École Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel

Automates, systèmes à événements discrets et évaluation de performances

Jean Mairesse et Alain Jean-Marie

Bordeaux, 24 Mars 1999

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Matrices sur $(\mathbb{C}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ **2**
2.1 Matrices et graphes 2
2.2 Matrices et Chemins 2
2.3 Puissances de A: asymptotiques et calcul exact 3

3 Matrices sur $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ **6**
3.1 Preuve (partielle) du théorème de Perron-Frobenius 7

4 Matrices over the (max,+) semiring **8**
4.1 (Max,+) semiring 8
4.2 Matrices, graphs and paths 8
4.3 Spectral theory 9

1 Introduction

L'objet de ce cours est de présenter le domaine de l'*évaluation quantitative de performance* pour l'analyse des *systèmes à événements discrets* (en abrégé: SED).

La perspective choisie est de mettre en valeur l'utilisation de concepts provenant de l'informatique théorique dans la description et l'analyse de ces systèmes. Ainsi, on insistera sur les notions suivantes:

- automates, mots et langages;
- graphes et chemins;
- les méthodes analytiques similaires à celles mises en œuvre en analyse d'algorithmes;
- représentations algébriques (matricielles) et théorie spectrale.

Dans le document écrit, on se restreint à l'exposé de résultats fondamentaux d'algèbre des matrices et des séries génératrices. Les applications de ces résultats à la modélisation des systèmes (Réseaux de Petri, Files d'attente, Chaînes de Markov), qui seront abordées dans le cours, n'y sont pas détaillées. Des pointeurs bibliographiques sont fournis ci-dessous.

Ce support de cours est constitué de deux sections extraites pour l'une d'un support réalisé par Jean Mairesse pour l'École de Printemps de Noirmoutiers [17] et pour l'autre d'un support réalisé par Alain Jean-Marie pour le DEA d'Algorithmique de Paris [13]. Ceci explique l'hétérogénéité du style et même de la langue !

Sources/Bibliographie Les principales sources de ce cours sont:

- Pour les automates à multiplicités: [2, 8];
- Pour le semi-anneau $(\max, +)$ et l"'analyse idempotente": [1, 6, 12, 18] pour les aspects théoriques, et le livre de Gondran et Minoux [11] pour les aspects algorithmiques;
- Pour les résultats sur les puissances de matrices, et le théorème de Perron-Frobenius, les livres de Seneta [23] et Minc [19].
- Pour les fondements en probabilités, les livres de Feller, surtout le premier volume [9].
- Pour les fonctions génératrices de la variable complexe les livres de Sedgewick et Flajolet [22] et Wilf [25].
- Pour les Chaînes de Markov, les livres de Kemeny et Snell [14] et Kleinrock [15] et pour les modèles de files d'attente, les livres de Takacs [24] et Kleinrock [15].
- Pour les réseaux de Petri, l'article de synthèse de Murata [20], le livre de Desel et Esparza [7] et le livre de Baccelli *et al.* [1] pour le point de vue algébrique.

Puissances de Matrices et Théorie Spectrale L'idée générale est que l'analyse de performance des SED se rammène souvent à l'étude des puissances d'une matrice, du point de vue du calcul, et du point de vue asymptotique. On établira que le comportement asymptotique est directement lié au *rayon spectral* de la matrice. On traite successivement le cas des matrices à coefficients sur le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, puis sur le semi-corps $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ et enfin sur le semi-corps $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$.

2 Matrices sur $(\mathbb{C}, +, \times)$

2.1 Matrices et graphes

Un *graphe orienté valué* est un triplet $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{W})$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ et $\mathcal{W} : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

À tout graphe valué on associe une matrice carrée réelle $A[\mathcal{G}]$, en numérotant les sommets de $\mathcal{V}$: $\mathcal{V} = \{v(1), \ldots, v(N)\}$ et en assignant la valeur $A_{i,j} = \mathcal{W}(v(i), v(j))$ si $(i, j) \in \mathcal{E}$ et $A_{i,j} = 0$ sinon.

Réciproquement, à toute matrice A carrée $N \times N$, on associe naturellement un graphe valué $\mathcal{G}[A]$:

- Les sommets de $\mathcal{V}$ sont $\{1, 2, \ldots, N\}$,
- L'arc (i, j) est dans $\mathcal{E}$ si $A_{i,j} \neq 0$.
- Cet arc a alors la valeur (ou: poids) $\mathcal{W}(i, j) = A_{i,j}$.

Le fait d'associer un graphe à une matrice permet d'énoncer quelques concepts importants dans le langage de la théorie des graphes.

On dira qu'une matrice est *irréductible* (parfois: indécomposable) si son graphe associé $\mathcal{G}$ est fortement connexe. Dans le cas contraire, la matrice est réductible ou décomposable.

Soit d le p.p.c.m. de toutes les longueurs des cycles du graphe $\mathcal{G}$. Si $d \geq 2$, on dira que la matrice A est *périodique de période d*. Si $d = 1$, on dira que A est *apériodique*.

2.2 Matrices et chemins

Un chemin d'un graphe $\mathcal{G}$ est une suite de sommets de ce graphe $\gamma = (i_1, \ldots, i_n)$ telle que $(i_j, i_{j+1}) \in \mathcal{E}$ pour $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Notre convention sera que la longueur d'un tel chemin, notée $|\gamma|$ est le nombre d'arêtes qu'il contient, soit $n - 1$. Ainsi, un chemin réduit à un seul sommet est de longueur 0.

Quand le graphe $\mathcal{G}$ est valué, on associe à tout chemin γ son poids (multiplicatif) $w(\gamma)$ comme suit:

$$\gamma = (i_1, \dots, i_n) \quad \Longrightarrow \quad w(\gamma) \;=\; \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{W}(i_j, i_{j+1}) \;. \tag{1}$$

Par convention, $w(\gamma) = 1$ si $|\gamma| = 0$.

