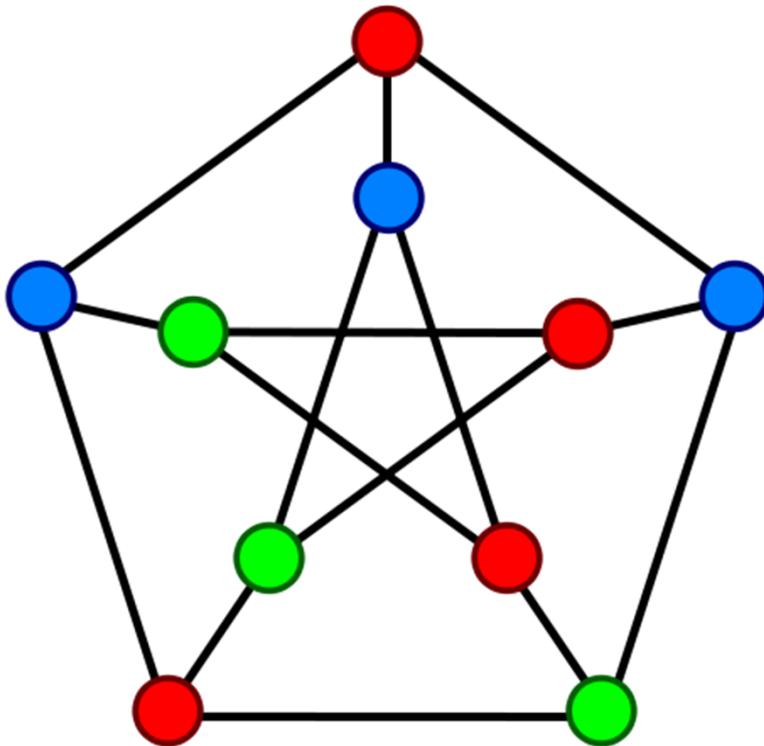


Homomorphismes et Colorations de Graphes



Master 2 - AMF
Eric Sopena

Chapitre 1

Coloration de graphes

Définitions de base

Quelques résultats généraux

Graphes planaires

Graphes critiques

Graphes parfaits

Conjecture de Hadwiger

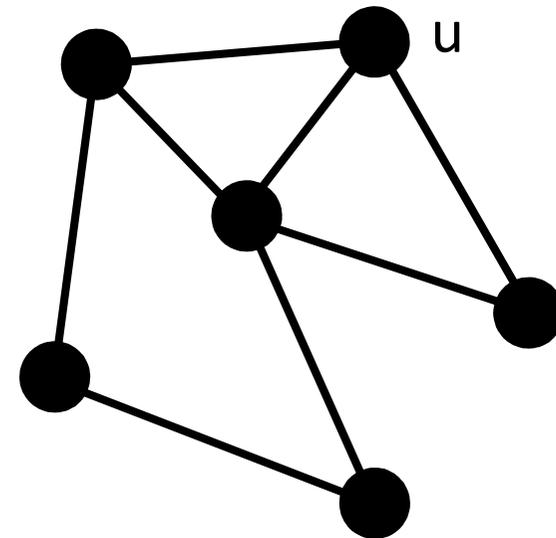
Graphes non orientés

Sauf mention contraire, les graphes que nous considérons sont finis, simples et sans boucles.

Pour tout graphe G , $V(G)$ et $E(G)$ désignent respectivement l'ensemble des sommets de G et l'ensemble des arêtes de G .

Le *degré* $d_G(u)$ d'un sommet u de G est le nombre de voisins du sommet u .

On note $\Delta(G)$ le *degré maximum* du graphe G (i.e. le maximum des degrés de ses sommets) et $\delta(G)$ le *degré minimum* de G .

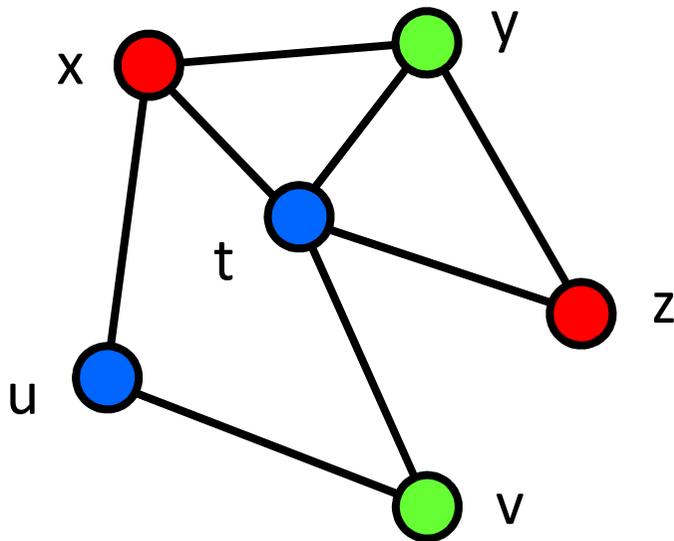


$$d_G(u) = 3,$$
$$\Delta(G) = 4, \delta(G) = 2$$

k-colorations propres

Définition. Une *k-coloration (propre)* (proper k-coloring) d'un graphe G est une application $c : V(G) \rightarrow C$, où C est un ensemble de k *couleurs* (généralement, $C = \{1, 2, \dots, k\}$), telle que pour toute arête uv de $E(G)$, $c(u) \neq c(v)$.

Un graphe qui admet une k -coloration est dit *k-coloriable* (k-colorable).



$$c(x) = c(z) = 1$$



$$c(y) = c(v) = 2$$



$$c(t) = c(u) = 3$$



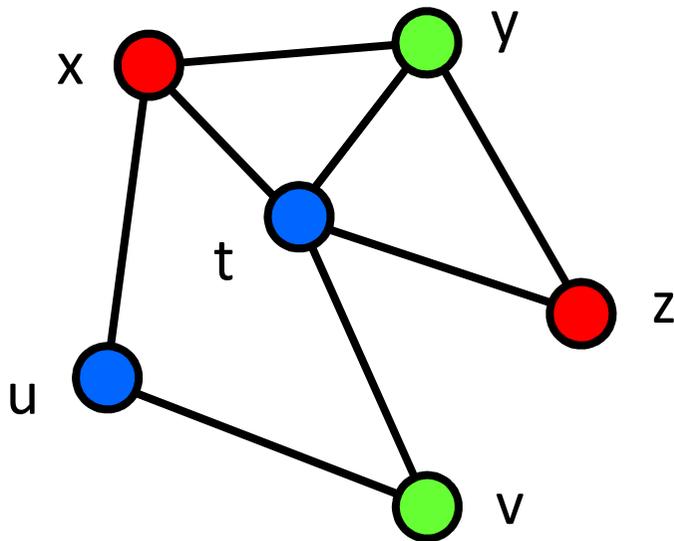
G est 3-coloriable

Classes de couleurs

Définition. Soit c une k -coloration de G . La *classe de couleur* (color-class) de i , $1 \leq i \leq k$, notée $c^{-1}(i)$, est l'ensemble des sommets de couleur i :

$$c^{-1}(i) = \{ u \in V(G) / c(u) = i \}$$

$$c^{-1}(1) = \{ x, z \}, c^{-1}(2) = \{ y, v \}, c^{-1}(3) = \{ t, u \}$$

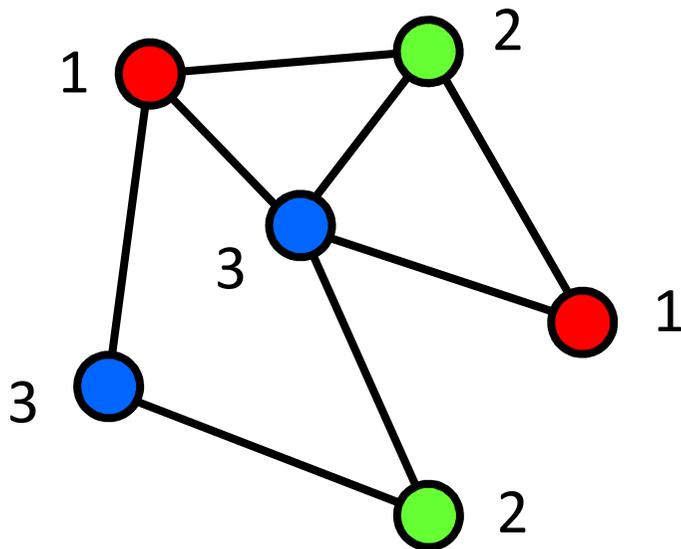


Chaque classe de couleur est un *(ensemble) stable* (independent set). Colorier un graphe en k couleurs revient donc à partitionner l'ensemble de ses sommets en k stables.

Nombre chromatique

Définition. Le *nombre chromatique* (chromatic number) d'un graphe G , noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G est k -coloriable.

Si $\chi(G) = k$, le graphe G est *k-chromatique* (k-chromatic).

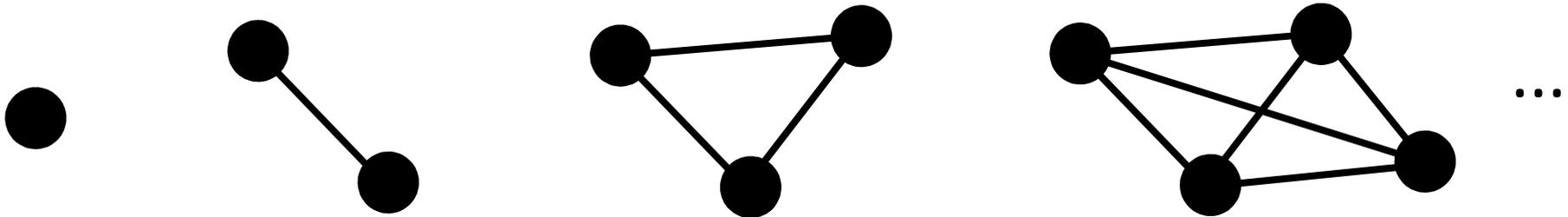


k -chromatique signifie donc :
 k -coloriable et non $(k-1)$ -coloriable.

G est 3-coloriable (cf coloration)
 G n'est pas 2-coloriable (triangle)
donc $\chi(G) = 3$

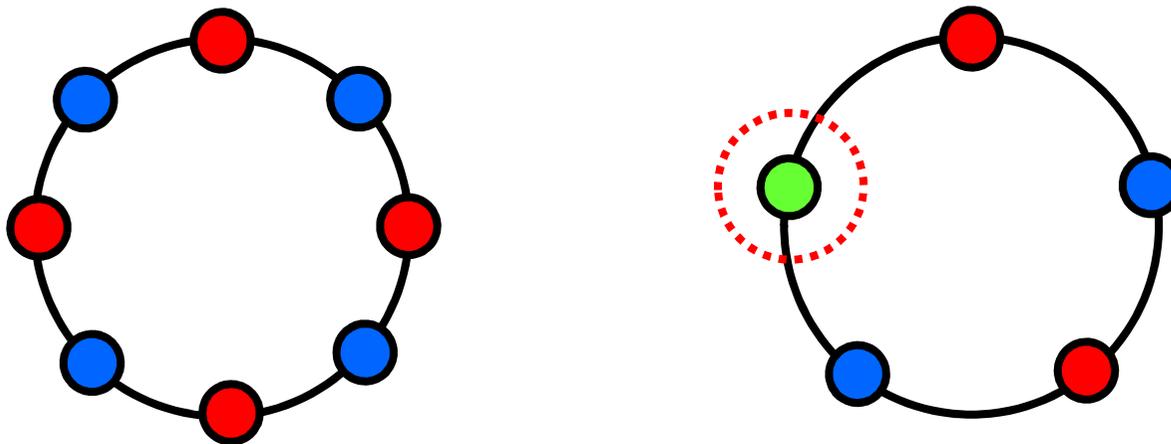
Exemples

Graphes complets. Pour tout n , $\chi(K_n) = n$.



Cycles.

Pour tout n pair, $\chi(C_n) = 2$; pour tout n impair, $\chi(C_n) = 3$.



Minorants de χ

On constate aisément que toute coloration d'un graphe contenant une clique de taille k (comme sous-graphe) nécessite au moins k couleurs.

On note $\omega(G)$ la taille maximale d'une clique dans G (clique number). Nous avons alors :

Proposition. Pour tout graphe G , $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Toute classe de couleur est un ensemble stable de sommets.

On note $\alpha(G)$ la taille maximale d'un stable dans G (independence number). Nous avons alors :

Proposition. Pour tout graphe G d'ordre n , $\chi(G) \geq n / \alpha(G)$.

Interlude 1...

Trouvez un graphe G pour lequel $\omega(G) > n / \alpha(G)$.

Trouvez un graphe G pour lequel $\omega(G) < n / \alpha(G)$.

Trouvez un graphe G pour lequel $\omega(G) = n / \alpha(G)$.

Trouvez un graphe G pour lequel $\omega(G) = \Delta(G) + 1$.

Montrez que si H est un sous-graphe de G , alors $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Montrez que si C est une composante connexe de G , alors $\chi(C) \leq \chi(G)$.

Algorithme First-Fit

(1)

Considérons un graphe G d'ordre n et ordonnons ses sommets de façon quelconque :

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Soit $C = \{1, 2, \dots\}$ un ensemble de couleurs. Un algorithme simple de coloration, glouton (dit *algorithme First-Fit*), est alors le suivant :

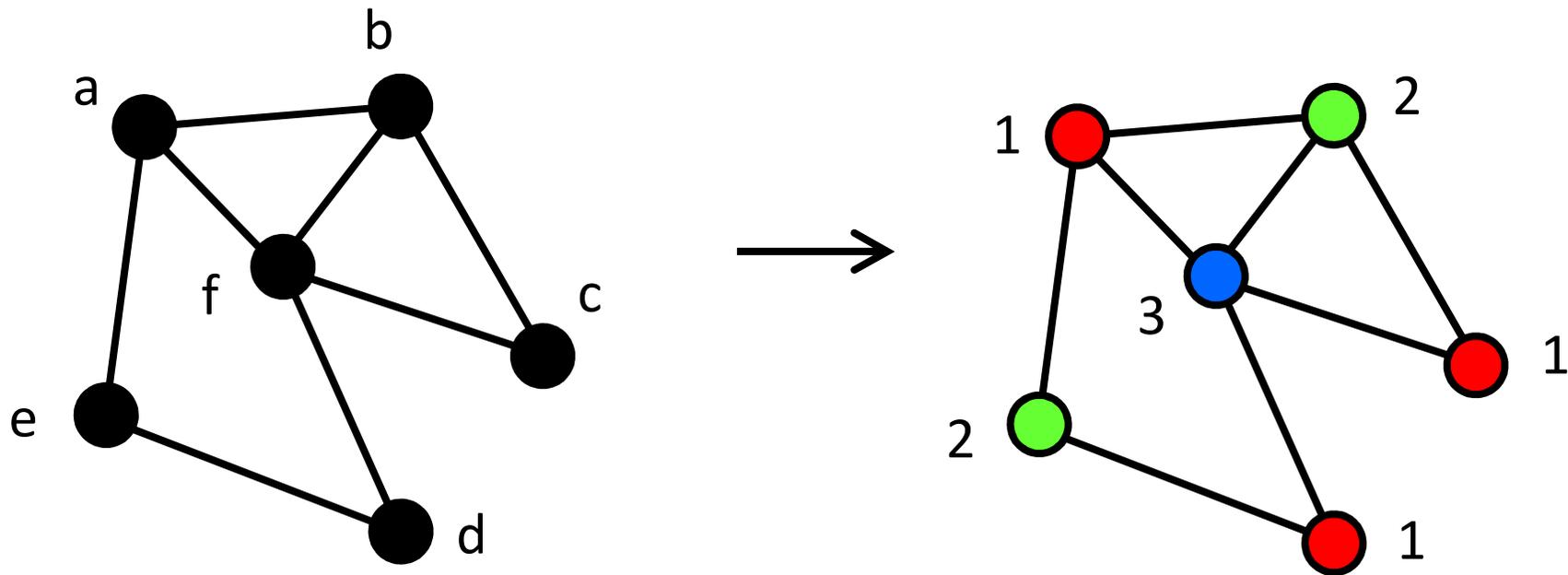
Algorithme FIRST-FIT

- on traite les sommets dans l'ordre v_1, v_2, \dots, v_n ,
- pour colorier le sommet v_i , on utilise la plus petite couleur possible
(en d'autres termes, on affecte à v_i la plus petite couleur non encore utilisée par les voisins de v_i déjà coloriés).

Algorithme First-Fit

(2)

Exemple.



$$V(G) = \{ a, b, c, d, e, f \}$$

Algorithme First-Fit

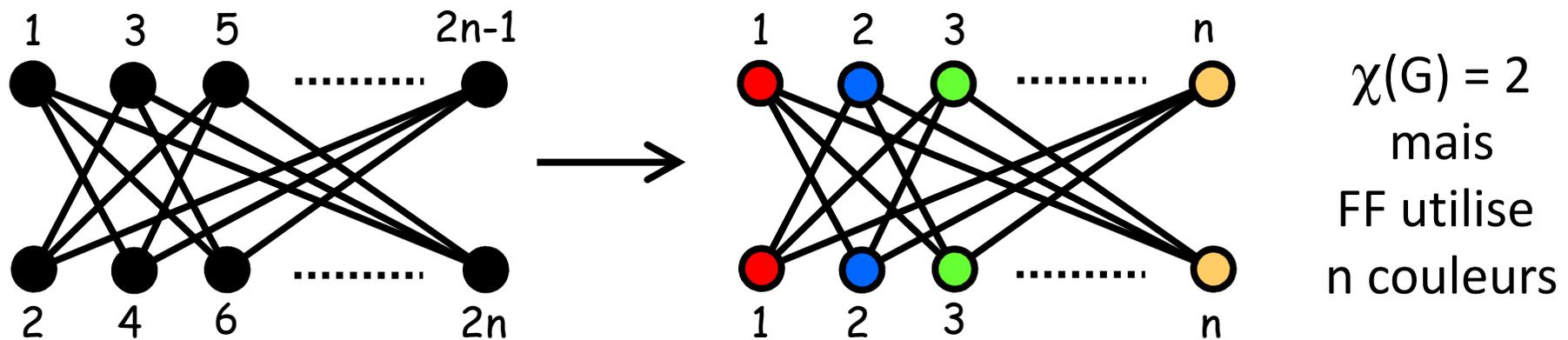
(3)

Lorsqu'on colorie le sommet v_i , le nombre de couleurs interdites (par les voisins de v_i) est d'au plus $d_G(v_i)$. Pour tout graphe G , l'algorithme First-Fit produit donc une coloration utilisant au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs.

Nous avons ainsi :

Proposition. Pour tout graphe G , $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Remarque. Selon l'ordre choisi, cet algorithme peut être très peu performant...



Interlude 2...

Montrez que pour tout graphe G , l'algorithme First-Fit produit une coloration de G utilisant au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs.

Montrez que pour tout graphe G , il est possible d'ordonner les sommets de G de façon telle que l'algorithme First-Fit produise une coloration de G optimale, c'est-à-dire utilisant $\chi(G)$ couleurs.

Complexité du problème de coloration

Problème de k-coloration (k-COL).

entrée : un graphe G , un entier k

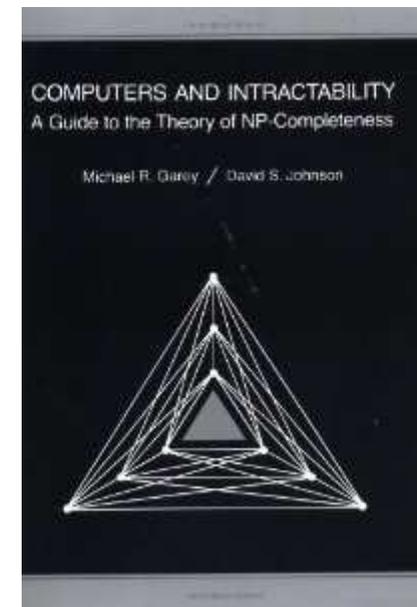
question : le graphe G est-il k -coloriable ?

Théorème. Pour tout $k \geq 3$, le problème k -COL est un problème NP-complet.

Graphes 1-coloriables ?

Un graphe G est 1-coloriable si et seulement si G ne contient aucune arête (1-COL est donc polynomial).

Graphes 2-coloriables ?



Proposition. Un graphe G est 2-coloriable (i.e. biparti) si et seulement si il ne contient aucun cycle impair (2-COL est donc polynomial).

Preuve.

\Rightarrow (contraposée) Si G contient un cycle impair, ce cycle nécessite 3 couleurs et G n'est donc pas 2-coloriable...

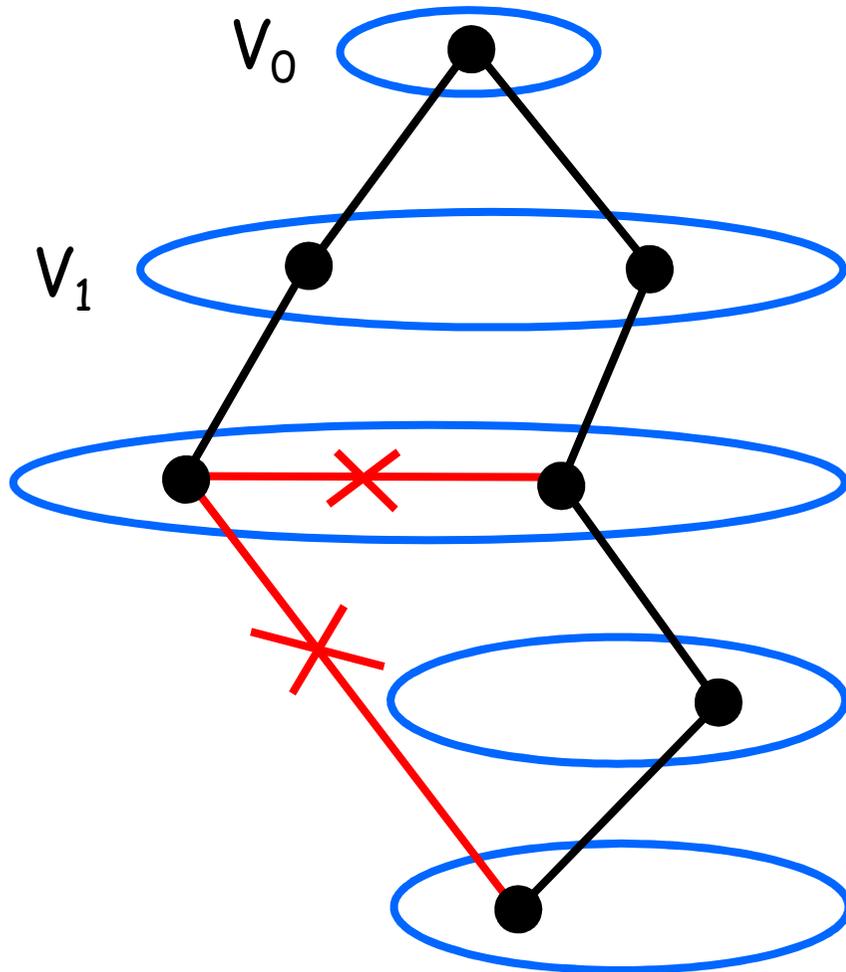
\Leftarrow Soit G un graphe ne contenant pas de cycle impair.

Dans chaque composante connexe de G , choisissons un sommet quelconque, et appelons V_0 l'ensemble des sommets ainsi choisis.

Notons ensuite V_i , pour $i = 1, 2, \dots$, l'ensemble des sommets à distance i d'un sommet de V_0 .

Graphes 2-coloriables

(2)



⇐ (suite)
Remarquons que deux sommets voisins ne peuvent pas appartenir à des ensembles V_i et V_j tels que i et j ont même parité, car G ne contient aucun cycle impair.

L'application qui à tout sommet de V_i associe la couleur 1 si i est impair, ou 2 si i est pair, est donc une 2-coloration de G ...

CQFD

Théorème de Brooks

(1)

Nous avons vu que pour tout graphe G , $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

En 1941, Rowland Leonard Brooks a caractérisé les graphes atteignant cette borne :

Théorème (Brooks, 1941). Un graphe connexe G satisfait l'égalité $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ si et seulement si G est un cycle impair ou un graphe complet.

Preuve (due à László Lovász, 1975).

⇐ Nous avons :

$$\Delta(C_{2k+1}) = 2, \chi(C_{2k+1}) = 3, \text{ donc ok.}$$

$$\Delta(K_n) = n-1, \chi(K_n) = n, \text{ donc ok.}$$



R. L. Brooks, 1938

Théorème de Brooks

(2)

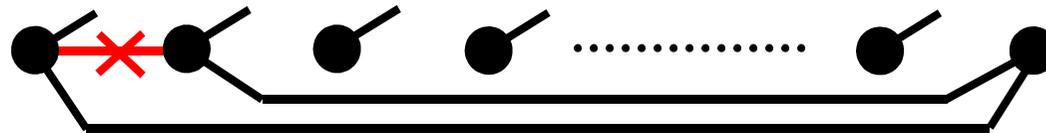
Preuve (suite).

