Solution - TD Feuille 1 - Automates finis et expressions rationnelles

Informatique Théorique 2 - Unité J1INPW11
Licence 3 - Université Bordeaux 1

Solution de l'exercice 1 :

1. Mots de longueurs 0 : ϵ ;
   Mots de longueurs 1 : a ;
   Mots de longueurs 2 : aa, ba ;
   Mots de longueurs 3 : aaa, aba, baa ;
   Mots de longueurs 4 : $aaaa$, $aaba$, $abaa$, $baba$, $baaa$.
2. Mots de longueurs 0 : aucun ;
   Mots de longueurs 1 : aucun ;
   Mots de longueurs 2 : aa ;
   Mots de longueurs 3 : aucun ;
   Mots de longueurs 4 : $aaaa$, $abaa$.

Solution de l'exercice 2 :

1. $b^*(a(bb)^*)^*b^*$.
2. a^*b^*.

Solution de l'exercice 3 :
Mots de longeur 0 reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$: aucun ;
Mots de longeur 1 reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$: b ;
Mots de longeur 2 reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$: ba, aa, ab ;
Mots de longeur 3 reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$: baa, aaa, aba, abb ;
Mots de longeur 4 reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$: $baaa$, $aaaa$, $abaa$, $abab$, $abba$, $abbb$.

Il est possible de répondre à cette question de manière systématique en utilisant les matrices. Pour cela, on représente l'automate (que l'on peut voir comme un graphe) par la matrice d'adjacence suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice i, j de la matrice M^k correspond aux mots de longueur k reconnus par l'automate, si l'état initial était l'état i et l'état final, l'état j. Si l'on souahite obtenir les mots de longueur k reconnus par notre automate, il suffit d'évaluer $M^k_{1,4} + M^k_{1,3}$. Voici les matrices M^0, M^1, M^2, M^3 et M^4 :

$$M^0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab & aa+ba \\ 0 & 0 & b(a+b) & a^2 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab(a+b) & a^3+ba^2 \\ 0 & 0 & b(a+b)^2 & a^3 \\ 0 & 0 & (a+b)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab(a+b)^2 & a^4+ba^3 \\ 0 & 0 & b(a+b)^3 & a^4 \\ 0 & 0 & (a+b)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

Mots de longeurs 0 : $M^0_{1,2} + M^0_{1,4} = 0$;
Mots de longeurs 1 : $M^1_{1,2} + M^1_{1,4} = b$;
Mots de longeurs 2 : $M^2_{1,2} + M^2_{1,4} = ab + aa + ba$;
Mots de longeurs 3 : $M^3_{1,2} + M^3_{1,4} = aba + abb + aaa + baa$;
Mots de longeurs 4 : $M^4_{1,2} + M^4_{1,4} = abaa + abab + abba + abbb + aaaa + baaa$;

Pour l'automate $\mathcal{A}_2$, on a les résultat suivants :

$$M^0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 0 & ab \\ a^2+ab & 0 & 0 & ab \\ ba & 0 & 0 & b^2 \\ ba & 0 & ba & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} a^3+b^2a & ab^2 & b^2a & a^2b \\ a^3+aba & ab^2 & 0 & a^2b+ab^2 \\ ba^2 & b^3 & 0 & bab \\ b(a^2+ab) & 0 & 0 & bab \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} a(a^3+b^2a) & b^2(a^2+ab)+a^2b^2 & \dots \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Mots de longueur 0 : $M^0_{1,1} + M^0_{1,2} = \epsilon$;
Mots de longueur 1 : $M^1_{1,1} + M^1_{1,2} = a$;
Mots de longueur 2 : $M^2_{1,1} + M^2_{1,2} = aa + bb$;
Mots de longueur 3 : $M^3_{1,1} + M^3_{1,2} = aaa + bba + abb$;
Mots de longueur 4 : $M^4_{1,1} + M^4_{1,2} = aaaa + abba + aabb + bbaa + bbab$;

Solution de l'exercice 4 :

L'automate $\mathcal{A}_1$ a pour définition :

$$\mathcal{A}_1 = \left(Q = \{1,2,3,4\}, \quad q_i = 1, \quad F = \{3,4\}, \quad \delta : \begin{cases} (1,a) \to 2 \\ (1,b) \to 4 \\ (2,a) \to 4 \\ (2,b) \to 3 \\ (3,a) \to 3 \\ (3,b) \to b \end{cases} \right)$$

L'automate $\mathcal{A}_2$ a pour définition :

$$\mathcal{A}_2 = \left(Q = \{1,2,3,4\}, \quad q_i = 1, \quad F = \{1,2\}, \quad \delta : \left\{ \begin{array}{l} (1,a) \to 1 \\ (1,b) \to 4 \\ (2,a) \to 1 \\ (2,a) \to 3 \\ (3,b) \to 1 \\ (4,b) \to 2 \end{array} \right. \right)$$

Solution de l'exercice 5 :

