphisme  $h_k$  de  $H_k$  vers  $C$ , ce qui termine la preuve du théorème. ■

En [28] Schütte a posé la question suivante : existe-t-il pour tout  $k > 0$  un tournoi  $T_{n(k)}$  satisfaisant la propriété  $P'_k$ . En [29] Erdős a montré par des arguments probabilistes que pour tout  $k$  un tel tournoi existait. Soit  $f(k)$  la valeur minimum de  $n(k)$  tel que  $T_{n(k)}$  existe. Plus précisément, Erdős a montré que  $f(k) \leq k^2 2^k (\log 2 + \epsilon)$  pour tout  $\epsilon$  à

condition que  $k$  soit suffisamment grand. Par ailleurs, Szekeres et Szekeres [60] ont prouvé que  $f(k) \geq (k+2)2^{k-1} - 1$ .

En [35] Graham et Spencer ont montré que si  $p \geq k^2 2^{2k-2}$  est un entier premier de la forme  $4n+3$  le tournoi  $QR_p$  satisfait la propriété  $P'_k$ .

Comme le tournoi  $QR_7$  (respectivement  $QR_{19}$ ,  $QR_{67}$ ) satisfait la propriété  $P_{2,1}$  (respectivement  $P_{3,1}$ ,  $P_{4,1}$ ), nous obtenons grâce au Théorème 4.5.10  $\vec{\chi}(\vec{G}(d_1, d_2)) \leq 7$  (respectivement  $\vec{\chi}(\vec{G}(d_1, d_2, d_3)) \leq 19$ ,  $\vec{\chi}(\vec{G}(d_1, d_2, d_3, d_4)) \leq 67$ ).

Lorsque le nombre  $\lceil d_n/d_1 \rceil$  n'est pas très loin de  $n$  le théorème suivant nous fournit une meilleure borne pour le nombre chromatique orienté du graphe distance orienté  $\vec{G}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

**Théorème 4.5.11** *Soit  $\vec{G}(D)$  le graphe distance orienté avec  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Alors  $\vec{\chi}(\vec{G}(D)) \leq 2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1$ .*

**Preuve.** Considérons le graphe orienté circulant  $C_{2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1}$  ayant pour ensemble de sommets  $\{0, 1, \dots, 2\lceil d_n/d_1 \rceil\}$  et pour ensemble d'arcs  $\{ij \mid 1 \leq j-i \leq \dots, \lceil d_n/d_1 \rceil\}$ . Il est facile de vérifier que l'application  $c : V(\vec{G}(D)) \rightarrow V(C_{2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1})$  définie pour tout  $i \in V(\vec{G}(D))$ , par

$$c(i) = \lfloor i/d_1 \rfloor$$

où  $\lfloor i/d_1 \rfloor = \lfloor i/d_1 \rfloor \bmod 2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1$ , est un homomorphisme.

Supposons en effet que  $ij$  est un arc de  $\vec{G}(D)$  et montrons que  $c(i)c(j)$  est un arc de  $C_{2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1}$ . Comme  $ij$  est un arc de  $\vec{G}(D)$ , nous avons

$$\begin{aligned} j-i \in D &\implies d_1 \leq j-i \leq d_n \\ &\implies 1 \leq \frac{j}{d_1} - \frac{i}{d_1} \leq \frac{d_n}{d_1} \\ &\implies 1 \leq \lfloor \frac{j}{d_1} \rfloor - \lfloor \frac{i}{d_1} \rfloor \leq \lceil \frac{d_n}{d_1} \rceil \\ &\implies \lfloor \frac{i}{d_1} \rfloor - \lfloor \frac{j}{d_1} \rfloor \in A(C_{2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1}) \implies c(i)c(j) \in A(C_{2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1}). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\vec{\chi}(\vec{G}(D)) \leq |C_{2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1}| = 2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1$  ■

Comme précédemment, lorsque  $D = \{x, 2x, \dots, nx\}$ ,  $x > 0$ , nous obtenons :

**Corollaire 4.5.12** *Pour tout entier  $x > 0$ ,  $\vec{\chi}(\vec{G}(x, 2x, \dots, nx)) = 2n + 1$*

**Preuve.** Soit  $D = \{x, 2x, \dots, nx\}$ . En posant  $d_n = nx$  et  $d = x$  dans le Théorème 4.5.11 nous obtenons :

$$\vec{\chi}(\vec{G}(D)) \leq 2\lceil nx/x \rceil + 1 = 2n + 1.$$

Soit maintenant  $H$  un graphe orienté tel que  $\vec{G}(x, 2x, \dots, nx) \longrightarrow H$ . Nous montrons que  $|H| \geq 2n + 1$ .