⇒ (contraposée)

Supposons que G n'est ni un graphe complet, ni un cycle impair, et montrons que $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Remarque. *Pour que l'algorithme First-Fit produise une $\Delta(G)$ -coloration de G , il suffit de choisir un ordre des sommets satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *tout sommet, sauf le dernier, possède un voisin à sa droite,*
2. *le dernier sommet est voisin des deux premiers sommets qui, eux, ne sont pas voisins.*



Théorème de Brooks

(3)

⇒ (suite)

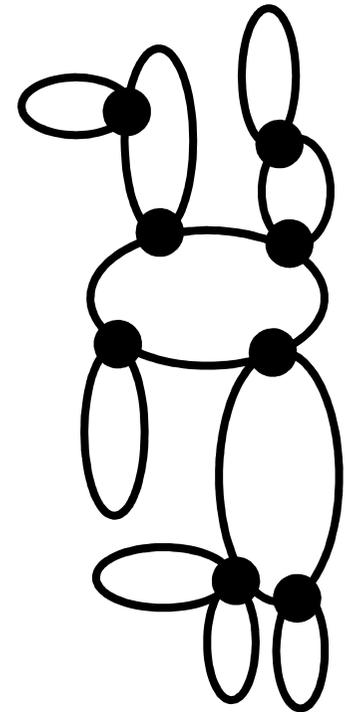
- Il suffit de montrer ce résultat lorsque G est *biconnexe*.

En effet, si on note B_1, B_2, \dots les composantes biconnexes de G , on a $\chi(G) = \max \{ \chi(B_i), i = 1, 2, \dots \}$.

(À partir d'une coloration optimale des composantes biconnexes de G on obtient une coloration optimale de G en permutant éventuellement les couleurs pour assurer la compatibilité des points d'articulation.)

Si $\chi(B_i) \leq \Delta(B_i)$ pour tout i , on obtient :

$$\chi(G) = \max \{ \chi(B_i) \} \leq \max \{ \Delta(B_i) \} \leq \Delta(G).$$



Théorème de Brooks

(4)

⇒ (suite)

- Il suffit de montrer ce résultat lorsque G est *régulier* (tous les sommets sont de degré $\Delta(G)$).

En effet, dans le cas contraire, on peut toujours rajouter des arêtes (et éventuellement des sommets) au graphe G de façon à obtenir un graphe G^* qui soit $\Delta(G)$ -régulier.

On a alors : $\chi(G) \leq \chi(G^*) \leq \Delta(G^*) = \Delta(G)$.

- Enfin, on peut se limiter au cas où $\Delta(G) \geq 3$.

En effet, si $\Delta(G) = 1$, alors $G = K_2$ et, si $\Delta(G) = 2$, alors G est un cycle pair (rappelons que G est biconnexe, donc connexe, et régulier).

⇒ (suite)

- On va maintenant montrer qu'il existe 3 sommets x_1 , x_2 et x_n dans G tels que $x_1x_2 \notin E(G)$, $x_1x_n \in E(G)$, $x_2x_n \in E(G)$, et $G - \{x_1, x_2\}$ est connexe.

1er cas. G est 3-connexe.

Dans ce cas, il suffit de choisir x_n un sommet de G ayant deux voisins x_1 et x_2 non adjacents (de tels sommets existent car G est non complet et $\Delta(G) \geq 3$).

Théorème de Brooks

(6)

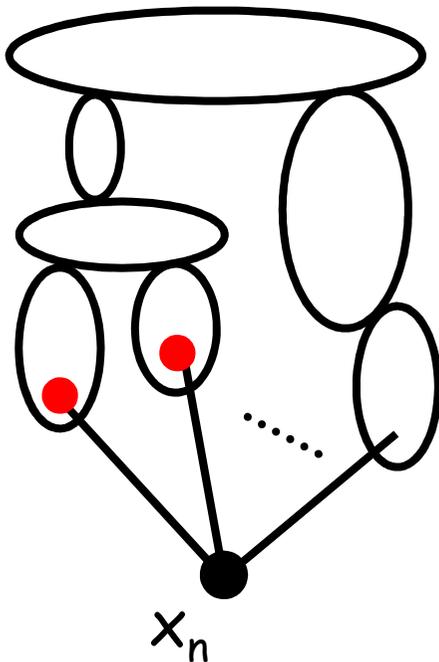
⇒ (suite)

2e cas. G n'est pas 3-connexe.

Soit x_n un sommet tel que $G-x_n$ n'est pas biconnexe, c'est-à-dire possède au moins deux composantes biconnexes.

Comme G est lui-même biconnexe, toute composante biconnexe feuille de $G-x_n$ possède un sommet adjacent à x_n .

Soient alors x_1 et x_2 deux tels sommets, appartenant à des composantes feuilles distinctes (il y a au moins deux feuilles et, dans ce cas, $G-\{x_1, x_2\}$ est bien connexe car $d_G(x_n) \geq 3$).



Théorème de Brooks

(7)

⇒ (suite)

2e cas. (suite et fin)

Soit maintenant x_{n-1} un voisin de x_n (différent de x_1 et x_2), x_{n-2} un voisin de x_n ou x_{n-1} (différent de x_1 et x_2), etc. (car $G - \{x_1, x_2\}$ est connexe).

On obtient ainsi un ordre x_1, x_2, \dots, x_n sur les sommets de G tel que tout sommet x_i , sauf x_n , possède un voisin x_j avec $j > i$.

L'algorithme First-Fit, à partir de cet ordre, produit alors une coloration de G utilisant au plus $\Delta(G)$ couleurs, d'où $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

CQFD

Théorème de Halin

(1)

La borne donnée par le théorème de Brooks peut être améliorée en considérant le degré minimum k des sous-graphes induits (on a toujours $k \leq \Delta(G)$).

Définition. Un graphe G est *k -dégénéré* (k -degenerated) si tout sous-graphe induit de G contient un sommet de degré au plus k .

Ainsi, par exemple, les arbres sont 1-dégénérés.

Nous avons alors :

Théorème (Halin, 1967). Si G est un graphe k -dégénéré, alors $\chi(G) \leq k + 1$.

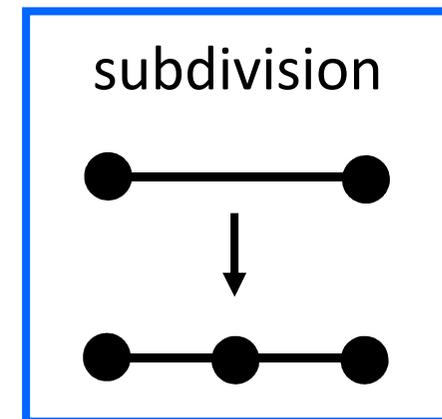
Théorème de Halin

(2)

Théorème (Halin, 1967). Si G est un graphe k -dégénéré, alors $\chi(G) \leq k + 1$.

Dans le cas d'un arbre (1-dégénéré) de degré maximum n , le théorème de Brooks donne une borne de n et celui de Halin une borne de 2...

Dans le cas de la subdivision complète du graphe complet K_n , le théorème de Brooks donne une borne de n et celui de Halin une borne de 3...



Question. Voyez-vous comment utiliser l'algorithme First-Fit pour prouver ce théorème ?...

Graphes sans triangles

(1)

La borne donnée par le théorème de Brooks peut être également améliorée pour certaines familles de graphes. C'est le cas notamment des graphes sans triangles :

Proposition. Si G est un graphe sans triangles, alors

$$\chi(G) \leq 3 \lceil (\Delta(G) + 1) / 4 \rceil$$

Preuve. Posons $k = \lceil (\Delta(G) + 1) / 4 \rceil$, et soit V_1, V_2, \dots, V_k une partition de $V(G)$ telle que le nombre d'arêtes internes (i.e. dont les deux extrémités appartiennent au même V_i) soit minimum.

On va montrer que G est $3k$ -coloriable et, pour cela, montrer que pour tout i le sous-graphe G_i de G induit par V_i est 3-coloriable, ce qui impliquera le résultat recherché.

Preuve. (suite)

Il suffit pour cela de remarquer que G_i est un sous-graphe de degré maximum au plus 3.

En effet, si un sommet u de G_i possède 4 voisins dans G_i , il existe nécessairement une autre partie, disons V_j , dans laquelle u possède au plus trois voisins (sinon, u serait de degré $4k$, or $k = \lceil (\Delta(G) + 1) / 4 \rceil$ et donc $4k > \Delta(G)$...).

Dans ce cas, la partition $\dots, V_i \setminus \{u\}, \dots, V_j \cup \{u\}, \dots$ contiendrait moins d'arêtes internes que la partition initiale.

Ainsi, pour tout i , $\Delta(G_i) \leq 3$ et, par le théorème de Brooks, $\chi(G_i) \leq 3$ (car G_i étant sans triangle, il ne peut contenir K_4).

CQFD

Conjecture de Reed

La borne donnée par le théorème de Brooks est loin d'être optimale. Bruce Reed a proposé la conjecture suivante :

Conjecture (Reed, 1998). Pour tout graphe G ,

$$\chi(G) \leq \lceil (\Delta(G) + \omega(G) + 1) / 2 \rceil$$

- Si $\omega = \Delta$ ou $\omega = \Delta + 1$, cette conjecture découle de l'algorithme First-Fit ($\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$).
- Si $\omega = \Delta - 1$, cette conjecture découle du théorème de Brooks (G n'est dans ce cas ni un cycle impair, ni un graphe complet).

Théorème de Zykov

(1)

Nous avons vu précédemment que pour tout graphe G , $\chi(G) \geq \omega(G)$. On peut naturellement se demander si la présence de cliques dans un graphe est nécessaire pour que le graphe ait un nombre chromatique élevé...

La réponse est non, comme le montre le résultat suivant :

Théorème (Zykov, 1949). Pour tout k , il existe des graphes k -chromatiques sans triangles (triangle-free graphs).

Preuve. (récurrence sur k)

Le résultat est immédiat pour $k = 1$ (graphes sans arêtes), $k = 2$ (graphes bipartis) et $k = 3$ (cycles impairs d'ordre au moins 5)...

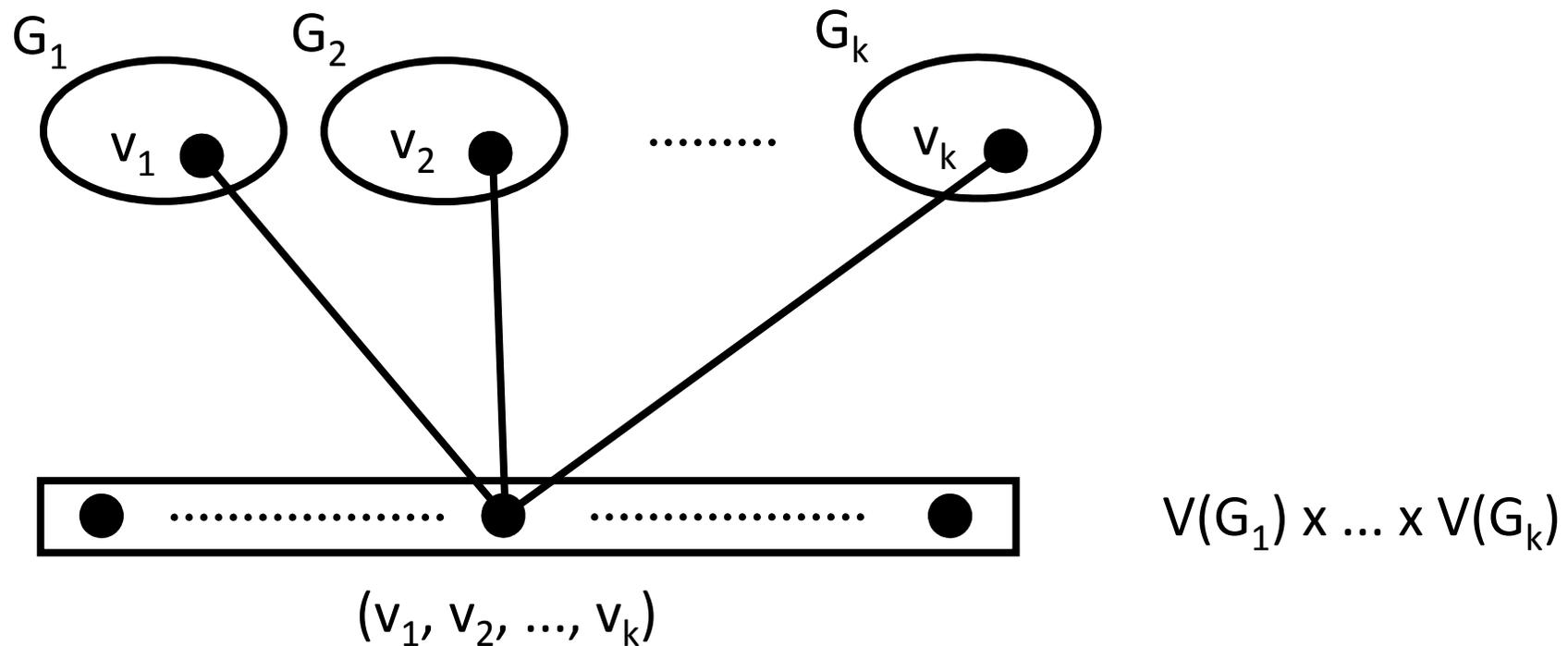
Théorème de Zykov

(2)

Preuve. (suite)

Supposons que nous ayons construit des graphes G_1, G_2, \dots, G_k sans triangles de nombres chromatiques $1, 2, \dots, k$.

On construit le graphe G_{k+1} de la façon suivante :



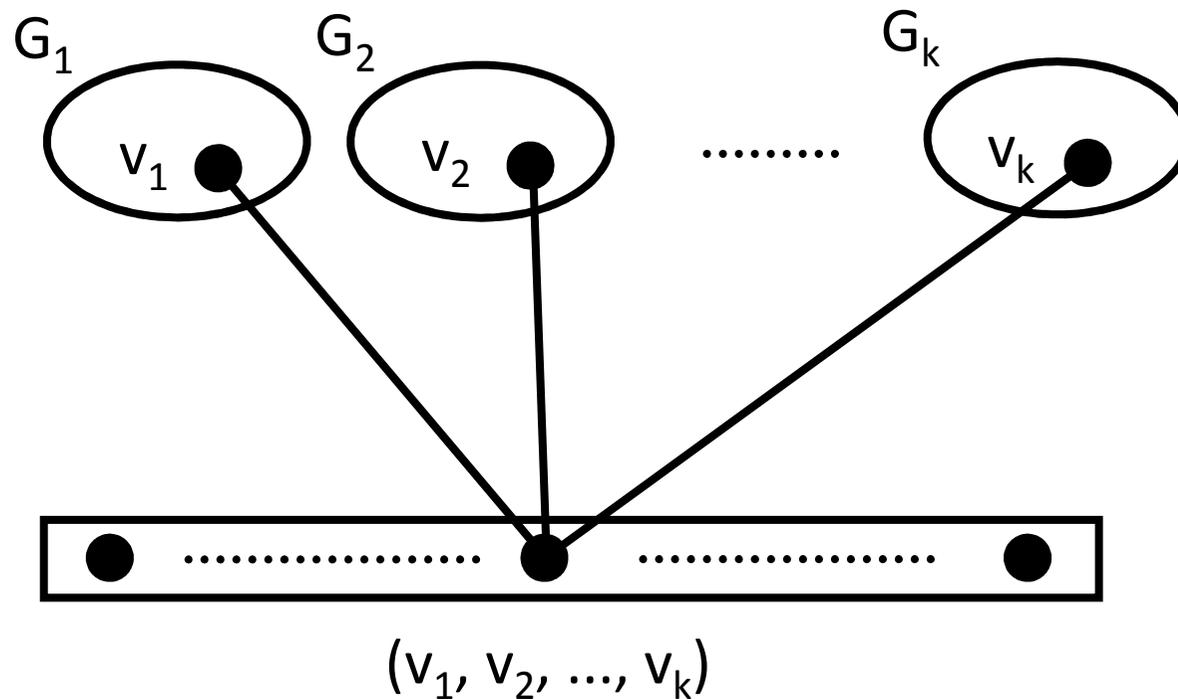
Théorème de Zykov

(3)

Preuve. (suite)

Le graphe G_{k+1} est bien sans triangles.

Il est $(k+1)$ -coloriable (on utilise une $(k+1)$ -ième couleur pour colorier $V(G_1) \times \dots \times V(G_k)$).



Il n'est pas k -coloriable : dans chaque G_i , il existe un sommet v_i colorié i ; le sommet (v_1, v_2, \dots, v_k) nécessite donc la couleur $k+1$...

Théorème de Erdős

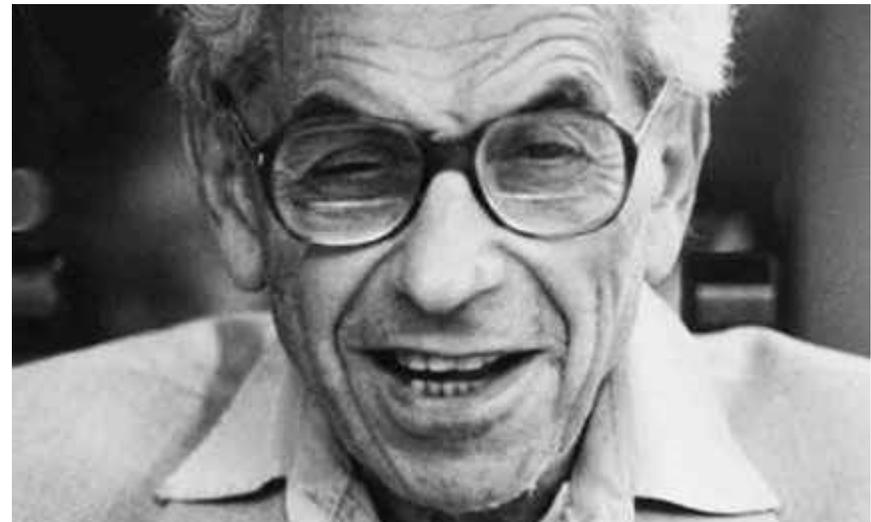
Le théorème de Zykov a été généralisé ensuite par Paul Erdős :

Théorème (Erdős, 1961). Pour tous k et m , il existe des graphes k -chromatiques de *maille* (girth) au moins m .

La maille d'un graphe G est la longueur d'un plus petit cycle dans G (les arbres sont donc de maille infinie).

(Zykov \Leftrightarrow Erdős pour $m = 4$)

La preuve de ce résultat est probabiliste. Des preuves constructives ont été proposées par la suite (Lovász en 1968, Nešetřil et Rödl en 1979).



Interlude 3...

(Graphes de Mycielski)

On définit inductivement la famille des graphes de Mycielski M_k , pour $k \geq 2$, de la façon suivante :

- $M_2 = K_2$, le graphe complet à deux sommets (et donc, $\omega(M_2) = 2$ et $\chi(M_2) = 2$),
- Soit $k \geq 2$ et $V(M_k) = \{v_1, \dots, v_n\}$.
Le graphe M_{k+1} est donné par :
 - $V(M_{k+1}) = V(M_k) \cup \{w_1, \dots, w_n, z\}$, et
 - $E(M_{k+1}) = E(M_k) \cup \{w_i v_j / v_i v_j \in E(M_k)\} \cup \{w_i z, 1 \leq i \leq n\}$.

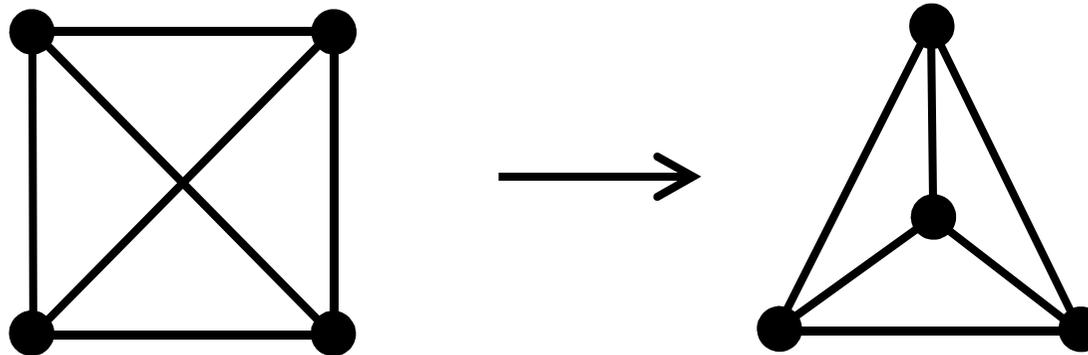
1. Dessinez les graphes M_2 , M_3 et M_4 .
2. Montrez par récurrence que pour tout $k \geq 2$, $\omega(M_k) = 2$.
3. Montrez par récurrence que pour tout $k \geq 2$, $\chi(M_k) = k$.
4. Quel résultat connu peut-on en déduire ?

Graphes planaires

Définition. Un graphe est *planaire* (planar) si, et seulement si, il peut être dessiné sur le plan, ou la sphère, sans que deux arêtes se croisent.

Une *face* est une région connexe délimitée par des arêtes (la face « extérieure » est infinie sur le plan, les faces sont toutes finies sur la sphère).

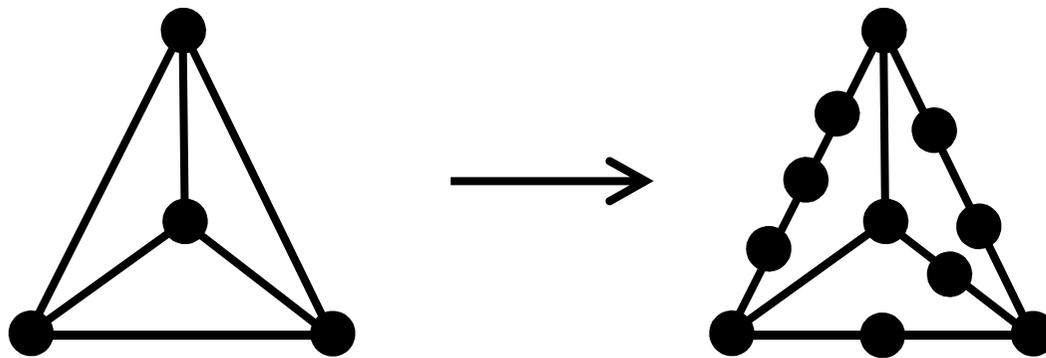
Exemple. Le graphe K_4 est planaire :



Caractérisation des graphes planaires

Définition. Un graphe est une *subdivision* d'un graphe G s'il peut être obtenu en « rajoutant » sur chaque arête de G un nombre quelconque de sommets de degré 2 (éventuellement aucun).

Exemple.



Théorème (Kuratowski, 1930). Un graphe G est planaire si et seulement si il ne contient aucune subdivision de $K_{3,3}$ ou de K_5 .



Kazimierz
Kuratowski

Formule d'Euler

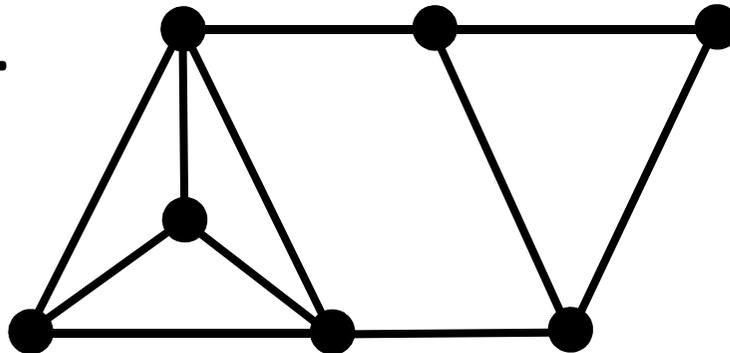
(1)

Théorème (Leonhard Euler, 1707-1783). Si G est un graphe planaire connexe ayant n sommets, m arêtes et f faces, alors

$$n - m + f = 2.$$



Exemple.



$$n = 7$$

$$m = 11$$

$$f = 6$$

$$7 - 11 + 6 = 2$$

Preuve. (récurrence sur $m - n$)

1. Si $m - n = -1$ (G est donc un arbre), alors $f = 1$, d'où

$$n - m + f = 1 + 1 = 2.$$

Formule d'Euler

(2)

Preuve. (suite)

2. Supposons la formule vraie jusqu'à $m - n = k \geq 0$ et soit G un graphe ayant $n + k + 1$ arêtes.

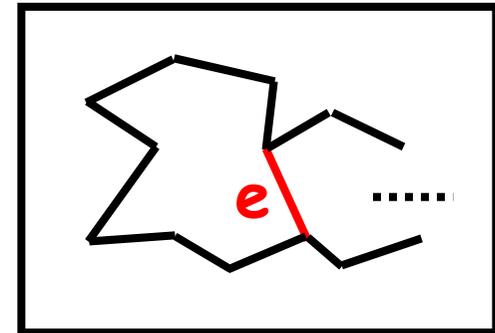
Le graphe G n'est pas un arbre, il contient donc un cycle. Soit e une arête de ce cycle, et $G^* = G - e$.