Les automates $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$ sont déssinés dans les figures 1 et 2 suivantes :

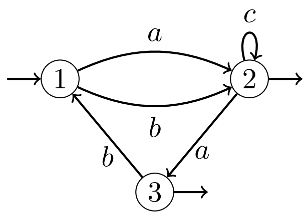


FIGURE 1 – Automate $\mathcal{A}_3$

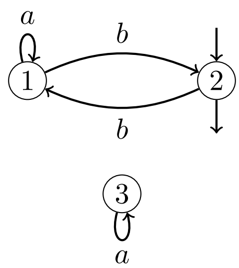
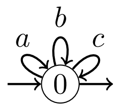


FIGURE 2 – Automate $\mathcal{A}_4$

Solution de l'exercice 6 :

1. Expression régulière : $(a+b+c)^*$.
   Automate :

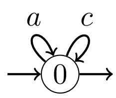
   

   On prouve maintenant que cet automate reconnaît bien le bon langage. On pose L le langage de tous les mots et K le langage de l'automate. On cherche à prouver $L = K$. Considérons la propriété suivante, $\mathcal{P}_n$, paramétrée par un entier n :

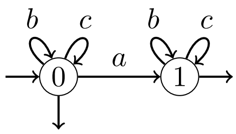
   $$\mathcal{P}_n : \text{Pour tout mot } w \text{ de taille } n : w \in L \Leftrightarrow w \in K$$

   Il est clair que si $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n, on a bien $K = L$. Il nous reste à prouver $\mathcal{P}_n$ pour tout n. On procède par induction sur n.
   - Si $n = 0$, on a $w = \epsilon$. Par définition, on a $w \in L$ et $w \in K$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
   - Soit $n > 0$, on suppose $\mathcal{P}_{n-1}$ et on prouve $\mathcal{P}_n$. Soit w un mot de taille n, puisque $n > 0$, on a $w = w'x$ où w' est un mot de taille $n-1 \geq 0$ (on va donc pouvoir appliquer $\mathcal{P}_{n-1}$ à w') et x une lettre dans $\{a,b,c\}$. Supposons que $w \in K$, par définition de L on a $w \in L$. Réciproquement si $w \in L$, on sait par hypothèse d'induction ($\mathcal{P}_{n-1}$) que $w' \in K$. Or en observant les transitions de l'automate on constate que $Kx \subseteq K$ pour tout $x \in \{a,b,c\}$, il en découle que $w \in K$. On a donc bien $w \in L \Leftrightarrow w \in K$.

2. Expression régulière : $(a+c)^*$.
   Automate :



3. Expression régulière : $(b+c)^*(a+\epsilon)(b+c)^*$.
   Automate :



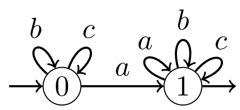
   On prouve maintenant que cet automate reconnaît bien le bon langage. On note :
   – L_0 le langage des mots ne contenant pas de a.
   – K_0 le langage des mots pour lequels il existe un calcul de l'automate arrivant dans l'état 0.
   – L_1 le langage des mots contenant exactement un a.
   – K_1 le langage des mots pour lequels il existe un calcul de l'automate arrivant dans l'état 1.

   Observons que le langage de la question est $L_1 \cup L_0$ et le langage reconnu par l'automate $K_1 \cup K_0$. On va montrer $L_0 = K_0$ et $L_1 = K_1$. Considérons la propriété suivante, $\mathcal{P}_n$, paramétrée par un entier n :

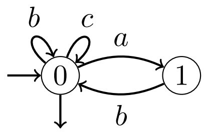
   $$\mathcal{P}_n : \text{Pour tout mot } w \text{ de taille } n : \begin{array}{l} w \in L_0 \Leftrightarrow w \in K_0 \\ w \in L_1 \Leftrightarrow w \in K_1 \end{array}$$

   Il est clair que si $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n, on a bien $K_0 = L_0$ et $K_1 = L_1$. Il nous reste à prouver $\mathcal{P}_n$ pour tout n. On procède par induction sur n.
   – Si $n = 0$, on a $w = \epsilon$. Par définition, on a $w \in L_0$, $w \in K_0$, $w \notin L_1$ et $w \notin K_1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
   – Soit $n > 0$, on suppose $\mathcal{P}_{n-1}$ et on prouve $\mathcal{P}_n$. Soit w un mot de taille n, puisque $n > 0$, on a $w = w'x$ où w' est un mot de taille $n-1 \geq 0$ et x une lettre dans $\{a, b, c\}$. Supposons que $w \in K_0$, par définition des transitions de l'automate on a $w' \in K_0$ et $x \in \{b, c\}$. Par induction on en déduit que $w' \in L_0$ donc $w \in L_0(b+c) \subseteq L_0$. Réciproquement, si $w \in L_0$, on a $w' \in L_0$ donc par induction $w' \in K_0$, par définition des transitions de l'automate on obtient $w \in K_0$.
     Maintenant, supposons que $w \in K_1$, par définition de l'automate, il y a deux cas possibles : soit $w' \in K_0$ et $x = a$, soit $w' \in K_1$ et $x \in \{b, c\}$. Dans le premier cas on conclut en utilisant l'induction que $w' \in L_0$ et $w \in L_0 a \subseteq L_1$. Dans le second cas on a par induction $w' \in L_1$ et $w \in L_1(b+c) \subseteq L_1$. Réciproquement, si $w \in L_1$, soit $x = a$ auquel cas $w' \in L_0$ et donc $w' \in K_0$ par induction ce qui implique que $w \in K_1$ par définition des transitions. Sinon $x \in \{b, c\}$, dans ce cas $w' \in L_1$ et $w \in L_1$ par définition des transitions.

