

# Domination, power domination et domination game

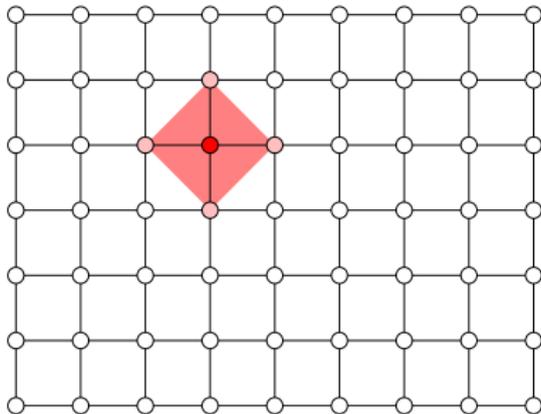
Paul Dorbec

Equipe Combinatoire et Algorithmique,  
thème Graphes et Applications

5 janvier 2011

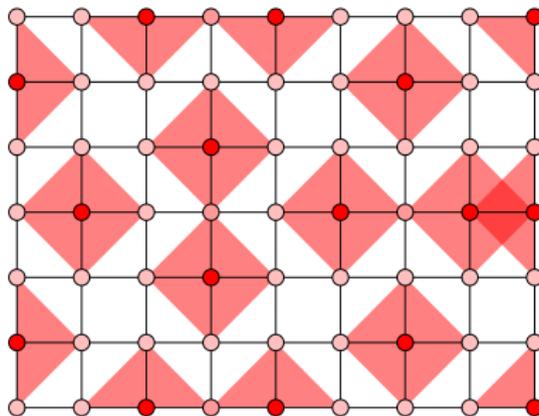
# Domination

Combien de casernes de pompiers sont nécessaires pour protéger tous les villages ?  
→  $\gamma$



# Domination

Combien de casernes de pompiers sont nécessaires pour protéger tous les villages ?  
 →  $\gamma$



*ensemble de casernes* = recouvrement = dominant

## Résultats classiques

Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  de degré maximum  $\Delta$ .

- ▶ Un sommet domine au plus  $\Delta(G) + 1$  sommets :

$$\frac{n}{\Delta + 1} \leq \gamma(G) \leq n - \Delta$$

## Résultats classiques

Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  de degré maximum  $\Delta$ .

- ▶ Un sommet domine au plus  $\Delta(G) + 1$  sommets :

$$\frac{n}{\Delta + 1} \leq \gamma(G) \leq n - \Delta$$

- ▶ Un stable maximal  $\rightarrow$  dominant minimal (pas minimum) :

$$\gamma(G) \leq \alpha(G)$$

## Résultats classiques

Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  de degré maximum  $\Delta$ .

- ▶ Un sommet domine au plus  $\Delta(G) + 1$  sommets :

$$\frac{n}{\Delta + 1} \leq \gamma(G) \leq n - \Delta$$

- ▶ Un stable maximal  $\rightarrow$  dominant minimal (pas minimum) :

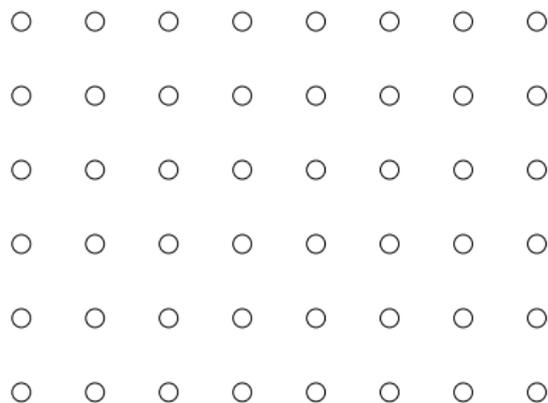
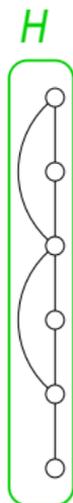
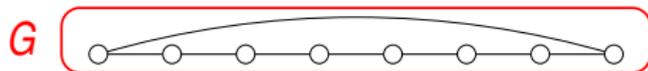
$$\gamma(G) \leq \alpha(G)$$

- ▶  $G$  sans sommets isolés  $\Rightarrow$  au plus la moitié des sommets, atteint :