Soit alors $\Gamma^n(i,j)$ l'ensemble des chemins de longueur n allant de i à j. Si A est la matrice associée au graphe $\mathcal{G}$, on a l'identité:

$$(A^n)_{i,j} \;=\; \sum_{\gamma \in \Gamma^n(i,j)} w(\gamma) \;=\; \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in \Gamma^n(i,j)} \mathcal{W}(i_1,i_2)\mathcal{W}(i_2,i_3)\dots\mathcal{W}(i_{n-1},i_n) \;. \tag{2}$$

Noter la cohérence avec les conventions ci-dessus dans le cas $n = 0$: l'ensemble $\Gamma^0(i,j)$ des chemins sans arcs allant de i à j est: a/ vide si $i \neq j$, et la somme vide valant 0 par convention, $A^0_{i,j} = 0$; b/ réduit à (i,i) si $i = j$ et dans ce cas la somme vaut 1. On trouve bien $A^0 = \mathbf{I}$.

Un cas particulièrement important est celui où la valuation des arcs est 1: $\mathcal{W}(i,j) = 1 \; \forall (i,j) \in \mathcal{E}$. Dans ce cas, la matrice $A[\mathcal{G}]$ se nomme *matrice d'adjacence* et tout chemin a un poids 1. L'interprétation de (2) est alors:

$$(A^n)_{i,j} \;=\; \#\Gamma^n(i,j) \;=\; \text{nombre de chemins de longueur } n \text{ de } i \text{ à } j \;. \tag{3}$$

Un autre cas important est celui où à chaque arc (i,j) de $\mathcal{E}$ on associe une mesure *additive* $\mathcal{D}(i,j)$, que je nommerai ici “distance” telle que pour le chemin γ de (1), sa distance $d(\gamma)$ vaut:

$$d(\gamma) \;=\; \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{D}(i_j, i_{j+1}) \;.$$

Dans ce cas, si on définit:

$$\mathcal{W}(i,j) \;=\; z^{\mathcal{D}(i,j)} \;,$$

alors $w(\gamma) = z^{d(\gamma)}$. Puisque la matrice $A[\mathcal{G}]$ dépend du paramètre z, notons-la $A(z)$. On a:

$$(A(z)^n)_{i,j} \;=\; \sum_{\gamma \in \Gamma^n(i,j)} z^{d(\gamma)} \;=\; \sum_d z^d \times \#\{\text{chemins de longueur } n \text{ et de distance } d \text{ de } i \text{ à } j\} \;. \tag{4}$$

On obtient donc les séries génératrices de la distance des chemins allant de i à j ayant la longueur n.

2.3 Puissances de A: asymptotiques et calcul exact

Spectre et rayon spectral. Soit $A \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes. On rappelle que λ est une valeur propre de A si il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$. Un tel vecteur est dit vecteur propre droit associé à la valeur propre λ. Pour chaque valeur propre, il y a également des vecteurs propres gauches. L'ensemble de toutes les valeurs propres est appelé le *spectre* de la matrice. On le notera $\mathrm{sp}(A)$. Le *rayon spectral* de A est défini par:

$$\rho(A) \;=\; \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A)\;\} \;.$$

On notera dans cette section les *différentes* valeurs propres par: $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, avec multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. On a donc: $\sum \alpha_i = N$.

Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique:

$$\chi_A(x) \;=\; \det(A - xI) \;=\; \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - x)^{\alpha_i} \;. \tag{5}$$

Si $\alpha_i = 1$, on dit que la valeur propre λ_i est *simple*.

On s'intéresse donc à A^n, la puissance n-ième de A. On montre d'abord que les coefficients de A^n croissent ou décroissent, en module, au plus exponentiellement en n. Soit

$$\|A\| \;=\; \max\{|a_{ij}|,\ 1 \le i, j \le N\}\ . \tag{6}$$

Lemme 1. Il existe une constante c telle que

$$\|A^n\| \;\le\; c(N\|A\|)^n\ . \tag{7}$$

La preuve découle facilement du fait que $\|AB\| \le N\|A\|\|B\|$.

La borne (7) s'avère plutôt grossière en général! Le résultat suivant donne la valeur exacte de A^n en fonction des valeurs propres de A. Pour cette raison, on nomme ce type de résultat une *décomposition spectrale*.

Théorème 2 (Décomposition Spectrale). i/ Soit A une matrice dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, avec multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Alors il existe p matrices $B_i(n, \lambda_i)$, $1 \le i \le p$, telles que B_i est un polynôme en n de degré au plus $\alpha_i - 1$ et en λ_i de degré n, et telles que:

$$A^n \;=\; \sum_{i=1}^{p} B_i(n, \lambda_i)\ . \tag{8}$$

ii/ Dans le cas où λ_i est une valeur propre simple, alors la matrice B_i est constante et de rang 1: il existe deux vecteurs propres gauches et droits pour la valeur propre λ_i, v_i et w_i, tels que $v_i.w_i = 1$ et $B_i = w_i.v_i$.

Preuve. Ce théorème peut se montrer de deux manières différentes dans la forme (mais pas tant que ça dans le fond). Il est intéressant de les comparer.

Méthode algébrique. Celle-ci se base sur la décomposition de Jordan: il existe une matrice inversible S telle que:

$$A \;=\; S \begin{pmatrix} J_{\nu_1}(\mu_1) & & & \\ & J_{\nu_2}(\mu_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\nu_k}(\mu_k) \end{pmatrix} S^{-1} \quad \text{et donc:} \quad A^n \;=\; S \begin{pmatrix} J_{\nu_1} & & & \\ & J_{\nu_2}^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\nu_k}^n \end{pmatrix} S^{-1}\ . \tag{9}$$

Ici, les matrices $J_m(\mu)$, sont des blocs de Jordan de la forme:

$$J_m(\mu) \;=\; \begin{pmatrix} \mu & 1 & & \\ & \mu & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \mu \end{pmatrix}$$

et les μ_m sont des valeurs propres parmi les λ_i. Attention: il peut y avoir plus de blocs de Jordan que de valeurs propres distinctes (*cf.* la matrice identité). Le résultat s'obtient en définissant

$$B_i(n, \lambda_i) \;=\; \sum_{\mu_m = \lambda_i} S \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{\nu_m}(\mu_m)^n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} S^{-1}\ .$$

Les matrices B_i ont les propriétés requises parce que S et S^{-1} sont constantes, et les puissances d'un bloc de Jordan ont la forme (en exercice):

$$((J_n(\lambda)^m))_{i,j} \;=\; \binom{m}{j-i} \lambda^{m-(j-i)} \; \mathbf{1}_{\{j\geq i\}} \;.$$

Cette matrice est bien un polynôme en λ de degré n, et un polynôme en n de degré $m-1$. Ceci prouve $i/$.

