

Solution - TD 1 - Automates finis et expressions rationnelles

Informatique Théorique 2 - Unité J1INPW11
Licence 3 - Université Bordeaux 1

Solution de l'exercice 1 :

1. Mots de longueurs 0 : ϵ ;
Mots de longueurs 1 : a ;
Mots de longueurs 2 : aa, ba ;
Mots de longueurs 3 : aaa, aba, baa ;
Mots de longueurs 4 : $aaaa, aaba, abaa, baba, baaa$.
2. Mots de longueurs 0 : aucun ;
Mots de longueurs 1 : aucun ;
Mots de longueurs 2 : aa ;
Mots de longueurs 3 : aucun ;
Mots de longueurs 4 : $aaaa, abaa$.

Solution de l'exercice 2 :

1. $b^*(a(bb)^*)^*b^*$.
2. a^*b^* .

Solution de l'exercice 3 :

Mots de longueur 0 reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$: aucun ;
Mots de longueur 1 reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$: b ;
Mots de longueur 2 reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$: ba, aa, ab ;
Mots de longueur 3 reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$: baa, aaa, aba, abb ;
Mots de longueur 4 reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$: $baaa, aaaa, abaa, abab, abba, abbb$.

Il est possible de répondre à cette question de manière systématique en utilisant les matrices. Pour cela, on représente l'automate (que l'on peut voir comme un graphe) par la matrice d'adjacence suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice i, j de la matrice M^k correspond aux mots de longueur k reconnus par l'automate, si l'état initial était l'état i et l'état final, l'état j . Si l'on souhaite obtenir

les mots de longueur k reconnus par notre automate, il suffit d'évaluer $M_{1,4}^k + M_{1,3}^k$. Voici les matrices M^0 , M^1 , M^2 , M^3 et M^4 :

$$M^0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab & aa+ba \\ 0 & 0 & b(a+b) & a^2 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab(a+b) & a^3+ba^2 \\ 0 & 0 & b(a+b)^2 & a^3 \\ 0 & 0 & (a+b)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab(a+b)^2 & a^4+ba^3 \\ 0 & 0 & b(a+b)^3 & a^4 \\ 0 & 0 & (a+b)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

Mots de longueurs 0 : $M_{1,2}^0 + M_{1,4}^0 = 0$;

Mots de longueurs 1 : $M_{1,2}^1 + M_{1,4}^1 = b$;

Mots de longueurs 2 : $M_{1,2}^2 + M_{1,4}^2 = ab + aa + ba$;

Mots de longueurs 3 : $M_{1,2}^3 + M_{1,4}^3 = aba + abb + aaa + baa$;

Mots de longueurs 4 : $M_{1,2}^4 + M_{1,4}^4 = abaa + abab + abba + abbb + aaaa + baaa$;

Pour l'automate $\mathcal{A}_2$, on a les résultat suivants :

$$M^0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 0 & ab \\ a^2+ab & 0 & 0 & ab \\ ba & 0 & 0 & b^2 \\ ba & 0 & ba & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} a^3+b^2a & ab^2 & b^2a & a^2b \\ a^3+aba & ab^2 & 0 & a^2b+ab^2 \\ ba^2 & b^3 & 0 & bab \\ b(a^2+ab) & 0 & 0 & bab \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} a(a^3+b^2a) & b^2(a^2+ab)+a^2b^2 & \dots & \end{pmatrix}$$

Mots de longueur 0 : $M_{1,1}^0 + M_{1,2}^0 = \epsilon$;

Mots de longueur 1 : $M_{1,1}^1 + M_{1,2}^1 = a$;

Mots de longueur 2 : $M_{1,1}^2 + M_{1,2}^2 = aa + bb$;

Mots de longueur 3 : $M_{1,1}^3 + M_{1,2}^3 = aaa + bba + abb$;

Mots de longueur 4 : $M_{1,1}^4 + M_{1,2}^4 = aaaa + abba + aabb + bbaa + bbab$;