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$$

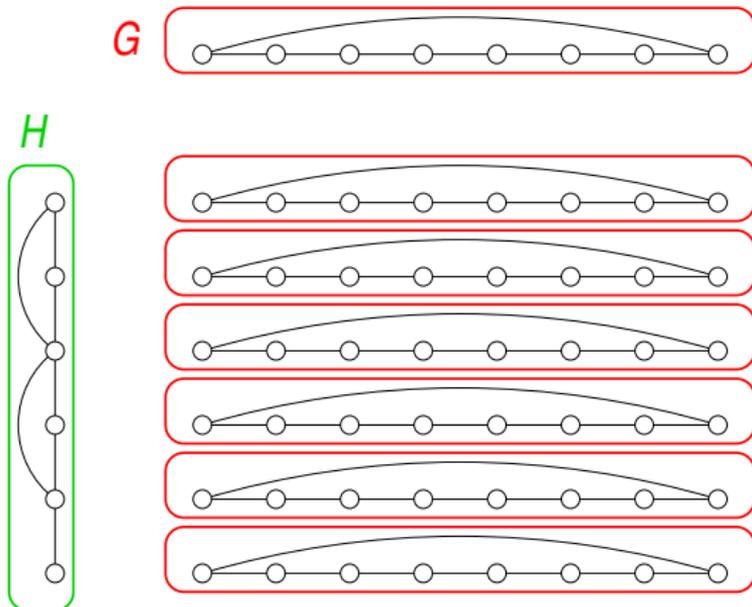
# Produit cartésien

Deux graphes  $G$  et  $H \longrightarrow$  un graphe  $G \square H$



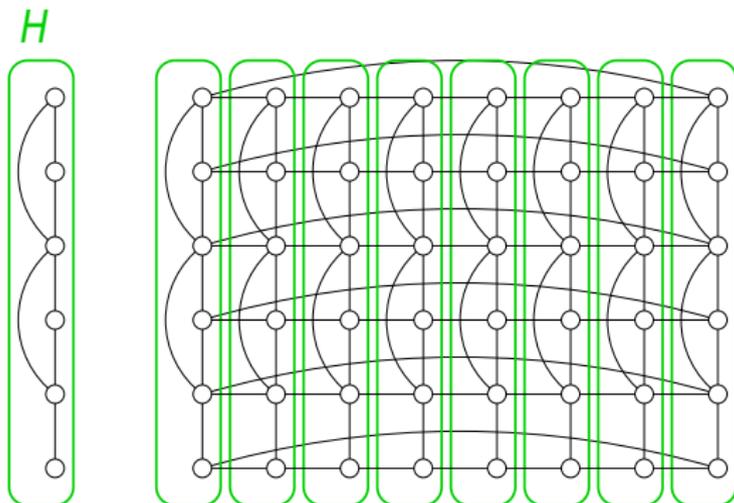
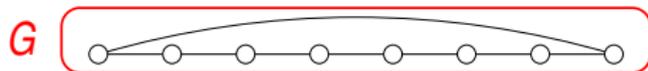
# Produit cartésien

Deux graphes  $G$  et  $H$   $\longrightarrow$  un graphe  $G \square H$



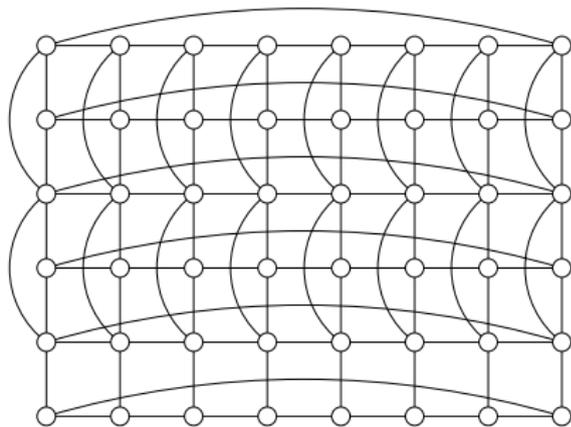
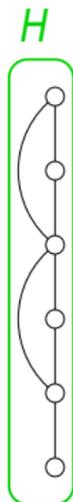
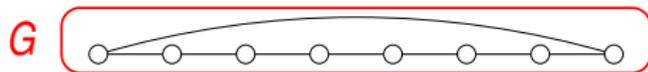
# Produit cartésien

Deux graphes  $G$  et  $H$   $\longrightarrow$  un graphe  $G \square H$



# Produit cartésien

Deux graphes  $G$  et  $H$   $\longrightarrow$  un graphe  $G \square H$



# Conjecture de Vizing

Conjecture (Vizing, 1968)

Pour tous graphes  $G$  et  $H$ ,

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G) \times \gamma(H)$$

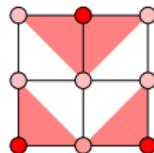
# Conjecture de Vizing

## Conjecture (Vizing, 1968)

Pour tous graphes  $G$  et  $H$ ,

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G) \times \gamma(H)$$

- Pas l'autre inégalité en général :  $\gamma(P_3) = 1$  et  $\gamma(P_3 \square P_3) = 3$ .