Dans le cas où λ_i est simple, le bloc de Jordan correspondant est de taille 1. On trouve alors que B_i est le produit de la colonne de S correspondant à la localisation de ce bloc, par la ligne de S^{-1} de même numéro. Or ces deux éléments sont précisément des vecteurs propres de A pour la valeur propre λ_1, et leur produit scalaire est 1 en vertu de l'identité $S^{-1}S = \mathbf{I}$. Donc $ii/$ est prouvé.

Méthode analytique. Définissons la série génératrice matricielle

$$A(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} A^n \; z^n \;=\; ((\sum_{n=0}^{\infty} A_{i,j} z^n))_{(i,j)} \;. \tag{10}$$

D'après des résultats classiques et grâce au Lemme 1, cette série est bien définie car elle converge au moins dans le cercle: $\mathcal{C}_0 = \{|z| < (N\|A\|)^{-1}\}$. On peut montrer que pour tout z dans le ce cercle, la matrice $\mathbf{I} - zA$ est inversible, et que:

$$A(z) \;=\; (\mathbf{I} - zA)^{-1} \;=\; \frac{1}{\det(\mathbf{I} - zA)} \; \mathrm{ajd}(\mathbf{I} - zA) \;. \tag{11}$$

On a noté $\mathrm{adj}(A)$ la matrice adjointe de A, telle que $A\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = \det(A)I$. On sait que les coefficients de cette matrice sont des mineurs d'ordre N de A. Par conséquent, les coefficients de la matrice $\mathrm{ajd}(\mathbf{I} - zA)$ sont des polynômes de z de degré au plus $N-1$. D'autre part, d'après (5):

$$\det(\mathbf{I} - zA) \;=\; \det((-z)(A - \frac{1}{z}\mathbf{I})) \;=\; (-z)^N \; \chi_A(z) \;=\; \prod_{m=1}^{p} (1 - \lambda_m z)^{\alpha_m} \;.$$

Revenant maintenant à l'équation (11), on constate que les coefficients de la matrice $A(z)$ sont des fonctions rationnelles de z dont le dénominateur est $\det(\mathbf{I} - zA)$. On peut donc faire une décomposition en éléments simples de chacun de ces coefficients; la formule générale pour une telle décomposition est, $b(z)$ étant un polynôme de degré $\leq n-1$:

$$\frac{b(z)}{\prod_{m=1}^{p}(1-\lambda_m z)^{\alpha_m}} \;=\; \sum_{m=1}^{p}\sum_{q=1}^{\alpha_m} \frac{b_{m,q}}{(1-\lambda_m z)^q} \;.$$

Il ne reste qu'à extraire le coefficient de z^n dans le développement de Taylor de ce rapport:

$$[z^n] \; \frac{b(z)}{\prod_{m=1}^{p}(1-\lambda_m z)^{\alpha_m}} \;=\; \sum_{m=1}^{p}\sum_{q=1}^{\alpha_m} [z^n] \; \frac{b_{m,q}}{(1-\lambda_m z)^q} \;=\; \sum_{m=1}^{p}\sum_{q=1}^{\alpha_m} b_{m,q} \binom{n+q-1}{n} \lambda_m^n \;.$$

Le résultat $i/$s'ensuit.

Dans le cas où λ_i est simple, on a simplement dans le développement ci-dessus:

$$[z^n] \; \frac{b}{(1-\lambda_i z)} \;=\; b\lambda_i^n \;.$$

Ceci permet de conclure que la matrice B_i est une constante que multiplie λ_i^n, mais pour le reste de l'assertion $ii/$, il faut se donner plus de mal. □

En ce qui concerne le taux de croissance des coefficients de A^n, on déduit du Théorème 2:

Corollaire 3. Soit A une matrice carrée. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a:

$$\|A^n\| \;=\; \mathcal{O}((\rho(A) + \varepsilon)^n) \;. \tag{12}$$

Preuve. Étant donné que pour tout $p(n)$, polynôme de n on a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)\lambda^n}{(\lambda+\varepsilon)^n} = 0 ,$$

et que pour tout i, $|\lambda_i| \leq \rho(A)$, on voit facilement que le rapport $A_{i,j}/(\lambda+\varepsilon)^n$ est borné pour tout i, j. □

Autant le Corollaire 3 semble plus grossier que le Théorème 2, il est en pratique beaucoup plus facile à utiliser dans la mesure ou le spectre complet d'une matrice (nécessaire, entre autres, dans le théorème) est beaucoup plus facile à trouver que son rayon spectral, pour lequel il existe des bornes. Par exemple, on a le lemme:

Lemme 4. Soit A une matrice. Son rayon spectral $\rho(A)$ a la propriété:

$$\min_i \sum_j |A_{i,j}| \leq \rho(A) \leq \max_i \sum_j |A_{i,j}| . \tag{13}$$

Preuve. Soit ρ une valeur propre et u un vecteur propre associé: $u \neq 0$ et $Au = \rho_u$. Soit i_0 tel que $|u_{i_0}| = \max_i |u_i|$. Alors pour toute ligne i,

$$\begin{aligned} \rho u_i &= \sum_j A_{i,j} u_j \\ |\rho|\ |u_i| &\leq \sum_j |A_{i,j}|\ |u_j| \leq |u_{i_0}| \sum_j |A_{i,j}| \leq |u_{i_0}| \max_i \sum_j |A_{i,j}| . \end{aligned}$$