Le graphe G^* satisfait l'hypothèse de récurrence et nous avons :

$$n = n^*, e = e^* + 1, f = f^* + 1$$

ainsi,

$$n - m + f = n^* - m^* + f^* = 2.$$



CQFD

Formule d'Euler

(3)

Cette formule permet de démontrer de nombreuses propriétés des graphes planaires...

Proposition. Un graphe planaire à n sommets, $n \geq 3$, possède au plus $3n - 6$ arêtes.

Preuve.

Chaque face est incidente à au moins 3 arêtes, et chaque arête appartient à 2 faces, d'où

$$2m = \sum_f (\deg(f)) \geq 3f.$$

Ainsi, $f \leq 2m/3$. Par la formule d'Euler, nous avons alors

$$m + 2 = n + f \leq n + 2m/3,$$

soit $m \leq 3n - 6$.

CQFD

Formule d'Euler

(4)

Proposition. Tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 5.

Preuve.

Comme précédemment, chaque face est incidente à au moins 3 arêtes, d'où $f \leq 2m/3$.

Raisonnons par l'absurde. Si tout sommet est de degré au moins 6, alors

$$2m = \sum_x (\deg(x)) \geq 6n.$$

et donc $n \leq m/3$.

La formule d'Euler donne alors :

$$2 = n - m + f \leq m/3 - m + 2m/3 = 0,$$

d'où la contradiction.

Interlude 4

En utilisant la formule d'Euler, montrez que le graphe K_5 n'est pas planaire.

En utilisant la formule d'Euler, montrez que le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

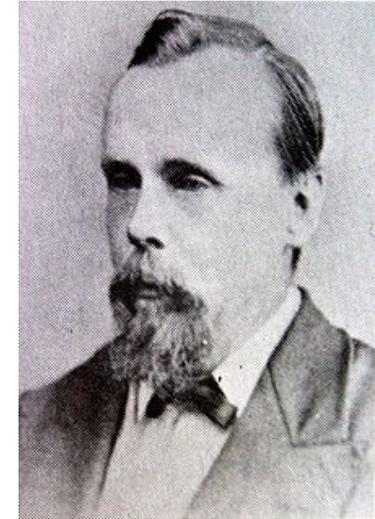
Montrez qu'un graphe planaire à n sommets, $n \geq 3$, ne contenant pas de triangles, possède au maximum $2n - 4$ arêtes.

Le problème des quatre couleurs

(1)

En 1852, Francis Guthrie posa le célèbre « problème des quatre couleurs » :

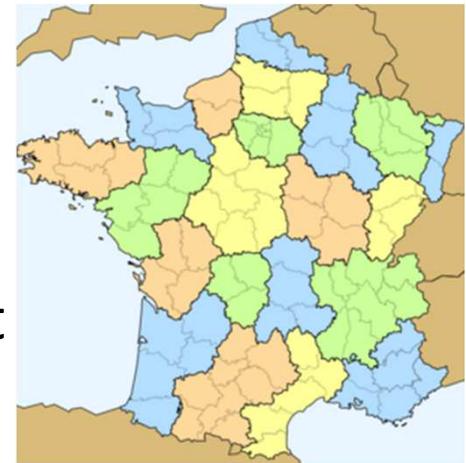
Peut-on colorier n'importe quelle carte en quatre couleurs de façon telle que les pays ayant une frontière commune aient des couleurs distinctes ?



Ce problème fut communiqué à De Morgan, Hamilton, Cayley...

En 1879, Kempe en proposa une solution... qui fut démontrée fautive en 1890 par Heawood (dans son premier article).

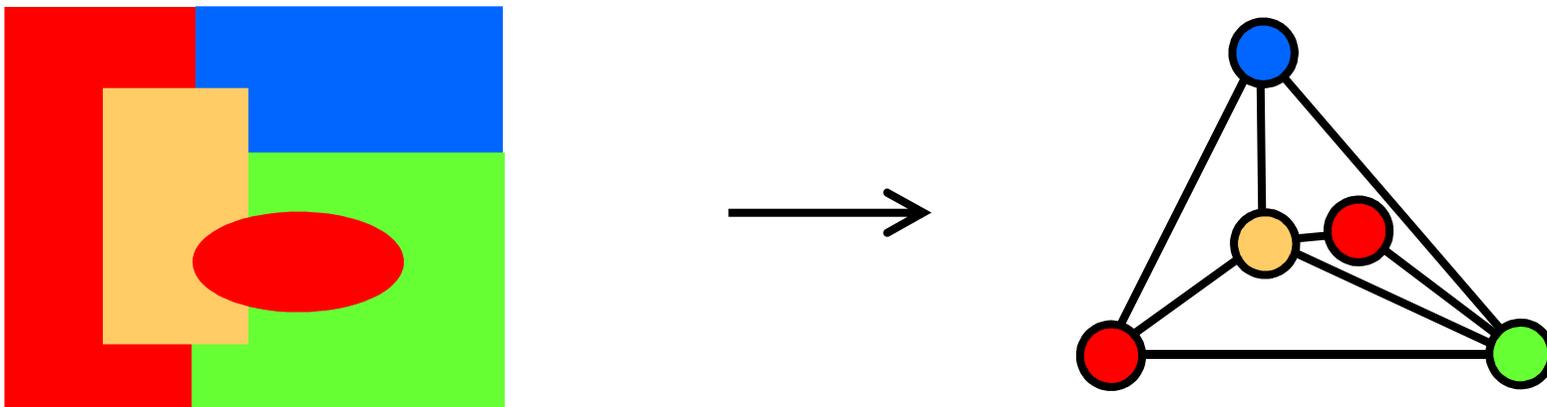
Ce n'est qu'en 1976 que Appel et Haken produisirent une preuve de cette conjecture, preuve utilisant massivement l'ordinateur.



Le problème des quatre couleurs

(2)

Colorier une carte planaire revient en fait à colorier les sommets d'un graphe planaire (le graphe *dual*).



Nous avons vu que tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 5. Cela signifie que les graphes planaires sont 5-dégénérés.

D'après le théorème de Halin, tout graphe planaire est donc 6-coloriable.

Le problème des quatre couleurs

(3)

En 1879, Kempe proposa une preuve de la conjecture des quatre couleurs.

En 1890, Heawood montra que cette preuve était erronée et, en utilisant les arguments de Kempe, prouva le résultat suivant :

Théorème (Heawood, 1890). Tout graphe planaire est 5-coloriable.

Preuve. (par l'absurde)

Supposons le résultat faux et soit G un plus petit contre-exemple (i.e. le résultat est vrai pour tous les sous-graphes stricts de G).



Alfred Kempe
1849 - 1922



Percy Heawood
1861 - 1955

Le problème des quatre couleurs

(4)

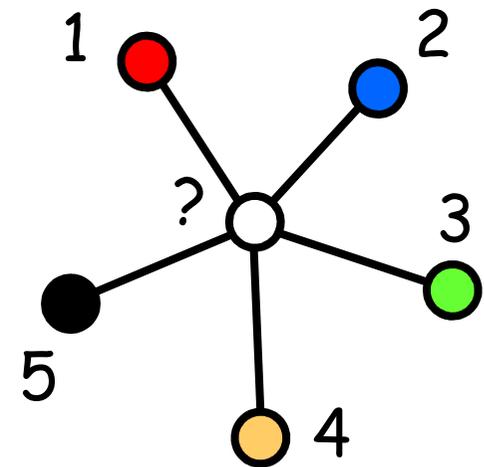
Preuve. (suite)

Nous savons que G contient un sommet x de degré au plus 5, et que le graphe $G-x$ est 5-coloriable (contre-exemple minimal).

Le fait que G soit un contre-exemple entraîne que les couleurs 1, 2, ..., 5 sont toutes utilisées par les voisins de x pour toute 5-coloration de $G-x$.

Soit alors c une 5-coloration de $G-x$.

Sans perte de généralité (quitte à renommer les couleurs) nous pouvons supposer que les voisins de x , notés dans l'ordre cyclique x_1, x_2, \dots, x_5 , sont respectivement coloriés 1, 2, ..., 5.



Le problème des quatre couleurs (5)

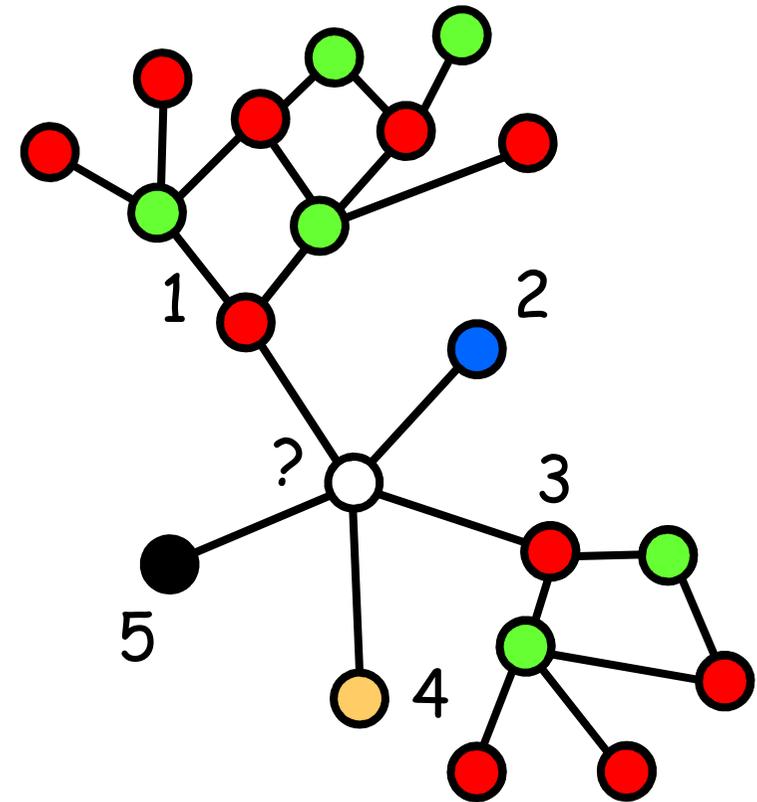
(5)

Preuve. (suite)

Notons $G(i,j)$, pour $1 \leq i < j \leq 5$, le sous-graphe de $G-x$ engendré par les sommets de couleur i ou j .

Supposons que x_1 et x_3 n'appartiennent pas à la même composante connexe de $G(1,3)$.

Dans ce cas, en échangeant les couleurs des sommets de la composante de x_3 , on obtient une 5-coloration de $G-x$ qui peut être étendue à G (car la couleur 1 est libre pour x), contredisant le fait que G est un contre-exemple.



Le problème des quatre couleurs (5)

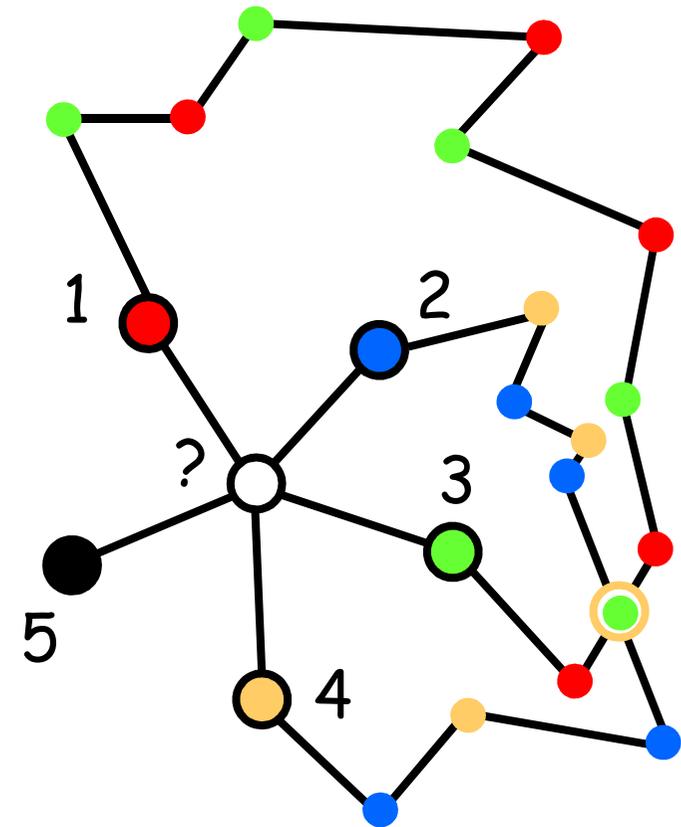
(5)

Preuve. (suite)

Ainsi, il existe une chaîne bicolore 1-3 reliant x_1 à x_3 dans $G-x$ (de telles chaînes sont appelés des chaînes de Kempe).

En raisonnant de la même façon, on montre qu'il existe une chaîne bicolore 2-4 reliant x_2 à x_4 .

On obtient alors une contradiction car ces deux chaînes doivent nécessairement se couper (le sommet intersection doit avoir une couleur dans $\{1,3\} \cap \{2,4\} = \emptyset$).



CQFD

Théorème de Heawood

(1)

Dans le même article, Heawood propose une solution du « problème des n couleurs » pour toutes les surfaces orientables de genre non nul. Mais sa démonstration était erronée... elle fut achevée par Ringel et Youngs en 1968.

Définition. Une *surface orientable de genre* (genus) g est homéomorphe à une sphère possédant g trous. Le *genre* d'un graphe G est alors le genre minimum d'une surface sur laquelle G peut être dessiné sans croisement d'arêtes).

Théorème (Heawood, 1890 - Ringel & Youngs, 1968). Tout graphe de genre $g \geq 1$ peut être colorié en utilisant $H(g)$ couleurs, avec

$$H(g) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$$

(ce nombre est appelé *nombre de Heawood*).

Théorème de Heawwod

(2)

Preuve.

La preuve de ce résultat utilise la formule d'Euler généralisée, qui établit que pour tout graphe G ayant n sommets, m arêtes, f faces et de genre g , nous avons :

$$n - m + f = 2 - 2g$$

(cette formule généralise le cas planaire, lorsque $g = 0$).

À l'aide de cette formule, on va montrer qu'un graphe connexe de genre g à n sommets possède un sommet de degré au plus

$$\left\lfloor \frac{5 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$$

Ce qui impliquera le résultat souhaité, grâce au Théorème de Halin...

Théorème de Heawood

(2)

Preuve (suite).

Nous avons $n - m + f = 2 - 2g$.

Chaque face étant bordée par au moins 3 arêtes, nous avons :

$$2m \geq 3f = 3n - 3n + 6 - 6g,$$

soit $m \leq 3n - 6 + 6g$.

On peut de plus supposer $\delta > 6$ (sinon le résultat est immédiat).

Théorème de Heawood

(2)

Preuve (suite).

Nous avons alors (notons que $n \geq \delta + 1$) :

$$\delta n \leq 2m = 6n - 12 + 12g$$

$$(\delta - 6)n \leq 12g - 12$$

$$(\delta - 6)(\delta + 1) \leq 12g - 12$$

$$\delta^2 - 5\delta - 6 \leq 12g - 12$$

$$\delta^2 - 5\delta + 6 - 12g \leq 0.$$

Et le résultat s'ensuit...

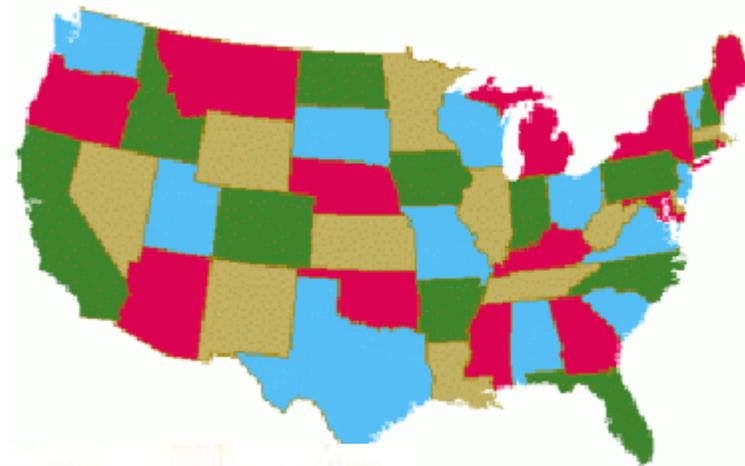
CQFD

Théorème des quatre couleurs

(1)

La conjecture des quatre couleurs a été démontrée par Appel et Haken en 1976 :

Théorème (Appel & Haken, 1976). Tout graphe planaire est 4-coloriable.



Kenneth Appel et
Wolfgang Haken
années 1970

Théorème des quatre couleurs

(2)

Preuve. (idée)

Cette preuve est basée sur l'idée suivante (il suffit de montrer le résultat pour les graphes triangulés, i.e. toutes les faces sont des triangles) :

- il existe un ensemble de 1482 configurations inévitables, c'est-à-dire tel que tout graphe planaire triangulé contient nécessairement l'une de ces configurations comme sous-graphe,
- ces configurations sont réductibles, c'est-à-dire qu'une 4-coloration d'un graphe planaire contenant l'une de ces configurations peut toujours être obtenue à partir d'une 4-coloration d'un graphe planaire « plus petit »...

Ainsi, il ne peut exister de contre-exemple minimal...

Théorème des quatre couleurs

(3)

- On peut observer que cette idée est similaire à celle utilisée dans la preuve de la 5-colorabilité des graphes planaires : nous avons alors un ensemble de 5 configurations (sommet de degré 1, 2, ... ou 5), inévitables (par la formule d'Euler) et réductibles (de façon triviale pour les 4 premières, grâce à l'argument des chaînes de Kempe pour la cinquième)...
- Cette preuve a été simplifiée par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas en 1994 qui ont ramené à moins de 700 le nombre de configurations nécessaires.
- Le graphe K_4 étant planaire, la borne de 4 pour le nombre chromatique des graphes planaires est naturellement optimale...

Graphes planaires sans triangles

En 1959, Grötzsch avait montré que les triangles étaient nécessaires à la 4-coloriabilité des graphes planaires :

Théorème (Grötzsch, 1959). Tout graphe planaire sans triangles est 3-coloriable.

Ce résultat a ensuite été amélioré par V.A. Aksionov :

Théorème (Aksionov, 1974). Tout graphe planaire contenant au plus trois triangles est 3-coloriable (optimal).



Herbert Grötzsch
1902 - 1993

On s'intéresse ici aux graphes k -chromatiques minimaux, i.e. ceux pour lesquels la suppression de n'importe quel sommet entraîne la diminution du nombre chromatique :

Définition. Un graphe G est *critique* (critical) si pour tout sommet x de G nous avons $\chi(G-x) < \chi(G)$. Si $\chi(G) = k$, le graphe G est *k -critique*.

Exemples.

- Les cycles impairs sont 3-critiques.
- Les graphes complets sont critiques.

La notion de graphe critique a été introduite par Dirac en 1951.

L'idée était que la plupart des problèmes relatifs aux graphes k -chromatiques pouvaient se ramener au cas des graphes critiques.

Ainsi par exemple, pour montrer que la conjecture des quatre couleurs était vraie, il « suffisait » de montrer l'impossibilité de l'existence d'un graphe 5-critique planaire...



Gabriel Andrew Dirac
1925 - 1984

Propriétés des graphes critiques

(1)

Propriété. Tout graphe k -chromatique G contient un sous-graphe k -critique.

Preuve.

Si G n'est pas critique, il existe un sommet x_0 tel que $G-x_0$ est k -chromatique.

Si $G-x_0$ n'est pas critique, il existe un sommet x_1 tel que $G-\{x_0, x_1\}$ est k -chromatique.

En continuant ainsi, on finit nécessairement par tomber sur un sous-graphe k -critique...

CQFD

Propriétés des graphes critiques

(2)

Propriété. Tout graphe critique est connexe.

Preuve.

Soit G un graphe non connexe et C une composante connexe de G telle que $\chi(G) = \chi(C)$. Supprimer un sommet dans une autre composante ne modifie donc pas $\chi(G)$.

CQFD

Propriété. Si G est un graphe critique, alors $\delta(G) \geq \chi(G) - 1$.

Preuve.

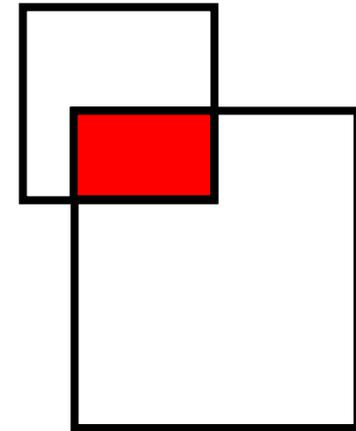
Soit x est un sommet de degré au plus $\chi(G)-2$. Le graphe $G-x$ étant $(\chi(G)-1)$ -coloriable, on obtient aisément une $(\chi(G)-1)$ -coloration de G ...

CQFD

Propriétés des graphes critiques

(3)

Propriété. Un graphe critique G ne contient aucune clique qui soit un *ensemble d'articulation* (on en déduit notamment que G est biconnexe).



Preuve.

Si C est une telle clique, elle contient au plus $\chi(G) - 1$ sommets (car $\chi(C) < \chi(G)$).

Soient A_1, A_2, \dots les composantes connexes de $G - C$ et B_1, B_2, \dots les sous-graphes engendrés par $A_1 \cup C, A_2 \cup C, \dots$

En renommant éventuellement les couleurs, il est possible d'obtenir une $(\chi(G) - 1)$ -coloration de G à partir de $(\chi(G) - 1)$ -colorations de B_1, B_2, \dots

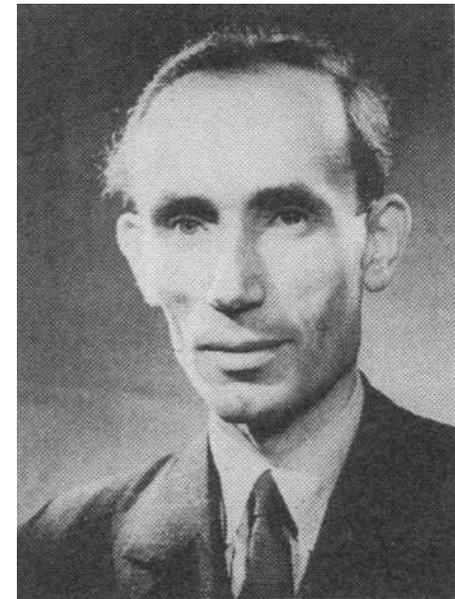
CQFD

Théorème de Gallai

(1)

En 1963, Gallai propose le théorème suivant, qui généralise le théorème de Brooks (caractérisation des graphes connexes pour lesquels $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, i.e. cycles impairs et graphes complets) :

Théorème (Gallai, 1963). Si G est un graphe critique, le sous-graphe de G engendré par les sommets de degré $\chi(G) - 1$ est tel que chacune de ses composantes biconnexes est soit une clique soit un cycle impair.



Tibor Gallai
1912 - 1992

Théorème de Gallai

(2)

Preuve (du fait que le théorème de Gallai généralise le théorème de Brooks).

On veut montrer, en utilisant le théorème de Gallai, que si G est connexe et $(\Delta(G)+1)$ -chromatique, alors G est un graphe complet ou un cycle impair...

Soit G' un sous-graphe $(\Delta(G)+1)$ -critique de G .

Le graphe G' est clairement $\Delta(G)$ -régulier (étant critique son degré minimal est au moins $\Delta(G)$, et son degré maximal au plus $\Delta(G)$ car c'est un sous-graphe de G ...).

Étant critique, G' est biconnexe et donc nécessairement une clique ou un cycle impair d'après Gallai.

Or $G = G'$ car on ne peut rajouter d'arête à G' sans augmenter $\Delta(G') = \Delta(G)$.

CQFD

En utilisant la formule d'Euler, montrez qu'un ballon de football, composé d'hexagones et de pentagones, contient nécessairement 12 pentagones.

(Produit cartésien de graphes) On appelle *produit cartésien* de deux graphes G et H , noté $G \square H$, le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et pour ensemble d'arêtes les couples $((u,v),(u',v'))$ avec soit

- $u=u'$ et $(v,v') \in E(H)$,
- soit $uu' \in E(G)$ et $v=v'$.

