

# Homomorphismes, colorations et propriétés structurelles de graphes

Sujet de thèse

Mots-clés : Homomorphisme de graphes – Coloration de graphe – Propriété structurelle – Configuration interdite – Algorithme

Laboratoire d'accueil : LaBRI, UMR 5800, Université de Bordeaux

Équipe d'accueil : Combinatoire et algorithmique (thème Graphes et optimisation)

Encadrants :

- František Kardoš, maître de conférences, Université de Bordeaux  
`frantisek.kardos@labri.fr`
- Éric Sopena, professeur, Université de Bordeaux  
`eric.sopena@labri.fr`

## Description détaillée du projet de recherche

La notion d'homomorphisme entre graphes englobe plusieurs concepts fondamentaux de la théorie des graphes [5]. En effet, la question de l'existence d'un homomorphisme d'un graphe  $G$  vers un graphe destination  $H$  d'ordre  $k$  est une généralisation de la question de l'existence d'une coloration propre des sommets de  $G$  avec  $k$  couleurs.

Il existe déjà un large éventail de types de coloration de graphes (de sommets, d'arêtes, d'incidences), avec des contraintes supplémentaires, tantôt locales (par exemple, sur les sommets à distance donnée [7]), tantôt globales (par exemple, sur le découpage du graphe en classes de coloration [1]).

Certains types particuliers de coloration (ou d'homomorphisme) ont été développés dans un premier temps en tant qu'outil technique pour démontrer des résultats sur la coloration classique des graphes [3]. Par la suite, certains se sont révélés intéressants en tant que tels et on été étudiés pour eux-mêmes par différents chercheurs.

La question de l'existence d'un homomorphisme vers un graphe cible est, dans le cas général, fondamentalement complexe. Pour l'approcher, des études se concentrent sur certaines classes de graphes "intéressantes", pour lesquelles la connaissance supplémentaire de propriétés structurelles de ces graphes permet d'établir (ou de réfuter) l'existence d'un homomorphisme (ou d'une coloration) [4]. Pour en citer un exemple des plus célèbres, la planarité d'un graphe garantit que les sommets de celui-ci sont 4-colorables [2].

La démonstration du fameux théorème des quatre couleurs contient deux passages où certaines propriétés de certains graphes sont vérifiées à l'aide de l'ordinateur [8, 9]. La question principale revient à rechercher une 3-coloration des arêtes d'un graphe planaire cubique. L'existence d'une telle coloration est alors démontrée en utilisant la méthode de déchargement : on montre d'abord qu'un contre-exemple minimal ne peut pas contenir certaines configurations (on les appelle configurations réductibles); ensuite, on montre qu'un graphe ne contenant aucune de ces configurations réductibles ne peut pas exister, ce qui entraîne la non-existence d'un contre-exemple au théorème. La réductibilité des configurations et l'inévitabilité de l'ensemble des configurations réductibles sont démontrées à l'aide d'un ordinateur.

En s'inspirant de cette technique, on souhaite développer des méthodes permettant d'automatiser la vérification de la réductibilité de configurations par rapport à des colorations particulières de graphes pour des classes de graphes spécifiques.

Ceci peut concerner des questions ouvertes sur la coloration (classique) des arêtes des graphes planaires (telles que la 4-arête-colorabilité des graphes planaires de degré maximum 4 sans triangles, ou bien la 6-arête-colorabilité des graphes planaires de degré maximum 6 [6]), ou bien d'autres types particuliers d'homomorphismes entre graphes.

En ce qui concerne les classes de graphes étudiées, la recherche se concentrera principalement sur des classes de graphes peu denses (ayant un nombre d'arêtes linéaire par rapport au nombre de sommets), les graphes de degré maximum borné ou encore les graphes sans cycles de petite taille.

## Références

- [1] Noga Alon, Benny Sudakov, Ayal Zaks, Acyclic edge coloring of graphs, *J. Graph Theory* 37 (2001), 157-167.
- [2] Kenneth Appel, Wolfgang Haken, Every Planar Map is Four-Colorable, *Contemp. Math.* 98, AMS 1989.
- [3] Richard A. Brualdi and Jennifer J. Quinn Massey, Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Math.* 122 (1993), 51–58.
- [4] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, Robin Thomas, The strong perfect graph theorem, *Annals of Math.* 164 (2006), 51–229.
- [5] Pavol Hell, Jaroslav Nešetřil, *Graphs and Homomorphisms*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 28, Oxford University Press, 2004.
- [6] Ligang Jin, Yingli Kang, Eckhard Steffen, Face-degree bounds for planar critical graphs, *Electron. J. Comb.* 23 (2016), #P3.21.
- [7] Florica Kramer, Horst Kramer, A survey on the distance-coloring of graphs, *Discrete Math.* 308 (2008), 422–426.
- [8] Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour, Robin Thomas, The four-color theorem, *J. Combin. Theory Ser. B* 70 (1997), 2-42.
- [9] John P. Steinberger, An unavoidable set of  $D$ -reducible configurations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010), 6633–6661.