

Toute réponse non justifiée n'apportera pas de point. Barème indicatif

Exercice 1 : Questions de cours

1.5 Points

Répondre aux questions suivantes en **justifiant brièvement** (une réponse non justifiée vaut 0 point).

- 1) Le langage $\text{FACT} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ a 42 instructions partant de l'état initial}\}$ est-il décidable ?
- 2) Le langage $\text{PAIR} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ accepte les mots de } \{0, 1\}^* \text{ se terminant par } 0\}$ est-il décidable ?
- 3) Une machine de Turing est *exponentiellement bornée* si pour toute entrée w , la machine M utilise un espace borné par $2^{|w|}$. Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une machine M exponentiellement bornée et un mot w .

Question : M s'arrête-elle sur w ?

Exercice 2 : P vs. NP-complet

4 Points

Dans cet exercice, on suppose que $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$. Pour chacun des problèmes suivants, dites si il est **NP-complet** ou dans **P**. Attention, les réponses doivent être **prouvées**. Si vous répondez qu'un problème est **NP-complet** vous devez prouver qu'il est dans **NP** et qu'il est **NP-difficile**. Si vous répondez qu'un problème est dans **P** vous devez donner un algorithme polynomial qui le résout.

Remarque : les réductions sont faciles, la principale difficulté est de trouver le bon problème à réduire.

- 1) CHEMIN PRESQUE HAMILTONIEN

Entrée : Un graphe orienté G à $n \geq 43$ sommets.

Question : Le graphe G a-t-il un chemin qui visite $(n - 42)$ sommets distincts en passant une seule fois par chacun de ces $(n - 42)$ sommets ?

- 2) PRESQUE CLIQUE

Entrée : Un graphe orienté G à $n \geq 43$ sommets.

Question : Le graphe G a-t-il comme sous-graphe une clique à $(n - 42)$ sommets ?

- 3) DOUBLE SAT

Entrée : Une formule 3-CNF φ .

Question : Y a-t-il **au moins deux** affectations des variables qui rendent φ vraie ?

- 4) AFFECTATION FAUSSE

Entrée : Une formule 3-CNF φ .

Question : Y a-t-il une affectation des variables rendant la formule φ **fausse** ?

Exercice 3 : Inversion de marche

4 Points

Le problème d'inversion de marche est le suivant :

Entrée : Une machine de Turing M à une seule bande lecture/écriture et un mot d'entrée w .

Question : Le calcul de M sur w utilise-t-il une transition qui déplace la tête de lecture à gauche ?

Ce problème est-il décidable ? La réponse devra être **prouvée** (par une réduction si elle est négative ou

par un algorithme si elle est positive).

Exercice 4 : Temps polynomial

3 Points

On dit qu'une machine de Turing M termine en temps polynomial s'il existe une fonction polynôme $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour toute entrée w , le calcul de M sur w termine en moins de $P(|w|)$ étapes (où $|w|$ désigne la longueur du mot w). On souhaite montrer que le problème suivant est indécidable :

Entrée : Une machine de Turing M .

Question : Est-ce que M termine en temps polynomial ?

- 1) Peut-on utiliser le théorème de Rice directement ? (justifiez votre réponse)
- 2) Montrer que le problème est indécidable par une réduction (on pourra s'inspirer soit de la réduction vue en cours de HALT_ε vers HALT_\forall , soit de la réduction de $\overline{\text{HALT}}_\varepsilon$ vers HALT_\forall).

Exercice 5 : 2-Sat et accessibilité

3.5 Points

Étant donné un ensemble de variables propositionnelles, on rappelle qu'un littéral est soit une variable, soit la négation d'une variable. Une 2-clause est de la forme $\ell \vee \ell'$, où ℓ et ℓ' sont des littéraux. Enfin, une formule propositionnelle est en forme 2-CNF si elle est conjonction de 2-clauses.

On s'intéresse au problème 2-SAT suivant :

Entrée : Une formule 2-CNF φ .

Question : La formule φ est-elle satisfaisable ?

À partir d'une formule 2-CNF φ , on construit un graphe orienté $G(\varphi)$ de la façon suivante :

- Les sommets de $G(\varphi)$ sont les variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ de φ ainsi que leurs négations $\{\neg x_1, \dots, \neg x_n\}$.
- Les arêtes de $G(\varphi)$ sont de la forme $\neg \ell \rightarrow \ell'$ et $\neg \ell' \rightarrow \ell$ pour chaque 2-clause $\ell \vee \ell'$ de φ .

- 1) La formule $\varphi_0 = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3)$ est-elle satisfaisable ? Construire le graphe $G(\varphi_0)$.

Pour deux sommets ℓ, ℓ' de $G(\varphi)$, on note $\ell \xrightarrow{*} \ell'$ si ℓ' est accessible depuis ℓ dans $G(\varphi)$.

- 2) Soit φ une formule 2-CNF. Montrer que φ est satisfaisable si et seulement si dans $G(\varphi)$, il n'existe aucun sommet x tel que $x \xrightarrow{*} \neg x$ et $\neg x \xrightarrow{*} x$.
- 3) Que peut-on dire de la complexité du problème 2-SAT ? Justifier la réponse.

On considère maintenant le problème DIGRAPHE-INACCESSIBILITÉ suivant :

Entrée : Un graphe orienté G et deux sommets s, t de G .

Question : Dans G , le sommet t est-il inaccessible depuis le sommet s ?

- 4) Montrer que DIGRAPHE-INACCESSIBILITÉ se réduit à 2-SAT et que la réduction ne nécessite qu'un espace logarithmique.

Dans cet exercice, on considère des langages **finis** représentés par des expressions (+, •). Les expressions (+, •) sur un alphabet A sont définies récursivement :

- Pour tout $a \in A$, l'expression a représente le langage $\{a\}$.
- Si E_1 représente le langage L_1 et E_2 représente le langage L_2 , alors,
 - l'expression $E_1 + E_2$ représente le langage $L_1 \cup L_2$.
 - l'expression $E_1 \bullet E_2$ représente le langage $L_1 L_2$ défini par

$$L_1 L_2 = \{u_1 u_2 \mid u_1 \in L_1 \text{ et } u_2 \in L_2\}.$$

- 1) Quel est le langage représenté par l'expression $(a + b + c) \bullet (d + e + f)$?

On appelle *alphabet d'un mot* u l'ensemble des lettres apparaissant dans le mot u , c'est-à-dire, le plus petit sous-alphabet B de l'alphabet A tel que $u \in B^*$. Par exemple, l'alphabet du mot $baadb$ est $\{a, b, d\}$, et l'alphabet du mot $abbabbbb$ est $\{a, b\}$.

On s'intéresse au problème ALPHABET COMMUN suivant :

Entrée : Un alphabet A fini et deux expressions (+, •) E_1 et E_2 sur A représentant des langages L_1 et L_2 de A^* .

Question : Existe-t-il des mots $u_1 \in L_1$ et $u_2 \in L_2$ qui ont le même alphabet ?

- 2) Montrer que le problème ALPHABET COMMUN est dans **NP**.
 3) Montrer que le problème ALPHABET COMMUN est **NP**-complet.



Indication

Faire une réduction à partir du problème 3-SAT, l'une des expressions codant les clauses de la formule, et l'autre codant les assignations des variables.

— FIN —