Intuitivement, le graphe $G \square H$ est obtenu en remplaçant chaque sommet de G par une copie de H ($u=u'$), et en reliant les sommets « jumeaux » des différentes copies ($v=v'$) selon les arêtes de G ...

- Dessinez le graphe produit $K_3 \square C_4$ (C_4 est le cycle à 4 sommets).
- Montrez que $\chi(G) \leq \chi(G \square H)$ pour tous graphes G et H .
- Montrez que pour tous graphes G et H , les graphes $G \square H$ et $H \square G$ sont isomorphes
(il suffit de donner un isomorphisme φ de $G \square H$ vers $H \square G$, c'est-à-dire une application bijective $\varphi: V(G \square H) \rightarrow V(H \square G)$, telle que $((u,v), (u',v'))$ est une arête de $G \square H$ si et seulement si $(\varphi(u,v), \varphi(u',v'))$ est une arête de $H \square G$).
- En déduire que $\chi(H) \leq \chi(G \square H)$ pour tous graphes G et H .

- Soit $k = \max \{ \chi(G), \chi(H) \}$, c_G une $\chi(G)$ -coloration de G et c_H une $\chi(H)$ -coloration de H .
Montrez que l'application $c : V(G \square H) \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ définie par $c(u,v) = c_G(u) + c_H(v) \pmod{k}$ (i.e. le reste de la division par k de $c_G(u) + c_H(v)$) est une coloration de $G \square H$.
- En déduire une expression de $\chi(G \square H)$ en fonction de $\chi(G)$ et $\chi(H)$ pour tous graphes G et H .

Les théorèmes de Zykov et de Erdős montrent que la présence de cliques de grande taille dans un graphe n'est pas une condition nécessaire pour que le nombre chromatique du graphe soit élevé. À l'opposé de cette situation, se trouvent les graphes parfaits :

Définition. Un graphe G est *parfait* (perfect graph), si pour tout sous-graphe induit H de G nous avons $\chi(H) = \omega(H)$.

- les graphes complets sont parfaits, de même que les cycles pairs, les graphes 1- et 2-chromatiques (bipartis).
- Les cycles impairs de longueur au moins 5 ne sont pas parfaits ($\chi(C_{2k+1}) = 3$, $\omega(C_{2k+1}) = 2$).

Graphes parfaits

(2)

La notion de graphe parfait a été introduite par Claude Berge en 1961 et a donné lieu depuis à de très nombreux travaux de recherche. De nombreux problèmes, difficiles dans le cas général, admettent une solution polynomiale dans le cas des graphes parfaits.

Berge a conjecturé qu'un graphe était parfait si et seulement si son complémentaire était parfait (*conjecture faible des graphes parfaits*).

Cette conjecture a été démontrée par Lovász en 1972.



Claude Berge 1926 - 2002
ici avec Paul Erdős (1995)

Th. faible des graphes parfaits

(1)

Théorème (Lovász, 1972). Un graphe G est parfait si et seulement si le complémentaire G^c de G est parfait.

La preuve de ce résultat est basée sur le résultat préliminaire suivant :

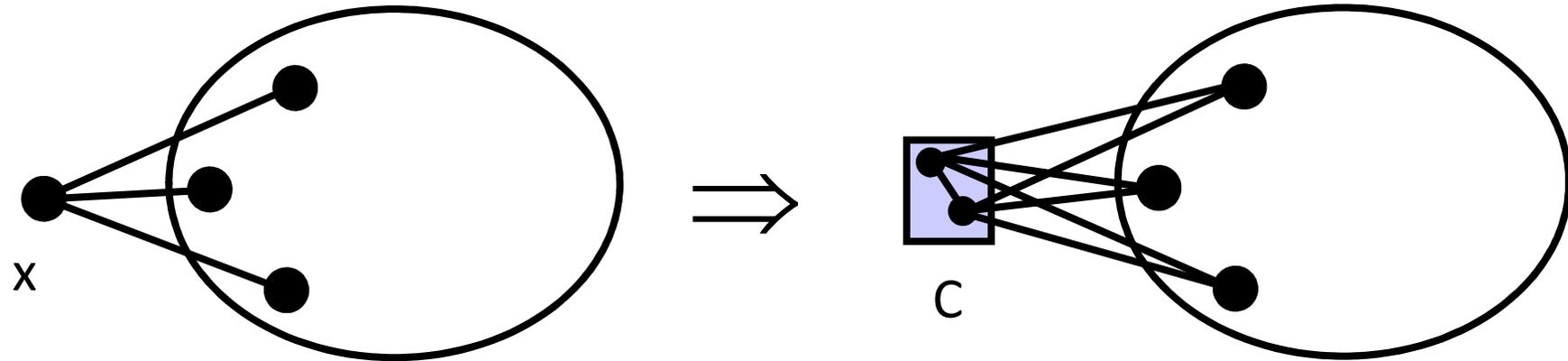
Théorème (Lovász, 1972). Soit G un graphe parfait et x un sommet de G .
Soit H le graphe obtenu en remplaçant x par une clique C , reliée complètement aux voisins de x .
Le graphe H ainsi obtenu est parfait.



László Lovász

Th. faible des graphes parfaits

(2)



G est parfait

H est parfait

Preuve.

Remarquons qu'il suffit de prouver le théorème pour $C = K_2$ (en itérant le remplacement par K_2 , on obtient le remplacement par une clique C quelconque).

Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre de sommets n du graphe G.

Preuve. (suite)

1. Le résultat est immédiat si G a un seul sommet.
2. Supposons maintenant le résultat vrai pour tout graphe ayant au plus $n-1$ sommets et soit G un graphe parfait à n sommets.

Il suffit alors de prouver que $\chi(H) = \omega(H)$ (pour les sous-graphes induits propres de H le résultat découle de l'hypothèse de récurrence si C est contenue dans le sous-graphe, ou du fait que G est parfait, si C n'est pas contenue dans le sous-graphe).

Nous avons clairement $\omega(G) \leq \omega(H) \leq \omega(G) + 1$.

Nous allons considérer 2 cas, selon que $\omega(H) = \omega(G)$ ou $\omega(H) = \omega(G) + 1$.

Th. faible des graphes parfaits

(4)

Preuve. (suite)

Cas 1. $\omega(H) = \omega(G) + 1$.

Nous avons dans ce cas $\chi(H) \leq \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(H)$.

Cas 2. $\omega(H) = \omega(G)$.

Le sommet x n'est donc pas contenu dans une clique de taille $\omega(G)$ dans G .

Colorions G à l'aide de $\chi(G) = \omega(G)$ couleurs, de façon telle que x soit colorié 1.

Soit A l'ensemble des sommets de couleur 1 différents de x .

Alors $\omega(G-A) = \omega(G) - 1$, et ainsi il existe une $(\omega(G)-1)$ -coloration c de $G-A$ (*car $G-A$ est un sous-graphe induit de G*).

Preuve. (suite)

Cas 2. (suite)

En coloriant les sommets de A et l'un des sommets de K_2 à l'aide d'une nouvelle couleur, nous obtenons à partir de c une $\omega(G)$ -coloration de H .

Or, $\omega(G) = \omega(H)$ et ainsi $\chi(H) = \omega(H)$.

CQFD

Nous pouvons maintenant prouver le théorème faible des graphes parfaits :

Théorème (Lovász, 1972). Un graphe G est parfait si et seulement si le complémentaire G^c de G est parfait.

Preuve.

Naturellement, il suffit de prouver l'implication...

Le résultat étant immédiat pour le graphe à un sommet, nous allons raisonner par récurrence sur le nombre de sommets n de G , en supposant que le résultat est vrai pour les graphes ayant au plus $n-1$ sommets.

Soit donc G un graphe parfait à n sommets.

Comme les sous-graphes propres de G ont au plus $n-1$ sommets, il suffit de prouver que $\chi(G^c) = \omega(G^c)$.

Notons C_1, C_2, \dots, C_k les cliques maximales (i.e. non extensibles) de G . Remarquons que chaque sommet de G appartient à au moins l'une de ces cliques.

Preuve. (suite)

Cas 1. Si l'une de ces cliques, disons C_j , intersecte tous les stables de taille maximale de G (de taille $\alpha(G)$), c'est-à-dire les cliques de taille maximale de G^c , nous avons alors $\omega(G^c \setminus C_j) < \omega(G^c)$.

Ainsi :

$$\chi(G^c) \leq \chi(G^c \setminus C_j) + 1$$

(en affectant une nouvelle couleur aux sommets de C_j , car C_j est un stable dans G^c)

$$\chi(G^c) \leq \chi(G^c \setminus C_j) + 1 = \omega(G^c \setminus C_j) + 1 \leq \omega(G^c)$$

*(hypothèse de récurrence sur $G^c \setminus C_j$
et remarque ci-dessus)*

et le résultat s'ensuit.

Th. faible des graphes parfaits

(8)

Preuve. (suite)

Cas 2. Supposons maintenant que pour tout j , $1 \leq j \leq k$, le graphe $G \setminus C_j$ contient un stable de taille maximale A_j de G . Nous allons montrer par contradiction avec le théorème précédent que ce cas ne peut pas se produire.

Pour tout sommet x_i de G , notons ω_i le nombre de tels ensembles A_j contenant x_i . Soit H le graphe obtenu à partir de G en remplaçant chaque sommet x_i par une clique de taille ω_i .

Les cliques maximales de H sont nécessairement les « extensions » des cliques maximales de G : une clique maximale C'_j dans H , provient de l'extension de C_j dans G et comprend donc $\sum_{x_i \in V(C_j)} \omega_i$ sommets.

Th. faible des graphes parfaits

(9)

Preuve. (suite)

Cas 2. (suite)

Ainsi, pour tout j , $\sum_{x_i \in V(C_j)} \omega_i \leq k - 1$

(en effet, deux sommets de C_j ne peuvent appartenir à un même A_i et, par définition, A_j ne contient aucun sommet de C_j)

Nous avons alors :

$$\omega(H) = \max_j \left\{ \sum_{x_i \in V(C_j)} \omega_i \right\} \leq k - 1,$$

De plus :

$$\chi(H) \geq |V(H)| / \alpha(H) = \left(\sum_i \{\omega_i\} \right) / \alpha(G)$$

*(x_i a été remplacé par une clique à w_i sommets,
et $\alpha(H) = \alpha(G)$)*

Th. faible des graphes parfaits

(10)

Preuve. (suite)

Cas 2. (suite)

Or, $\sum_i \{\omega_i\} = \sum_j \{ |A_j| \}$ et on a k ensembles A_j de taille $\alpha(G)$.

Ainsi :

$$\chi(H) \geq (\sum_i \{\omega_i\}) / \alpha(G) = k \times \alpha(G) / \alpha(G) = k.$$

On obtient alors

$$\omega(H) < \chi(H) \quad (\text{car } \omega(H) \leq k - 1),$$

ce qui contredit le théorème précédent (*H devrait être un graphe parfait*).

CQFD

Théorème de Lovász

Si H est un sous-graphe induit d'un graphe parfait, nous avons :

$$\omega(H) = \chi(H) \geq |V(H)| / \alpha(H) = |V(H)| / \omega(H^c).$$

Ainsi, pour tout sous-graphe induit H d'un graphe parfait,

$$|V(H)| \leq \omega(H) \times \omega(H^c).$$

Lovász prouva en 1972 que cette condition était également suffisante :

Théorème (Lovász, 1972). Un graphe G est parfait si et seulement si pour tout sous-graphe induit H de G ,

$$|V(H)| \leq \omega(H) \times \omega(H^c).$$

On remarque aisément que ce résultat implique (trivialement) le théorème faible des graphes parfaits !...

Conjecture forte des graphes parfaits (1)

Nous avons vu que les cycles impairs de longueur au moins 5 n'étaient pas parfaits.

Ainsi, un graphe contenant comme sous-graphe induit un cycle impair de longueur au moins 5 ou son complémentaire n'est pas parfait.

Claude Berge a conjecturé en 1961 que cette condition était également nécessaire (conjecture forte des graphes parfaits).

Durant quarante ans, cette conjecture a généré de très nombreux travaux sur les graphes parfaits (preuve de la conjecture pour certaines classes de graphes, conditions sur les possibles contre-exemples, etc.).

Conjecture forte des graphes parfaits (2)

Un colloque fut organisé à Paris en 1998 sur la conjecture forte des graphes parfaits.

Un an plus tard, le groupe de Paul Seymour annonçait que cette conjecture constituait son objectif prioritaire.

Leurs recherches furent soutenues par l'American Institute for Mathematics (aide financière, et décharge d'enseignement pour les chercheurs... tout cela indépendamment des résultats obtenus).

Au printemps 2002, Seymour annonça que cette conjecture avait été démontrée...

Théorème (fort) des graphes parfaits

Théorème (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas, 2002) Un graphe G est parfait si et seulement si ni lui ni son complémentaire ne contiennent de cycle impair induit de longueur au moins cinq.



Maria
Chudnovsky



Neil
Robertson



Paul
Seymour



Robin
Thomas

La démonstration est présentée en 178 pages !...

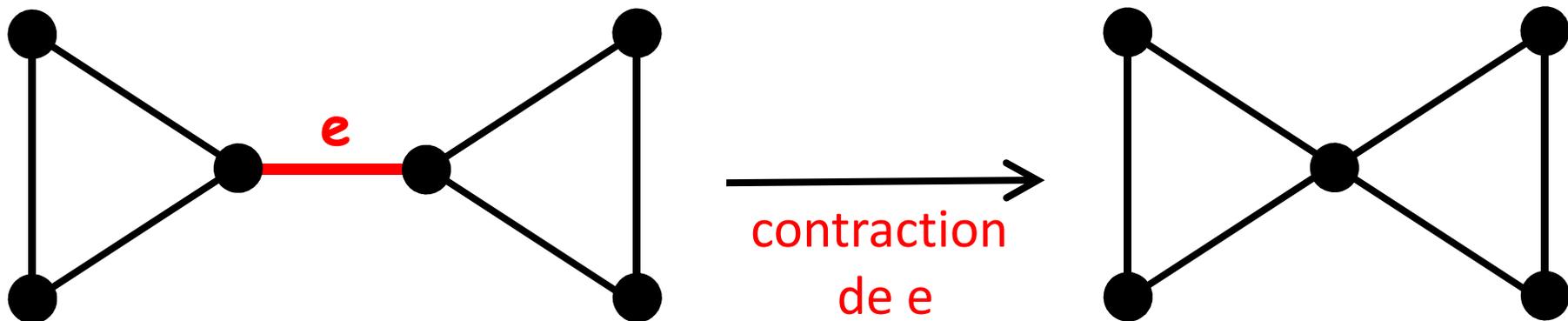
Conjecture de Hadwiger

(1)

Il reste naturellement de nombreuses conjectures ouvertes concernant les problèmes de coloration de graphes.

La plus importante est probablement la conjecture de Hadwiger...

Définition. Un graphe H est un *mineur* (minor) d'un graphe G si et seulement si H peut être obtenu à partir de G par une séquence d'opérations du type (1) suppression d'arête, (2) suppression de sommet, ou (3) contraction d'arête.



Conjecture de Hadwiger

(2)

Conjecture (Hadwiger, 1942). Tout graphe ne contenant pas le graphe complet K_k pour mineur est $(k-1)$ -coloriable.

Hadwiger prouva que cette conjecture était satisfaite pour $1 \leq k \leq 4$.

Pour $k = 5$, la conjecture de Hadwiger est équivalente au problème des quatre couleurs (trivial dans un sens, repose sur un résultat de Dirac dans l'autre).

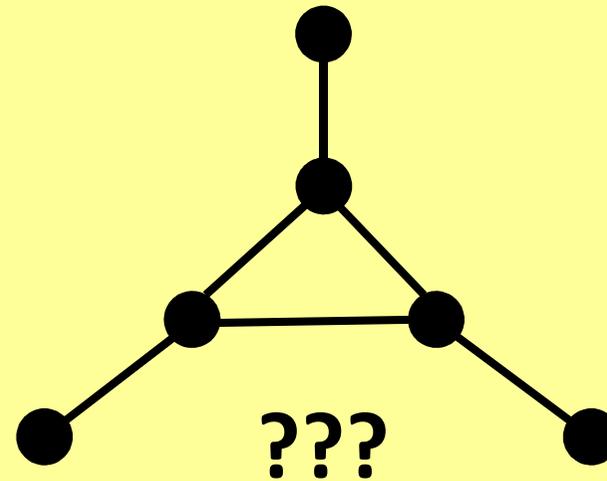
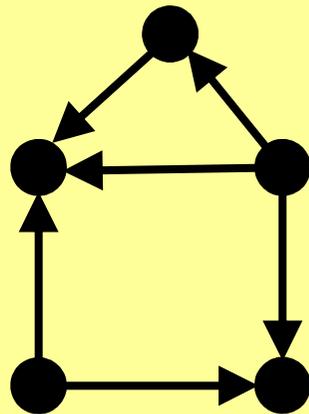
En 1993, Robertson, Seymour et Thomas, en utilisant le théorème des quatre couleurs, ont prouvé que la conjecture de Hadwiger était satisfaite pour $k = 6$.

Cette conjecture est toujours ouverte pour $k > 6$...



Interlude 6

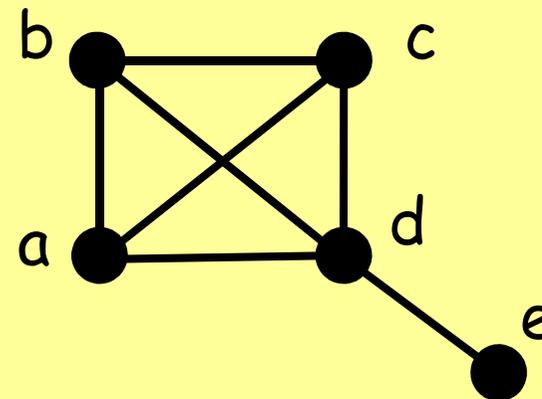
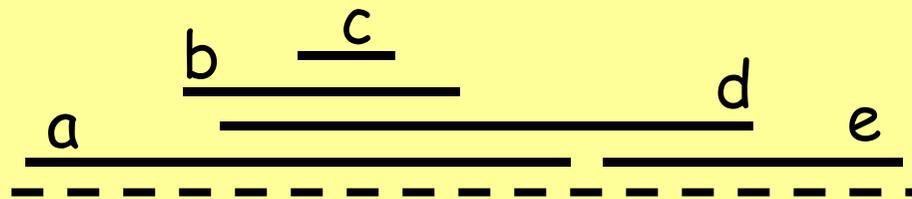
Graphes de comparabilité. Un graphe G est un graphe de comparabilité s'il est possible d'orienter ses arêtes de façon telle que le graphe orienté (antisymétrique) ainsi obtenu soit transitif (si uv et vw sont deux arcs, alors uw est un arc).



- Montrez que les graphes de comparabilité sont parfaits.

Interlude 7

Graphes d'intervalles. Un graphe G est un graphe d'intervalles si on peut associer à chacun de ses sommets un intervalle de la ligne réelle de façon telle que deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si leurs intervalles ont une intersection non vide.



- Montrez que le complémentaire d'un graphe d'intervalles est un graphe de comparabilité.
- Montrez que les graphes d'intervalles sont parfaits.

Interlude 8

Graphes parfaits.

- Montrez que si un graphe G est parfait alors tout sous-graphe induit (non vide) H de G contient un stable $A \subseteq V(H)$ tel que $\omega(H-A) < \omega(H)$.

($H-A$ désigne le graphe obtenu à partir de H en supprimant les sommets de l'ensemble A).

- Réciproquement, montrez que si tout sous-graphe induit (non vide) H de G contient un stable $A \subseteq V(H)$ tel que $\omega(H-A) < \omega(H)$ alors G est parfait.

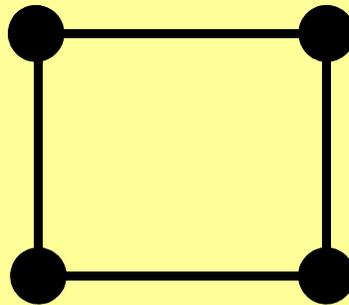
(On pourra raisonner par récurrence sur $\omega(H)$ pour montrer que $\chi(H) = \omega(H)$ pour tout sous-graphe H de G).

Interlude 9

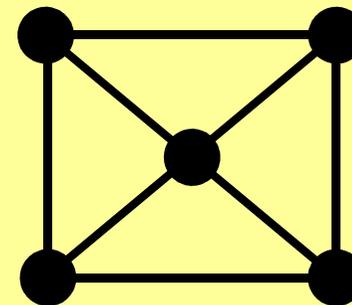
Joint de deux graphes. On appelle joint de deux graphes G et H , noté $G \vee H$, le graphe obtenu en prenant une copie de G et une copie de H et en reliant tous les sommets de G à tous les sommets de H (par exemple, $W_4 = K_1 \vee C_4$).



K_1



C_4



$W_4 = K_1 \vee C_4$

- Montrez que pour tout $r \geq 1$, $\chi(C_{2r+1} \vee K_s) = s+3$.
- Montrez que pour tout $r \geq 2$, $\omega(C_{2r+1} \vee K_s) = s+2$.

Chapitre 2

Homomorphismes de graphes

Homomorphismes et colorations

Hiérarchie des classes de colorations

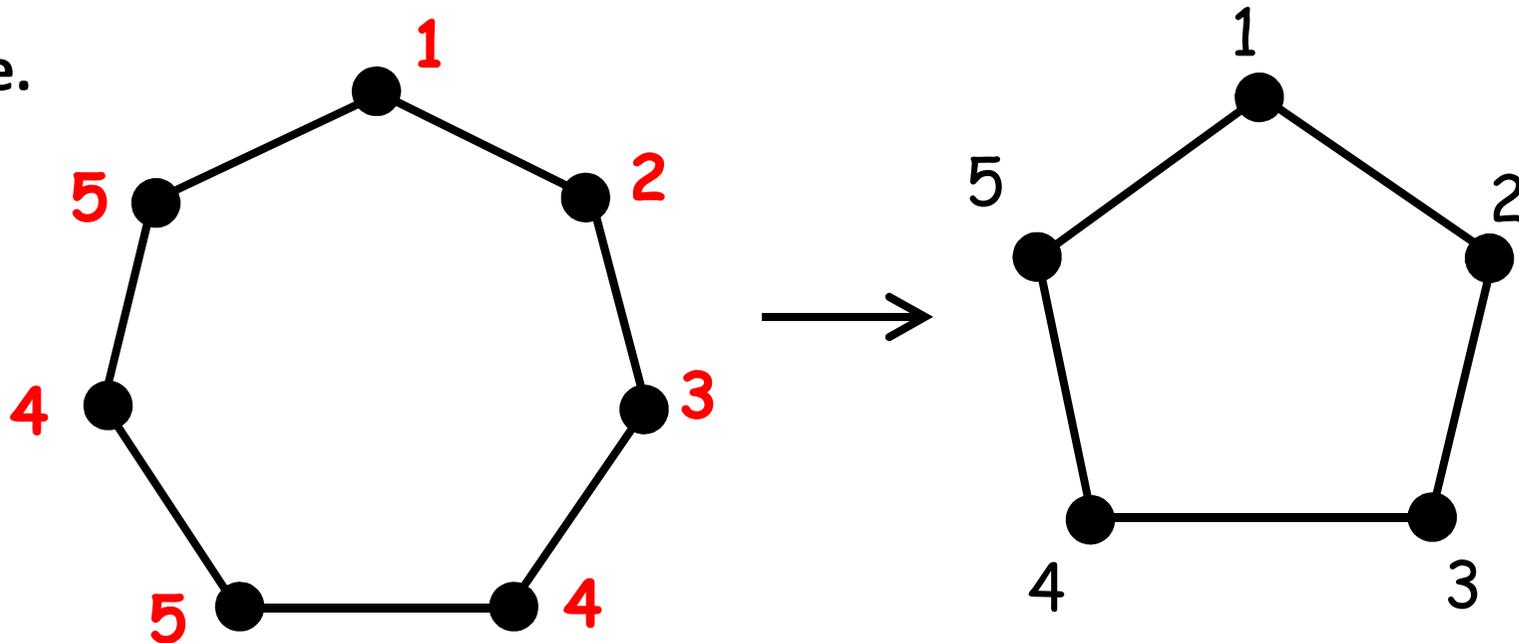
Homomorphismes de graphes

(1)

Définition. Un *homomorphisme* (homomorphism) d'un graphe G vers un graphe H est une application h de $V(G)$ vers $V(H)$ qui préserve les arêtes :

$$uv \in E(G) \Rightarrow h(u)h(v) \in E(H).$$

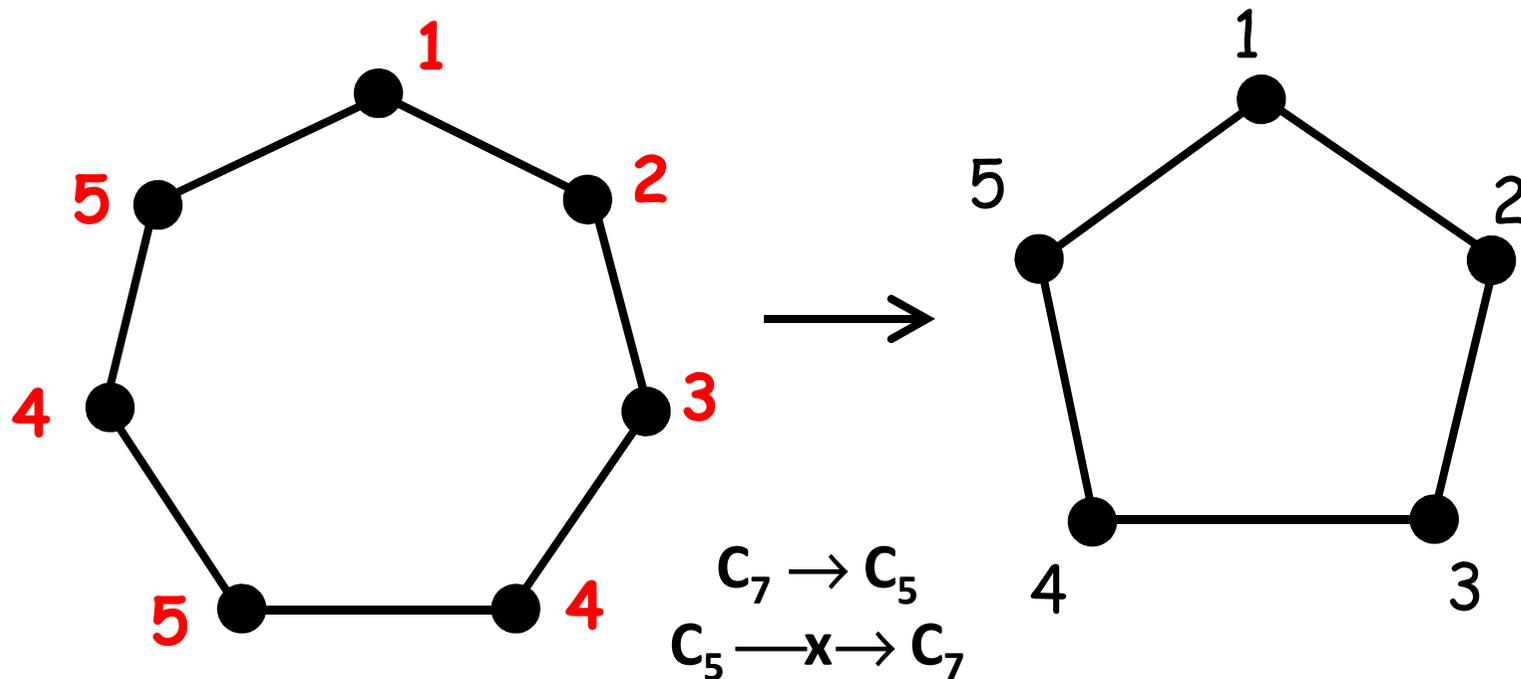
Exemple.