Il est facile de vérifier que pour tout  $v \in \mathbb{Z}$ , l'ensemble des successeurs  $N_{\vec{G}(D)}^+(u)$  de  $v$  (respectivement l'ensemble des prédécesseurs  $N_{\vec{G}(D)}^-(u)$  de  $v$ ) constitue un tournoi à  $n$  sommets. Donc, pour tout sommet  $u \in V(H)$ , nous devons avoir  $|N_H^+(u)| \geq n$  (respectivement  $|N_H^-(u)| \geq n$ ). Ainsi,  $|H| \geq 2n + 1$ .

On obtient donc  $\vec{\chi}(\vec{G}(x, 2x, \dots, nx)) = 2n + 1$ . ■

# Conclusion et perspectives

Nous venons de présenter des résultats concernant essentiellement la coloration d'incidence et la coloration orientée de certaines familles de graphes. Nous allons rappeler les résultats principaux obtenus et présenter les perspectives de recherche ouvertes dans cette thèse.

\* \* \*

Nous nous sommes tout d'abord intéressé à la coloration d'incidence de certaines familles de graphes. Au deuxième chapitre, nous avons défini la nouvelle notion de  $(k, \ell)$ -coloration d'incidence d'un graphe et nous avons montré que tout graphe  $k$ -dégénéré  $G$  de degré maximum  $\Delta(G)$  admet une  $(\Delta(G) + 2k - 1, k)$ -coloration d'incidence. Ainsi, le nombre chromatique d'incidence de ce graphe est majoré par  $\Delta(G) + 2k - 1$ . Nous avons amélioré par la suite cette borne pour la famille de graphes sans mineur  $K_4$ , qui sont 2-dégénérés : nous avons montré que pour tout graphe  $G$  sans mineur  $K_4$  le nombre chromatique d'incidence de  $G$  est d'au plus  $\Delta(G) + 2$  et que cette borne est optimale. Nous avons montré que tout graphe planaire  $G$  admet une  $(\Delta(G) + 7, 5)$ -coloration d'incidence, et donc que le nombre chromatique d'incidence de tout graphe planaire  $G$  est d'au plus  $\Delta(G) + 7$  (rappelons que les graphes planaires sont 5-dégénérés). Nous avons montré que pour tout graphe  $G$  3-dégénéré, le nombre chromatique d'incidence de  $G$  est d'au plus  $\Delta(G) + 4$ , ce qui améliore le résultat précédent pour cette famille de graphes.

Nous nous sommes intéressé dans la suite de ce deuxième chapitre à la coloration d'incidence des graphes de degré moyen maximum borné. Nous avons montré :

- Tout graphe  $G$  avec  $dmm(G) < 3$  admet une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$ .
- Tout graphe  $G$  avec  $dmm(G) < 3$  et  $\Delta(G) \geq 5$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .
- Tout graphe  $G$  avec  $dmm(G) < 22/9$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .
- Tout graphe  $G$  avec  $dmm(G) < 16/7$  et  $\Delta(G) \geq 4$  admet une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ .

Ces résultats admettent des corollaires pour les graphes planaires de grande maille :

- Tout graphe planaire  $G$  de maille  $g \geq 6$  admet une  $(\Delta(G) + 3, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$ .
- Tout graphe planaire  $G$  de maille  $g \geq 6$  avec  $\Delta(G) \geq 5$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .
- Tout graphe planaire  $G$  de maille  $g \geq 11$  admet une  $(\Delta(G) + 2, 2)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ .
- Tout graphe planaire  $G$  de maille  $g \geq 16$  et avec  $\Delta(G) \geq 4$  admet une  $(\Delta(G) + 1, 1)$ -coloration d'incidence. Ainsi,  $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ .

Rappelons que le nombre chromatique d'incidence de la famille des graphes de degré maximum 2 est 4. La question est ouverte pour les graphes de degré maximum 3, 4 et de degré moyen maximum inférieur à 3, pour les graphes de degré maximum 3 et de degré moyen maximum inférieur à 16/7. Nous souhaitons pouvoir répondre à cette question.