En particulier pour $i = i_0$, on obtient l'inégalité de droite dans (13). Pour l'inégalité de gauche, on peut utiliser la fonction f_A de Collatz-Wielandt (voir [19]) sa relation avec $\rho(A)$ (Équation (15)). On obtient:

$$\rho(A) = \max_{x\geq 0} f_A(x) \geq f_A(\mathbf{1}) = \min_i \sum_j |A_{i,j}| .$$

□

Parmi les applications du Corollaire 12, on trouve:

Corollaire 5. Le rayon de convergence de la série $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n$ est $\rho(A)$. Quand elle converge, cette série vaut $A(z) = (\mathbf{I} - zA)^{-1}$.

3 Matrices sur $(\mathbb{R}_+, +, \times)$

Le résultat fondamental est que le spectre d'une matrice positive irréductible ne peut pas être totalement arbitraire: son elément de module maximum est nécessairement réel. Ce résultat et d'autres qui lui sont reliés font l'objet du théorème de Perron-Frobenius.

Théorème 6 (Perron-Frobenius). Soit A une matrice carrée irréductible. Alors il existe une valeur propre de A, r qui a les propriétés suivantes:

a/ $r > 0$;

b/ r est associée à un vecteur propre gauche g et un vecteur propre droit d *strictement positifs*;

c/ pour toute valeur propre λ de A, $|\lambda| \leq r$;

d/ L'espace propre associé à r est de dimension 1;

e/ Pour toute matrice B telle que $0 \leq B \leq A$, et toute valeur propre β de B, $|\beta| \leq r$, et l'égalité $|\beta| = r$ implique que $B = A$;

f/ r est une racine simple de χ_A, le polynôme caractéristique de A.

g/ Si A a la cyclicité d, alors les valeurs propres de A de module r sont exactement les ω^j, $0 \leq j < d$ avec $\omega = e^{2i\pi/d}$.

On qualifie r de *valeur propre de Perron-Frobenius* ou bien *valeur propre principale* ou bien *valeur propre dominante.*

La preuve (partielle) de ce grand théorème est proposée en annexe.

Il est assez facile de voir qu'une matrice irréductible *et* apériodique admet une puissance strictement positive. En effet, $A^p > 0$ est équivalent à dire qu'il existe un chemin de longueur p de tout sommet i à tout sommet j dans $\mathcal{G}[A]$. On en déduit:

Corollaire 7. Soit A une matrice positive (pas nécessairement strictement) et irréductible. Alors A a les mêmes propriétés que dans le Théorème 6.

Puisque nous sommes intéressés par les puissances de A, nous déduisons immédiatement du Théorème de Perron-Frobenius que par exemple:

Théorème 8. Soit A une matrice carrée réelle positive, irréductible. Alors

$$\|A^n\| \;=\; \mathcal{O}(\rho(A)^n) \;. \tag{14}$$

Mais on a en fait un résultat plus fin, que je formule en termes de graphes, et qu'on adaptera dans peine à des matrices positives.

Corollaire 9. Soit un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ de matrice d'adjacence A. Soit $N_{i,j}$ le nombre de chemins de longueur n allant de i à j:

i/ $N_{i,j} = \mathcal{O}(\rho(A)^n)$.

ii/ Si $\mathcal{G}$ est fortement connexe et apériodique, alors il existe un vecteur ligne v et un vecteur colonne w tels que $v.w = 1$ et $N_{i,j} \sim w_i.v_j\rho(A)^n$.

3.1 Preuve (partielle) du théorème de Perron-Frobenius

On se référera à [19, 23] pour une preuve complète.

Dans tout ce qui suit, la matrice A est irréductible.

Une remarque est particulièrement utile: la matrice $(I+A)^{n-1}$ est strictement positive. En effet, le graphe $\mathcal{G}[I+A]$ est le graphe $\mathcal{G}[A]$ auquel on a rajouté les arc "en boucle" $i \to i$. Si A est irréductible, il existe un chemin de i à j dans $\mathcal{G}[A]$. Ce chemin a évidemment au plus $n-1$ arcs. En utilisant autant de ces boucles que nécessaire, il est possible de prolonger ce chemin jusqu'à la longueur $n-1$ dans $\mathcal{G}[A]$.

Preuve de a/. On introduit la fonction de Collatz-Wielandt [19]:

$$f_A(x) \;=\; \min_{i \;|\; x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i} \;,$$

définie sur $(\mathbb{R}^+)^n \setminus \mathbf{0}$. On a tout d'abord:

$$f_A(x) \;=\; \max\{\rho \in \mathbb{R} \mid Ax - \rho x \geq 0\} \;. \tag{15}$$

En effet, si ρ est tel que $Ax \geq \rho x$ alors pour tout i, tel que $x_i \neq 0$ $(Ax)_i/x_i \geq \rho$ (car alors $x_i > 0$) donc $f(x) \geq \rho$. Réciproquement, si $r = f(x)$, alors $(Ax)_i \geq rx_i$ pour tout i, donc en particulier pour le maximum.