Homomorphismes de graphes

(2)

Définitions. Un graphe G est *H-coloriable* (H-colorable), noté $G \rightarrow H$, s'il existe un homomorphisme de G vers H . Si, de plus, H est G -coloriable, nous disons que G et H sont *hom-équivalents*, noté $G \leftrightarrow H$. Nous noterons $G \not\rightarrow H$ le fait qu'un graphe G *n'est pas* H-coloriable.

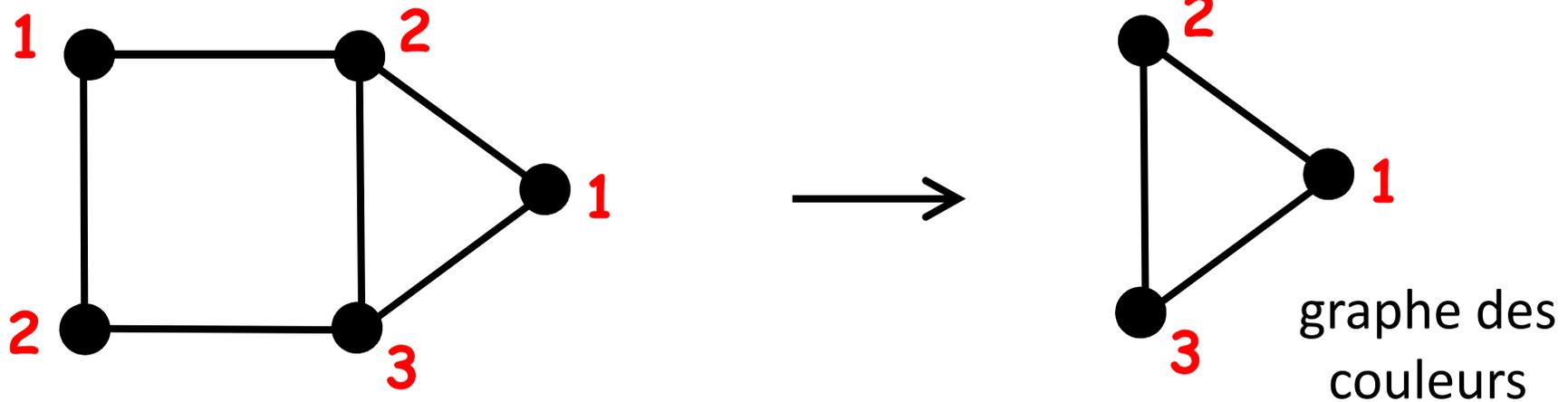


Homomorphismes et colorations

(1)

À toute k -coloration d'un graphe G , on peut associer un homomorphisme du graphe G vers un « graphe des couleurs », dont les sommets sont les couleurs utilisées, une arête reliant deux couleurs données si et seulement si deux sommets ainsi coloriés sont voisins dans G .

Réciproquement, tout homomorphisme de G vers un graphe à k sommets définit une k -coloration de G .



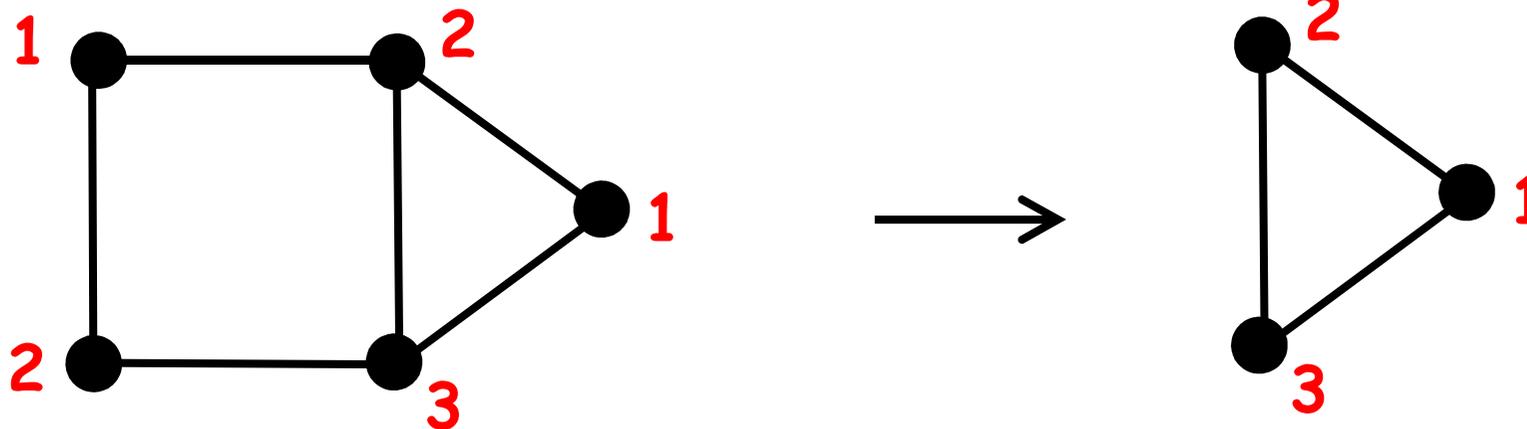
Homomorphismes et colorations

(2)

On obtient ainsi :

Proposition. Un graphe G est k -coloriable si et seulement si $G \rightarrow K_k$.

Proposition. Un graphe G est k -chromatique si et seulement si $G \rightarrow K_k$ et $G \not\rightarrow K_{k-1}$.



Homomorphismes et colorations

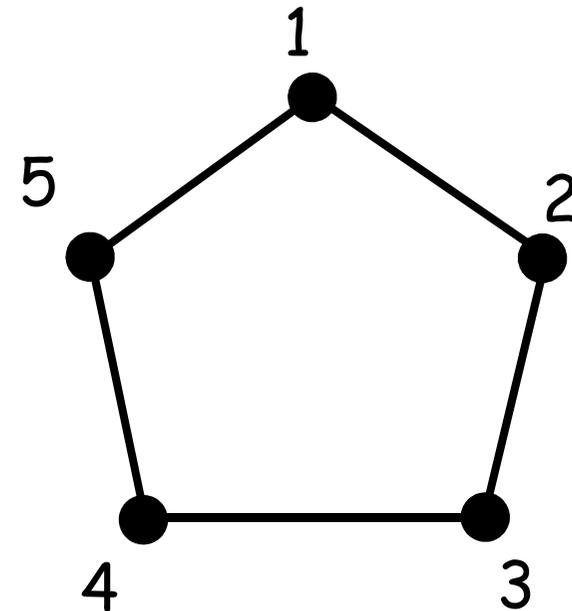
(3)

On remarque que les homomorphismes de G vers un graphe cible H à k sommets non complet correspondent à un sous-ensemble strict des k -colorations possibles de G .

Les contraintes additionnelles sont fournies par les « non-arêtes » du graphe H ...

Ainsi par exemple, un graphe admet un homomorphisme vers C_5 s'il est 5-coloriable de façon telle que :

- un sommet colorié 1 n'a aucun voisin colorié 3 ou 4,
- un sommet colorié 2 n'a aucun voisin colorié 4 ou 5,
- etc.



La composition de deux homomorphismes est clairement un homomorphisme, la relation \rightarrow est donc transitive.

Ainsi, si H' est un sous-graphe de H (dans ce cas $H' \rightarrow H$), alors pour tout graphe G , $G \rightarrow H'$ implique $G \rightarrow H$.

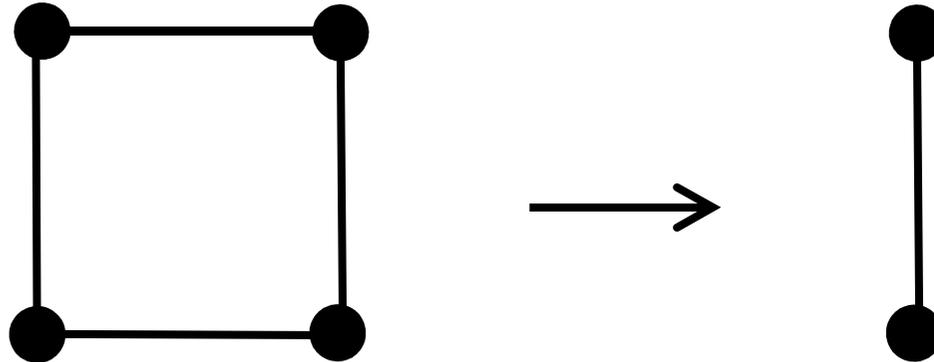
Pour certains des sous-graphes de H (en particulier pour H lui-même), l'implication inverse est également vérifiée.

Plus précisément, nous avons :

Définition. Un graphe H est *hom-minimal* (core) si pour tout sous-graphe propre H' de H nous avons $H \not\rightarrow H'$ (en d'autres termes, tout homomorphisme de H dans H est un automorphisme).

Exemples.

Les cycles pairs ne sont pas hom-minimaux :



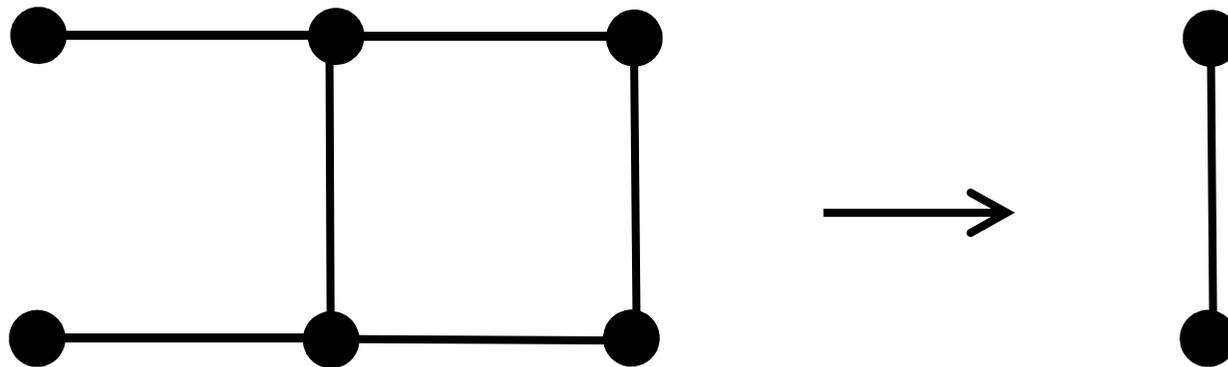
Les cycles impairs sont hom-minimaux (tout sous-graphe strict d'un cycle impair est un chemin, donc un graphe biparti ; les cycles impairs ne sont pas 2-coloriables).

Hom-contractions

(1)

Définition. Un sous-graphe H^* d'un graphe H est une *hom-contraction* de H (core of H) si $H \rightarrow H^*$ et H^* est hom-minimal.
(H et H^* sont alors hom-équivalents, $H \rightarrow H^*$ et $H^* \rightarrow H$)

Exemple. Tout graphe 2-chromatique admet pour hom-contraction une arête.



Proposition. Si H^* est une hom-contraction de H , alors :
pour tout graphe G , $G \rightarrow H \Leftrightarrow G \rightarrow H^*$.

Preuve.

Si $G \rightarrow H$, alors $G \rightarrow H^*$ car, par définition, $H \rightarrow H^*$.

Réciproquement, si $G \rightarrow H^*$ alors $G \rightarrow H$ car, H^* étant un sous-graphe de H , $H^* \rightarrow H$.

On s'intéressera donc uniquement aux homomorphismes vers des graphes hom-minimaux, qui sont donc leur propre hom-contraction. (Par exemple, si G est biparti et possède au moins une arête, alors être G -coloriable c'est la même chose qu'être K_2 -coloriable...)

Proposition. À isomorphisme près, tout graphe admet une unique hom-contraction.

Preuve. (par l'absurde)

Soient H_1 et H_2 deux hom-contractions de H .

Nous avons $H_1 \rightarrow H_2$ (car $H_1 \rightarrow H \rightarrow H_2$)
et $H_2 \rightarrow H_1$ (car $H_2 \rightarrow H \rightarrow H_1$).

Ces deux homomorphismes étant nécessairement surjectifs (sur les sommets et sur les arêtes), les sous-graphes H_1 et H_2 sont bien isomorphes...

*(si $H_1 \rightarrow X$ sous-graphe de H_2 , alors $H_2 \rightarrow H_1 \rightarrow X$,
ce qui contredit la hom-minimalité H_2 ...)*

CQFD

Interlude 10

Graphes hom-minimaux

- Montrez que tout cycle impair admet un homomorphisme vers le cycle à trois sommets (triangle).
- Montrez qu'aucun cycle pair n'est hom-minimal.
- Montrez que tout cycle impair est hom-minimal.

Degré moyen maximum

(1)

Définition. Le *degré moyen* (average degree) $dm(G)$ d'un graphe G est donné par

$$dm(G) = 2e(G) / v(G).$$

Le *degré moyen maximum* (maximum average degree) $dmm(G)$ d'un graphe G est le maximum des degrés moyens de ses sous-graphes :

$$dmm(G) = \max \{ dm(H) : H \subseteq G \}.$$

$e(G) = |E(G)| =$ nombre d'arêtes de G

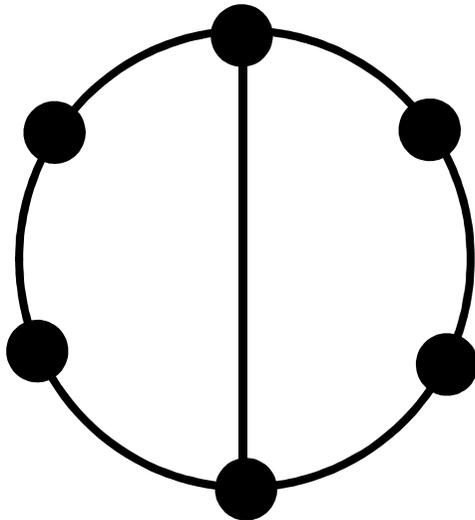
$v(G) = |V(G)| =$ nombre de sommets de G

Intuitivement, le degré moyen mesure la "densité globale" d'un graphe, le degré moyen maximum la "densité locale"...

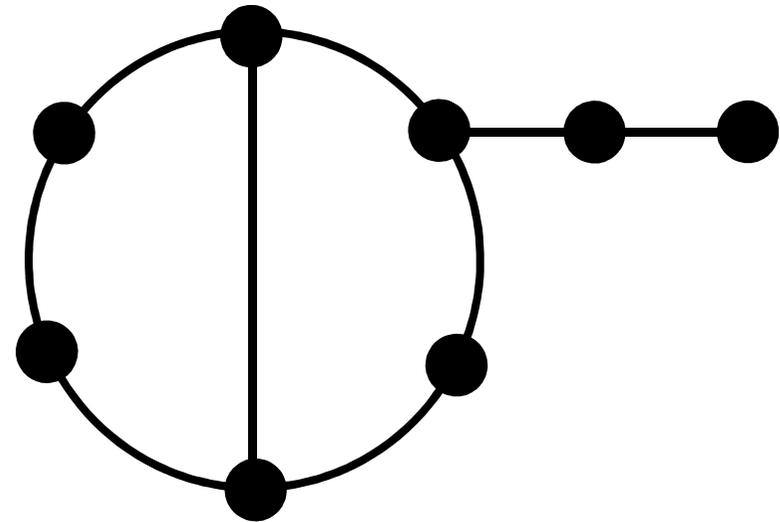
Degré moyen maximum

(2)

Exemples.



$$dm = dmm = 14/6 = 7/3$$



$$dm = 18/8 = 9/4$$
$$dmm = 7/3$$

Nous allons maintenant démontrer un résultat nous permettant d'illustrer, à un niveau abordable, les techniques utilisées dans la preuve du théorème des quatre couleurs.

Proposition. Si G est un graphe sans triangle de degré moyen maximum strictement inférieur à $9/4$, alors $G \rightarrow C_5$.

Preuve.

Nous allons construire un ensemble de configurations réductibles (ne pouvant être présentes dans un contre-exemple minimal), puis montrer qu'elles sont inévitables.

Ceci permettra d'en déduire la non-existence d'un contre-exemple minimal au théorème...

Homomorphismes vers C_5

(2)

Preuve. (suite)

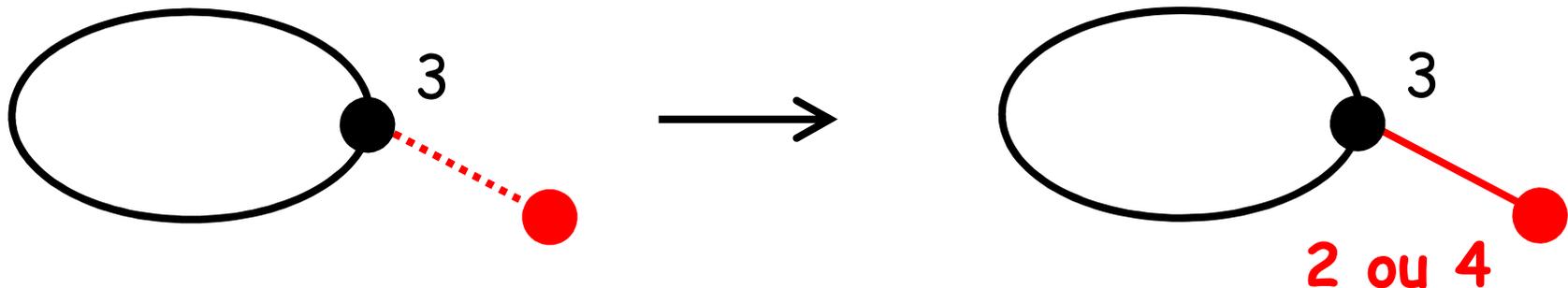
Remarquons tout d'abord qu'un sommet isolé constitue une configuration réductible :

si $G \rightarrow C_5$, alors $G + \text{"un sommet isolé"} \rightarrow C_5$.

De même, un sommet de degré 1 constitue une configuration réductible :

si $G \rightarrow C_5$, alors $G + \text{"un sommet de degré 1"} \rightarrow C_5$.

(car toute couleur de C_5 possède un voisin dans C_5)



Homomorphismes vers C_5

(3)

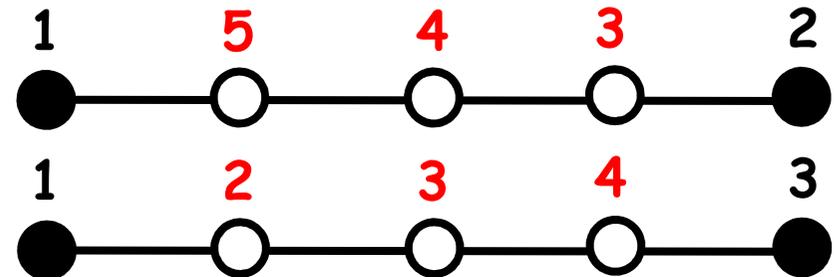
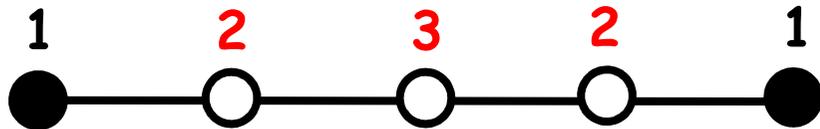
Preuve. (suite)

La configuration suivante est réductible (i.e. un contre-exemple minimal ne peut contenir une chaîne composée de 3 sommets de degré 2) :



Il suffit de montrer que quelles que soient les couleurs attribuées aux sommets noirs, on peut colorier les sommets blancs...

En considérant les symétries de C_5 , nous avons 3 cas à considérer :



Preuve. (suite)

Nous avons donc les trois configurations réductibles suivantes :



Maintenant, nous allons montrer que ces trois configurations sont inévitables, c'est-à-dire que tout graphe sans triangle de degré moyen maximum strictement inférieur à $9/4$ contient nécessairement l'une de ces configurations...

Pour cela, supposons qu'un graphe sans triangle ne contient aucune de ces trois configurations, et montrons que son degré moyen maximum est alors d'au moins $9/4$...

Preuve. (suite)

Nous allons pour cela utiliser une technique de déchargement.

Soit G un graphe sans triangle ne contenant aucune des trois configurations.

À chaque sommet u de G , nous associons une "charge"

$$\pi(u) = d_G(u).$$

Nous avons alors :

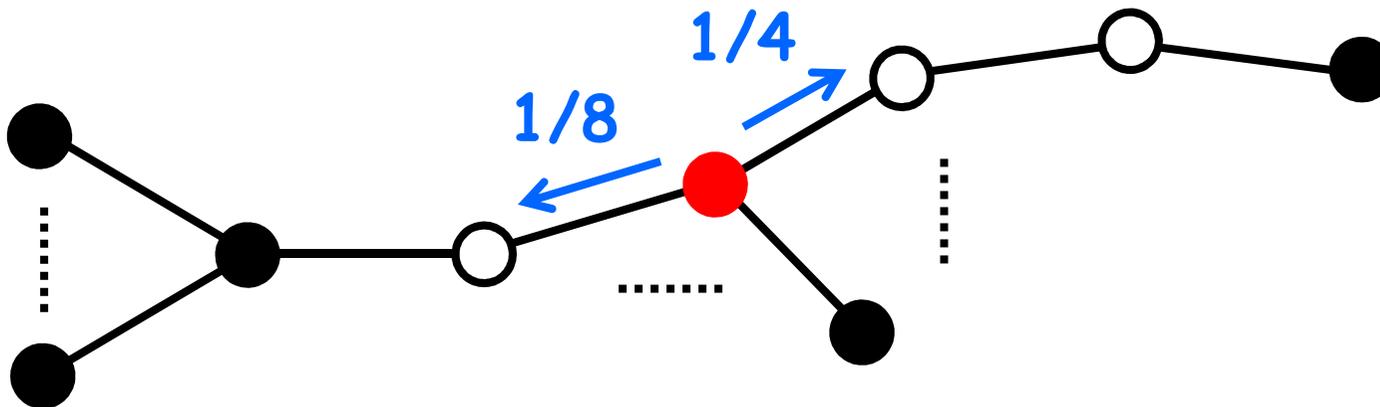
$$\pi(G) = \sum_u \pi(u) = \sum_u d_G(u) = 2e(G)$$

Nous allons ensuite répartir ces charges, sans changer la charge globale $\pi(G)$.

