

DS Automates et Complexité, 7 novembre 2016, 16h15 – 18h15

Documents autorisés : 2 feuilles A4 recto-verso.

**La notation attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications.**

Le barème est indicatif.

**Exercice 1 : Questions d'application du cours**

**6 Points**

Répondez aux questions suivantes en **justifiant brièvement** vos réponses (toute réponse non justifiée vaut 0 points) :

- a) On considère la fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f(n) = (n \bmod 2)$ . Le problème suivant est-il décidable ?

**Entrée :** Une machine de Turing  $M$ .

**Question :** Est-ce que  $M$  implémente la fonction  $f$  ?

- b) On considère l'ensemble des entiers  $n \geq 0$  tels qu'il existe un polynôme  $P(x)$  de degré  $42n$  tel que  $P(n) = 0$ . Cet ensemble d'entiers est-il décidable ?

- c) Est-il vrai que l'union de deux langages indécidables est toujours indécidable ?

- d) Soit  $A$  un alphabet fini et  $L \subseteq A^*$  un langage semi-décidable. On considère le langage  $K$  suivant :

$$K = \{w \in A^* \mid \exists v \in A^* \ wv \in L\}$$

Ce langage est-il semi-décidable ?

- e) Soit  $A$  un alphabet fini. Trouver un langage semi-décidable  $L \subseteq A^*$ , tel que tout autre langage  $K \subseteq A^*$  qui est également semi-décidable se réduit à  $L$ .

- f) Soit  $A$  un alphabet fini. Donner un exemple de deux langages  $L_1, L_2 \subseteq A^*$  semi-décidables, tels que le langage  $L_1 \setminus L_2$  n'est pas semi-décidable (on rappelle que  $L_1 \setminus L_2$  est le langage de tous les mots qui sont dans  $L_1$ , mais pas dans  $L_2$ ).

**Exercice 2 : Temps polynomial**

**3 Points**

On dit qu'une machine de Turing  $M$  *termine en temps polynomial* s'il existe une fonction polynôme  $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tout entrée  $w$ , le calcul de  $M$  sur  $w$  termine en moins de  $P(|w|)$  étapes (où  $|w|$  désigne la longueur du mot  $w$ ). On souhaite montrer que le problème suivant est indécidable :

**Entrée :** Une machine de Turing  $M$ .

**Question :** Est-ce que  $M$  termine en temps polynomial ?

- a) Peut-on utiliser le théorème de Rice directement ? (justifiez votre réponse)
- b) Montrer que le problème est indécidable par une réduction (on pourra s'inspirer soit de la réduction vue en cours de  $\text{HALT}_\varepsilon$  vers  $\text{HALT}_\forall$ , soit de la réduction de  $\overline{\text{HALT}}_\varepsilon$  vers  $\text{HALT}_\forall$ ).

**Exercice 3 : Inversion de marche**

**4 Points**

Le problème d'inversion de marche est le suivant :

**Entrée :** Une machine de Turing  $M$  à une seule bande lecture/écriture et un mot d'entrée  $w$ .

**Question :** Le calcul de  $M$  sur  $w$  utilise-t-il une transition qui déplace la tête de lecture à gauche ?

Ce problème est-il décidable ? La réponse devra être **prouvée** (par une réduction si elle est négative ou par un algorithme si elle est positive).

On utilise des “systèmes de réécriture” pour représenter des langages. Un tel système est un 4-uplet  $S = (A, B, w_s, R)$  où,

- $A$  est un alphabet fini (le système décrira un langage sur cet alphabet).
- $B$  est un alphabet de travail qui contient  $A$  ( $A \subseteq B$ ).
- $w_s$  est un mot de  $B^*$  appelé *mot de départ*.
- $R$  un ensemble fini de “règles de réécriture”. Une règle se note ainsi :

$$u \rightarrow v \quad \text{où } u, v \text{ sont deux mots de } B^*$$

**Exemple**

Soit  $A = \{a, b\}$  et  $B = \{a, b, q\}$ . Un exemple de système de réécriture est  $S = (A, B, aqb, R)$  avec

$$R = \left\{ \begin{array}{l} q \rightarrow \varepsilon \\ aqb \rightarrow aaqbb \end{array} \right\}$$

On associe un langage  $L(S) \subseteq A^*$  à tout système  $S = (A, B, w_s, R)$ . Intuitivement,  $L(S)$  est le langage de tous les mots de  $A^*$  qu'on peut obtenir à partir de  $w_s$  en appliquant une suite de règles de  $R$ . Formellement, on associe à  $S$  deux relations sur  $B^*$ , “ $\xrightarrow{1}$ ” et “ $\xrightarrow{*}$ ”, qui dépendent de l'ensemble  $R$ .

- La relation  $\xrightarrow{1}$  est définie comme suit : pour  $y_1, y_2 \in B^*$ , on a  $y_1 \xrightarrow{1} y_2$  si on peut écrire  $y_1 = x'ux''$  et  $y_2 = x'vx''$ , où  $u \rightarrow v$  est une règle dans  $R$ .
- On écrit ensuite  $x \xrightarrow{*} y$  si  $x = y$ , ou bien s'il existe une suite de mots  $x_1, \dots, x_n$  tels que

$$x = x_1 \xrightarrow{1} x_2 \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} x_{n-1} \xrightarrow{1} x_n = y.$$

Le langage  $L(S)$  est défini comme l'ensemble des mots  $x \in A^*$  tels que  $w_s \xrightarrow{*} x : L(S) = \{x \in A^* \mid w_s \xrightarrow{*} x\}$ .

**Exemple (suite)**

Avec le système ci-dessus, on a, en appliquant une fois la 2<sup>nd</sup>e règle puis une fois la 1<sup>ère</sup> règle :

$$w_s = aqb \xrightarrow{1} aaqbb \xrightarrow{1} aabb.$$

Donc  $w_s \xrightarrow{*} aabb$ , et le mot  $aabb \in A^*$  est dans  $L(S)$ .

- a) (1 point) Quel est le langage du système de l'exemple ci-dessus ? Justifiez la réponse.
- b) (1 point) Pour  $A = \{\#\}$  et  $B = \{\#, q, a, b\}$ , trouvez un ensemble de règles  $R$  tel que si  $u, v$  sont deux mots de  $\{a, b\}^*$  et  $S = (A, B, uv, R)$ , on a  $L(S) = \{\#\}$  si  $u$  est l'image miroir de  $v$  et  $L(S) = \emptyset$  sinon. L'ensemble de règles  $R$  ne doit pas dépendre de  $u$  et  $v$ . Justifiez votre construction.  
**Rappel** : l'image miroir d'un mot  $a_1a_2 \dots a_n$  (où chaque  $a_i$  est une lettre) est le mot  $a_n \dots a_2a_1$ .

**Aide**

Remarquez que le langage d'un système est vide si et seulement s'il n'est pas possible d'éliminer toutes les lettres de  $B \setminus A$  par réécritures à partir du mot de départ.

- c) (2 points) En utilisant la question précédente et le fait que le problème de correspondance de Post est indécidable, montrez que le problème suivant est indécidable :  
**Entrée** : Un système  $S = (A, B, w_s, R)$   
**Question** : Est-ce que  $L(S)$  est non-vide ( $L(S) \neq \emptyset$ ) ?
- d) (3 points) Donnez une seconde preuve que le problème précédent est indécidable en faisant une autre réduction, utilisant cette fois un problème de machine de Turing bien connu.