Nous espérons pouvoir améliorer les résultats concernant les graphes  $k$ -dégénérés et les graphes planaires.

Il serait également intéressant de considérer d'autres familles de graphes ou certaines sous-classes de la famille des graphes  $k$ -dégénérés, notamment la famille des  $k$ -arbres partiels.

En [20], Chen, Lam et Shiu ont conjecturé que si  $G$  est un graphe cubique, alors  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ . Ils ont prouvé cette conjecture pour certaines classes de graphes cubiques, en particulier la classe des graphes cubiques Hamiltoniens. Nous avons essayé de démontrer cette conjecture. Cependant, elle reste à ce jour encore ouverte mais nous savons que le plus petit contre-exemple est un graphe de maille  $g \geq 5$ .

\* \* \*

Nous nous sommes intéressé dans le troisième chapitre aux colorations orientées de certaines familles de graphes. Dans ce chapitre nous avons considéré tout d'abord le nombre chromatique et chromatique orienté de la famille  $\xi_k$  des graphes d'excès  $k \geq 0$ . Nous avons montré que tout graphe non orienté d'excès  $k$  a un nombre chromatique majoré par  $\lceil \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 8k}) \rceil$  et que cette borne est optimale. Nous avons montré que le nombre chromatique orienté de tout graphe d'excès  $k$  est d'au plus  $k + 3$ , à l'exception des graphes orientés d'excès 1 contenant un circuit à cinq sommets dont le nombre chromatique orienté est 5. Cette borne est optimale pour le nombre chromatique orienté des graphes d'excès au plus 4. Concernant la borne inférieure générale, nous avons obtenu que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $k$ ,  $k \geq 3 \times 2^{n-1}(2n - 3) + 4$ ,  $\vec{\chi}(\xi_k) \geq 3 \times 2^n - 1$ .

Dans la suite de ce troisième chapitre nous nous sommes intéressé aux graphes planaires  $k$ -extérieurs. Nous avons montré tout d'abord qu'il existe des graphes planaires extérieurs sans triangle de nombre chromatique orienté 6 et donc que le nombre chromatique orienté de la famille des graphes planaires extérieurs sans triangle est égal à 6 ou 7. Ensuite, nous avons montré que tout graphe planaire 2-extérieur sans triangle a un nombre chromatique

orienté majoré par 27 et qu'il existe des graphes planaires 2-externes sans triangle de nombre chromatique orienté au moins 11.

Dans la dernière section de ce troisième chapitre nous nous sommes intéressés au nombre chromatique orienté de la famille des graphes de Halin. Nous avons montré que le nombre chromatique orienté de cette famille de graphes est d'au plus 9. Vignal [61] a conjecturé que le nombre chromatique orienté de la famille des graphes de Halin est égal à 8.

Concernant le nombre chromatique orienté de graphes d'excès  $k$ , nous espérons réduire la distance entre les bornes inférieure et supérieure.

Pour les graphes planaires externes sans triangle, il serait intéressant de savoir s'il existe des graphes planaires externes sans triangle de nombre chromatique orienté 7.

Nous savons que le nombre chromatique orienté de la famille des graphes planaires externes est égal à 7 [57] et le nombre chromatique orienté de la famille des graphes planaires est d'au plus 80 [55] mais aucune borne satisfaisante n'est connue pour les graphes planaires  $k$ -externes,  $k \geq 2$ . Il serait donc intéressant de considérer le nombre chromatique orienté de cette famille de graphes.

Il serait également intéressant d'essayer de démontrer la conjecture de Vignal sur le nombre chromatique orienté de la famille des graphes de Halin. Pour les graphes de degré maximum 3, Sopena [57] a conjecturé que le nombre chromatique orienté de tout graphe connexe de degré maximum 3 est d'au plus 7. La meilleure borne connue pour cette famille de graphes, obtenue par Sopena et Vignal, est 11 [59]. Il serait également intéressant d'essayer d'améliorer cette borne.