Preuve. (suite)

Nous définissons la règle de déchargement suivante :

- (R1) tout sommet de degré au moins 3 donne $1/4$ à chacun de ses voisins de degré 2 ayant eux-mêmes un voisin de degré 2, et $1/8$ à chacun de ses voisins de degré 2 n'ayant pas eux-mêmes de voisin de degré 2.



Preuve. (suite)

Cette règle est appliquée à tous les sommets concernés. Notons $\pi^*(u)$ la charge (finale) du sommet u à l'issue de cette procédure, et $\pi^*(G)$ la charge finale du graphe G .

Nous allons montrer que, pour tout sommet u , $\pi^*(u) \geq 9/4$.

Cas 1. $d_G(u) \geq 3$.

Dans ce cas, $\pi^*(u) \geq \pi(u) - d_G(u)/4 = 3d_G(u)/4 \geq 9/4$.

Cas 2. $d_G(u) = 2$ (pas de sommet de degré 0 ou 1).

Nous avons deux sous-cas :

- si u a un voisin de degré 2, $\pi^*(u) = 2 + 1/4 = 9/4$,
- sinon $\pi^*(u) = 2 + 2/8 = 9/4$.

Preuve. (suite)

Du fait de la préservation des charges, nous obtenons :

$$2e(G) = \pi(G) = \pi(G^*) \geq 9v(G)/4$$

et donc :

$$\text{dmm}(G) \geq 2v(G) / e(G) \geq 9/4$$

d'où la contradiction.

Nos trois configurations sont donc à la fois réductibles et inévitables.

CQFD

La procédure de déchargement précédente peut paraître « magique » pour un œil non exercé...

En réalité, les valeurs « correctes » à transférer sont obtenues ainsi :

le but du jeu est d'augmenter au maximum le poids des petits sommets, c'est-à-dire des sommets de degré 2.

On va donc s'arranger pour que chacun de leurs « gros » voisins (de degré au moins 3) leur donne quelque chose.

Cependant, certains sommets de degré 2 n'ont qu'un seul voisin donneur... Ainsi, on donnera une certaine valeur, disons x , aux sommets de degré 2 ayant deux voisins donneurs, et une valeur plus importante, disons y , aux sommets de degré 2 n'ayant qu'un seul voisin donneur.

Démystification

(2)

Les sommets de degré 2 auront finalement un poids de $2+2x$ ou $2+y$.

Parmi les voisins donneurs, les moins bien lotis sont les sommets de degré trois, qui finiront au pire avec un poids de $3-3y$.

Finalement, on résout l'équation

$$2 + 2x = 2 + y = 3 - 3y,$$

d'où $y = 1/4$ et $x = 1/8$ (il n'y a donc rien de magique...), et finalement $d_{mm} = 2 + 1/4 = 9/4$.

La proposition précédente peut facilement être améliorée (voir interlude 2) :

Proposition. Si G est un graphe sans triangle de degré moyen maximum strictement inférieur à $7/3$, alors $G \rightarrow C_5$.

Dans le cas des graphes planaires, le degré moyen maximum d'un graphe est relié à la maille du graphe de la façon suivante :

Proposition. Soit G un graphe planaire de maille g . Nous avons alors $dmm(G) < 2g / (g-2)$.

Preuve.

Si G est de maille g , le nombre de faces de G est d'au plus $2e(G)/g$. La formule d'Euler nous donne alors :

$$2 = v(G) - e(G) + f(G) \leq v(G) - e(G) + 2e(G)/g$$

soit :

$$v(G) \geq (1 - 2/g)e(G) + 2$$

Preuve. (suite) - $v(G) \geq (1 - 2/g)e(G) + 2$

ainsi,

$$\begin{aligned} \text{dm}(G) &= 2e(G)/v(G) \\ &\leq 2ge(G) / (2g + (g-2)e(G)) \\ &< 2g / (g-2) \end{aligned}$$

Cette formule étant vérifiée pour tous les sous-graphes de G , nous avons bien $\text{dmm}(G) < 2g / (g-2)$.

CQFD

Nous obtenons ainsi (car $28/12 = 7/3$) :

Corollaire. Tout graphe planaire de maille au moins 14 est C_5 -coloriable.

Ce résultat est lié à la conjecture suivante :

Conjecture (Jaeger, 1981). Tout graphe planaire de maille au moins $4k$ admet un homomorphisme vers le cycle C_{2k+1} .

Cette conjecture est vérifiée pour $k = 1$ (Théorème de Grötsch : tout graphe planaire sans triangle est 3-coloriable).

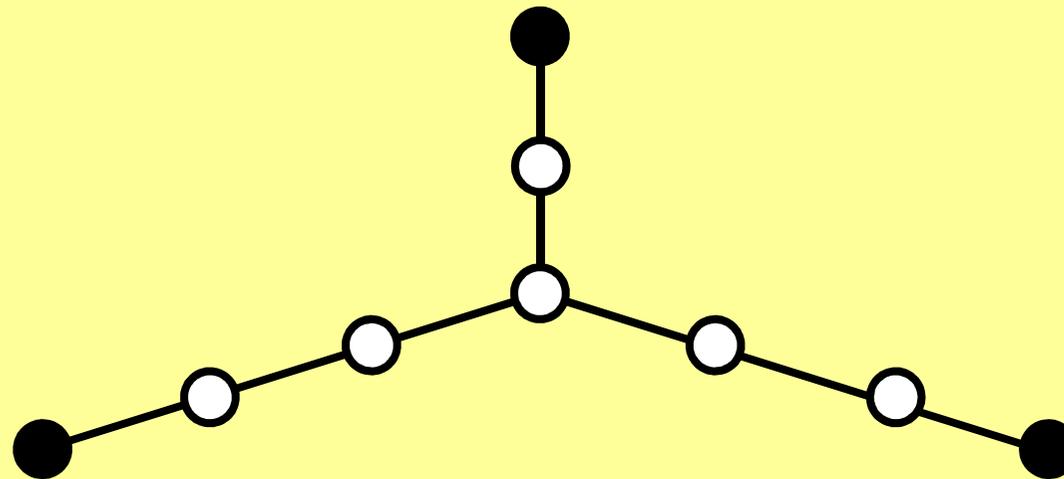
Pour $k = 2$ (notre corollaire...) la meilleure maille connue est 12 (au lieu de 8 selon la conjecture...) :

Théorème (Borodin, Kim, Kostochka, West, 2004). Si G est un graphe planaire de maille $g \geq (20k - 2) / 3$, alors
 $G \rightarrow C_{2k+1}$.

On souhaite démontrer le résultat suivant :

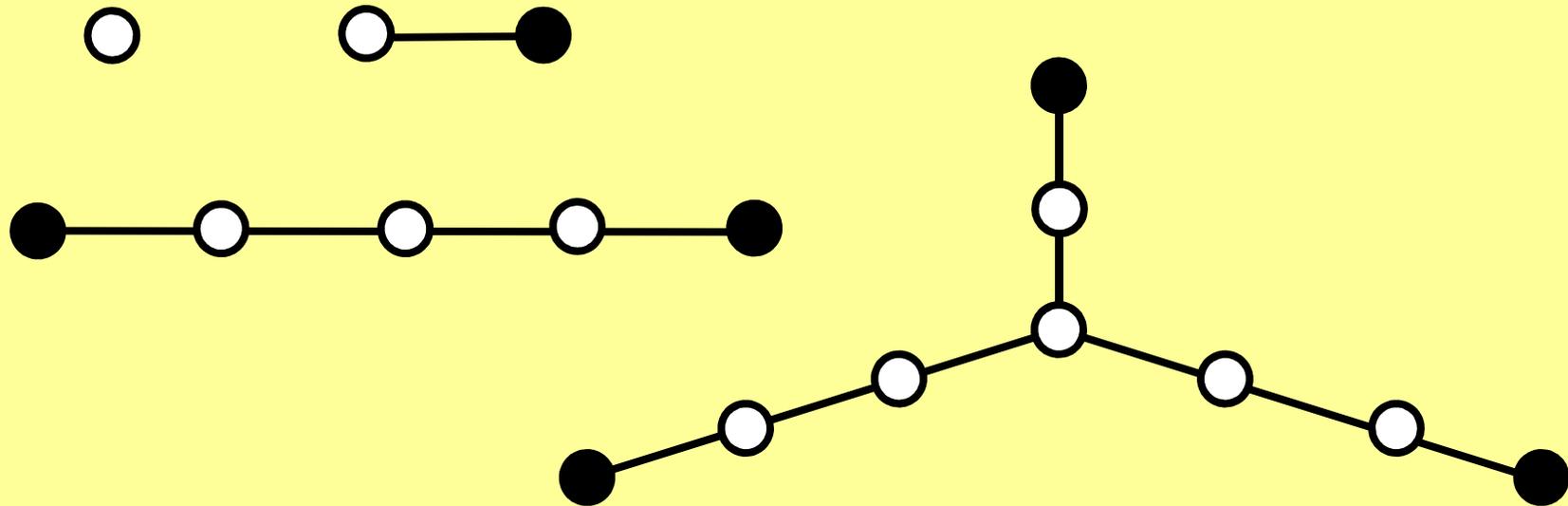
si G est un graphe sans triangle de degré moyen maximum strictement inférieur à $7/3$, alors $G \rightarrow C_5$.

- Montrez que la configuration suivante est réductible :



Configuration (B)

- Montrez que l'ensemble des 3 configurations vues précédemment, augmenté de celle-ci, constitue un ensemble inévitable (on définira une procédure de déchargement adéquate).



Pour un graphe H donné, nous nous intéressons maintenant à l'ensemble des graphes H -coloriables :

Définition. Pour tout graphe H , on note $[H]$ l'ensemble des graphes H -coloriables :

$$[H] = \{ G / G \rightarrow H \}.$$

Cet ensemble $[H]$ est la *classe de coloration* de H .

Exemples.

- $[K_2]$ est la classe des graphes bipartis (éventuellement sans arêtes),
- plus généralement, $[K_n]$ est la classe des graphes n -coloriables.

La propriété suivante indique que nous pouvons toujours choisir comme représentant (unique) d'une classe de coloration un graphe hom-minimal.

Proposition. Pour tout graphe H , il existe un unique (à isomorphisme près) graphe hom-minimal H' tel que $[H] = [H']$.

Preuve.

1. Existence.

Soit H^* la hom-contraction de H .

Par définition, nous avons $H \rightarrow H^*$.

Par ailleurs, comme H^* est un sous-graphe de H , nous avons également $H^* \rightarrow H$.

Ainsi, $[H] = [H^*]$ (et H^* est bien hom-minimal).

Preuve. (suite)

2. Unicité.

Supposons maintenant que H_1 et H_2 sont deux graphes hom-minimaux tels que $[H_1] = [H_2]$.

Montrons que H_1 et H_2 sont isomorphes ($H_1 \sim H_2$).

Comme $[H_1] = [H_2]$, nous avons $H_1 \rightarrow H_2$ et $H_2 \rightarrow H_1$.

Ces deux homomorphismes sont nécessairement surjectifs car H_1 et H_2 sont hom-minimaux.

(si $H_1 \rightarrow X$ sous-graphe de H_2 , alors $H_2 \rightarrow H_1 \rightarrow X$)

Les graphes H_1 et H_2 sont donc bien isomorphes.

CQFD

Hiérarchie des classes de coloration

Un ordre partiel sur les classes de coloration est donné par la relation d'inclusion (on notera \subseteq la relation d'inclusion au sens large et \subset la relation de stricte inclusion).

Cet ordre va nous permettre de définir la *hiérarchie* des classes de coloration.

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition :

Proposition. Pour tous graphes G et H , nous avons :

- $[G] \subseteq [H]$ si et seulement si $G \rightarrow H$,
- $[G] \subset [H]$ si et seulement si $G \rightarrow H$ et $H \not\rightarrow G$,
- $[G] = [H]$ si et seulement si $G \leftrightarrow H$.

Homomorphismes, χ et maille impaire

La propriété suivante va nous être utile pour ordonner les classes de coloration.

Définition. La *maille impaire* (odd girth) d'un graphe G , notée $og(G)$, est la longueur minimum d'un cycle impair dans G (si G est biparti, $og(G) = \infty$).

Proposition. Si H_1 et H_2 sont deux graphes tels que $H_1 \rightarrow H_2$, alors $\chi(H_1) \leq \chi(H_2)$ et $og(H_1) \geq og(H_2)$.

Preuve.

Posons $\chi(H_2) = k$.

Nous avons alors $H_2 \rightarrow K_k$, d'où, par composition, $H_1 \rightarrow K_k$, et donc $\chi(H_1) \leq k = \chi(H_2)$.

Preuve. (suite)

La deuxième propriété provient du fait que le cycle impair C_{2p+1} est C_{2q+1} -coloriable si et seulement si $q \leq p$...

(c'est évident, il suffit de vérifier que C_{2p+1} est C_{2p-1} -coloriable mais pas C_{2p+3} -coloriable...)

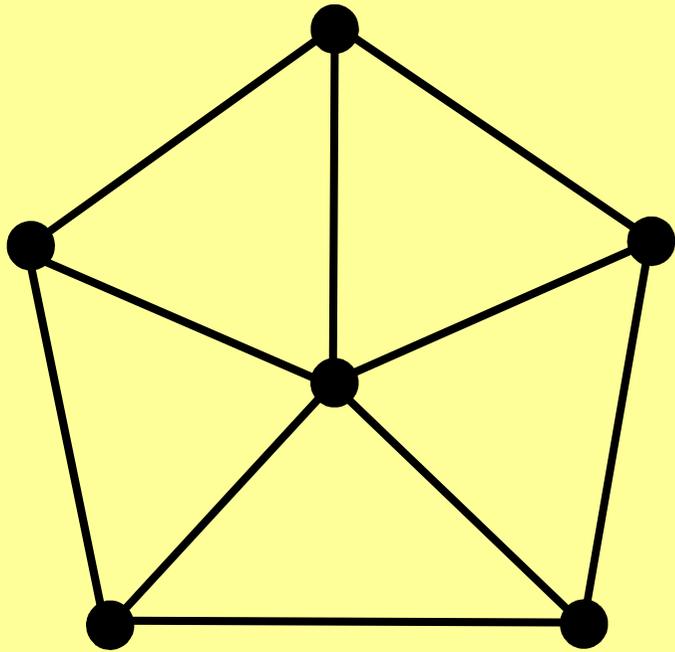
Ainsi, l'image homomorphe de tout cycle de H_1 de longueur $2p+1$ est un cycle impair de H_2 de longueur inférieure ou égale à $2p+1$.

Nous avons donc bien $\text{og}(H_2) \leq \text{og}(H_1)$.

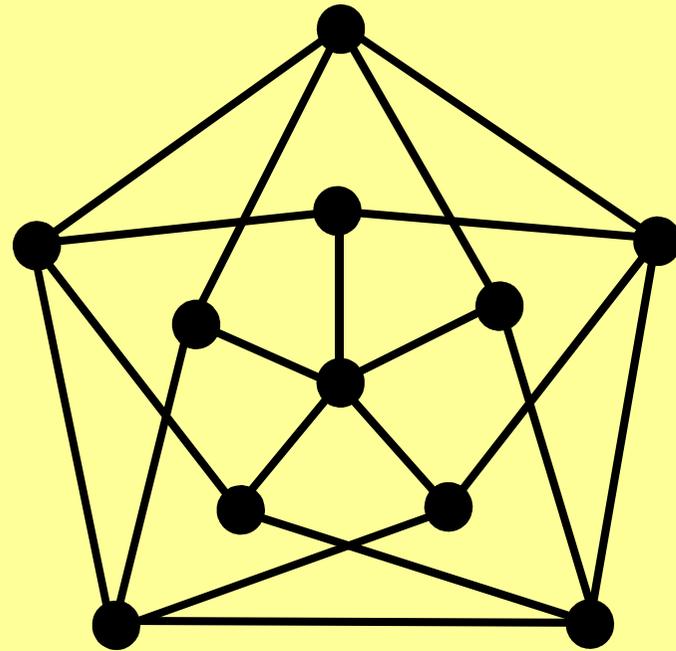
CQFD

Interlude 12

Que peut-on dire des classes suivantes (justifiez vos réponses) : $[K_2]$ et $[C_4]$? $[W_5]$ et $[C_5]$? $[W_4]$ et $[M]$?



Le graphe W_5



Le graphe M

Hiérarchie de base

Considérons maintenant les classes de colorations dont les représentants sont les graphes complets.

Nous avons clairement :

$$[K_1] \subset [K_2] \subset \dots \subset [K_k] \subset [K_{k+1}] \subset \dots$$

En effet, tout graphe k -coloriable est $(k+1)$ -coloriable alors que les graphes $(k+1)$ -chromatiques ne sont pas k -coloriables : $K_k \rightarrow K_{k+1}$ et $K_{k+1} \not\rightarrow K_k$.

Les inclusions sont donc bien strictes.

Cette première hiérarchie est dite *hiérarchie de base* (elle correspond aux questions de k -coloriabilité).

Les cycles

Où situer les classes de colorations des cycles dans cette hiérarchie ?

Les cycles pairs sont bipartis et contiennent au moins une arête.

Ainsi, pour tout k , $C_{2k} \rightarrow K_2$ et $K_2 \rightarrow C_{2k}$, soit $[C_{2k}] = [K_2]$.

Les cycles impairs sont 3-chromatiques.

Ainsi, pour tout k , $[K_2] \subset [C_{2k+1}] \subseteq [K_3]$.

Enfin, nous avons vu que pour tout k , $C_{2k+1} \rightarrow C_{2k-1}$ et $C_{2k-1} \xrightarrow{x} C_{2k+1}$, soit $[C_{2k+1}] \subset [C_{2k-1}]$.

Nous avons finalement :

$$\dots [K_2] \subset \dots \subset [C_{2k+1}] \subset [C_{2k-1}] \subset \dots \subset [C_3] = [K_3] \subset \dots$$

(découle directement du résultat précédent, sur χ et og)

Deux questions naturelles se posent alors :

- cette hiérarchie est-elle *linéaire*, c'est-à-dire deux classes de coloration $[G_1]$ et $[G_2]$ sont-elles toujours comparables (a-t-on toujours $[G_1] \subseteq [G_2]$ ou $[G_2] \subseteq [G_1]$) ?
- cette hiérarchie est-elle *dense*, c'est-à-dire existe-t-il pour tous graphes G_1 et G_2 tels que $[G_1] \subset [G_2]$ un graphe G_3 tel que $[G_1] \subset [G_3] \subset [G_2]$?

Nous avons en réalité les éléments nous permettant de répondre, de façon négative, à la première question :

Théorème. Pour tout $p \geq 2$, il existe une famille de p graphes dont les classes de colorations sont deux à deux incomparables.

Preuve.

Le théorème d'Erdős nous dit que pour tous k et g , $k \geq 3$, $g \geq 3$, il existe un graphe $G_{k,g}$ tel que $\chi(G) = k$ et $g(G) = g$.

Soit alors G_1 un graphe 3-chromatique de maille 3, G_2 un graphe 4-chromatique de maille 5, ..., G_p un graphe $(p+2)$ -chromatique de maille $2p+1$.

Les graphes G_i étant de maille impaire, nous avons pour tout i :
 $og(G_i) = g(G_i) = 2i+1$.

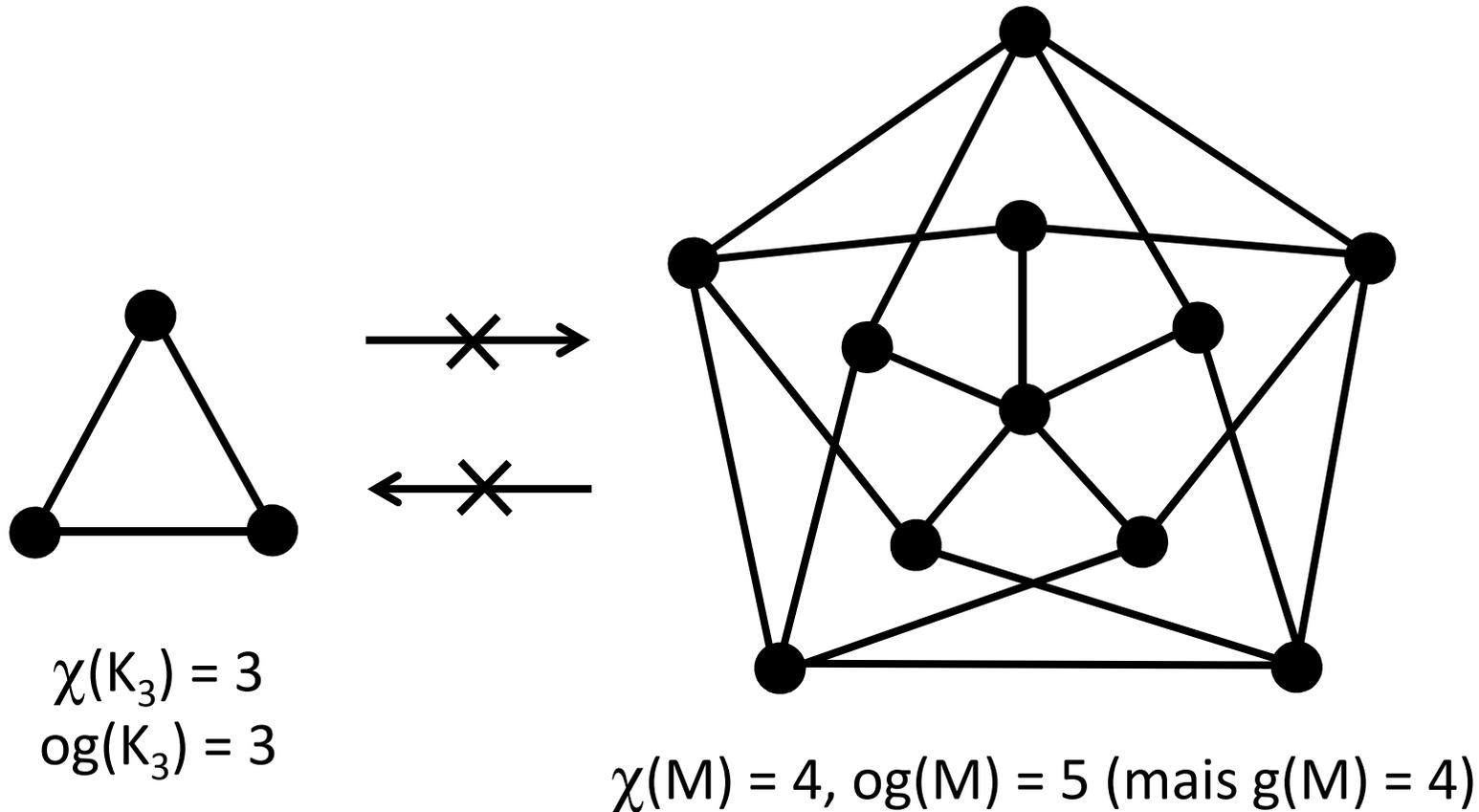
Ainsi, si $i < j$:

- $G_i \not\rightarrow G_j$ car $2i-3 = og(G_i) < og(G_j) = 2j-3$,
- $G_j \not\rightarrow G_i$ car $i = \chi(G_i) < \chi(G_j) = j$,

Les classes $[G_i]$ et $[G_j]$ sont donc bien incomparables pour tout $i < j$.

Exemple.

Les classes $[M]$ (Mycielski) et $[K_3]$ sont incomparables :



Pour ce qui est de la densité, la question est plus complexe.

Regardons le début de notre hiérarchie, $[K_1] \subset [K_2]$.

Un graphe G est dans $[K_1]$ si et seulement si il ne contient aucune arête. Dès qu'il contient une arête, nous avons nécessairement $K_2 \rightarrow G$ et donc $[K_2] \subseteq [G]$.

Ainsi, aucune classe de couleur n'est comprise strictement dans l'intervalle $[K_1, K_2]$.

Nous disons que cette paire de graphes constitue un *saut* (gap) dans la hiérarchie.

En 1982, Emo Welzl a montré qu'il s'agissait là du seul saut présent dans la hiérarchie des classes de couleurs qui, à cette exception près, est donc dense.