Solution de l'exercice 4 :

L'automate $\mathcal{A}_1$ a pour définition :

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{array}{l} Q = \{1, 2, 3, 4\}, \quad q_i = 1, \quad F = \{3, 4\}, \quad \delta : \left\{ \begin{array}{l} (1, a) \rightarrow 2 \\ (1, b) \rightarrow 4 \\ (2, a) \rightarrow 4 \\ (2, b) \rightarrow 3 \\ (3, a) \rightarrow 3 \\ (3, b) \rightarrow b \end{array} \right. \end{array} \right)$$

L'automate $\mathcal{A}_2$ a pour définition :

$$\mathcal{A}_2 = \left(Q = \{1, 2, 3, 4\}, \quad q_i = 1, \quad F = \{1, 2\}, \quad \delta : \begin{cases} (1, a) \rightarrow 1 \\ (1, b) \rightarrow 4 \\ (2, a) \rightarrow 1 \\ (2, a) \rightarrow 3 \\ (3, b) \rightarrow 1 \\ (4, b) \rightarrow 2 \end{cases} \right)$$

Solution de l'exercice 5 :

Les automates $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$ sont dessinés dans les figures 1 et 2 suivantes :

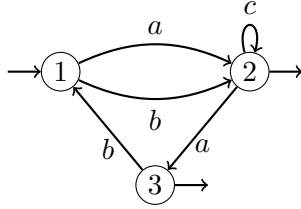


FIGURE 1 – Automate $\mathcal{A}_3$

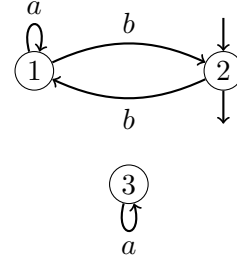
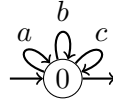


FIGURE 2 – Automate $\mathcal{A}_4$

Solution de l'exercice 6 :

1. Expression régulière : $(a + b + c)^*$.
Automate :



On prouve maintenant que cet automate reconnaît bien le bon langage. On pose L le langage de tous les mots et K le langage de l'automate. On cherche à prouver $L = K$. Considérons la propriété suivante, $\mathcal{P}_n$, paramétrée par un entier n :

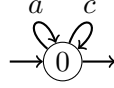
$$\mathcal{P}_n : \text{Pour tout mot } w \text{ de taille } n : w \in L \Leftrightarrow w \in K$$

Il est clair que si $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n , on a bien $K = L$. Il nous reste à prouver $\mathcal{P}_n$ pour tout n . On procède par induction sur n .

- Si $n = 0$, on a $w = \epsilon$. Par définition, on a $w \in L$ et $w \in K$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
- Soit $n > 0$, on suppose $\mathcal{P}_{n-1}$ et on prouve $\mathcal{P}_n$. Soit w un mot de taille n , puisque $n > 0$, on a $w = w'x$ où w' est un mot de taille $n - 1 \geq 0$ (on va donc pouvoir appliquer $\mathcal{P}_{n-1}$ à w') et x une lettre dans $\{a, b, c\}$. Supposons que $w \in K$, par définition de L on a $w \in L$. Réciproquement si $w \in L$, on sait par hypothèse d'induction ($\mathcal{P}_{n-1}$) que $w' \in K$. Or en observant les transitions de l'automate on constate que $Kx \subseteq K$ pour tout $x \in \{a, b, c\}$, il en découle que $w \in K$. On a donc bien $w \in L \Leftrightarrow w \in K$.

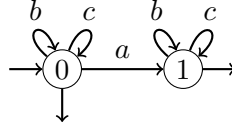
2. Expression régulière : $(a + c)^*$.

Automate :



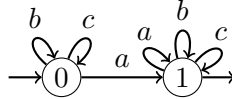
3. Expression régulière : $(b + c)^*(a + \epsilon)(b + c)^*$.

