

Autómata celular (cellular automaton)

Salta, Noviembre 2015



Implementación de un autómata celular

Programamos los autómatas celulares como función que toma una lista Python de enteros y salida una otra lista de enteros. Aquí es un ejemplo de la suma modulo 2 (un autómata celular en l'alfabeto $\{0, 1\}$ y radio 2).

```
sage: def sum_mod2(x): return [(x[i]+x[i+1])%2 for i in range(len(x)-1)]
sage: sum_mod2([1,0])
[1]
sage: sum_mod2([0,0])
[0]
sage: sum_mod2([1,0])
[1]
sage: sum_mod2([1,1])
[0]
sage: sum_mod2([1,0,0,1,0,0,0,1,1])
[1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0]
```

1. Para hacer dibujos, puede usar matrices y la metoda `plot`. Sea $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un autómata celular. La **diagrama espacio-temporal** de un punto $x \in A^{\mathbb{Z}}$ es la secuencia bidimensional $((F^k(x))_i)_{i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}}$. Construye una función `space_time_diagram(ac, x, n)` que dibuje las n primeras etapas de la orbita de la configuración x como una parte de una diagrama espacio-temporal.

2. Programe los siguientes autómatas celulares.

- La suma modulo dos pero con radio 3: $F(x_i x_{i+1} x_{i+2}) = x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \pmod 2$.
- Sea $A = \{0, 1, 2\}$ y

$$F(x_{i-1} x_i x_{i+1}) = \begin{cases} x_i + 1 & \text{if } x_{i-1} = x_{i+1} = x_i + 1 \\ x_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Sea $A = \{0, 1, 2\}$ y $\pi : A \rightarrow A$ la biyección que cambia 0 y 1. $F(x_i x_{i+1}) = \pi(x_i + x_{i+1})$ donde la suma esta modulo 3.
- Sea el siguiente cuadrado latino

0	2	1	3
3	1	2	0
2	3	0	1
1	0	3	2

Sea c_{ij} la valor de la casilla (i, j) . Define $F(x_i x_{i+1}) = c_{x_i x_{i+1}}$.

- Crea tu propia autómata celular.

Iteración de las medidas de Bernoulli

3. Construye una función `random_list(d)` donde d es un tuple $d = (d_0, p_1, \dots, d_{k-1})$ de k números enteros y salida una lista aleatoria de tamaño $d_0 + d_1 + \dots + d_n$ con d_i veces el entero i .

4. Construye una función `bernoulli(p, n)` que pone un tuple $p = (p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$ tal que $p_0 + p_1 + \dots + p_{k-1} = 1$ y un entero n y construye una lista de longitud n de símbolos en $\{0, 1, \dots, k-1\}$ distribuyendo como la medida de Bernoulli de parámetro p .

5. Construye una función `frequencies(x, k)` que calcula la frecuencias de cada símbolo de la lista `x` suponiendo que contiene solamente los símbolos `0, 1, ..., k-1`.

6. Por cada autómata celular de la pregunta 2, haga un dibujo de la evolución de la frecuencias empíricas de los símbolos en la órbita x, Fx, F^2x, \dots cuando x esta distribuyendo con una medida de Bernoulli.

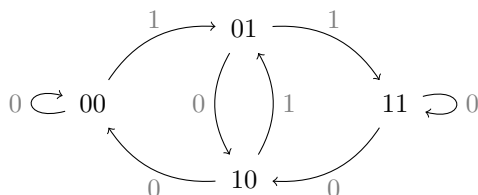
Propiedades de las autómatas celulares

7. Haga una función `is_linear(ac, radius)` que repuesta si el autómata celular `ac` con radio `radius` esta lineal. Es decir que el alfabeto es un cuerpo finito K y la función de transition puede s'escribir como

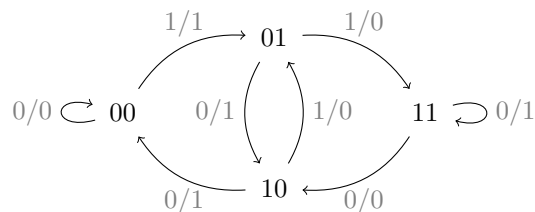
$$F(x_i x_{i+1} \dots x_{i+r-1}) = \sum_{j=i}^{i+r-1} \alpha_j x_j$$

donde α_i son elementos de K .

8. Usando la función `product` de la biblioteca `itertools` hace una función que construye el grafo de De Bruijn $B(n, k)$. Es el grafo donde los vertices son los palabras de l'alfabeto $\{0, 1, \dots, k-1\}$ de tamaño n y hay una arista entre dos palabras u y v si el sufijo de tamaño $n-1$ de u y el prefijo de tamaño $n-1$ de v son lo mismo. En una arista entre u y v se pone la ultima letra de v . En el siguiente dibujo esta el grafo $B(2, 2)$



Sea F un autómata celular de radio n en el alfabeto $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Consideramos una información adicional en el grafo $B(n-1, k)$: en cada arista $u \xrightarrow{\alpha} v$ pone también la imagen sobre F de la palabra $u\alpha$. Por la suma modulo dos, el grafo es el siguiente



9. Pruebe que los palabras biinfinitas que se leen en las caminos infinitos del grafo de De Bruijn extendido $\dots, x_{-1}/y_{-1}, x_0/y_0, x_1/y_1, \dots$ son exactamente los pares $(x, F(x))$ de una palabra x en $\{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{Z}}$ y de su imagen por F .

10. Usando el grafo extendido de De Bruijn hace una función que trata la inyectividad de un autómata celular.

11. Usando el grafo extendido de De Bruijn hace una función que trata la suryectividad de un autómata celular.