Densité de la hiérarchie

(2)

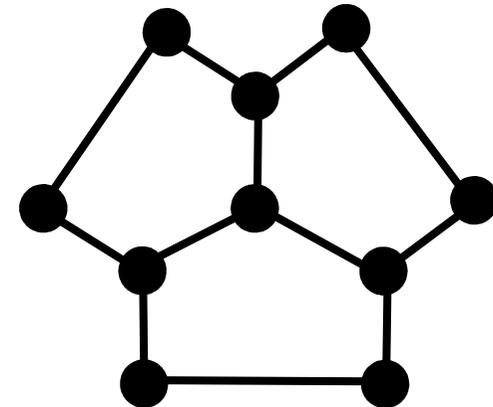
Théorème (Welzl, 1982). Pour toute paire de graphes hom-minimaux $(G_1, G_2) \neq (K_1, K_2)$, telle que $[G_1] \subset [G_2]$ il existe un graphe G_3 tel que $[G_1] \subset [G_3] \subset [G_2]$.



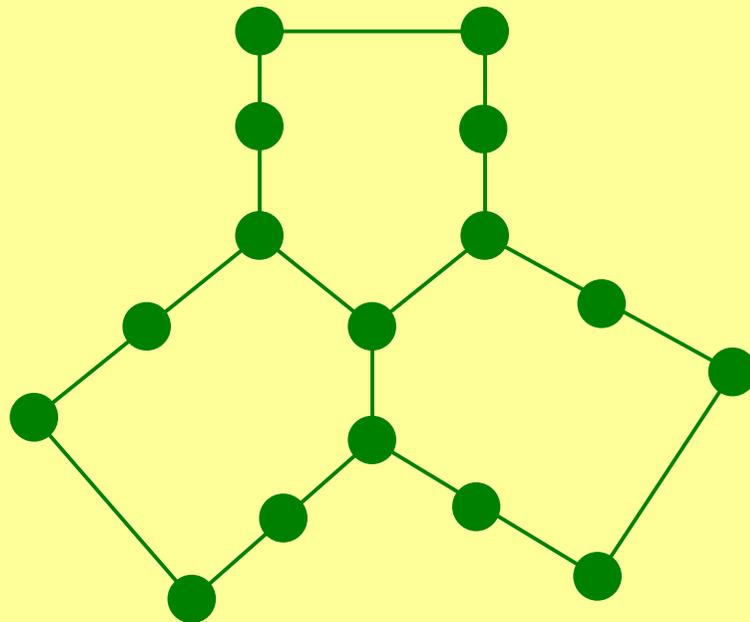
Emo Welzl

Exemple. Essayons de trouver un graphe X tel que $[C_5] \subset [X] \subset [K_3]$...

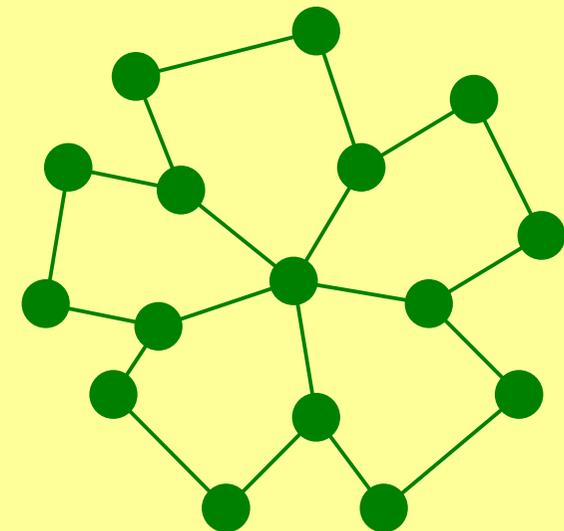
Il suffit pour cela de trouver un graphe 3-coloriable (pour avoir $X \rightarrow K_3$), sans triangle (pour avoir $K_3 \not\rightarrow X$), donc de maille impaire 5 (pour avoir $C_5 \rightarrow X$) et, le plus délicat, tel que $X \not\rightarrow C_5$...



Appelons « fleur » (à $2n+1$ pétales de taille $2m+1$) le graphe $F_{n,m}$ obtenu en « arrangeant » $2n+1$ cycles de taille $2m+1$ comme indiqué ci-dessous :



La fleur $F(1,3)$



La fleur $F(2,2)$

- Montrer que nous avons la sous-hiérarchie suivante pour tout m :
 $[C_{2m+1}] = [F_{0,m}] \subset \dots \subset [F_{n+1,m}] \subset [F_{n,m}] \subset \dots \subset [C_{2m-1}]$
- Montrer que si G est hom-minimal, alors le graphe $G+k$, obtenu en rajoutant une clique de taille k reliée à tous les sommets de G est également hom-minimal.
- En déduire que la sous-hiérarchie des cycles impairs et des fleurs, située entre $[K_2]$ et $[K_3]$, peut être « transportée » entre $[K_k]$ et $[K_{k+1}]$ pour tout $k \geq 3$.

Chapitre 3

Homomorphismes et colorations des graphes orientés

Définitions, résultats de base

Graphes planaires

Graphes de degré borné

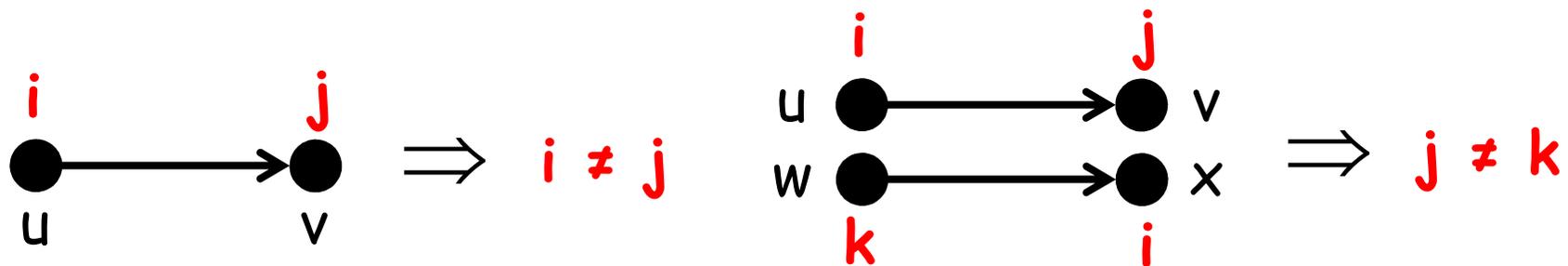
Colorations orientées

(1)

On s'intéresse maintenant aux graphes orientés *antisymétriques* (au plus un arc entre deux sommets), que l'on appellera simplement *graphes orientés* dans la suite.

Définition. Une *k-coloration orientée* (oriented k-coloring) d'un graphe orienté G est une application c de $V(G)$ vers un ensemble C de k couleurs ($C = \{1, 2, \dots, k\}$) telle que :

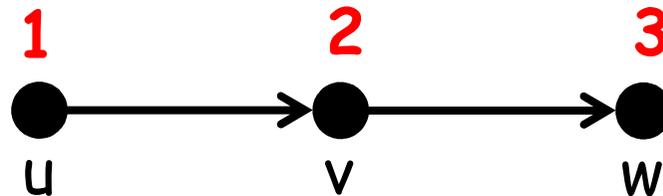
- (i) deux sommets voisins ont des couleurs distinctes, et
- (ii) si uv et wx sont deux arcs de $A(G)$ tels que $c(u) = c(x)$ alors $c(v) \neq c(w)$.



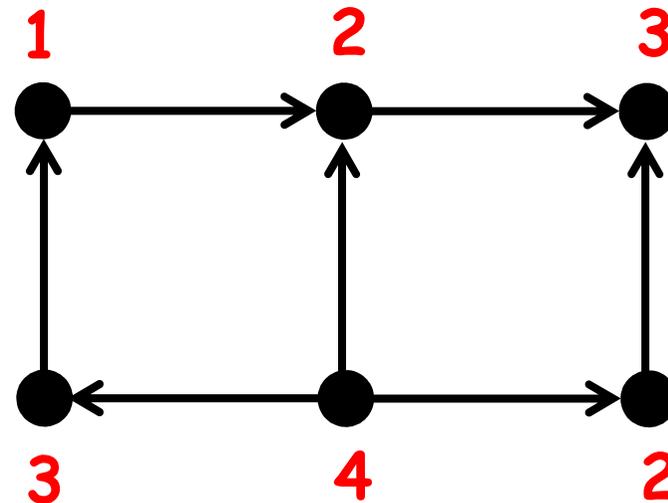
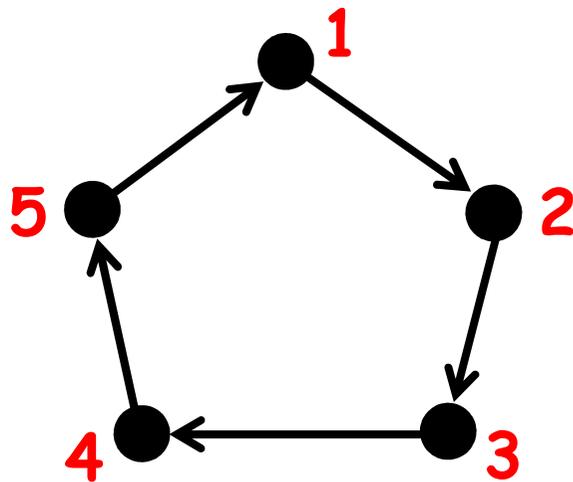
Colorations orientées

(2)

On remarque aisément que tout chemin dirigé de longueur 2 nécessite trois couleurs :



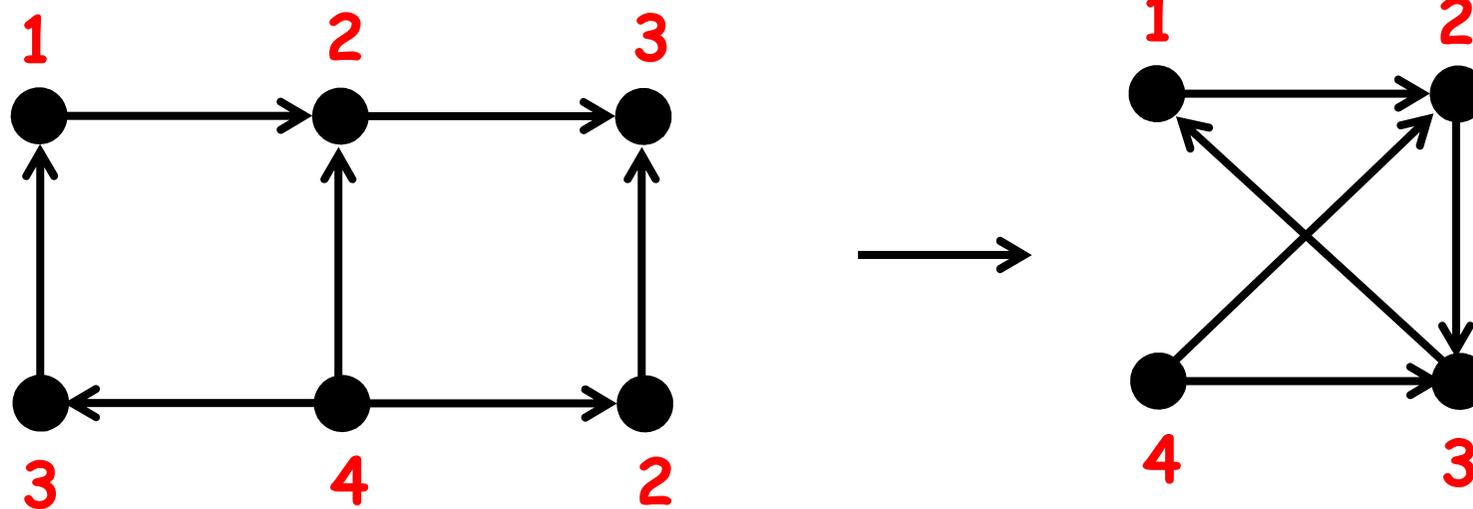
Exemples.



Colorations orientées

(3)

Une coloration d'un graphe orienté G correspond également à un homomorphisme de G vers un graphe (orienté) des couleurs :

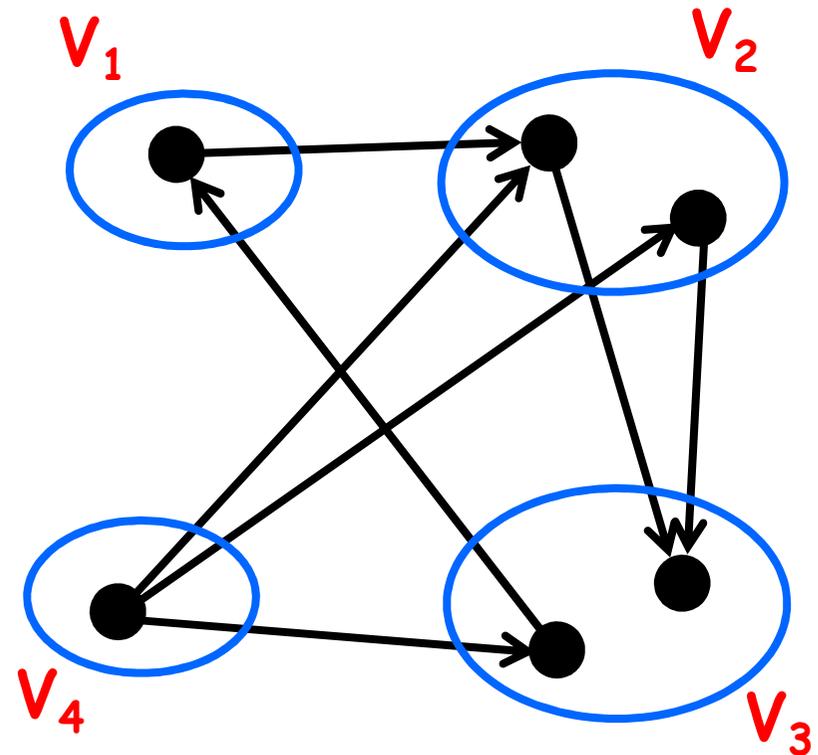
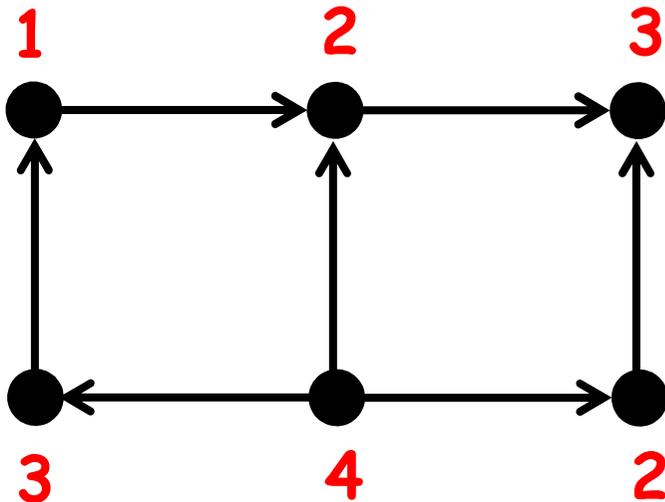


Nous avons ainsi une extension naturelle de la notion de coloration au cas des graphes orientés...

Colorations orientées

(4)

Une coloration d'un graphe orienté G peut également être vue comme une partition de $V(G)$ en classes de couleurs, telle que (1) chaque classe est un stable, et (2) entre deux telles classes, tous les arcs ont même direction :



Nombre chromatique orienté

(1)

Définition. Le *nombre chromatique orienté* (oriented chromatic number) d'un graphe orienté G , noté $\chi_o(G)$, est défini comme le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration orientée.

De façon équivalente, $\chi_o(G)$ est l'ordre minimum d'un tournoi T tel que $G \rightarrow T$.

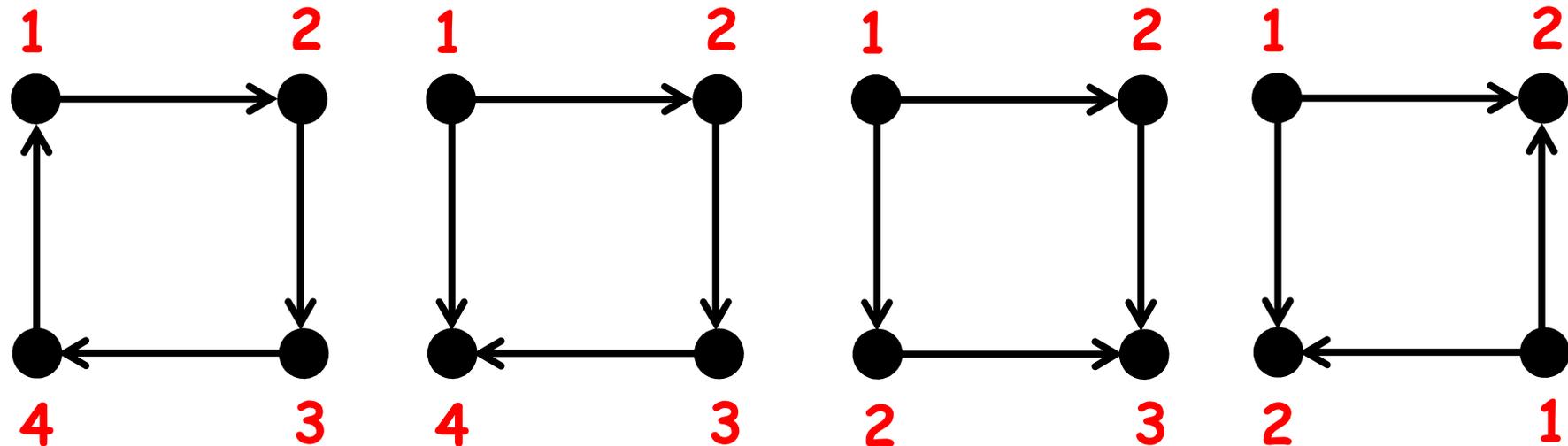
Il est possible d'étendre cette notion au cas des graphes non orientés :

Définition. Le nombre chromatique orienté d'un graphe non orienté G est le maximum des nombres chromatiques orientés de ses orientations.

Nombre chromatique orienté

(2)

Exemple. $\chi_o(C_4) = 4$ (il suffit de considérer toutes les orientations possibles de C_4 , à symétrie près) :



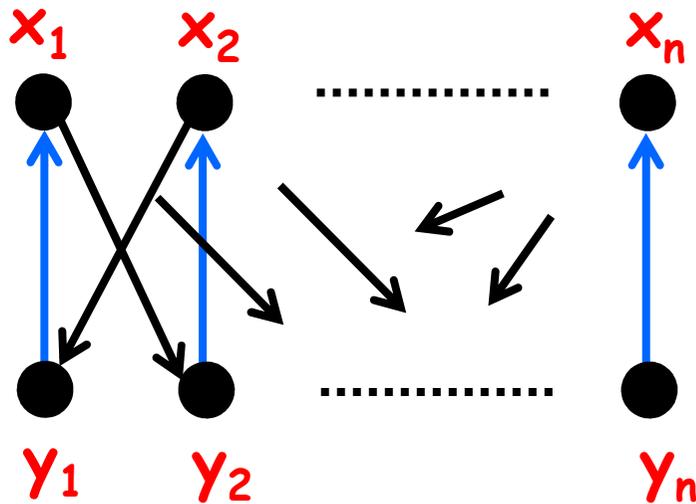
Toute coloration orientée d'un graphe orienté étant une coloration du graphe non orienté sous-jacent, nous avons :

Proposition. Pour toute orientation G^{\rightarrow} d'un graphe non orienté G , $\chi_o(G^{\rightarrow}) \geq \chi(G)$. Ainsi, pour tout graphe G , $\chi_o(G) \geq \chi(G)$.

χ et nombre chromatique orienté

À l'inverse, il n'est pas possible de borner le nombre chromatique orienté d'un graphe par une fonction de son nombre chromatique.

En effet, on peut facilement remarquer par exemple que les graphes complets bipartis ($\chi \leq 2$) peuvent avoir un nombre chromatique orienté arbitrairement grand :



Pour tous i et j , $i \neq j$, il existe un chemin orienté de y_i vers y_j :

$$y_i \rightarrow x_i \rightarrow y_j.$$

Ainsi, tous les y_i doivent avoir des couleurs distinctes, d'où

$$\chi_o(K_{n,n}) \geq n.$$

Dans le cas des arbres, il est aisé de prouver le résultat suivant :

Théorème. Pour tout arbre G , $\chi_o(G) \leq 3$.

Preuve.

On montre par récurrence sur $n = |V(G)|$ que toute orientation G^{\rightarrow} de G admet un homomorphisme vers le circuit à 3 sommets, et donc une 3-coloration orientée.

Le résultat est immédiat pour $n = 1$.

Supposons-le vérifié pour tous les arbres orientés à $n-1$ sommets et soit G^{\rightarrow} une orientation d'un arbre à n sommets.

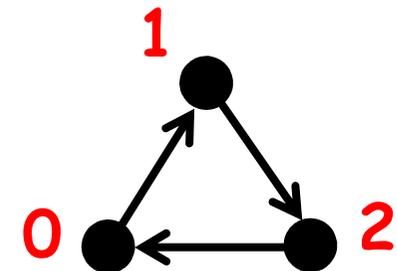
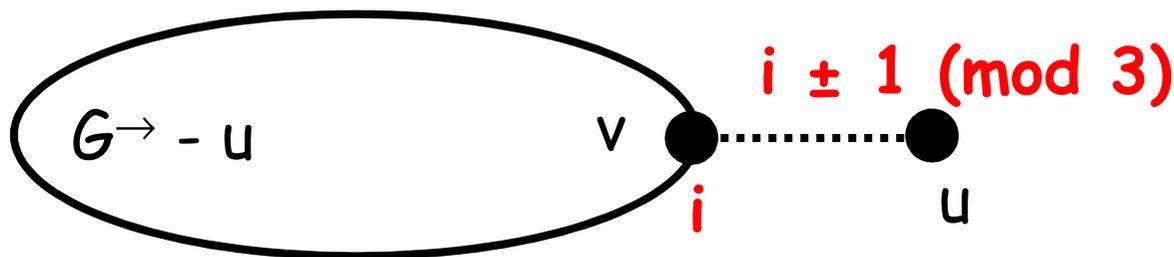
Preuve. (suite)

Soit u une feuille de G^{\rightarrow} , v son père, et c une 3-coloration de $G^{\rightarrow} - u$.

La coloration c peut facilement être étendue à G^{\rightarrow} en posant $c(u) = c(v) + 1 \pmod{3}$ si vu est un arc et $c(u) = c(v) - 1 \pmod{3}$ si uv est un arc.

(on a construit un homomorphisme de G^{\rightarrow} vers le circuit à trois sommets)

CQFD



Les cycles

(1)

Dans le cas des cycles, nous avons :

Théorème. Pour tout cycle $G \neq C_5$, $\chi_o(G) \leq 4$.

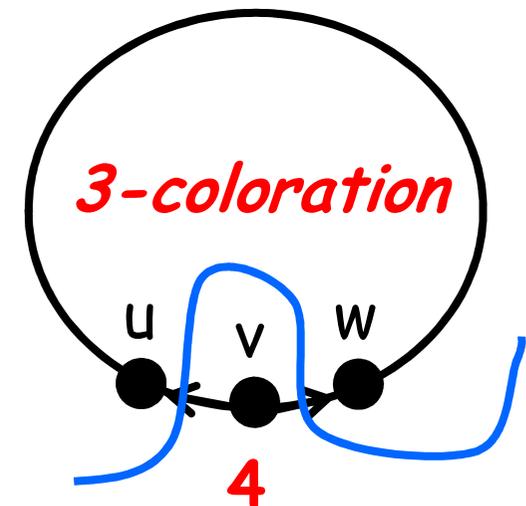
(Nous avons déjà vu que $\chi_o(C_5) = 5$.)

Preuve.

Soit $G \rightarrow$ un cycle orienté différent du circuit à 5 sommets.

Si $G \rightarrow$ n'est pas un circuit, il existe nécessairement 3 sommets consécutifs sur le cycle u, v , et w , tels que vu et vw sont des arcs.

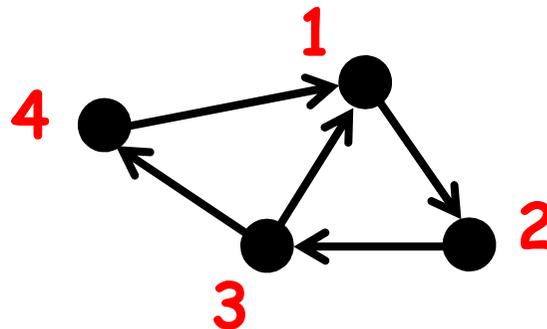
Il suffit alors de 3-colorier le chemin orienté $G \rightarrow - v$ et d'utiliser une 4-ème couleur pour v ...