\* \* \*

Nous nous sommes intéressés dans le quatrième chapitre aux colorations d'incidences, propres, acycliques et orientées des graphes distances. Dans ce chapitre, nous avons considéré tout d'abord la coloration d'incidence des graphes distances  $G(D)$  avec ensemble de distance  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Après avoir présenté quelques résultats élémentaires nous avons montré que  $G(D)$  a un nombre chromatique d'incidence majoré par  $\min\{2\lceil d_n/d \rceil + 1, \frac{3}{2}\Delta(G)\}$  où  $d = \min\{d_1, d_2 - d_1, \dots, d_n - d_{n-1}\}$ . Lorsque  $\lceil d_n/d \rceil$  est assez proche de  $n$  ce résultat est proche de l'optimal. Nous avons déterminé le nombre chromatique d'incidence des graphes distances  $G(D)$  pour  $D = \{x, 2x, \dots, nx\}$  et pour  $D = \{1, 3, \dots, 2n - 1\}$ .

Dans la suite de ce chapitre nous nous sommes intéressés au lien entre le nombre chromatique d'incidence d'un graphe  $G$  et le nombre chromatique du graphe carré  $G^2$  de  $G$ . Nous avons montré que pour tout graphe  $G$  ayant au moins une arête,  $\chi(G^2) \leq k$  si et seulement si  $G$  admet une  $(k, 1)$ -coloration d'incidence. En utilisant ce théorème, nous avons pu majorer le nombre chromatique du graphe carré de certaines familles de graphes.

Pour le graphe distance  $G(D)$  avec ensemble de distance  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , nous avons montré que le nombre chromatique de  $G(D)$  est d'au plus  $\lceil d_n/d_1 \rceil + 1$ . Lorsque

$d_n/d_1 < n$  ce résultat nous fournit une borne meilleure que les bornes connues.

Concernant la coloration acyclique de cette famille de graphes, nous avons montré que le nombre chromatique acyclique du graphe  $G(d_1, d_2, \dots, d_n)$  est d'au plus  $\lceil d_n/d \rceil + 1$ . Lorsque  $d_n/d$  est proche de  $n$  ce résultat est proche de l'optimal.

Finalement, nous nous sommes intéressé au nombre chromatique orienté des graphes distances. En utilisant le résultat de Raspaud et Sopena (Théorème 3.1.17) et le résultat obtenu pour le nombre chromatique acyclique, nous avons obtenu que le nombre chromatique orienté du graphe distance  $G(d_1, d_2, \dots, d_n)$  est d'au plus  $(\lceil d_n/d \rceil + 1)2^{\lceil d_n/d \rceil}$ . En particulier, pour tout entier  $x > 0$ ,  $\vec{\chi}(G(x, 2x, \dots, nx)) \leq (n+1)2^n$ . Lorsque  $|D| = 2$ , nous avons montré que le nombre chromatique orienté du graphe distance  $G(d_1, d_2)$  est d'au plus 11, et dans le cas particulier où  $D = \{x, 2x\}$ , le nombre chromatique orienté de  $G(D)$  est d'au plus 7.

Nous avons défini le graphe distance orienté  $\vec{G}(D)$ , avec ensemble de distance  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , ayant pour ensemble de sommets  $\mathbb{Z}$  et pour ensemble d'arcs  $A(\vec{G}(D)) = \{ij \mid j - i \in D\}$ . Nous avons montré que le nombre chromatique orienté de  $\vec{G}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  est d'au plus  $2\lceil d_n/d_1 \rceil + 1$ . Lorsque  $d_n/d_1 \leq n$  ce résultat est proche de l'optimal. En particulier, nous avons montré que  $\vec{\chi}(\vec{G}(x, 2x, \dots, nx)) = 2n + 1$ .

Il serait intéressant de regarder le nombre chromatique acyclique et le nombre chromatique orienté des graphes distances  $G(D)$  pour certains cas particuliers d'ensembles de distance  $D$ , par exemple le cas où  $D$  est un ensemble de nombres premiers.

Concernant le lien entre le nombre chromatique d'incidence d'un graphe et le nombre chromatique de son graphe carré, il peut être également intéressant de caractériser la famille des graphes admettant une  $(\Delta(G) + k, 1)$ -coloration d'incidence. Dans ce cas, nous aurons en effet une borne sur le nombre chromatique du graphe carré des graphes appartenant à cette famille.