La fonction f_A est *homogène*, c'est à dire que $f_A(\lambda x) = f_A(x)$ pour tout $\lambda > 0$. D'autre part, f_A atteint un maximum sur le simplexe $S_n = \{x \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_i x_1 = 1\}$. En effet, sur l'*intérieur* de S_n, f_A est le minimum de fonctions polynomiales donc continues, donc f_A est continue. Ce n'est plus vrai à la frontière quand $x_i \to 0$. Par contre, pour tout vecteur $x \in S_n$, le vecteur $y = (I+A)^{n-1}x$ a les propriétés suivantes: a/ $y > 0$, puisque $(I+A)^{n-1} > 0$ et x a au moins une composante strictement positive et b/ $f_A(y) \geq f_A(x)$: en effet, d'après (15), pour tout x, $Ax \geq f_A(x)x$. En multipliant par $(I+A)^{n-1}$, on a, puisque A et $I+A$ commutent:

$$(I+A)^{n-1}Ax \geq f_A(x)(I+A)^{n-1}x \quad\Longrightarrow\quad Ay \geq f_A(x) \geq y \quad\Longrightarrow\quad f_A(x) \geq f_A(y),$$

toujours d'après (15). Soit donc G_n l'image de S_n par $(I+A)^{n-1}$. L'ensemble G_n est un compact contenu dans $]0,+\infty[^n$ et donc f_A y est continue et atteint son maximum, disons en y^0. Soit x^0 la projection de y^0 sur S_n: $x^0 = y^0/\sum y_i^0$. Alors $f_A(x^0) = f_A(y^0)$. Soit $x \in S_n$. Alors $f_A(x) \leq f_A(y) \leq f_A(y^0) \leq f_A(x^0)$. Donc le maximum de f_A sur S_n est atteint en x^0.

Montrons à présent que $r = \max_{x \in S_n} f_A(x)$ est une valeur propre de A. Soit x^0 tel que $r = f_A(x^0)$. Alors $y = Ax^0 - rx^0 \geq 0$. Supposons qu'il n'y ait pas égalité: il existe un i tel que $y_i > 0$. Alors puisque $(I+A)^{n-1}$ est strictement positive, $(I+A)^{n-1}y_i > 0$. Or, $(I+A)^{n-1}(Ax^0 - rx^0) = A((I+A)^{n-1}x^0) - r((I+A)^{n-1}x^0)$. Donc en vertu de (15) il existe un vecteur $y^0 = (I+A)^{n-1}x^0$ et un $\varepsilon > 0$ tels que $f_A(y^0) = r + \varepsilon$ ce qui est une contradiction. Donc finalement, r est une valeur propre. On a $r > 0$ car $r \geq f_A(\mathbf{1}) > 0$.

Preuve de b/. Soit x tel que $Ax = rx$. Alors $(I+A)^{n-1}x = (1+r)^{n-1}x$. Mais $(I+A)^{n-1}x > 0$ donc $x > 0$.

Preuve de d/. Soit y tel que $Ay = ry$. Alors comme A est positive, $r|y| = |Ay| \leq A|y|$. Donc d'après (15), on a en fait $r|y| = A|y|$. Donc (voir la preuve du b/): $|y| > 0$. A présent, soient u et v deux vecteurs propres pour la valeur propre r qui sont indépendants. Toute combinaison linéaire $\alpha u + \beta v$ est également vecteur propre. Mais on vient de prouver qu'un vecteur propre pour r non nul n'a pas de coordonnée nulle. Or on peut toujours trouver α et β pour annuler une composante de $\alpha u + \beta v$. Contradiction.

4 Matrices over the (max,+) semiring

4.1 (Max,+) semiring

Definition 1 (semiring). *A set K equipped with two operations $\oplus$ and $\otimes$ is a semiring if $\oplus$ is associative and commutative, $\otimes$ is associative and distributive with respect to $\oplus$, there is a zero element $\mathbb{0}$ ($a \oplus \mathbb{0} = \mathbb{0} \oplus a = a, a \otimes \mathbb{0} = \mathbb{0} \otimes a = \mathbb{0}$) and a unit element $\mathbb{1}$ ($a \otimes \mathbb{1} = \mathbb{1} \otimes a = a$).*

A semiring is idempotent *if $\forall a \in K, a \oplus a = a$.*

Definition 2 ((max,+) semiring). $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ *with*

- $a \oplus b = \max(a,b)$, $a \otimes b = a + b$
- $\mathbb{0} = -\infty$, $\mathbb{1} = 0$

$\mathbb{R}_{\max}$ *is an idempotent semiring.*

We consider the sets $\mathbb{R}_{\max}^{p \times q}$ of matrices with coefficients in $\mathbb{R}_{\max}$. For matrices A, B of appropriate sizes, we define:

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = \max(A_{ij}, B_{ij}),$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_k A_{ik} \otimes B_{kj} = \max_k (A_{ik} + B_{kj}) \ .$$

`Exercise: Verify that` $(\mathbb{R}_{\max}^{k \times k}, \oplus, \otimes)$ `is a semiring.`

In the following the notations "$+, \times$" will stand for the usual addition and multiplication. Nevertheless, we will write ab for $a \otimes b$ whenever there is no possible confusion. For example, for $a \in \mathbb{R}_{\max}$, $a^d = a^{\otimes d} = d \times a$.

4.2 Matrices, graphs and paths

With a matrix $A \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times k}$, we associate a valued oriented graph as in §2.1 (only modifications: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\max}$, $0 \to \mathbb{0}$).

The combinatorial interpretation of matrix products given in §2.2 is valid, reinterpreted in $\mathbb{R}_{\max}$. In (1) and (2), the following modifications have to be performed: $+ \to \oplus$, $\times \to \otimes$, $0 \to \mathbb{0}$, $1 \to \mathbb{1}$. For instance, we have:

$$\begin{aligned}
(A^n)_{i,j} &= \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Gamma^n(i,j)} \mathcal{W}(i_1,i_2)\otimes\mathcal{W}(i_2,i_3)\otimes\ldots\otimes\mathcal{W}(i_{n-1},i_n) \\
&= \max_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Gamma^n(i,j)} \mathcal{W}(i_1,i_2)+\mathcal{W}(i_2,i_3)+\ldots+\mathcal{W}(i_{n-1},i_n)\,.
\end{aligned}$$

Hence, A^n_{ij} is the weight of the maximal-weight path of length n between i and j.

4.3 Spectral theory

Let A belong to $\mathbb{R}_{\max}^{k\times k}$. The *spectral problem* is to find $u \in \mathbb{R}_{\max}^{k}$ and $\rho \in \mathbb{R}$ such that:

$$A \otimes u = \rho \otimes u$$

– ρ: eigenvalue, u: eigenvector.