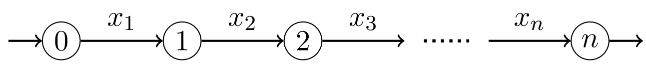
4. Expression régulière : $(b+c)^*a(a+b+c)^*$.
   Automate :



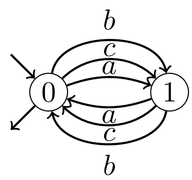
5. Expression régulière : $(b+c)^*(ab(b+c)^*)^*$.
   Automate :



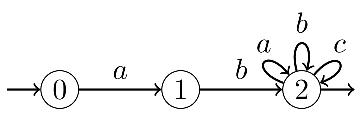
6. Expression régulière : x. Pour l'automate, on appelle $x_1, \ldots, x_n \in \{a, b, c\}$, les lettres de x (i.e. $x = x_1 x_2 \ldots x_n$).



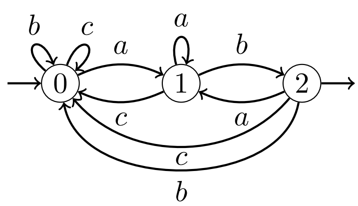
7. Expression régulière : $((a+b+c)(a+b+c))^*$.
   Automate :



8. Expression régulière : $ab(a+b+c)^*$.
   Automate :



9. Expression régulière : $(a+b+c)^*ab$.
   Automate :



Solution de l'exercice 7 :

On fixe $x = x_1 \cdots x_n$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des lettres dans A. On va construire un automate déterministe à $n+1$ états qui reconnaît $L = A^*x$.

On commence par donner l'ensemble d'états de l'automate, puis on va construire petit à petit les transitions. On fixe $Q = \{q_0, \ldots, q_n\}$, $I = \{q_0\}$ et $F = \{q_n\}$. De plus pour tout entier $i \in \{1, n\}$ on ajoute une transition $(q_{i-1}, x_i) \to q_i$. Pour l'instant notre automate est bien deterministe et reconnaît le langage $\{x\}$. On peut le dessiner de la façon suivante :

$$\longrightarrow q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} q_2 \xrightarrow{x_3} \cdots\cdots \xrightarrow{x_n} q_n \longrightarrow$$

On va maintenant ajouter des transitions pour que l'automate reconnaisse le langage $L = A^*x$. Considérons les langages $K_0, \ldots, K_n$ définis de la façon suivante : $K_i = A^*x_1 \cdots x_i$ pour tout entier $i \in \{0, n\}$. Notons que K_n est le langage L. Enfin on fixe $L_0, \ldots, L_n$ les langages définis comme suit : $L_n = K_n = L$ et pour tout $i \in \{0, n-1\}$, $L_i = K_i \setminus (K_{i+1} \cup \cdots \cup K_n)$.

Commençons par faire deux observations : 1) pour tout $i \neq j$, $L_i \cap L_j = \emptyset$, 2) $L_0 \cup \cdots \cup L_n = A^*$. Il en découle que tout mot w appartient à un et un seul langage L_i : par définition il s'agit du L_i pour le plus grand i tel que $x_1 \cdots x_i$ est un suffixe de w.

Notre but est de compléter les transitions de notre automate pour que le langage reconnu dans l'état q_i soit L_i pour tout $i \in \{0, n\}$. On commence par donner la liste des transitions à ajouter puis on prouve que l'automate construit ainsi vérifie bien cette propriété.

Pour tout $i, j \in \{0, n\}$ et $a \in A$ tel que $a \neq x_{i+1}$, on ajoute la transition $(q_i, a) \to q_j$ à l'ensemble de transitions de notre automate si et seulement si le mot $x_1 \cdots x_i a$ appartient au langage L_j. Observons qu'il existe toujours un unique langage L_j tel que $x_1 \cdots x_i a \in L_j$. Donc on n'ajoute qu'une unique transition partant de q_i et étiquetée par a pour chaque couple (q_i, a).