Par ailleurs, il serait intéressant de considérer le cas où l'ensemble des sommets du graphe  $G(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ,  $\mathbb{Z}$ , est remplacé par  $\mathbb{Z}_k$ . Plus précisément, soit  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\} \subset \mathbb{N}$  tel que  $d_i + d_j < k$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Le graphe distance  $G(\mathbb{Z}_k, D)$  est le graphe ayant pour ensemble de sommets  $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$  et pour ensemble d'arêtes les couples  $ij$  tels que  $j - i \pmod{k} \in D$ . Les graphes de la forme  $G(\mathbb{Z}_k, D)$  sont appelés dans la littérature des graphes *circulants*. Il serait intéressant d'étudier le nombre chromatique, le nombre chromatique acyclique, le nombre chromatique orienté et le nombre chromatique d'incidence de cette famille de graphes.

Il serait également intéressant de considérer le nombre chromatique orienté du graphe distance orienté  $\vec{G}(\mathbb{Z}_k, D)$  ayant même ensemble de sommets et même ensemble de distance que  $G(\mathbb{Z}_k, D)$  et ayant pour d'arcs les couples  $ij$  tels que  $j - i \pmod{k} \in D$ .

Nous avons clairement  $\chi(G(D)) \leq \chi(G(\mathbb{Z}_k, D))$  (respectivement  $\chi_i(G(D)) \leq \chi_i(G(\mathbb{Z}, D))$  et  $\vec{\chi}(\vec{G}(D)) \leq \vec{\chi}(\vec{G}(\mathbb{Z}, D))$ ).

# Bibliographie

- [1] G. Agnarsson and M. Halldórsson. On colorings of squares of outerplanar graphs. *preprint*.
- [2] A. Akiyama and M. Kano. Path factors of a graph. *in : Graph theory and its applications (Wiley, New York, 1989)*.
- [3] J. Akiyama, H. Era, S.V. Gervacio, and M. Watanabe. Path chromatic numbers of graphs. *J. Graph Theory*, 13 :569–575, 1989.
- [4] I. Algor and N. Alon. The star arboricity of graphs. *Discrete Math.*, 75 :11–22, 1989.
- [5] N. Alon, C. McDiarmid, and B. Reed. Acyclic coloring of graphs. *Random Structures and Algorithms*, 2 :277–288, 1991.
- [6] L.D. Andersen. The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10. *Discrete Math.*, 108 :231–252, 1992.
- [7] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable, part i : Discharging. *Illinois J. Math.*, 21 :429–490, 1977.
- [8] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colorable, part ii : Reducibility. *Illinois J. Math.*, 21 :491–567, 1977.
- [9] C. Berge. Graphs and hypergraphs. *North-Holland Mathematical Library*, 6, 1976.
- [10] P. Boiron, E. Sopena, and L. Vignal. Acyclic improper colorings of graphs. *J. Graph Theory*, 32 :97–107, 1999.
- [11] O.V. Borodin. On acyclic coloring of planar graphs. *Discrete Math.*, 25 :211–236, 1979.
- [12] O.V. Borodin. A generalization of Kotzig’s theorem and prescribed edge coloring of planar graphs. *Mathematical Notes of the Academy of sciences of USSR*, 48 :1186–1190, 1990.
- [13] O.V. Borodin, D. Fon-der-Flaass, A.V. Kostochka, A. Raspaud, and E. Sopena. On deeply critical oriented graphs. *J. Combin. Theory, Series B*, 81 :150–155, 2001.
- [14] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, J. Nešetřil, A. Raspaud, and E. Sopena. On universal graphs for planar oriented graphs of a given girth. *Discrete Math.*, 188 :73–85, 1998.
- [15] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, J. Nešetřil, A. Raspaud, and E. Sopena. On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph. *Discrete Math.*, 206 :77–89, 1999.