The *spectrum* is the set of the eigenvalues and the *spectral radius* $\rho(a)$ is the maximal eigenvalue.

Eigenvalues and powers of a matrix

Matrix A is irreducible if the graph of A is strongly connected.

Theorem 1 (Cuninghame-Green [5]). *We consider a matrix $A \in \mathbb{R}_{\max}^{k\times k}$. Its spectral radius $\rho(A)$ is given by*

$$\rho(A) = \max_{l=1}^{k} \max_{i_1,\ldots,i_l} \frac{A_{i_1i_2}+A_{i_2i_3}+\cdots+A_{i_li_1}}{l} = \bigoplus_{l=1}^{k}\bigoplus_{i_1,\ldots,i_l} (A_{i_1i_2}A_{i_2i_3}\cdots A_{i_li_1})^{1/l}$$

$\rho(A)$ is the weight of a maximum-mean-weight-circuit in the graph of A. If A is irreducible, then $\rho(A)$ is the unique eigenvalue.

Let

$$\|A\| = \bigoplus_{ij} A_{ij}\,.$$

This is the analog of the definition in (6) (note that in $\mathbb{R}_{\max}$, we have $a \geq \mathbb{0}$ which explains the absence of absolute values in the definition). We have the following sub-additive inequality

$$\|AB\| \leq \|A\| \otimes \|B\|\,.$$

The following result (known as the "turnpike theorem") links the asymptotics of the powers of a matrix to its spectral radius.

Theorem 2. *We have (the division is the conventional one)*

$$\lim_n \frac{\|A^n\|}{n} = \rho(A)\,.$$

$\|A^n\|$ can be interpreted as the weight of the maximal-weight path of length n; such paths are obtained by following the circuits of maximal mean weight $\rho(a)$.

Eigenvectors

Let $A \in \mathbb{R}_{\max}^{k\times k}$ be irreducible.

Critical circuit: circuit (of the graph of A) whose average weight is $\rho(A)$.
Critical graph: nodes and arcs of A belonging to a critical circuit.
Cyclicity: cyclicity of the critical graph of A.

The spectral behavior of A is determined by:

– Number of maximal strongly connected subgraphs (s.c.s.) of its critical graph.

– Cyclicity.

Matrix A is **scs*j*-cyc*k*** if it has j strongly connected subgraphs and a cyclicity (of the critical graph) which is equal to k.

Matrix A with eigenvalue $\rho(A)$. Normalized matrix $A \longrightarrow \tilde{A}$, $\tilde{A}_{ij} = A_{ij} - \rho(A)$. We have $\rho(\tilde{A}) = \mathbb{1}$. Let us define

$$\tilde{A}^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \tilde{A}^i, \quad \tilde{A}^+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \tilde{A}^i \; . \tag{16}$$

The matrices $\tilde{A}^*$ and $\tilde{A}^+$ are well defined, see Theorem 4.

Theorem 3 (Romanovskii [21], Gondran-Minoux [10]). *Let A be an irreducible matrix, $\tilde{A}$ associated normalized matrix.*

a. For i belonging to the critical graph, $\tilde{A}^+_{.i}$ is an eigenvector of A.

b. $\tilde{A}^+_{.i}$ and $\tilde{A}^+_{.j}$ are different iff i and j belong to two different s.c.s. of the critical graph.

c. Every eigenvector of A is a linear combination of the critical columns $\tilde{A}^+_{.i}$.

Theorem 4 (Cohen-Dubois-Quadrat-Viot [3, 4]). *Let A be irreducible, $\rho(A)$ its eigenvalue, c its cyclicity.*

$$\exists N, \; \forall n \geq N, \quad A^{n+c} = \rho(A)^{\otimes c} \otimes A^n \; .$$

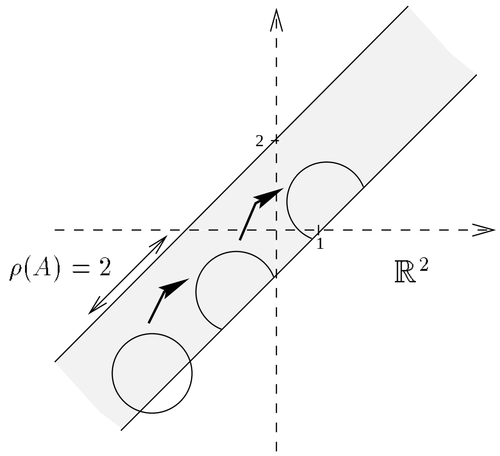

FIG. 1: *Evolution of a ball caught in a (max,+) dynamic.*

On Fig. 1, we have represented the set of eigenvectors (gray area) of matrix A and also the effect of matrix A on a ball.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mathbb{1} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Matrix A is scs2-cyc1.

Additive projective space

If $u \in \mathbb{R}^k_{\max}$ is an eigenvector, then $\lambda \otimes u, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, is also an eigenvector. It motivates the introduction of the following additive projective space.

Definition 3. *$\mathbb{PR}^k$ is the quotient of $\mathbb{R}^k$ by the congruence :*

$$u, v \in \mathbb{R}^k \quad u \simeq v \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \; s.t. \; u = a \otimes v \;\; (u_i = a + v_i, \forall i) .$$

$\pi \; : \; \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{PR}^k$, canonical projection.

The projection π can be interpreted geometrically as the orthogonal projection on the hyper-space orthogonal to the vector $(1, \ldots, 1)'$. For an illustration, see Fig. 2.