La construction de l'automate $\mathcal{A}$ est maintenant finie. Par construction, $\mathcal{A}$ est bien déterministe, il est même complet (c'est à dire que pour tout mot w le calcul de $\mathcal{A}$ sur w arrive dans un et un seul état). Il nous reste à montrer que $\mathcal{A}$ accepte bien le langage L.

Soit w un mot, puisque $\mathcal{A}$ est déterministe et complet, il existe un unique état q_i tel que le calcul sur w arrive en q_i. On prouve par induction sur la longueur de w que $w \in L_i$.

Si $w = \epsilon$, alors $q_i = q_0$ et $\epsilon \in L_0$. On suppose le résultat vrai pour les mots de longueur k. Soit w de longueur $k+1$. On a $w = w'a$ avec w' un mot de longueur k et $a \in A$. Soit $q_{i'}$ l'état dans lequel arrive le calcul sur w', par définition des transitions on en déduit que $x_1 \cdots x_{i'} a \in L_i \subseteq K_i$. Par hypothèse d'induction, on a $w' \in L_{i'}$, donc w' a pour suffixe $x_1 \cdots x_{i'}$ et w a pour suffixe $x_1 \cdots x_{i'} a$: $w \in K_i$. On veut montrer que $w \in L_i$, pour celà on doit montrer que $w \notin K_j$ pour $j > i$. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $j > i$ tel que $w \in K_j$, donc $w' \in K_{j-1}$. Puisque $w' \in L_{i'}$, on a $i' \geq j-1$, donc $x_1 \cdots x_{i'} \in K_{j-1}$ et $x_1 \cdots x_{i'} a \in K_j$ ce qui est impossible étant donné que $x_1 \cdots x_{i'} a \in L_i$ et par définition, puisque $j > i$, $L_i \cap K_j = \emptyset$. On en déduit donc que $w \in L_i$.

En appliquant le résultat à l'etat final q_n on obtient que les mots acceptés par l'automate sont exactement les mots de L.

Solution de l'exercice 8 :

1. Vrai.
2. Faux. Prenons $L = \{\epsilon\}$, $LL^* = \{\epsilon\} \neq \emptyset = L^* \setminus \{\epsilon\}$.
3. Vrai.
4. Vrai.

$$\begin{array}{c} w \in (KL)^*K \\ \Leftrightarrow \\ w = (k_1 l_1 \cdots k_n l_n) k_{n+1} \text{ avec } k_1, \ldots, k_{n+1} \in K \text{ et } l_1, \ldots, l_n \in L \\ \Leftrightarrow \\ w = k_1 (l_1 k_2 \cdots l_n k_{n+1}) \\ \Leftrightarrow \\ w \in K(LK)^* \end{array}$$

Solution de l'exercice 9 :
McNaughton et Yamada : Figure 1

$$\begin{array}{lcl} R^0_{1,1} & = & \epsilon \\ R^0_{1,2} & = & a \\ R^0_{1,3} & = & \emptyset \\ R^0_{1,4} & = & b \\ R^0_{2,1} & = & \emptyset \\ R^0_{2,2} & = & \epsilon \\ R^0_{2,3} & = & b \\ R^0_{2,4} & = & a \\ R^0_{3,1} & = & \emptyset \\ R^0_{3,2} & = & \emptyset \\ R^0_{3,3} & = & \epsilon + a + b \\ R^0_{3,4} & = & \emptyset \\ R^0_{4,1} & = & \emptyset \\ R^0_{4,2} & = & \emptyset \\ R^0_{4,3} & = & \emptyset \\ R^0_{4,4} & = & \epsilon + a \end{array} \qquad \begin{array}{lclcl} R^1_{1,1} & = & R^0_{1,1} + R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,1} & = & \epsilon \\ R^1_{1,2} & = & R^0_{1,2} + R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} & = & a \\ R^1_{1,3} & = & R^0_{1,3} + R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} & = & \emptyset \\ R^1_{1,4} & = & R^0_{1,4} + R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,4} & = & b \\ R^1_{2,1} & = & R^0_{2,1} + R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,1} & = & \emptyset \\ R^1_{2,2} & = & R^0_{2,2} + R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} & = & \epsilon \\ R^1_{2,3} & = & R^0_{2,3} + R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} & = & b \\ R^1_{2,4} & = & R^0_{2,4} + R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,4} & = & a \\ R^1_{3,1} & = & R^0_{3,1} + R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,1} & = & \emptyset \\ R^1_{3,2} & = & R^0_{3,2} + R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} & = & \emptyset \\ R^1_{3,3} & = & R^0_{3,3} + R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} & = & \epsilon + a + b \\ R^1_{3,4} & = & R^0_{3,4} + R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,4} & = & \emptyset \\ R^1_{4,1} & = & R^0_{4,1} + R^0_{4,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,1} & = & \emptyset \\ R^1_{4,2} & = & R^0_{4,2} + R^0_{4,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} & = & \emptyset \\ R^1_{4,3} & = & R^0_{4,3} + R^0_{4,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} & = & \emptyset \\ R^1_{4,4} & = & R^0_{4,4} + R^0_{4,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,4} & = & \epsilon + a \end{array}$$