Preuve. (suite)

Si G^{\rightarrow} est un circuit (de longueur 3,4 ou 6,7,...), il suffit de « découper » G^{\rightarrow} en chemins dirigés de longueur 3 ou 4 (tous les entiers sauf 1,2 et 5 peuvent s'écrire comme somme de 3 ou 4...) et de colorier 1-2-3 les chemins de longueur 3 et 1-2-3-4 les chemins de longueur 4.

On obtient ainsi une 4-coloration de G^{\rightarrow} , qui correspond à un homomorphisme de G^{\rightarrow} vers le graphe orienté suivant :



CQFD

Colorations acycliques

(1)

La valeur exacte du nombre chromatique orienté de la famille des graphes planaires est non connue à ce jour. Le meilleur majorant connu est 80...

Pour montrer ce résultat, nous avons besoin d'un résultat d'Oleg V. Borodin sur le nombre chromatique acyclique des graphes planaires.

Définition. Une k -coloration d'un graphe non orienté G est *acyclique* si pour toute paire de couleurs $\{a,b\}$, le sous-graphe de G induit par les sommets coloriés a ou b est une forêt (tout cycle de G est colorié par au moins 3 couleurs).

Le *nombre chromatique acyclique* de G , noté $\chi_a(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration acyclique.

Colorations acycliques

(2)

Nous avons alors :

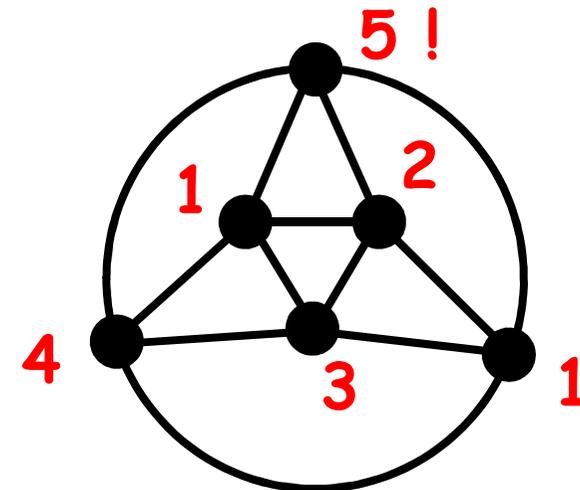
Théorème (Borodin, 1979). Si G est un graphe planaire, alors $\chi_a(G) \leq 5$.

La technique de preuve utilisée est identique à celle utilisée pour le théorème des quatre couleurs, mais n'utilise que 350 configurations environ (preuve non informatique).

Ce résultat est optimal, comme le montre l'exemple ci-contre.



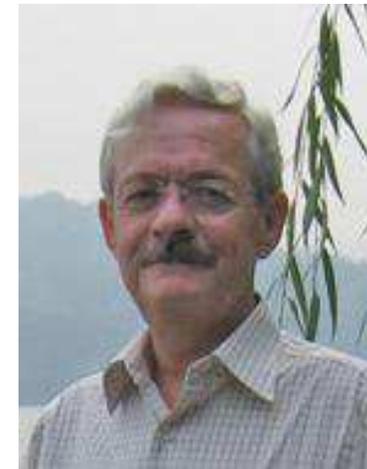
Oleg V. Borodin



Le résultat suivant permet de majorer le nombre chromatique orienté d'un graphe en fonction de son nombre chromatique acyclique :

Théorème (Raspaud, Sopena, 1994). Si G est un graphe tel que $\chi_a(G) \leq k$, alors

$$\chi_o(G) \leq k \times 2^{k-1}.$$



André Raspaud



Pascal Ochem

Pascal Ochem a prouvé en 2005 que ce résultat est optimal pour $k \geq 3$ (si $k = 2$, G est une forêt).

Grâce au théorème de Borodin, nous obtenons :

Corollaire. Si G est un graphe planaire, alors

$$\chi_o(G) \leq 80.$$

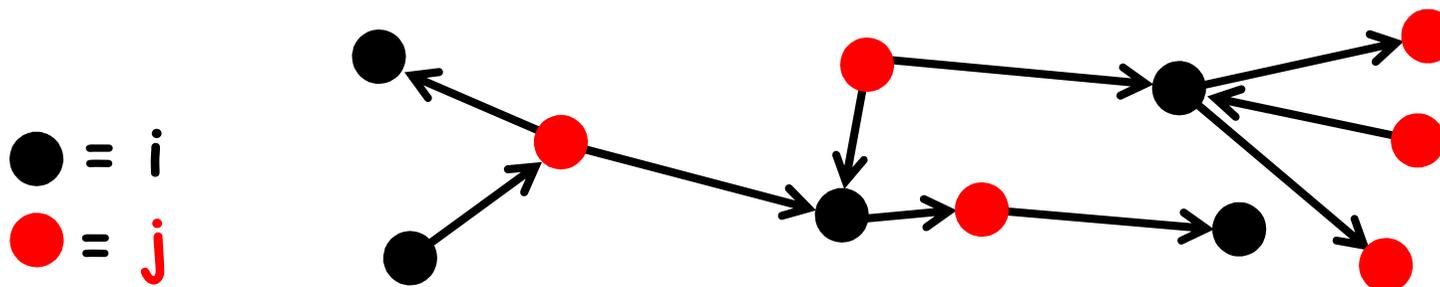
Preuve du théorème.

Soit G un graphe satisfaisant les hypothèses, c une k -coloration acyclique de G , et G^\rightarrow une orientation quelconque de G .

Appelons *arc de type i - j* un arc de la forme uv avec $c(u) = i$ et $c(v) = j$.

Le sous-graphe de G^\rightarrow engendré par les arcs de type i - j et j - i est une forêt (car c est acyclique).

Notons $G^\rightarrow[i,j]$ ce sous-graphe, en supposant $i < j$.



Preuve. (suite)

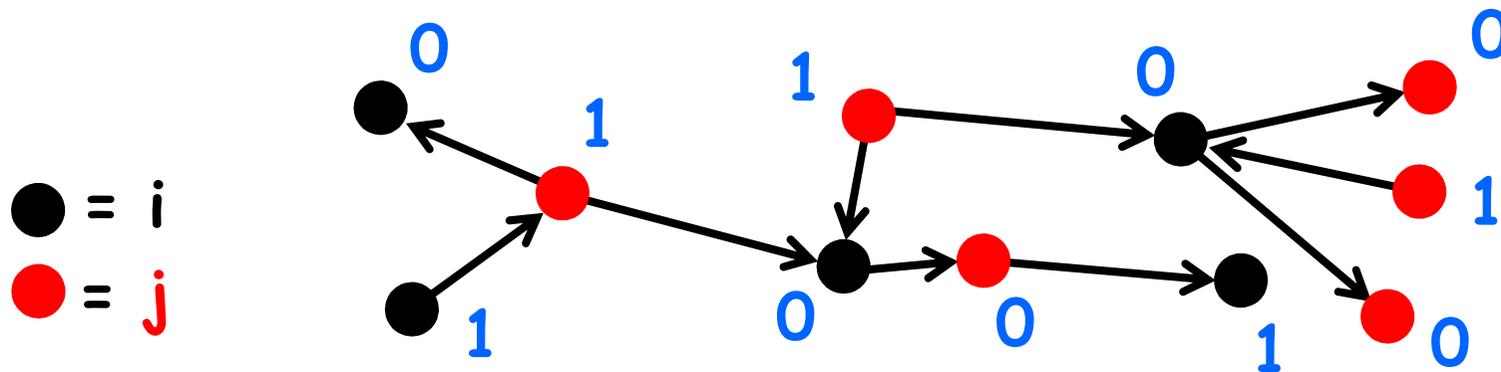
Nous allons dans un premier temps construire une 4-coloration orientée $c_{i,j}$ de $G \rightarrow [i,j]$ utilisant les couleurs $(i,0)$, $(i,1)$, $(j,0)$, $(j,1)$ (nous garderons pour chaque sommet la couleur donnée par c et déterminerons simplement la valeur de la deuxième composante).

Dans chaque composante connexe de $G \rightarrow [i,j]$ (arbre) choisissons arbitrairement un sommet colorié i par c et affectons-lui la couleur $(i,0)$.

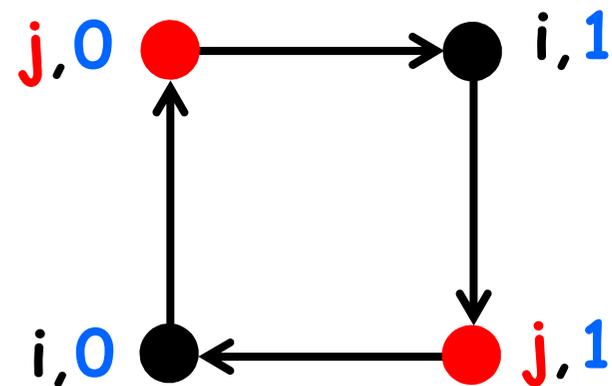
Les autres sommets sont alors coloriés de façon inductive ainsi : si y est non colorié et relié au sommet x déjà colorié par (i, α) , la deuxième composante associée à y sera α si l'arc va de x vers y et $1-\alpha$ dans le cas contraire...

Preuve. (suite)

Sur notre exemple, cela donne :



Pour chaque forêt $G \rightarrow [i, j]$,
 $i < j$, on construit en fait un
 homomorphisme vers le graphe
 ci-contre.



Preuve. (suite et fin)

Maintenant, il suffit d'utiliser cette technique sur toutes les forêts bicolores $G^{\rightarrow}[i,j]$ avec $i < j$.

En « composant » les colorations orientées du type $c_{i,j}$, nous obtenons une coloration γ de G^{\rightarrow} , avec pour chaque sommet u :

$$\gamma(u) = (c(u), u_1, u_2, \dots, u_k),$$

avec $u_j = c_{c(u),j}(u) \in \{0,1\}$ et $u_{c(u)} = 0$ (par exemple).

Le nombre de couleurs utilisées est bien $k \times 2^{k-1}$...

(c utilise k couleurs et nous utilisons k-1 composantes 0 ou 1, car $u_{c(u)}$ est fixée à 0...)

CQFD

Graphes planaires extérieurs

(1)

Définition. Un graphe est *planaire extérieur* (outerplanar) s'il est planaire et peut être dessiné de façon telle que tous ses sommets sont sur la face externe.

Il est facile de vérifier (voir interlude) que si G est un graphe planaire extérieur, alors $\chi_a(G) \leq 3$.

Nous obtenons ainsi :

Corollaire. Si G est un graphe planaire extérieur, alors

$$\chi_o(G) \leq 3 \times 2^2 = 12.$$

Ce résultat peut cependant être amélioré (voir interlude), et nous avons :

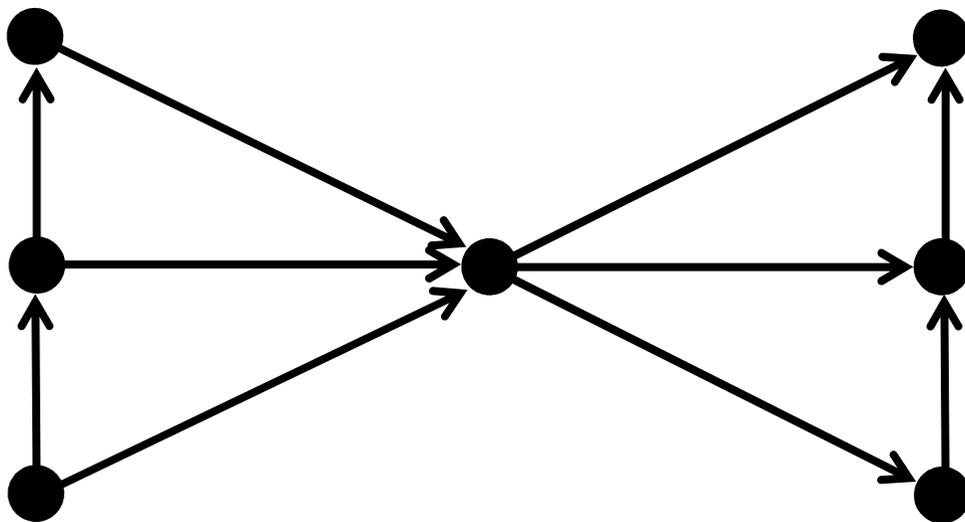
Théorème (1997). Si G est un graphe planaire extérieur, alors

$$\chi_o(G) \leq 7 \text{ (et ce résultat est optimal).}$$

Graphes planaires extérieurs

(2)

Optimalité. Considérons le graphe planaire extérieur orienté G suivant :



On remarque que toute paire de sommets est reliée par un arc ou par un chemin dirigé de longueur 2.

Ainsi, tous les sommets doivent avoir des couleurs distinctes et donc $\chi_o(G) = 7$.

Nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs

- Montrer que tout graphe planaire extérieur (ayant au moins deux sommets) possède au moins deux sommets de degré au plus 2.
- En déduire que le nombre chromatique acyclique d'un graphe planaire extérieur est d'au plus 3 et que ce résultat est optimal.

Nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs (suite)

Nous souhaitons démontrer que le nombre chromatique orienté d'un graphe planaire extérieur est d'au plus 7. Pour cela, nous allons montrer que toute orientation d'un tel graphe admet un homomorphisme vers le tournoi QR_7 , défini ainsi :

1. $V(QR_7) = \{ 0, 1, \dots, 6 \}$
 2. $A(QR_7) = \{ uv / v = u + q \pmod{7}, q \in \{ 1, 2, 4 \} \}$
- Montrez le tournoi QR_7 est sommet-transitif (un graphe est sommet-transitif si pour tous sommets distincts u et v , il existe un automorphisme α de G tel que $\alpha(u) = v$).

Nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs (suite)

- Considérons l'application de $V(QR_7)$ dans $V(QR_7)$ définie par :

$$\alpha(z) = [(x-w) / (v-u)]z + w - u(x-w)/(v-u) \pmod{7}$$

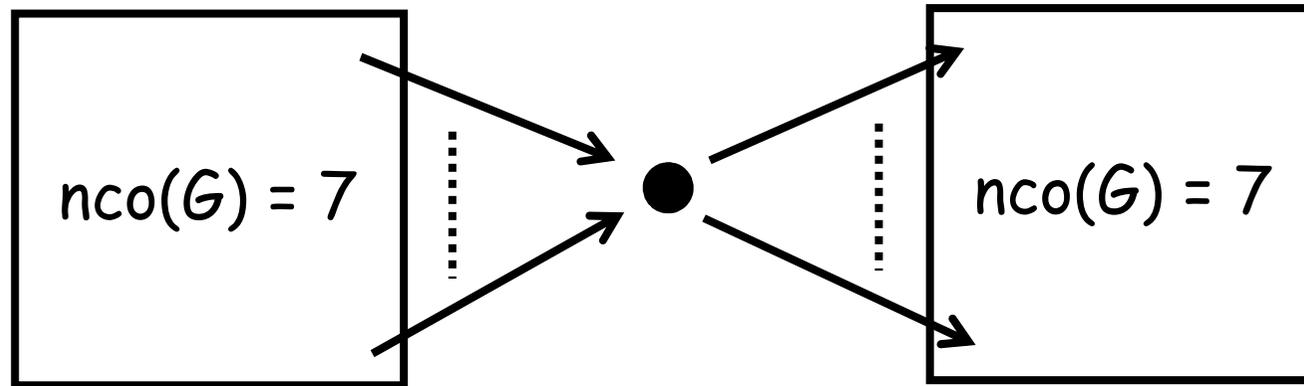
Montrez que cette application est un automorphisme de QR_7 qui envoie l'arc uv vers l'arc wx . En déduire que le tournoi QR_7 est arc-transitif (un graphe est arc-transitif si pour tous arcs distincts uv et wx , il existe un automorphisme α de G tel que $\alpha(u) = w$ et $\alpha(v) = x$).

Nombre chromatique orienté des graphes planaires extérieurs (suite)

- Montrez que pour tous sommets distincts u et v de QR_7 , il existe quatre sommets x_1, x_2, x_3 et x_4 tels que :
 1. $ux_1 \in A(QR_7)$ et $vx_1 \in A(QR_7)$,
 2. $ux_2 \in A(QR_7)$ et $x_2v \in A(QR_7)$,
 3. $x_3u \in A(QR_7)$ et $vx_3 \in A(QR_7)$,
 4. $x_4u \in A(QR_7)$ et $x_4v \in A(QR_7)$.
- En déduire que toute orientation d'un graphe planaire extérieur admet un homomorphisme vers le tournoi QR_7 .

minorant du nco des graphes planaires

En reliant deux copies du graphe précédent de la façon suivante :



on obtient un graphe planaire nécessitant 15 couleurs (toute paire de sommets est reliée par un arc ou par un chemin dirigé de longueur 2).

Timothy H. Marshall a récemment montré qu'il existait des graphes planaires nécessitant 18 couleurs...

Graphes planaires de grande maille

Il est possible d'améliorer le majorant de 80 pour les graphes planaires de grande maille.

Plus précisément, nous avons :

Théorème. Soit G un graphe planaire de maille g . Nous avons alors :

- $\chi_o(G) \leq 40$ si $g \geq 4$ (Ochem, Pinlou, 2011)

- $\chi_o(G) \leq 16$ si $g \geq 5$ (Pinlou, 2009)

- $\chi_o(G) \leq 11$ si $g \geq 6$

(Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud, Sopena, 1999)

- $\chi_o(G) \leq 7$ si $g \geq 7$ (Borodin, Ivanova, 2005)

- $\chi_o(G) \leq 6$ si $g \geq 11$ (Ochem, Pinlou, 2008)

- $\chi_o(G) \leq 5$ si $g \geq 12$ (Borodin, Ivanova, Kostochka, 2006)

On s'intéresse aux relations pouvant exister entre le nombre chromatique orienté d'un graphe et son degré maximum (cf. Théorème de Brooks).

On observe aisément les propriétés suivantes :

- Si G est de degré maximum 0, $\chi_o(G) = 1$.
(G ne possède aucune arête)
- Si G est de degré maximum 1, $\chi_o(G) = 2$.
(G est un couplage, i.e. une union disjointe de K_2)
- Si G est de degré maximum 2, et ne contient aucune composante connexe C_5 , $\chi_o(G) \leq 4$.
(G est une union disjointe de cycles et chemins)

Graphes de degré borné

(2)

Pour les graphes de degré maximum 3, nous avons :

Théorème (Sopena, Vignal, 1997). Si G est un graphe de degré maximum 3 alors $\chi_o(G) \leq 11$.

Preuve. (idée de la)

On montre que toute orientation d'un tel graphe admet un homomorphisme vers le tournoi QR_{11} , défini par :

- $V(QR_{11}) = \{ 0, 1, \dots, 10 \}$
- $E(QR_{11}) = \{ uv / v = u + q \pmod{11}, q \in \{1,3,4,5,9\} \}$

(1,3,4,5 et 9 sont les résidus quadratiques non nuls de 11)

CQFD

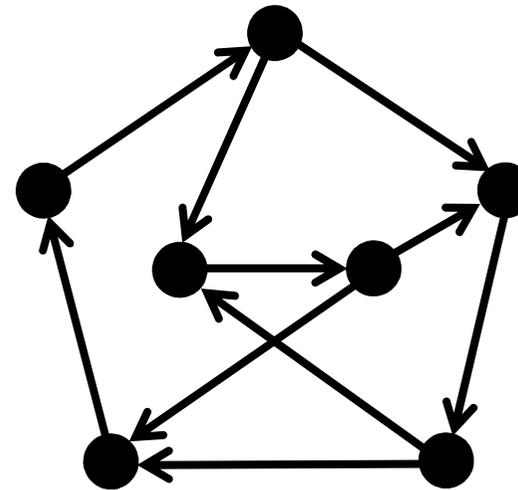
Graphes de degré borné

(3)

Ce résultat (majorant) n'est probablement pas optimal...

Conjecture (Sopena, 1997). Si G est un graphe connexe de degré maximum 3 alors $\chi_o(G) \leq 7$.

Si cette conjecture est vraie, elle est alors optimale :



Théorème (Duffy, 2014, non encore publié). Si G est un graphe de degré maximum 3 alors $\chi_o(G) \leq 9$.

Graphes de degré borné

(4)

Dans le cas général, nous avons :

Théorème (Kostochka, Sopena, Zhu, 1997). Si G est un graphe de degré maximum k , alors

$$\chi_o(G) \leq 2k^2 \times 2^k.$$

De plus, pour tout k et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un graphe $G_{k,\varepsilon}$, de degré maximum k et tel que

$$\chi_o(G_{k,\varepsilon}) \geq 2^{k/2} - \varepsilon.$$

Ce majorant a été par la suite raffiné :

Théorème (Aravind, Subramanian, 2009). Si G est un graphe d -dégénéré, de degré maximum k , alors

$$\chi_o(G) \leq 16kd \times 2^d.$$



Alexander V.
Kostochka



Xuding Zhu

Nombre chromatique orienté et degré moyen maximum

On souhaite prouver le théorème suivant : si G est un graphe de degré moyen maximum strictement inférieur à $7/3$ alors le nombre chromatique orienté de G est inférieur ou égal à 5.

Pour cela, on va montrer que toute orientation de G admet un homomorphisme vers le tournoi T_5 défini ainsi :

1. $V(T_5) = \{0,1,2,3,4\}$,
2. $ab \in A(T_5) \Leftrightarrow b = a+1 \pmod{5}$ ou $b = a+2 \pmod{5}$.

Nombre chromatique orienté et degré moyen maximum

Si S est un ensemble de sommets de T_5 ($S \subseteq V(T_5)$), on définit $\Gamma^+(S)$ comme l'ensemble des sommets successeurs d'au moins un sommet de S et $\Gamma^-(S)$ comme l'ensemble des sommets prédécesseurs d'au moins un sommet de S :

1. $\Gamma^+(S) = \{ b \in V(T_5) : \exists a \in S, ab \in E(T_5) \}$,
2. $\Gamma^-(S) = \{ c \in V(T_5) : \exists a \in S, ca \in E(T_5) \}$.

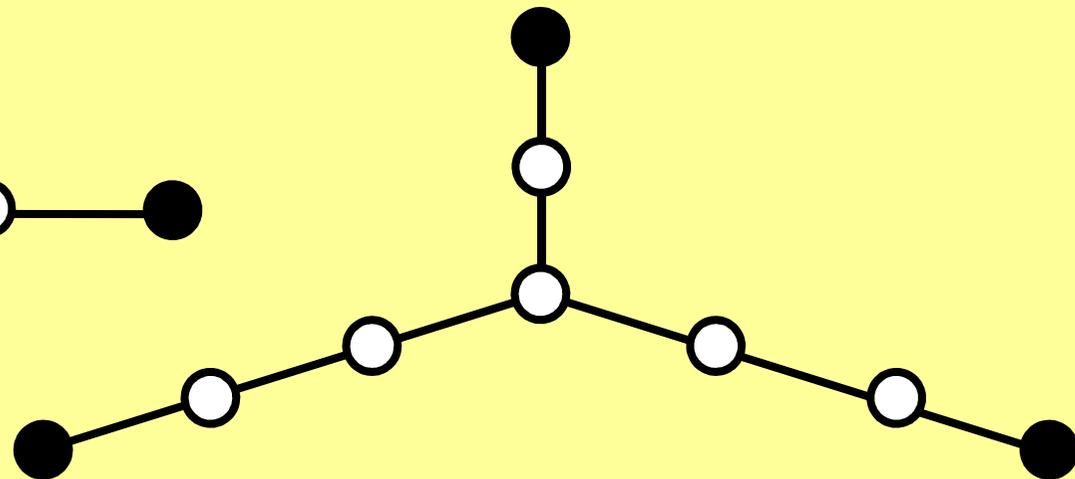
- On dit qu'un tel ensemble S de k sommets est un intervalle s'il est de la forme $\{a, a+1, \dots, a+k-1\}$ (les opérations sont faites modulo 5). Montrez que si S est un intervalle de k sommets, $1 \leq k \leq 4$, alors $\Gamma^+(S)$ et $\Gamma^-(S)$ sont tous deux des intervalles de $k+1$ sommets.

Nombre chromatique orienté et degré moyen maximum

- Montrez qu'un plus petit contre-exemple pour notre théorème ne contient aucun sommet de degré 0 ou 1.
- Montrez qu'un plus petit contre-exemple pour notre théorème ne peut contenir aucune des deux configurations (A) et (B) suivantes :



Configuration (A)



Configuration (B)

Nombre chromatique orienté et degré moyen maximum

- Montrez que le degré moyen maximum d'un graphe sans sommets de degré 0 ou 1 et ne contenant aucune des deux configurations précédentes est d'au moins $7/3$.
- En déduire notre théorème.
- Que peut-on dire alors sur le nombre chromatique orienté de certains graphes planaires ?