## Conjecture de Vizing

### Conjecture (Vizing, 1968)

Pour tous graphes  $G$  et  $H$ ,

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G) \times \gamma(H)$$

- ▶ Pas l'autre inégalité en général :  $\gamma(P_3) = 1$  et  $\gamma(P_3 \square P_3) = 3$ .
- ▶ Prouvée avec un facteur 2 par Clark et Suen en 2000 :  
$$\gamma(G \square H) \geq \frac{1}{2} \gamma(G) \times \gamma(H)$$

## Conjecture de Vizing

### Conjecture (Vizing, 1968)

Pour tous graphes  $G$  et  $H$ ,

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G) \times \gamma(H)$$

- ▶ Pas l'autre inégalité en général :  $\gamma(P_3) = 1$  et  $\gamma(P_3 \square P_3) = 3$ .
- ▶ Prouvée avec un facteur 2 par Clark et Suen en 2000 :  
$$\gamma(G \square H) \geq \frac{1}{2} \gamma(G) \times \gamma(H)$$
- ▶ Prouvée pour de nombreuses classes de graphes : arbres, cycles, triangulés... et dans certains cas :  $G \square \overline{G}$  ...

## Conjecture de Vizing

### Conjecture (Vizing, 1968)

Pour tous graphes  $G$  et  $H$ ,

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G) \times \gamma(H)$$

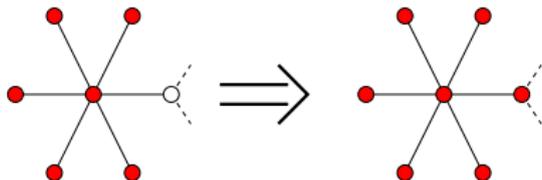
- ▶ Pas l'autre inégalité en général :  $\gamma(P_3) = 1$  et  $\gamma(P_3 \square P_3) = 3$ .
- ▶ Prouvée avec un facteur 2 par Clark et Suen en 2000 :  
$$\gamma(G \square H) \geq \frac{1}{2} \gamma(G) \times \gamma(H)$$
- ▶ Prouvée pour de nombreuses classes de graphes : arbres, cycles, triangulés... et dans certains cas :  $G \square \overline{G} \dots$
- ▶ Nombreuses inégalités similaires pour des variantes de la domination, pour d'autres produits, etc...

## Power domination

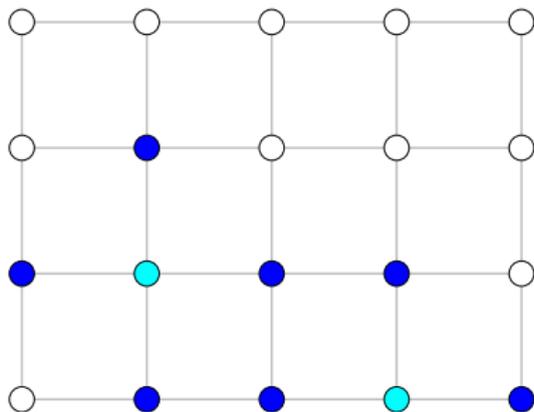
Deux phases :

- ▶ phase 1, domination :  $\mathcal{P}^0(S) = N[S]$
- ▶ phase 2, propagation : tout sommet de  $\mathcal{P}^i(S)$  avec au plus 1 voisin non surveillé devient surveillé (est ajouté à  $\mathcal{P}^{i+1}(S)$ ) :

$$\mathcal{P}^{i+1}(S) = \left\{ N[v] \mid \begin{array}{l} v \in \mathcal{P}^i(S), \\ |N[v] \setminus \mathcal{P}^i(S)| \leq 1 \end{array} \right\}$$