$$\begin{array}{lclcl} R^2_{1,1} & = & R^1_{1,1} + R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,1} & = & \epsilon \\ R^2_{1,2} & = & R^1_{1,2} + R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,2} & = & a \\ R^2_{1,3} & = & R^1_{1,3} + R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,3} & = & ab \\ R^2_{1,4} & = & R^1_{1,4} + R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,4} & = & b + aa \\ R^2_{2,1} & = & R^1_{2,1} + R^1_{2,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,1} & = & \emptyset \\ R^2_{2,2} & = & R^1_{2,2} + R^1_{2,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,2} & = & \epsilon \\ R^2_{2,3} & = & R^1_{2,3} + R^1_{2,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,3} & = & b \\ R^2_{2,4} & = & R^1_{2,4} + R^1_{2,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,4} & = & a \\ R^2_{3,1} & = & R^1_{3,1} + R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,1} & = & \emptyset \\ R^2_{3,2} & = & R^1_{3,2} + R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,2} & = & \emptyset \\ R^2_{3,3} & = & R^1_{3,3} + R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,3} & = & \epsilon + a + b \\ R^2_{3,4} & = & R^1_{3,4} + R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,4} & = & \emptyset \\ R^2_{4,1} & = & R^1_{4,1} + R^1_{4,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,1} & = & \emptyset \\ R^2_{4,2} & = & R^1_{4,2} + R^1_{4,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,2} & = & \emptyset \\ R^2_{4,3} & = & R^1_{4,3} + R^1_{4,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,3} & = & \emptyset \\ R^2_{4,4} & = & R^1_{4,4} + R^1_{4,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,4} & = & \epsilon + a \end{array} \qquad \begin{array}{lclcl} R^3_{1,1} & = & R^2_{1,1} + R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,1} & = & \epsilon \\ R^3_{1,2} & = & R^2_{1,2} + R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,2} & = & a \\ R^3_{1,3} & = & R^2_{1,3} + R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,3} & = & ab(a+b)^* \\ R^3_{1,4} & = & R^2_{1,4} + R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,4} & = & b + aa \\ R^3_{2,1} & = & R^2_{2,1} + R^2_{2,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,1} & = & \emptyset \\ R^3_{2,2} & = & R^2_{2,2} + R^2_{2,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,2} & = & \epsilon \\ R^3_{2,3} & = & R^2_{2,3} + R^2_{2,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,3} & = & b(a+b)^* \\ R^3_{2,4} & = & R^2_{2,4} + R^2_{2,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,4} & = & a \\ R^3_{3,1} & = & R^2_{3,1} + R^2_{3,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,1} & = & \emptyset \\ R^3_{3,2} & = & R^2_{3,2} + R^2_{3,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,2} & = & \emptyset \\ R^3_{3,3} & = & R^2_{3,3} + R^2_{3,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,3} & = & (a+b)^* \\ R^3_{3,4} & = & R^2_{3,4} + R^2_{3,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,4} & = & \emptyset \\ R^3_{4,1} & = & R^2_{4,1} + R^2_{4,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,1} & = & \emptyset \\ R^3_{4,2} & = & R^2_{4,2} + R^2_{4,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,2} & = & \emptyset \\ R^3_{4,3} & = & R^2_{4,3} + R^2_{4,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,3} & = & \emptyset \\ R^3_{4,4} & = & R^2_{4,4} + R^2_{4,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,4} & = & \epsilon + a \end{array}$$

Pour la dernière étape on se contente de calculer les deux expressions qui nous intéressent :

$$\begin{array}{rcccl} R^3_{1,3} & = & R^3_{1,3} + R^3_{1,4}(R^3_{4,4})^* R^3_{4,3} & = & ab(a+b)^* \\ R^3_{1,4} & = & R^3_{1,4} + R^3_{1,4}(R^3_{4,4})^* R^3_{4,4} & = & (b+aa)a^* \end{array}$$

L'expression voulue est donc $ab(a+b)^* + (b+aa)a^*$.

Équations : Figure 1

On utilise ici la méthode par résolution d'équations avec le lemme d'Arden. Il est important ici de faire une remarque : il existe deux 'versions' symétriques du lemme suivant la forme de l'équation que l'on considère :

$$\begin{array}{ccc} \text{Si } X = KX + L \text{ et } \epsilon \notin K & \qquad & \text{Si } X = XK + L \text{ et } \epsilon \notin K \\ alors & & alors \\ X = K^*L & & X = LK^* \end{array}$$

Suivant la version qu'on utilise la méthode pour générer les équations est légérement différente. On utilise ici la version de droite (on utilisera la version de gauche pour la figure 2)