- [16] M. Borowiecki and P. Mihók. Hereditary properties of graphs. *In : Kulli V.R., editor, Advances in Graph Theory*, Vishwa International Publishers, 1991.
- [17] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 37 :194–197, 1941.
- [18] R.A. Brualdi and J.J.Q. Massey. Incidence strong edge colorings of graphs. *Discrete Math.*, 122 :51–58, 1993.
- [19] G. Chartrand and F. Harary. Planar permutation graphs. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect.B(N.S)*, 3 :433–438, 1967.
- [20] D.L. Chen, P.C.B. Lam, and W.C. Shiu. On incidence coloring for some cubic graphs. *Discrete Math.*, 252 :259–266, 2002.
- [21] D.L. Chen, Pang S.C., and W.C. Shiu. The incidence coloring number of Halin graphs and outerplanar graphs. *Discrete Math.*, 256 :397–405, 2002.
- [22] J.J. Chen, G.J. Chang, and K.C. Huang. Integral distance graphs. *J. Graph Theory*, 25(4) :287–294, 1997.
- [23] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs vi : on several representations of graphs by relational structures. *Discrete Appl. Math.*, 54 :117–149, 1994.
- [24] H. T. Croft, K. J. Falconer, and R. K. Guy. Unsolved problems in geometry. *Springer-Verlag*, New York, 1991.
- [25] W. Deuber and X. Zhu. The chromatic number of distance graphs. *Discrete Math.*, 165/166 :195–204, 1997.
- [26] E.B. Eggleton, P. Erdős, and D.K. Skilton. Colouring the real line. *Combinatorial Theory, Ser. (B)*, 39 :86–100, 1985.
- [27] R.B. Eggleton, P. Erdős, and D.K. Skilton. Colouring prime distance graphs. *Graph and Combinatorics*, 32 :17–32, 1990.
- [28] P. Erdős. Application of probability to combinatorial problems. *Proc. of Colloq. on Combinatorial Methods in Probability Theory, 90-92*, 1962.
- [29] P. Erdős. On a problem in graph theory. *Math. Gaz.*, 47 :220–223, 1963.
- [30] P. Erdős and J. Nešetřil. Problem, in : G. Halász and V.T.Sós, eds., Irregularities of partitions. *Springer, New York*, pages 162–163, 1989.
- [31] R.J. Faudree, R.H. Schelp, A. Gyárfás, and Z. Tuza. Induced matching in bipartite graphs. *Discrete Math.*, 78 :83–87, 1989.
- [32] R.J. Faudree, R.H. Schelp, A. Gyárfás, and Z. Tuza. The strong chromatic index of graphs. *Ars Combin.*, 29B :205–211, 1990.
- [33] G. Fertin, A. Raspaud, and A. Roychowdhury. On the oriented chromatic number of grids. *Inform. Process. Lett.*, 85 :261–266, 2003.
- [34] W. Goddard. Acyclic colorings of planar graphs. *Discrete Math.*, 91 :91–94, 1991.
- [35] R. L. Graham and J. H. Spencer. A constructive solution to a tournament problem. *Canad. Math. Bull.*, 14(1) :45–48, 1971.

- [36] B. Grünbaum. Acyclic coloring of planar graphs. *Israel J. Math.*, 14 :390–408, 1973.
- [37] B. Guiduli. On incidence coloring and star arboricity of graphs. *Discrete Math.*, 163 :275–278, 1997.
- [38] H. Hadwiger, H. Debrunner, and V. Klee. Combinatorial geometry in the plane. *Holt Rinehart and Winston, New York*, 1964.
- [39] P. Horák, H. Qing, and W.T. Trotter. Induced matchings in cubic graphs. *J. Graph Theory*, 17 :151–160, 1993.
- [40] M. Hosseini Dolama and P. Ochem. On the oriented coloring of triangle-free 2-outerplanar graphs. *Preprint*, 2004.
- [41] M. Hosseini Dolama and E. Sopena. On the oriented chromatic number of graphs with given excess. *LaBRI, Rapport interne 1288-03*, 2003.
- [42] M. Hosseini Dolama, E. Sopena, and X. Zhu. Incidence coloring of  $k$ -degenerated graphs. *Discrete Math.*, 283 :121–128, 2004.
- [43] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience, 1995.
- [44] A. Kemnitz and H. Kolberg. Coloring of integer distance graphs. *Discrete Math.*, 191 :113–123, 1998.
- [45] A. Kemnitz and M. Marangio. Colorings and list colorings of integer distance graphs. *Graph Theory and Computing*, Congr. Numer. 151 :75–84, 2001.
- [46] A. Kemnitz and M. Marangio. Edge colorings and total colorings of distance graphs. *Discuss. Math. Graph Theory*, 22(1) :149–158, 2002.
- [47] A.V. Kostochka, E. Sopena, and X. Zhu. Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs. *J. Graph Theory*, 24 :331–340, 1997.
- [48] K.W. Lih, W.F. Wang, and X. Zhu. Coloring the square of a  $K_4$ -minor free graph. *Discrete Math.*, 269 :303–309, 2003.
- [49] L. Lovász. On decomposition of graphs. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1 :237–238, 1966.
- [50] J. W. Moon. *Topics on Tournaments*. Holt, Rinehart and Winston, New York 1968.
- [51] L. Moser and W. Moser. Solution to problem 10. *Canad. Math. Bull.*, 4 :187–189, 1961.
- [52] J. Nešetřil, A. Raspaud, and E. Sopena. Coloring and girth of oriented planar graphs. *Discrete Math.*, 165/166 :519–530, 1997.
- [53] P. Ochem. Oriented coloring of triangle-free planar graphs. *Inform. Process. Lett.*, 92(2) :71–76, 2004.
- [54] J. Qu. Studies on the coloring of some graphs, M. Sc. Thesis of Shandong Institute of Mining and Technonlogy, Taian, People’s Republic of China. 1998.
- [55] A. Raspaud and E. Sopena. Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs. *Inform. Process. Lett.*, 51 :171–174, 1994.
- [56] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas. The four-colour theorem. *J. of Comb. Theory*, 70(B) :2–44, 1997.