Automate :



4. Expression régulière : $(b + c)^*a(a + b + c)^*$.

Automate :



On prouve maintenant que cet automate reconnaît bien le bon langage. On note :

- L_0 le langage des mots ne contenant pas de a .
- K_0 le langage des mots pour lesquels il existe un calcul de l'automate arrivant dans l'état 0.
- L_1 le langage des mots contenant exactement un a .
- K_1 le langage des mots pour lesquels il existe un calcul de l'automate arrivant dans l'état 1.

Observons que le langage de la question est $L_1 \cup L_0$ et le langage reconnu par l'automate $K_1 \cup K_0$. On va montrer $L_0 = K_0$ et $L_1 = K_1$. Considérons la propriété suivante, $\mathcal{P}_n$, paramétrée par un entier n :

$$\mathcal{P}_n : \text{Pour tout mot } w \text{ de taille } n : \begin{array}{l} w \in L_0 \Leftrightarrow w \in K_0 \\ w \in L_1 \Leftrightarrow w \in K_1 \end{array}$$

Il est clair que si $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n , on a bien $K_0 = L_0$ et $K_1 = L_1$. Il nous reste à prouver $\mathcal{P}_n$ pour tout n . On procède par induction sur n .

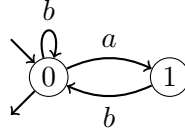
- Si $n = 0$, on a $w = \epsilon$. Par définition, on a $w \in L_0$, $w \in K_0$, $w \notin L_1$ et $w \notin K_1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
- Soit $n > 0$, on suppose $\mathcal{P}_{n-1}$ et on prouve $\mathcal{P}_n$. Soit w un mot de taille n , puisque $n > 0$, on a $w = w'x$ où w' est un mot de taille $n - 1 \geq 0$ et x une lettre dans $\{a, b, c\}$. Supposons que $w \in K_0$, par définition des transitions de l'automate on a $w' \in K_0$ et $x \in \{b, c\}$. Par induction on en déduit que $w' \in L_0$ donc $w \in L_0(b + c) \subseteq L_0$. Réciproquement, si $w \in L_0$, on a $w' \in L_0$ donc par induction $w' \in K_0$, par définition des transitions de l'automate on obtient $w \in K_0$.

Maintenant, supposons que $w \in K_1$, par définition de l'automate, il y a deux cas possibles : soit $w' \in K_0$ et $x = a$, soit $w' \in K_1$ et $x \in \{b, c\}$. Dans le premier cas on conclut en utilisant l'induction que $w' \in L_0$ et $w \in L_0a \subseteq L_1$. Dans le second cas on a par induction $w' \in L_1$ et $w \in L_1(b + c) \subseteq L_1$. Réciproquement, si $w \in L_1$, soit

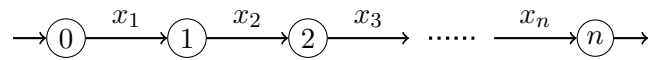
$x = a$ auquel cas $w' \in L_0$ et donc $w' \in K_0$ par induction ce qui implique que $w \in K_1$ par définition des transitions. Sinon $x \in \{b, c\}$, dans ce cas $w' \in L_1$ et $w \in L_1$ par définition des transitions.

5. Expression régulière : $b^*(abb^*)^*$.

Automate :

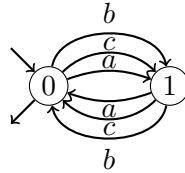


6. Expression régulière : x . Pour l'automate, on appelle $x_1, \dots, x_n \in \{a, b, c\}$, les lettres de x (i.e. $x = x_1x_2 \dots x_n$).



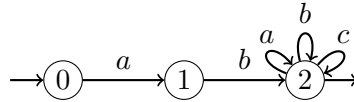
7. Expression régulière : $((a + b + c)(a + b + c))^*$.

Automate :



8. Expression régulière : $ab(a + b + c)^*$.

Automate :



9. Expression régulière : $(a + b + c)^*ab$.

Automate :