On considère L_1, L_2, L_3, L_4 les langages définis comme suit : $w \in L_i$ si et seulement si il existe un calcul de l'automate sur w partant de l'état intial et arrivant dans l'état i (attention si on utilisait l'autre version du lemme la définition serait différente). Il découle des transitions qu'on a les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & \epsilon \\ L_2 & = & L_1 a \\ L_3 & = & L_2 b + L_3(a+b) \\ L_4 & = & L_1 b + L_2 a + L_4 a \end{array}$$

En substituant L_1 par sa valeur on obtient :

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & \epsilon \\ L_2 & = & a \\ L_3 & = & L_2 b + L_3(a+b) \\ L_4 & = & b + L_2 a + L_4 a \end{array}$$

En substituant L_2 par sa valeur on obtient :

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & \epsilon \\ L_2 & = & a \\ L_3 & = & ab + L_3(a+b) \\ L_4 & = & b + aa + L_4 a \end{array}$$

Enfin en appliquant le lemme d'Arden (version de droite) aux deux dernières équations on obtient :

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & \epsilon \\ L_2 & = & a \\ L_3 & = & ab(a+b)^* \\ L_4 & = & (b+aa)a^* \end{array}$$

Équations : Figure 2

On utilise cette fois la version de gauche du lemme d'Arden.

On considère L_1, L_2, L_3, L_4 les langages définis comme suit : $w \in L_i$ si et seulement si il existe un calcul de l'automate sur w partant de l'état i et arrivant dans un état final (attention si on utilisait l'autre version du lemme la définition serait différente). Il découle des transitions qu'on a les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & aL_1 + bL_4 + \epsilon \\ L_2 & = & aL_1 + aL_3 + \epsilon \\ L_3 & = & bL_1 \\ L_4 & = & bL_2 \end{array}$$

En substituant L_3 et L_4 on obtient :

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & aL_1 + bbL_2 + \epsilon \\ L_2 & = & aL_1 + abL_1 + \epsilon \\ L_3 & = & bL_1 \\ L_4 & = & bL_2 \end{array}$$

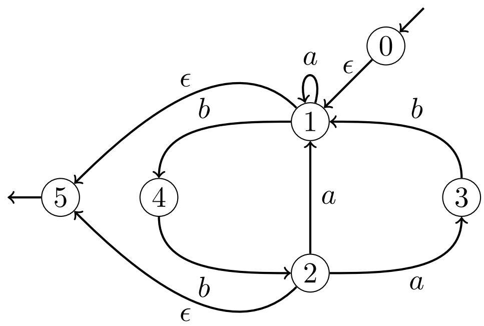
En substituant L_2 on obtient :

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & (a + bba + bbab)L_1 + bb + \epsilon \\ L_2 & = & aL_1 + abL_1 + \epsilon \\ L_3 & = & bL_1 \\ L_4 & = & bL_2 \end{array}$$

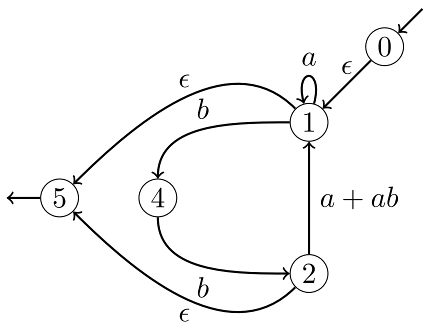
Enfin en appliquant le lemme d'Arden (version de gauche) à la première équation on obtient : $L_1 = (a + bba + bbab)^*(bb + \epsilon)$.

Brzozowski et McCluskey : Figure 2

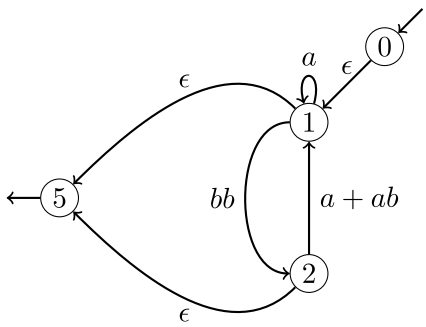
On commence par compléter l'automate avec un unique état final et un unique état intial puis on élimine les états un par un en les remplaçant par des transitions généralisées :



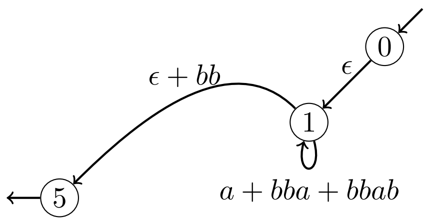
On supprime 3 :



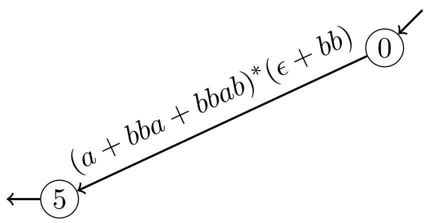
On supprime 4 :



On supprime 2 :