- [57] E. Sopena. The chromatic number of oriented graphs. *J. Graph Theory*, 25 :191–205, 1997.
- [58] E. Sopena. There exist oriented planar graphs with oriented chromatic number at least sixteen. *Inform. Process. Lett.*, 81 :309–312, 2002.
- [59] E. Sopena and L. Vignal. A note on the oriented chromatic number of graphs with maximum degree three. *LaBRI, Rapport interne 1125-96*, 1996.
- [60] E. Szekeres and G. Szekeres. On a problem of schütte and erdős. *Math. Gaz.*, (49) :1290–293, 1965.
- [61] L. Vignal. *Homomorphismes et colorations de graphes orientés*. Thèse, Université Bordeaux 1, 1997.
- [62] M. Voigt. Die chromatische zahl einer speziellen klasse unendlicher graphen. *Dissertationsschrift, Techn. Univ. Ilmenau*, 1992.
- [63] H. Walther. Über eine spezielle klasse unendlicher graphen. *In : K. Wagner und R. Bodendiek. Grapentheorie*, Bd.2. Bibl. Inst. :268–295, Mannheim 1990.



- connexe.....14
  - cubique.....11
  - degré moyen.....11
  - disjoint.....9
  - distance.....111
  - fini.....7
  - fortement connexe.....14
  - Halin.....18
  - infini.....7
  - k-connexe.....15
  - k-dégénéré.....17
  - k-régulier.....11
  - non orienté.....7
  - ordre.....7
  - orienté.....7
  - pair.....12
  - planaire.....17
  - planaire 1-extérieur.....90
  - planaire extérieur.....18
  - planaire k-extérieur.....90
  - série-parallèle.....20
  - sous-jacent.....8
  - symétrique.....7
  - taillé d'un graphe.....78
  - trivial.....7
  - graphe biparti
    - complet.....13
  - graphe-bloc.....16
- H
- héréditaire.....21
  - homomorphisme.....8
- I
- incidence.....23
  - index chromatique.....31
    - fort.....31
  - isomorphisme.....9
  - isthme.....15
- K
- k-arbre.....17
    - partiel.....17
  - k-coloration
    - orientée.....69
  - k-coloration (propre).....65
- M
- maille.....12
  - matrice d'incidence.....31
  - mineur.....20
  - mineurs exclus.....21
- N
- n-clique.....12
  - nombre chromatique
    - orienté.....70
  - nombre chromatique
    - acyclique.....67
    - d'incidence.....24
  - nombre cyclomatique.....76
  - nombre de Betti.....76
- P
- prédécesseur.....10
  - propriété.....21
- S
- sans mineur.....20
  - sommet.....7
    - $\alpha$ -successeur.....93
    - k-sommet.....10
    - adjacent.....10
    - interne.....103
    - isolé.....10
    - spécial.....97
  - sommet d'articulation.....15
  - sous-graphe.....9
    - couvrant.....9
    - induit.....9
    - k-clique.....93
    - partiel.....9
  - sous-tournoi.....129
  - spectre.....115
  - subdivision.....20
  - successeur.....10
- T
- tournoi.....12

n-universel.....129

V

• vecteur orienté.....93

• voisin.....10