

DS Automates et Complexité, 7 novembre 2016, 16h15 – 18h15

Documents autorisés : 2 feuilles A4 recto-verso.

La notation attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications.

Le barème est indicatif.

Exercice 1 : Questions d'application du cours

6 Points

Répondez aux questions suivantes en **justifiant brièvement** vos réponses (toute réponse non justifiée vaut 0 points) :

- a) On considère la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(n) = (n \bmod 2)$. Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une machine de Turing M .

Question : Est-ce que M implémente la fonction f ?

- b) On considère l'ensemble des entiers $n \geq 0$ tels qu'il existe un polynôme $P(x)$ de degré $42n$ tel que $P(n) = 0$. Cet ensemble d'entiers est-il décidable ?

- c) Est-il vrai que l'union de deux langages indécidables est toujours indécidable ?

- d) Soit A un alphabet fini et $L \subseteq A^*$ un langage semi-décidable. On considère le langage K suivant :

$$K = \{w \in A^* \mid \exists v \in A^* \ wv \in L\}$$

Ce langage est-il semi-décidable ?

- e) Soit A un alphabet fini. Trouver un langage semi-décidable $L \subseteq A^*$, tel que tout autre langage $K \subseteq A^*$ qui est également semi-décidable se réduit à L .

- f) Soit A un alphabet fini. Donner un exemple de deux langages $L_1, L_2 \subseteq A^*$ semi-décidables, tels que le langage $L_1 \setminus L_2$ n'est pas semi-décidable (on rappelle que $L_1 \setminus L_2$ est le langage de tous les mots qui sont dans L_1 , mais pas dans L_2).

Exercice 2 : Temps polynomial

3 Points

On dit qu'une machine de Turing M *termine en temps polynomial* s'il existe une fonction polynôme $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout entrée w , le calcul de M sur w termine en moins de $P(|w|)$ étapes (où $|w|$ désigne la longueur du mot w). On souhaite montrer que le problème suivant est indécidable :

Entrée : Une machine de Turing M .

Question : Est-ce que M termine en temps polynomial ?

- a) Peut-on utiliser le théorème de Rice directement ? (justifiez votre réponse)
- b) Montrer que le problème est indécidable par une réduction (on pourra s'inspirer soit de la réduction vue en cours de HALT_ε vers HALT_\forall , soit de la réduction de $\overline{\text{HALT}}_\varepsilon$ vers HALT_\forall).

Exercice 3 : Inversion de marche

4 Points

Le problème d'inversion de marche est le suivant :

Entrée : Une machine de Turing M à une seule bande lecture/écriture et un mot d'entrée w .

Question : Le calcul de M sur w utilise-t-il une transition qui déplace la tête de lecture à gauche ?

Ce problème est-il décidable ? La réponse devra être **prouvée** (par une réduction si elle est négative ou par un algorithme si elle est positive).

On utilise des “systèmes de réécriture” pour représenter des langages. Un tel système est un 4-uplet $S = (A, B, w_s, R)$ où,

- A est un alphabet fini (le système décrira un langage sur cet alphabet).
- B est un alphabet de travail qui contient A ($A \subseteq B$).
- w_s est un mot de B^* appelé *mot de départ*.
- R un ensemble fini de “règles de réécriture”. Une règle se note ainsi :

$$u \rightarrow v \quad \text{où } u, v \text{ sont deux mots de } B^*$$

Exemple

Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{a, b, q\}$. Un exemple de système de réécriture est $S = (A, B, aqb, R)$ avec

$$R = \left\{ \begin{array}{l} q \rightarrow \varepsilon \\ aqb \rightarrow aaqbb \end{array} \right\}$$

On associe un langage $L(S) \subseteq A^*$ à tout système $S = (A, B, w_s, R)$. Intuitivement, $L(S)$ est le langage de tous les mots de A^* qu'on peut obtenir à partir de w_s en appliquant une suite de règles de R . Formellement, on associe à S deux relations sur B^* , “ $\xrightarrow{1}$ ” et “ $\xrightarrow{*}$ ”, qui dépendent de l'ensemble R .

- La relation $\xrightarrow{1}$ est définie comme suit : pour $y_1, y_2 \in B^*$, on a $y_1 \xrightarrow{1} y_2$ si on peut écrire $y_1 = x'ux''$ et $y_2 = x'vx''$, où $u \rightarrow v$ est une règle dans R .
- On écrit ensuite $x \xrightarrow{*} y$ si $x = y$, ou bien s'il existe une suite de mots x_1, \dots, x_n tels que

$$x = x_1 \xrightarrow{1} x_2 \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} x_{n-1} \xrightarrow{1} x_n = y.$$

Le langage $L(S)$ est défini comme l'ensemble des mots $x \in A^*$ tels que $w_s \xrightarrow{*} x$: $L(S) = \{x \in A^* \mid w_s \xrightarrow{*} x\}$.

Exemple (suite)

Avec le système ci-dessus, on a, en appliquant une fois la 2nde règle puis une fois la 1^{ère} règle :

$$w_s = aqb \xrightarrow{1} aaqbb \xrightarrow{1} aabb.$$

Donc $w_s \xrightarrow{*} aabb$, et le mot $aabb \in A^*$ est dans $L(S)$.

- a) (1 point) Quel est le langage du système de l'exemple ci-dessus ? Justifiez la réponse.
- b) (1 point) Pour $A = \{\#\}$ et $B = \{\#, q, a, b\}$, trouvez un ensemble de règles R tel que si u, v sont deux mots de $\{a, b\}^*$ et $S = (A, B, uv, R)$, on a $L(S) = \{\#\}$ si u est l'image miroir de v et $L(S) = \emptyset$ sinon. L'ensemble de règles R ne doit pas dépendre de u et v . Justifiez votre construction.
Rappel : l'image miroir d'un mot $a_1a_2 \dots a_n$ (où chaque a_i est une lettre) est le mot $a_n \dots a_2a_1$.

Aide

Remarquez que le langage d'un système est vide si et seulement s'il n'est pas possible d'éliminer toutes les lettres de $B \setminus A$ par réécritures à partir du mot de départ.

- c) (2 points) En utilisant la question précédente et le fait que le problème de correspondance de Post est indécidable, montrez que le problème suivant est indécidable :
Entrée : Un système $S = (A, B, w_s, R)$
Question : Est-ce que $L(S)$ est non-vide ($L(S) \neq \emptyset$) ?
- d) (3 points) Donnez une seconde preuve que le problème précédent est indécidable en faisant une autre réduction, utilisant cette fois un problème de machine de Turing bien connu.