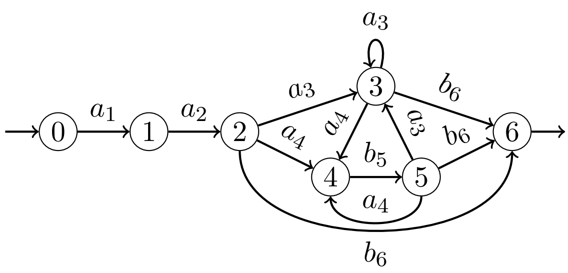


Enfin, on supprime 1 :

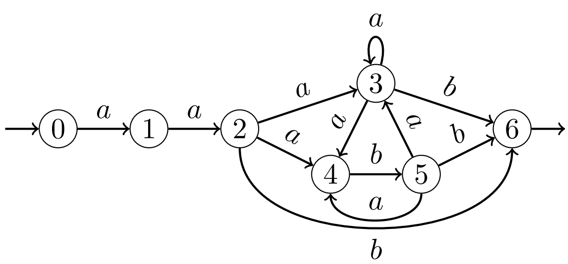


Solution de l'exercice 10 :

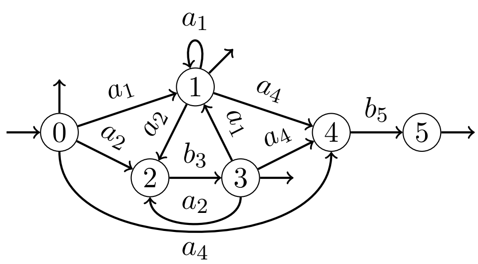
1. $aa(a+ab)^*b$. Après renommage, on obtient : $a_1a_2(a_3+a_4b_5)^*b_6$.



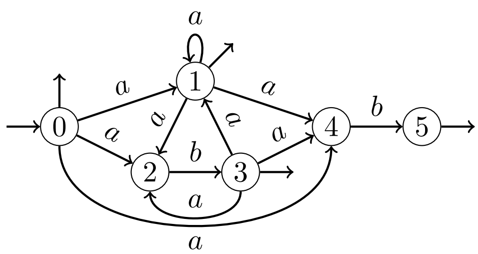
En reprenant l'alphabet initial on obtient :



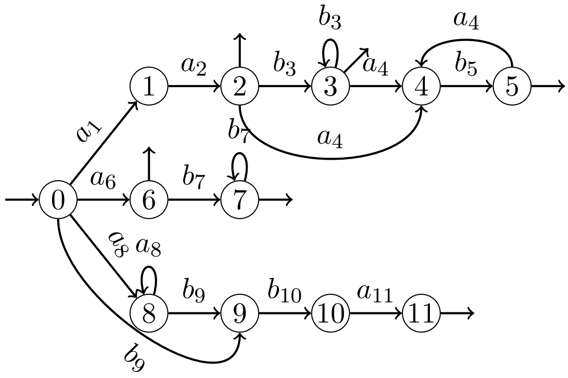
2. $(a+ab)^*(\epsilon+ab)$. Après renommage, on obtient : $(a_1+a_2b_3)^*(\epsilon+a_4b_5)$.



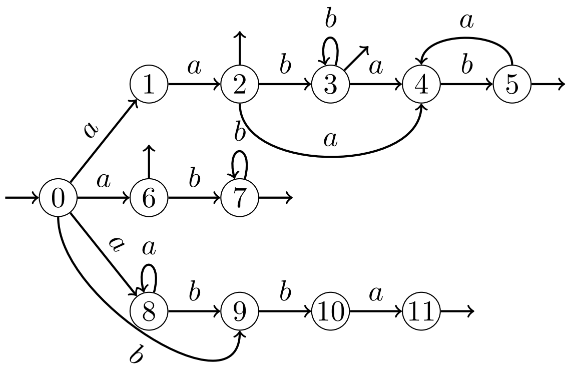
En reprenant l'alphabet initial on obtient :



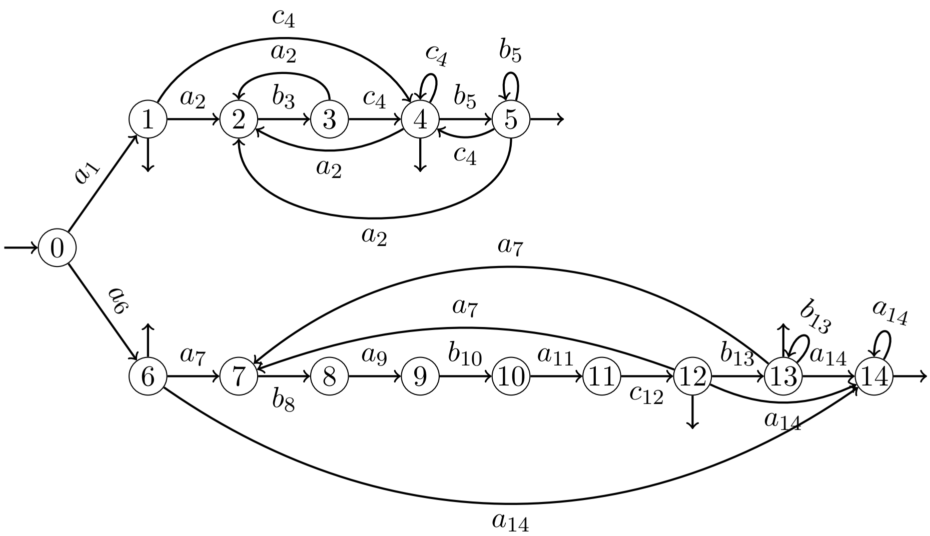
3. $aab^*(ab)^*+ab^*+a^*bba$. Après renommage, on obtient : $a_1a_2b_3^*(a_4b_5)^*+a_6b_7^*+a_8^*b_9b_{10}a_{11}$.