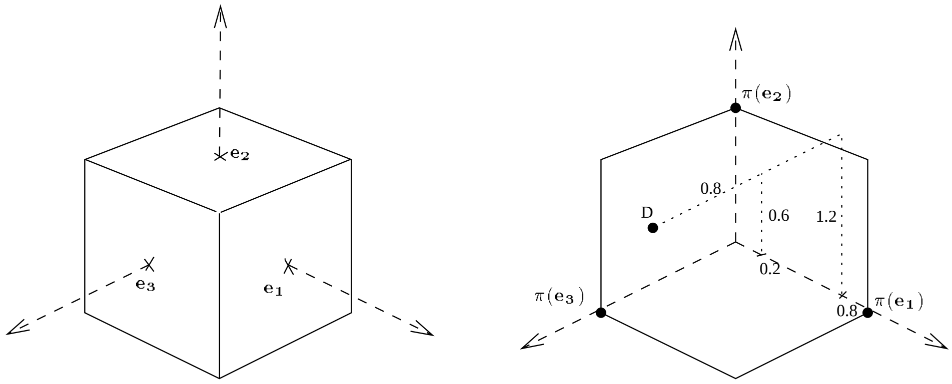

FIG. 2: *Unit ball of $\mathbb{PR}^3$*

The practical way of representing a point X of $\mathbb{PR}^3$ is to choose a representative ($\in \mathbb{R}^3$) of X and to draw it in the three axes obtained by projection of the orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$. The point we obtain does not depend on the chosen representative. The point D of Figure 2 illustrates this. We have drawn two constructions : one corresponding to $(0.2,\ 0.6,\ 0.8)$ and the other one to $(0.8,\ 1.2,\ 1.4) = 0.6 \otimes (0.2,\ 0.6,\ 0.8)$.

Sets of eigenvectors in the projective space

We can illustrate the shape of sets of eigenvectors in the projective space for matrices of dimension 3, see Mairesse [16]. Here are some examples.

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & . & . \\ . & \mathbb{1} & . \\ . & . & \mathbb{1} \end{pmatrix} ,$$

with the convention $. = -1$. Matrix B is scs3-cyc1. The set of eigenvectors is the dark gray hexagon. If the initial condition x_0 is in the light gray zone number i, then the limit of $\pi(B^n x_0)$ is $\pi(B_i)$. If the initial condition is in one of the white strips, the limit value of $\pi(B^n x_0)$ is given by the arrows.

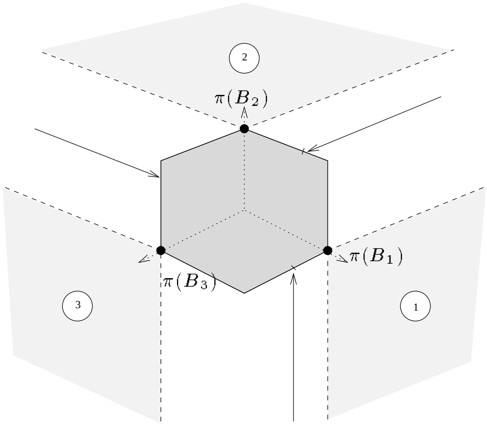

FIG. 3: *Set of eigenvectors of matrix B*

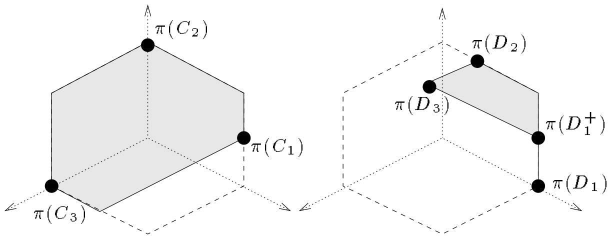

FIG. 4: *Sets of eigenvectors of matrices C and D*

$$C = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & . & . \\ -0.5 & \mathbb{1} & . \\ . & . & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -0.6 & . \\ . & \mathbb{1} & 0.6 \\ . & . & \mathbb{1} \end{pmatrix}, (.) = -1 \, .$$

Matrices C and D are scs3-cyc1. Their set of eigenvectors are contained in the one of matrix B. In the example of matrix D, the semimodule generated by the columns $< D_1, D_2, D_3 >$ of D strictly contains the set of eigenvectors which is the semimodule $< D_1^+, D_2^+, D_3^+ >$ generated by the columns of D^+ (see Theorem 3).

$$E = \begin{pmatrix} . & \mathbb{1} & . \\ \mathbb{1} & . & . \\ . & . & -2 \end{pmatrix}, (.) = -1 \, .$$

Matrix E is scs2-cyc1. The set of eigenvectors is the 'broken segment' $[\pi(E_1), \pi(E_2)]$. The interpretation of the gray zones and of the arrows is the same as above.

Periodic regimes

Apart from the eigenvectors, it is interesting to know the periodic regimes of an irreducible matrix $A \in \mathbb{R}_{max}^{k \times k}$.

Definition 4 (periodic regime). *A periodic regime of period d is a set of vectors $\{u1, \ldots, ud\}$ of $\mathbb{R}^k$ verifying $A \otimes (ui) = \rho(A) \otimes (ui+1)$, $i = 1, \ldots, d-1$ and $A \otimes (ud) = \rho(A) \otimes (u1)$.*

It implies that the vectors $u1, \ldots, ud$ are eigenvectors of A^d.