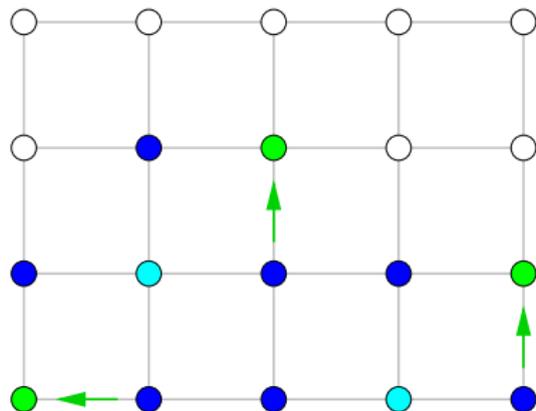


Exemple :  $\gamma_p(P_4 \square P_5 \leq 2)$



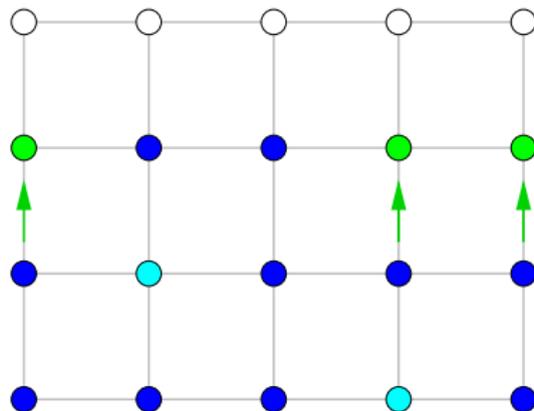
Domination :  $\mathcal{P}^0(S)$

Exemple :  $\gamma_p(P_4 \square P_5 \leq 2)$



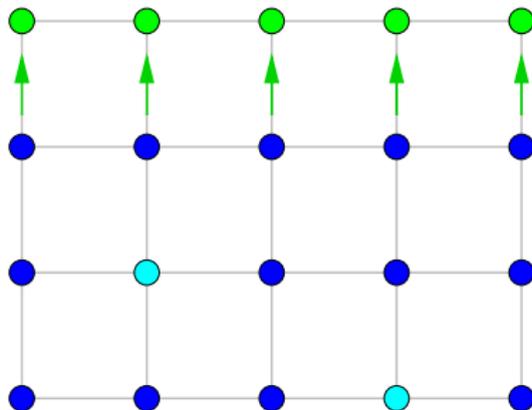
Propagation 1 :  $\mathcal{P}^0(S)$

Exemple :  $\gamma_p(P_4 \square P_5 \leq 2)$



Propagation 2 :  $\mathcal{P}^0(S)$

Exemple :  $\gamma_p(P_4 \square P_5 \leq 2)$



Propagation 3 :  $\mathcal{P}^0(S)$

## Bornes classiques

Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$ , de degré max  $\geq 3$ .

- ▶ Il existe un power dominant ne contenant que des sommets de degré au moins 3.
- ▶ Au plus le tiers des sommets, atteint :

$$\gamma_p(G) \leq \frac{n}{3}$$

## Domination game

- ▶ Deux joueurs, Alice et Bob
- ▶ plateau de jeu = un graphe.
- ▶ chacun son tour, chaque joueur retire du graphe un sommet et son voisinage
- ▶ le joueur qui finit de vider le graphe a gagné.

## Domination game

- ▶ Deux joueurs, Alice et Bob
- ▶ plateau de jeu = un graphe.
- ▶ chacun son tour, chaque joueur retire du graphe un sommet et son voisinage
- ▶ le joueur qui finit de vider le graphe a gagné.

À la fin du jeu, les sommets sélectionnés forment un dominant minimal !

**Question** : Qui gagne ?

## Un jeu combinatoire

- ▶ On peut toujours définir un joueur qui a une stratégie gagnante.
- ▶ Situation perdante/gagnante
- ▶ Somme de jeux...

## Equivalence avec Col impartial

- ▶ Le même jeu que Col avec une couleur.

## Equivalence avec Col impartial

- ▶ Le même jeu que Col avec une couleur.
- ▶ Col 2 couleurs : voir dessin

## Equivalence avec Col impartial

- ▶ Le même jeu que Col avec une couleur.
- ▶ Col 2 couleurs : voir dessin
- ▶ Col k couleurs : domination sur  $G \square K_k$

the end...

Questions ?