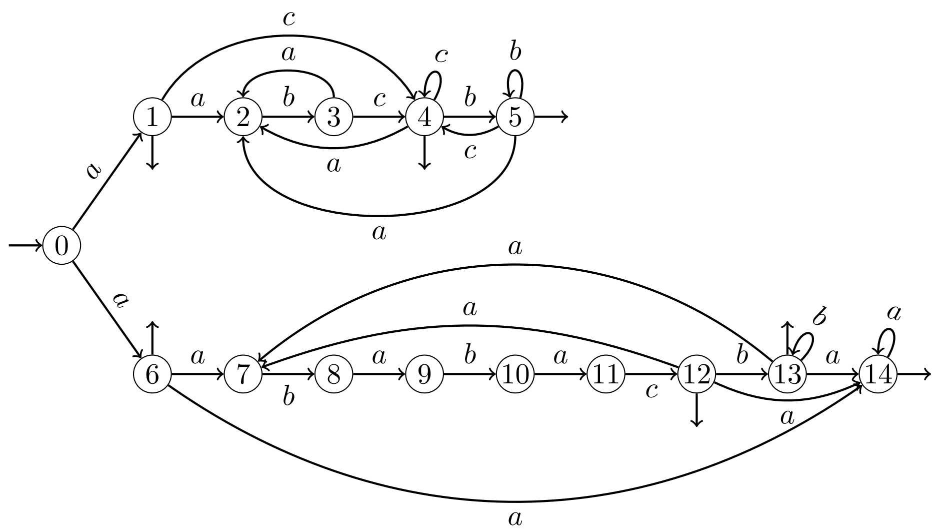
En reprenant l'alphabet initial on obtient :



4. $a((ab)^*cb^*)^* + a(ababacb^*)^*a^*$. Après renommage, on obtient :
$a_1((a_2b_3)^*c_4b_5^*)^* + a_6(a_7b_8a_9b_{10}a_{11}c_{12}b_{13}^*)^*a_{14}^*$.



En reprenant l'alphabet initial on obtient :

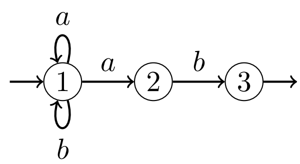


Solution de l'exercice 11 :

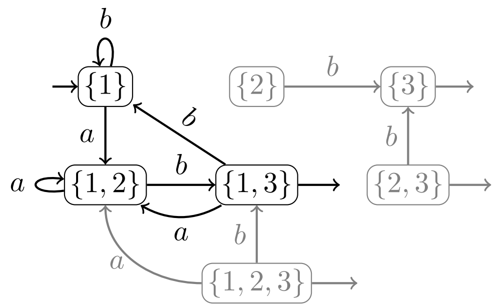
Aucun des automates n'est déterministe. L'automate $\mathcal{A}_5$ a deux états intiaux. L'automate $\mathcal{A}_6$ contient deux transitions issues de l'état 1 et étiquetées par un b ainsi que deux transitions issues de l'état 2 et étiquetées par un a.

Solution de l'exercice 12 :

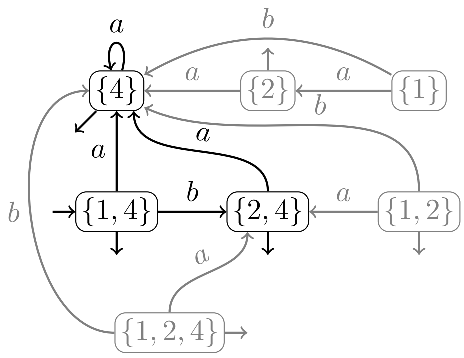
1. on commence par donner un automate naïf non déterministe :



En appliquant l'algorithme de déterminisation on obtient (on a mis en gris les états et transitions non nécessaires car non accessibles depuis l'état initial) :



2. On déterminise l'automate $\mathcal{A}_5$ (on a mis en gris les états et transitions non nécessaires car non accessibles depuis l'état initial) :



3. On déterminise l'automate $\mathcal{A}_6$ (on a mis en gris les états et transitions non nécessaires car non accessibles depuis l'état initial) :