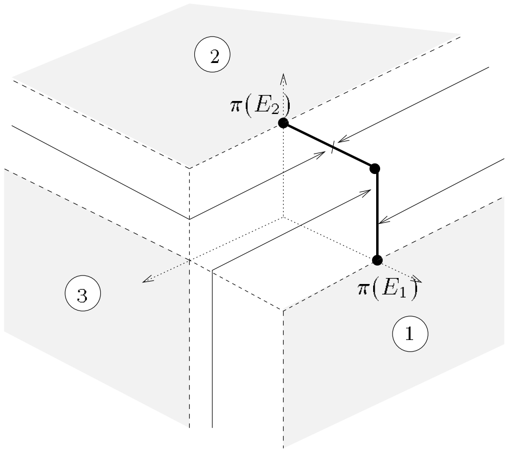

FIG. 5: *Set of eigenvectors of matrix E*

Periodic regimes in the projective space

Here are examples of matrices with periodic regimes.

$$F = \begin{pmatrix} . & . & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & . & . \\ . & \mathbb{1} & . \end{pmatrix},\ (.) = -1\ .$$

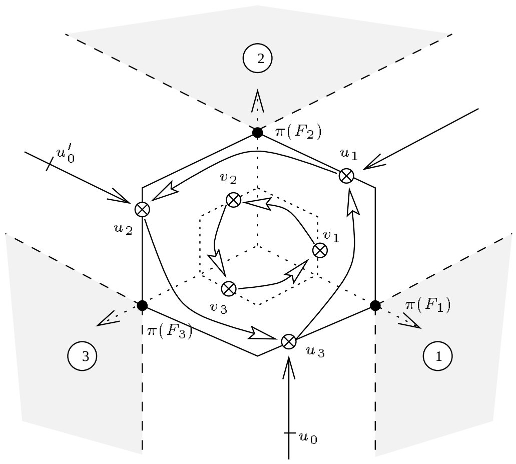

FIG. 6: *Set of periodic regimes and eigenvectors of matrix F.*

Matrix F is scs1-cyc3. Unique eigenvector: $(\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbb{1})'$. Initial condition in one of the gray zones: the limit periodic regime is $\{\pi(F_1), \pi(F_2), \pi(F_3)\}$. Initial condition in one of the white strips: the limit regime consists of three points on the boundary of the hexagon. For example for an initial condition u_0 or u_0', the limit regime is $\{u_1, u_2, u_3\}$. Initial condition u in the hexagon: the periodic regime is $\{u, Fu, F^2u\}$.

$$G = \begin{pmatrix} . & \mathbb{1} & . \\ \mathbb{1} & . & . \\ . & . & \mathbb{1} \end{pmatrix},\ (.) = -1\ .$$

Matrix G is scs2-cyc2. Set of eigenvectors: $[\pi(G_3), \pi(g)]$. Set of periodic regimes and eigenvectors: the hexagon $\{\pi(G_1), \pi(G_2), \pi(G_3)\}$.

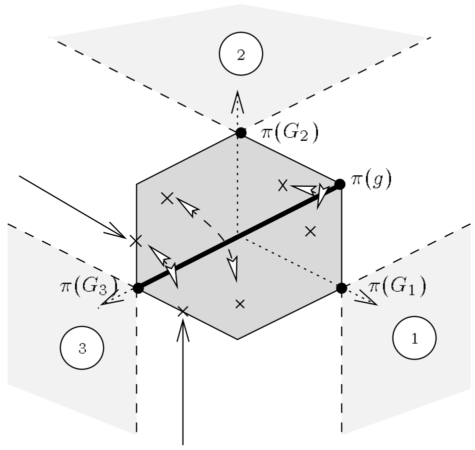

FIG. 7: *Set of periodic regimes and eigenvectors of matrix G*

Références

[1] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.-P. Quadrat. *Synchronization and Linearity.* Wiley, 1992.

[2] J. Berstel and C. Reutenauer. *Rational Series and their Languages.* Springer Verlag, 1988.

[3] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Technical Report 191, INRIA, 1983.

[4] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. A linear system-theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. Automatic Control*, 30:210–220, 1985.

[5] R. Cuninghame-Green. Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour. *Oper. Res. Quat.*, 13(1):95–100, 1962.

[6] R. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*, volume 166 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.* Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[7] J. Desel and J. Esparza. *Free Choice Petri Nets*, volume 40 of *Cambridge Tracts in Theoretical Comp. Sc.* Cambridge Univ. Press, 1995.

[8] S. Eilenberg. *Automata, languages and machines*, volume A. Academic Press, New York, 1974.

[9] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume I. J. Wiley & Sons, New York, troisième edition, 1968.

[10] M. Gondran and M. Minoux. Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes. *EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique*, 2:25–41, 1977.

[11] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes.* Eyrolles, Paris, 1979. Engl. transl. *Graphs and Algorithms*, Wiley, 1986.

[12] J. Gunawardena, editor. *Idempotency.* Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, 1998.

[13] A. Jean-Marie. Graphes, réseaux et applications. Notes de cours, DEA d'Algorithmique de Paris, Module Analyse d'algorithmes, `http: //www-sop.inria.fr /mistral /personnel /Alain.Jean-Marie /enseignement.html`.

[14] J.G. Kemeny and Snell J.L. *Finite Markov Chains*, volume 76. Springer-Verlag, 1976.

[15] L. Kleinrock. *Queueing Systems*, volume I, Theory. J. Wiley & Sons, New York, 1975.

[16] J. Mairesse. A graphical approach of the spectral theory in the (max,+) algebra. *IEEE Trans. Automatic Control*, 40(10):1783–1789, October 1995.

[17] J. Mairesse. Petri nets, (max,+) algebra and scheduling. In INRIA, editor, *Support de cours, 26-ième école de printemps d'informatique théorique*, pages 329–357, 1998. `http://www.liafa.jussieu.fr/ mairesse/Article/`.

[18] V. Maslov and S. Samborskiĭ, editors. *Idempotent Analysis*, volume 13 of *Adv. in Sov. Math.* AMS, 1992.

[19] H. Minc. *Nonnegative Matrices*. J. Wiley & Sons, 1988.

[20] T. Murata. Petri nets: properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77:541–580, 1989.

[21] I.V. Romanovskiĭ. Optimization and stationary control of discrete deterministic process in dynamic programming. *Cybernetics*, 3:66–78, 1967.

[22] R. Sedgewick and Ph. Flajolet. *Analysis of Algorithms*. Addison-Wesley, 1996.

[23] E. Seneta. *Non-negative Matrices and Markov chains*. Springer-Verlag, second edition, 1981.

[24] L. Takács. *An introduction to the theory of queues*. Oxford University Press, New York, 1962.

[25] H.S. Wilf. *Generatingfuncionology*. Academic Press, second edition, 1994.